1 Raisonnement par la programation dynamique

1.1 Première étape

Q1
Si on a calculé tous les $T(i,j)$, la case $T(m-1,k)$ nous indique si on peut colorier les m premières cases de la ligne l_i (donc la ligne entière) avec k premiers blocs (i.e. la séquence entière).

Q2

1. Si $l = 0$ et $j \in \{0, \dots, m-1\}$, alors $T(j,l) = 0$. En effet, on peut "colorier" n'importe quel nombre de cases avec aucun bloc.

2. On suppose maintenant $l \geq 1$.
   (a) $j < s_l - 1 \Rightarrow T(j,l) = FALSE$. En effet, cette inégalité signifie que le nombre de cases à colorier $(j+1)$ est strictement plus petit que la longueur du dernier bloc. On peut pas donc colorier les $j+1$ premières cases avec le bloc s_l, et alors non plus avec la sous-séquence des blocs $(s_1, \dots, s_l)$.
   (b) $j = s_l - 1 \Leftrightarrow j + 1 = s_l$, ce qui signifie que la longueur du dernier bloc est exactement égale au nombre de cases à colorier. On en déduit que $T(j,1) = TRUE$ et $T(j,l) = FALSE$ pour $l > 1$.

Q3
On considère dans cette question le dernier cas non traité, c'est à dire le cas où $l \geq 1, j > s_l - 1$. Il y a deux possibilités :
— Soit la case (i,j) restera blanche après la coloration, dans quel cas $T(j,l) = T(j-1,l)$.
— Soit la case (i,j) sera noire après la coloration, ce qui signifie que le bloc s_l se termine à la case (i,j). On en déduit qu'il commence à la case $(i, j-(s_l-1))$. Les blocs étant séparés par au moins une case blanche, la case $(i, j-s_l)$ sera blanche. Si $j - s_l > 0$, alors $T(j,l) = T(j-s_l-1, l-1)$. Si $j - s_l = 0$, alors $T(j,l) = TRUE$ si et seulement si $l = 1$.

1.2 Généralisation

Q5

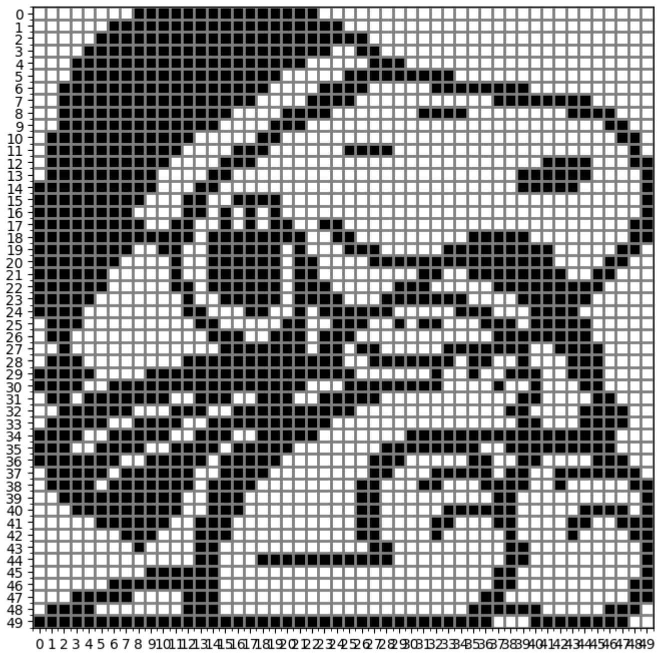
1. Si $l = 0$ et $j \in \{0, \dots, m-1\}$: On peut colorier $j+1$ premières cases avec 0 blocs si aucune de cases $0, \dots, j$ n'est pas déjà coloriée à noir (ce qui imposerait une présence d'un bloc, ou au moins de sa partie).

2. On suppose maintenant $l \geq 1$.
   (a) $j < s_l - 1 \Rightarrow T(j,l) = FALSE$ pour le même raison que précédamment.
   (b) $j = s_l$ **A FINIR PLUS TARD ! ! ! (J'ai la flemme...)**

Q8
Voici le tableau des temps de résolution pour les instances 1-10 :

numéro d'instance	temps de résolution [s]
1	0.013
2	5.8
3	4.2
4	10.7
5	7.7
6	22.7
7	10.7
8	18.5
9	342.7
10	349.2

La grille obtenue pour le fichier *9.txt* est la suivante :



2 La PLNE

2.1 Modélisation

Q10

Soit l_i la i-ième ligne avec une séquence associée $(s_1, \ldots, s_k)$. Si le bloc t de longueur s_t commence par la case (i,j), alors les cases (i,j) à $(i, j+s_t-1)$ doivent être noires, ce qui s'exprime comme :[1]

$$y_{ij}^t \leq \frac{\sum_{l=j}^{j+s_t-1} x_{il}}{s_t}$$

De manière analogue, on a pour la j-ième colonne c_j possédant la séquence $(s'_1, \ldots, s'_{k'})$:

$$z_{ij}^t \leq \frac{\sum_{l=i}^{i+s'_t-1} x_{lj}}{s_t}$$

Q11

Avec les notations de la question précédente, on souhaite d'exprimer le fait que si le bloc t de la i-ième ligne commence à la case (i,j), alors le $(t+1)$-ième bloc ne peut pas commencer avant la case $(i, j+s_t+1)$. Ce qui se formule par :

$$y_{ij}^t \leq \sum_{l=j+s_t+1}^{N} y_{il}^{t+1}, t \in \{1, \ldots, k-1\}$$

De manière analogue, on obtient pour les colonnes :

$$z_{ij}^t \leq \sum_{l=j+s_t+1}^{M} z_{lj}^{t+1}, t \in \{1, \ldots, k'-1\}$$

Q12

Pour formuler le PLNE, il faut exprimer à l'aide des variables définies précédament les contraintes suivantes :

(1) Un bloc ne doit apparaître qu'une seule fois sur une ligne.
(2) Un bloc ne doit apparaître qu'une seule fois sur une colonne.
(3) Il doit y avoir un bon nombre de cases noires par ligne.
(4) Il doit y avoir un bon nombre de cases noires par colonne.
(5) Le bloc $t+1$ d'une ligne doit se trouver après le bloc t.
(6) Le bloc $t+1$ d'une colonne doit se trouver après le bloc t.
(7) Si le bloc t d'une ligne demarre à la colonne j, alors les cases qui suivent doivent être noires sur la longueur du bloc.
(8) Si le bloc t d'une colonne demarre à la colonne i, alors les cases qui suivent doivent être noires sur la longueur du bloc.

1. Cette formulation n'est pas exacte. En fait, elle ne prend pas en compte le fait qu'on peut potentiellement dépasser les bordes dans la somme. Ce problème est reglé dans la question 13 en limitant le nombre de variables.

On en déduit alors le PLNE suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} y_{ij} &= 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, M\} && (1)\\
\sum_{i=1}^{M} z_{ij} &= 1 \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\} && (2)\\
\sum_{j=1}^{N} x_{ij} - \sum_{l=1}^{k} s_l &= 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, M\} && (3)\\
\sum_{i=1}^{M} x_{ij} - \sum_{l=1}^{k'} s_l &= 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, N\} && (4)\\
y_{ij}^t &\leq \sum_{l=j+s_t+1}^{N} y_{il}^{t+1}, t \in \{1, \ldots, k-1\}, i \in \{1, \ldots, M\} && (5)\\
z_{ij}^t &\leq \sum_{l=j+s_t+1}^{M} z_{lj}^{t+1}, t \in \{1, \ldots, k'-1\}, j \in \{1, \ldots, N\} && (6)\\
y_{ij}^t &\leq \frac{\sum_{l=j}^{j+s_t-1} x_{il}}{s_t}, i \in \{1, \ldots, M\}, t \in \{1, \ldots, k-1\} && (7)\\
z_{ij}^t &\leq \frac{\sum_{l=i}^{i+s'_t-1} x_{lj}}{s_t}, j \in \{1, \ldots, N\}, t \in \{1, \ldots, k'-1\} && (8)
\end{aligned}$$

2.2 Implantations et tests

Q13