

	Huiswerkopgaven
cursus	Formele technieken, blok Logica en
code	informatica IB0003
serie	1
leereenheid	1 t/m 5

Bij de vragen dient u (tenzij anders vermeld) op het tentamen een bewijs, uitwerking of toelichting te geven. Doet u dat ook nu. Uitsluitend een antwoord is dus niet voldoende.

- 1 Op de vraag: "Wat is het geheim van uw lange leven" antwoord de 100 jarige Jan: "Bij iedere avondmaaltijd houd ik me aan de volgende drie regels:
 Als ik geen wijn drink, dan eet ik soep.
 Als ik soep eet en wijn drink, dan neem ik pudding toe.
 Als ik pudding toe neem of geen wijn drink, dan sla ik de soep over."
 a Vertaal deze 3 regels in propositielogische formules.
 b Maak waarheidstabellen voor deze drie formules, en gebruik deze om de volgende twee vragen te beantwoorden:
 i Drinkt Jan bij elke avondmaaltijd wijn?
 ii Eet Jan bij elke avondmaaltijd soep?
- 2a Bewijs axiomatisch $\psi, \neg\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\chi) \vdash_{\text{S}} \chi \rightarrow \phi$.
 b Toon met behulp van onderdeel a aan:
 als $V(\psi) = 1$ en $V(\neg\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\chi)) = 1$, dan is ook $V(\chi \rightarrow \phi) = 1$.
- 3 In deze opgave vragen we u met inductie een bewijs te geven van een eigenschap van propositionele formules ϕ . Deze eigenschap maakt gebruik van de inductief gedefinieerde bewerkingen *lengte* en $*$. De eerste drie onderdelen van de opgave gaan over deze definities.
 a Laat *lengte*(ϕ) de lengte van ϕ zijn, dat wil zeggen, het aantal (mogelijk dezelfde) propositieletters en connectieven waaruit ϕ is opgebouwd. Geef een inductieve definitie van *lengte*.

De operatie $*$ wordt als volgt inductief gedefinieerd:

- i Basisstap
 $\phi^* = \phi$, als ϕ een atomaire formule is
- ii Inductiestap
 $(\neg\phi)^* = \neg\phi^*$
 $(\psi \wedge \chi)^* = \neg(\neg\psi^* \vee \neg\chi^*)$
 $(\psi \square \chi)^* = \psi^* \square \chi^*$ voor \square is \vee, \rightarrow of \leftrightarrow .
- b Bepaal $(\neg p \wedge (q \wedge \neg r))^*$.
Aanwijzing: het is de bedoeling dat u *alleen* de definitie toepast, en dus geen vereenvoudigingen uitvoert.
- c Leg in woorden uit wat de operatie $*$ met een formule doet.
- d Bewijs met inductie dat de volgende ongelijkheid geldt voor elke propositionele formule ϕ :
 $\text{lengte}(\phi^*) \leq 3 \cdot \text{lengte}(\phi) - 2$.

- 4 Het connectief ∇ wordt gedefinieerd door de volgende waarheidstabel:

p	q	$p \nabla q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Toon aan dat het paar $\{\neg, \nabla\}$ functioneel volledig is.