Praktikums Protokoll

Teilnehmer
Sebastian Stumpf
Felix Schramm

Fach	Computational Geometry
Abgabe	Praktikumsabgabe 5 – Berechung des größten Inkreises eines gegebenen Polygons
Datum	04.07.15

Aufgabenbeschreibung

Ermitteln Sie für ein vorgegebenes konvexes Polygon (polygon.txt und testpolygon.txt) mit Linear Programming den grössten einbeschreibbaren Kreis. Verwenden Sie zur Formulierung und Lösung des Problems entweder (vorzugsweise) MATLAB oder einen Online-Löser aus dem Internet.

Lösung

- Für die Umsetzung verwenden wir MATLAB. Für erste Tests unserer berechneten Optimierungsgleichung und der Ungleichungsbedingungen haben wir uns auch ein bisschen durch einige Online-Löser geschlagen.
- Mathematische Überlegungen:
    - Als Variablen unserer Optimierung haben wir den x-Wert und y-Wert des Kreismittelpunktes, und den Kreisradius r.
    - Wir wollen den größtmöglichen Kreis, das heisst wir optimieren den Radius r. Unsere Optimierungsgleichung heisst:
      $max: f(x_m, y_m, r) = r$
      Obige Gleichung beschreibt ein Maximierungsproblem. Da der Matlab Löser linprog allerdings eine Vorliebe für Minimierungsprobleme hat fomen wir die Gleichung noch entsprechend um.
      $min: f(x_m, y_m, r) = -r$
    - Unsere Bedingungen sind dadurch gegeben, dass der Kreisradius nicht größer sein darf als der kleinste Abstand des Kreismittelpunktes zu jeder Polygonkante. Das lässt sich so formulieren:
      $\vec{n}_i * \vec{m} - a_i \geq r \rightarrow \vec{n}_i * \vec{m} - r \geq a_i r \rightarrow - \vec{n}_i * \vec{m} + r \leq - a_i$
      Dabei sind $\vec{n}_i$ und $\vec{a}_i$ die Normalenvektoren sowie die Abstände zum Ursprung der Polygonkanten in der Hesse Normalenform. $\vec{m}$ ist der Mittelpunkt des Kreises. Für einen beliebigen Mittelpunkt ergibt $\vec{n}_i * \vec{m} - a_i$ den Abstand dieses zur Polygonkante. Durch die Multiplikation mit -1 drehen wir das

Ungleichungszeichen um. Matlab freut sich darüber (linprog mag <= lieber).
Zu beachten ist, dass der Normalenvektor normiert werden muss:

$$norm = \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}$$

Zu beachten ist, dass der Normalenvektor normiert werden muss.
Einsetzen der konkreten Werte liefert unsere verwendeten Bedingungen:

$$\frac{y_i - y_{i+1}}{norm} * x_m + \frac{x_{i+1} - x_i}{norm} * y_m + r = \frac{y_i * x_{i+1} - x_i * y_{i+1}}{norm}$$

- Zur Veranschaulichung der Ergebnisses wird das Polygon, sowie der gefundene Inkreis geplottet.
- Zu beachten ist, ob das Polygon clockwise (cw) oder counterclockwise definiert ist (ccw). Ist das polygon clockwise definiert zeigen die Normalenvektoren immer nach aussen, weshalb wir unsere Ungleichungen anpassen müssen:
  $$-\vec{n}_i * \vec{m} - a_i \geq r$$
- Um zu überprüfen, welche Orientierung ein Polygon hat addieren wir die Trapezflächen unter allen Polygonkanten in der Reihenfolge ihrer Definition. Ist das Ergebnis negativ, so ist das Polgon ccw definiert, sonst cw.

Ergebnisse

Folgende Ergebnisse lifert das erhaltene Datenmaterial (polygon.txt)

```
cw

Optimization terminated.

result =

  472.5705

  476.6642

  438.5922
```