Wstępne informacje

z kwantowej informacji

Filip Maciejewski

FUW

Outline

Stany kwantowe

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Prezentacja i notebooki – https://github.com/fbm2718/qiskit_workshop_2019

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Prezentacja i notebooki – https://github.com/fbm2718/qiskit_workshop_2019
- Stan kwantowy ρ – matematyczny **opis systemu fizycznego**.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Prezentacja i notebooki – https://github.com/fbm2718/qiskit_workshop_2019
- Stan kwantowy ρ – matematyczny **opis systemu fizycznego**.
- Stany kwantowe żyją **w przestrzeni Hilberta**.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Prezentacja i notebooki – https://github.com/fbm2718/qiskit_workshop_2019
- Stan kwantowy ρ – matematyczny **opis systemu fizycznego**.
- Stany kwantowe żyją **w przestrzeni Hilberta**.
- System fizyczny o d **stopniach swobody** (wymiarach) opisuje się operatorem liniowym nad $\mathbb{C}^d$, takim że

$$\rho \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\,(\rho) = 1.$$

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Prezentacja i notebooki – https://github.com/fbm2718/qiskit_workshop_2019
- Stan kwantowy ρ – matematyczny **opis systemu fizycznego**.
- Stany kwantowe żyją **w przestrzeni Hilberta**.
- System fizyczny o d **stopniach swobody** (wymiarach) opisuje się operatorem liniowym nad $\mathbb{C}^d$, takim że

$$\rho \geq 0, \qquad\qquad \mathrm{Tr}\,(\rho) = 1.$$

- **Kombinacja wypukła** $\tau = p\,\rho + (1 - p)\,\sigma$, $p \in [0, 1]$, dwóch stanów spełniających powyższe warunki także jest stanem kwantowym.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Prezentacja i notebooki – https://github.com/fbm2718/qiskit_workshop_2019
- Stan kwantowy ρ – matematyczny **opis systemu fizycznego**.
- Stany kwantowe żyją **w przestrzeni Hilberta**.
- System fizyczny o d **stopniach swobody** (wymiarach) opisuje się operatorem liniowym nad $\mathbb{C}^d$, takim że

$$\rho \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\,(\rho) = 1.$$

- **Kombinacja wypukła** $\tau = p\,\rho + (1-p)\,\sigma$, $p \in [0,1]$, dwóch stanów spełniających powyższe warunki także jest stanem kwantowym.
- Stany kwantowe tworzą zatem **zbiór wypukły**.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Prezentacja i notebooki – https://github.com/fbm2718/qiskit_workshop_2019
- Stan kwantowy ρ – matematyczny **opis systemu fizycznego**.
- Stany kwantowe żyją **w przestrzeni Hilberta**.
- System fizyczny o d **stopniach swobody** (wymiarach) opisuje się operatorem liniowym nad $\mathbb{C}^d$, takim że

$$\rho \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\,(\rho) = 1.$$

- **Kombinacja wypukła** $\tau = p\,\rho + (1-p)\,\sigma$, $p \in [0,1]$, dwóch stanów spełniających powyższe warunki także jest stanem kwantowym.
- Stany kwantowe tworzą zatem **zbiór wypukły**.
- Intepretacja kombinacji wypukłej – **mieszanka probabilistyczna**.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Punkty ekstremalne zbioru stanów kwantowych to tzw. **stany czyste**.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Punkty ekstremalne zbioru stanów kwantowych to tzw. **stany czyste**.
- Wtedy możemy zapisać

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

  gdzie $|\psi\rangle$ to wektor w $\mathbb{C}^d$.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Punkty ekstremalne zbioru stanów kwantowych to tzw. **stany czyste**.
- Wtedy możemy zapisać

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

  gdzie $|\psi\rangle$ to wektor w $\mathbb{C}^d$.
- Nas będą interesować **qubity**, czyli stany kwantowe z $d = 2$.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Punkty ekstremalne zbioru stanów kwantowych to tzw. **stany czyste**.
- Wtedy możemy zapisać

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

  gdzie $|\psi\rangle$ to wektor w $\mathbb{C}^d$.
- Nas będą interesować **qubity**, czyli stany kwantowe z $d = 2$.
- Będziemy modelować stan kubitu **stanem czystym**.

Stany kwantowe – podstawowe definicje

- Punkty ekstremalne zbioru stanów kwantowych to tzw. **stany czyste**.
- Wtedy możemy zapisać

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

  gdzie $|\psi\rangle$ to wektor w $\mathbb{C}^d$.
- Nas będą interesować **qubity**, czyli stany kwantowe z $d = 2$.
- Będziemy modelować stan kubitu **stanem czystym**.
- Dla stanu czystego zachodzi

$$|\psi\rangle\langle\psi| \sim |\psi\rangle,$$

  czyli możemy zajmować się ketami (wektorami).

Qubit– wizualizacja

- Przypomnienie:

$$|\psi\rangle\langle\psi| \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) = 1.$$

Qubit– wizualizacja

- Przypomnienie:

$$|\psi\rangle\langle\psi| \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) = 1.$$

- Zatem stan czysty kubitu możemy sobie zapisać jako

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{n}\vec{\sigma}\right),$$

  gdzie $\vec{n}$ to wektor liczb rzeczywistych, takich że $||\vec{n}|| = 1$, natomiast $\vec{\sigma}$ to wektor macierzy Pauliego.

Qubit– wizualizacja

- Przypomnienie:

$$|\psi\rangle\langle\psi| \geq 0, \qquad \mathrm{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) = 1.$$

- Zatem stan czysty kubitu możemy sobie zapisać jako

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{n}\vec{\sigma}\right),$$

  gdzie $\vec{n}$ to wektor liczb rzeczywistych, takich że $||\vec{n}|| = 1$, natomiast $\vec{\sigma}$ to wektor macierzy Pauliego.
- Trzy liczby rzeczywiste takie że $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ to punkty na sferze (Blocha) o środku w zerze (stan maksymalnie zmieszany).

Qubit– wizualizacja, przykłady

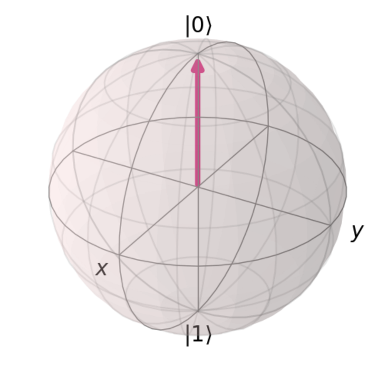
- Stan $|0\rangle$ to stan własny macierzy σ_z odpowiadający dodatniej wartości własnej.

Qubit– wizualizacja, przykłady

- Stan $|0\rangle$ to stan własny macierzy σ_z odpowiadający dodatniej wartości własnej.
- Zatem dla tego stanu wektor Blocha ma współrzędne $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Qubit– wizualizacja, przykłady

- Stan $|0\rangle$ to stan własny macierzy σ_z odpowiadający dodatniej wartości własnej.
- Zatem dla tego stanu wektor Blocha ma współrzędne $\vec{n} = (0, 0, 1)$.



Rysunek 1: Podstawowy stan kubitu. Narysowane w qiskicie.

Qubit– wizualizacja

- Parametryzacja kątami:

$$\vec{n} = (\sin\theta\ \cos\phi, \sin\theta\ \sin\phi, \cos\theta)\,,$$

Qubit– wizualizacja

- Parametryzacja kątami:

$$\vec{n} = (\sin\theta\ \cos\phi, \sin\theta\ \sin\phi, \cos\theta)\,,$$

co 'przeniesione' na reprezentację ketową daje

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle.$$

Ewolucja i pomiar

Ewolucja

- Ewolucja d-wymiarowego stanu kwantowego $|\psi\rangle\langle\psi|$ jest dana przez działanie unitarnego operatora $U \in SU(d)$.

Ewolucja

- Ewolucja d-wymiarowego stanu kwantowego $|\psi\rangle\langle\psi|$ jest dana przez działanie unitarnego operatora $U \in SU(d)$.

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle\langle\psi| &\to U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger \\
|\psi\rangle &\to U|\psi\rangle.
\end{aligned}
$$

Ewolucja

- Ewolucja d-wymiarowego stanu kwantowego $|\psi\rangle\langle\psi|$ jest dana przez działanie unitarnego operatora $U \in SU(d)$.

$$|\psi\rangle\langle\psi| \to U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger$$
$$|\psi\rangle \to U|\psi\rangle.$$

- Fakt z teorii grup – (w przypadku kubitu) istnieje fajny homomorfizm $SU(2) \to SO(3)$.

Ewolucja

- Ewolucja d-wymiarowego stanu kwantowego $|\psi\rangle\langle\psi|$ jest dana przez działanie unitarnego operatora $U \in SU(d)$.

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle\langle\psi| &\to U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger \\
|\psi\rangle &\to U|\psi\rangle.
\end{aligned}
$$

- Fakt z teorii grup – (w przypadku kubitu) istnieje fajny homomorfizm $SU(2) \to SO(3)$.
- Zatem rzeczywiście działanie U na qubicie może być interpretowane jako obroty na sferze trójwymiarowej.

Ewolucja

- Ewolucja d-wymiarowego stanu kwantowego $|\psi\rangle\langle\psi|$ jest dana przez działanie unitarnego operatora $U \in SU(d)$.

$$|\psi\rangle\langle\psi| \to U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger$$
$$|\psi\rangle \to U|\psi\rangle.$$

- Fakt z teorii grup – (w przypadku kubitu) istnieje fajny homomorfizm $SU(2) \to SO(3)$.
- Zatem rzeczywiście działanie U na qubicie może być interpretowane jako obroty na sferze trójwymiarowej.
- Przykład – bramka Hadamarda to obrót złożenie obrotu o $\frac{\pi}{2}$ w wokoł osi y oraz obrotu o π wokół osi z.

Pomiar

- Pomiar **M** w mechanice kwantowej jest reprezentowany przez **krotkę** operatorów.

Pomiar

- Pomiar $\mathbf{M}$ w mechanice kwantowej jest reprezentowany przez **krotkę** operatorów.

$$\mathbf{M} = (M_1, \ \ldots, M_n) \, .$$

Pomiar

- Pomiar **M** w mechanice kwantowej jest reprezentowany przez **krotkę** operatorów.

$$\mathbf{M} = (M_1,\ \dots, M_n)\,.$$

- Indeksy $1, \dots, n$ odpowiadając **wynikom pomiarów.**

Pomiar

- Pomiar **M** w mechanice kwantowej jest reprezentowany przez **krotkę** operatorów.

$$\mathbf{M} = (M_1,\ \ldots, M_n)\,.$$

- Indeksy $1, \ldots, n$ odpowiadając **wynikom pomiarów.**
- Operatory pomiarowe M_i spełniają

$$\forall_i M_i \geq, 0 \qquad\qquad \sum_i^n M_i = \mathbb{1}.$$

Pomiar

- Pomiar **M** w mechanice kwantowej jest reprezentowany przez **krotkę** operatorów.

$$\mathbf{M} = (M_1, \ \ldots, M_n) \, .$$

- Indeksy $1, \ldots, n$ odpowiadając **wynikom pomiarów.**
- Operatory pomiarowe M_i spełniają

$$\forall_i M_i \geq, 0 \qquad \qquad \sum_i^n M_i = \mathbb{1}.$$

- My będziemy modelować wykonywane pomiary za pomocą **pomiaru rzutowego P**.

Pomiar

- Pomiar **M** w mechanice kwantowej jest reprezentowany przez **krotkę** operatorów.

$$\mathbf{M} = (M_1, \ \ldots, M_n) \,.$$

- Indeksy $1, \ldots, n$ odpowiadając **wynikom pomiarów.**
- Operatory pomiarowe M_i spełniają

$$\forall_i M_i \geq, 0 \qquad\qquad \sum_i^n M_i = \mathbb{1}.$$

- My będziemy modelować wykonywane pomiary za pomocą **pomiaru rzutowego P**.
- Operatory, które go tworzą spełniają dodatkowe wymagania

$$P_i P_j = \delta_{i,j} P_i,$$

czyli są ortogonalnymi projektorami.

Pomiar na qubicie

- Pomiar rzutowy **w bazie obliczeniowej** składa się z dwóch operatorów

$$P_1 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomiar

- Potrzebne nam jeszcze **prawdopodobieństwo wyniku** *i* jeżeli wykonaliśmy pomiar **P** na stanie $|\psi\rangle\langle\psi|$.

Pomiar

- Potrzebne nam jeszcze **prawdopodobieństwo wyniku** i jeżeli wykonaliśmy pomiar **P** na stanie $|\psi\rangle\langle\psi|$.
- Dane jest ono regułą Borna:

$$p\left(i||\psi\rangle\langle\psi|, \mathbf{P}\right) = \mathrm{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\psi|P_i\right) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle.$$

Pomiar na qubicie

- **Pomiar w bazie obliczeniowej wykonany na qubicie** ma dwa możliwe wyniki, których prawdopodobieństwa wynoszą

$$p\,(1||\psi\rangle\langle\psi|,\mathbf{P}) = \mathrm{Tr}\,(|\psi\rangle\langle\psi||0\rangle\langle 0|) = \langle\psi||0\rangle\langle 0||\psi\rangle = |\langle\psi|0\rangle|^2$$
$$p\,(2||\psi\rangle\langle\psi|,\mathbf{P}) = |\langle\psi|1\rangle|^2.$$

Pomiar na qubicie

- **Pomiar w bazie obliczeniowej wykonany na qubicie** ma dwa możliwe wyniki, których prawdopodobieństwa wynoszą

$$p\,(1||\psi\rangle\langle\psi|, \mathbf{P}) = \mathrm{Tr}\,(|\psi\rangle\langle\psi||0\rangle\langle 0|) = \langle\psi||0\rangle\langle 0||\psi\rangle = |\langle\psi|0\rangle|^2$$
$$p\,(2||\psi\rangle\langle\psi|, \mathbf{P}) = |\langle\psi|1\rangle|^2.$$

- Prawdopodbieństwa wyników są w tym przypadku równe po prostu modułom kwadrat współczynników w naszym wektorze stanu.

Wiele qubitów

Pomiar na wielu qubitach

- Przypomnienie:

$$P_1 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomiar na wielu qubitach

- Przypomnienie:

$$P_1 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- W naszym modelu, pomiar w bazie obliczeniowej dla wielu kubitów ma strukturę iloczynu tensorowego pomiarów na pojedynczych kubitach.

Pomiar na wielu qubitach

- Przypomnienie:

$$P_1 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- W naszym modelu, pomiar w bazie obliczeniowej dla wielu kubitów ma strukturę iloczynu tensorowego pomiarów na pojedynczych kubitach.
- Czyli np. pomiar dla dwóch kubitów będzie miał postać

$$\mathbf{P} = (P_1 \otimes P_1, P_1 \otimes P_2, P_2 \otimes P_1, P_2 \otimes P_2)\,.$$

Stan wielu qubitów

- Stan N qubitów, żyje w przestrzeni Hilberta o wymiarze 2^N.

Stan wielu qubitów

- Stan N qubitów, żyje w przestrzeni Hilberta o wymiarze 2^N.
- Jeśli dwa qubity $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ **są od siebie niezależne**, ich stan opisujemy za pomocą iloczynu tensorowego

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle.$$

Stan wielu qubitów

- Stan N qubitów, żyje w przestrzeni Hilberta o wymiarze 2^N.
- Jeśli dwa qubity $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ **są od siebie niezależne**, ich stan opisujemy za pomocą iloczynu tensorowego

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle.$$

- Jeśli jednak pozwolimy im ze sobą oddziaływać, to stanu w przestrzeni $\mathbb{C}^4$ **nie będzie się dało** zapisać jako iloczyn tensorowy stanów z $\mathbb{C}^2$.

Stan wielu qubitów

- Stan N qubitów, żyje w przestrzeni Hilberta o wymiarze 2^N.
- Jeśli dwa qubity $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ **są od siebie niezależne**, ich stan opisujemy za pomocą iloczynu tensorowego

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle.$$

- Jeśli jednak pozwolimy im ze sobą oddziaływać, to stanu w przestrzeni $\mathbb{C}^4$ **nie będzie się dało** zapisać jako iloczyn tensorowy stanów z $\mathbb{C}^2$.
- Stany, których nie da się tak zapisać to **stany splątane**.

Podsumowanie

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.
- Niezależne (**separowalne**) **stany wielu kubitów** zadane są przez **iloczyn tensorowy** stanów pojedynczych kubitów.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.
- Niezależne (**separowalne**) **stany wielu kubitów** zadane są przez **iloczyn tensorowy** stanów pojedynczych kubitów.
- Stany, które nie mają takiej struktury, to **stany splątane**.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.
- Niezależne (**separowalne**) **stany wielu kubitów** zadane są przez **iloczyn tensorowy** stanów pojedynczych kubitów.
- Stany, które nie mają takiej struktury, to **stany splątane**.
- **Ewolucję** stanów kwantowych opisujemy **operatorami unitarnymi**.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.
- Niezależne (**separowalne**) **stany wielu kubitów** zadane są przez **iloczyn tensorowy** stanów pojedynczych kubitów.
- Stany, które nie mają takiej struktury, to **stany splątane**.
- **Ewolucję** stanów kwantowych opisujemy **operatorami unitarnymi**.
- Dla qubitu, taka ewolucja odpowiada obrotom na sferze Blocha.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.
- Niezależne (**separowalne**) **stany wielu kubitów** zadane są przez **iloczyn tensorowy** stanów pojedynczych kubitów.
- Stany, które nie mają takiej struktury, to **stany splątane**.
- **Ewolucję** stanów kwantowych opisujemy **operatorami unitarnymi**.
- Dla qubitu, taka ewolucja odpowiada obrotom na sferze Blocha.
- **Pomiar** w bazie obliczeniowej reprezentujemy za pomocą 2^N **operatorów rzutowych**.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.
- Niezależne (**separowalne**) **stany wielu kubitów** zadane są przez **iloczyn tensorowy** stanów pojedynczych kubitów.
- Stany, które nie mają takiej struktury, to **stany splątane**.
- **Ewolucję** stanów kwantowych opisujemy **operatorami unitarnymi**.
- Dla qubitu, taka ewolucja odpowiada obrotom na sferze Blocha.
- **Pomiar** w bazie obliczeniowej reprezentujemy za pomocą 2^N **operatorów rzutowych**.
- W przypadku jednego qubitu te operatory to $|0\rangle\langle 0|$ oraz $|1\rangle\langle 1|$.

Podsumowanie

- **Stany kwantowe** $|\psi\rangle$ żyją w **przestrzeni Hilberta**.
- Stan qubitu odpowiada punktowi na sferze jednostkowej.
- Niezależne (**separowalne**) **stany wielu kubitów** zadane są przez **iloczyn tensorowy** stanów pojedynczych kubitów.
- Stany, które nie mają takiej struktury, to **stany splątane**.
- **Ewolucję** stanów kwantowych opisujemy **operatorami unitarnymi**.
- Dla qubitu, taka ewolucja odpowiada obrotom na sferze Blocha.
- **Pomiar** w bazie obliczeniowej reprezentujemy za pomocą 2^N **operatorów rzutowych**.
- W przypadku jednego qubitu te operatory to $|0\rangle\langle 0|$ oraz $|1\rangle\langle 1|$.
- Dla **wielu kubitów** to po prostu ich **iloczyny tensorowe**.