1 Raisonnement par la programation dynamique

1.1 Première étape

Q1
Si on a calculé tous les $T(i,j)$, la case $T(m-1,k)$ nous indique si on peut colorier les m premières cases de la ligne l_i (donc la ligne entière) avec k premiers blocs (i.e. la séquence entière).

Q2

1. Si $l = 0$ et $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, alors $T(j,l) = 0$. En effet, on peut "colorier" n'importe quel nombre de cases avec aucun bloc.

2. On suppose maintenant $l \geq 1$.
   (a) $j < s_l - 1 \Rightarrow T(j,l) = FALSE$. En effet, cette inégalité signifie que le nombre de cases à colorier $(j+1)$ est strictement plus petit que la longueur du dernier bloc. On peut pas donc colorier les $j+1$ premières cases avec le bloc s_l, et alors non plus avec la sous-séquence des blocs $(s_1, \ldots, s_l)$.
   (b) $j = s_l - 1 \Leftrightarrow j+1 = s_l$, ce qui signifie que la longueur du dernier bloc est exactement égale au nombre de cases à colorier. On en déduit que $T(j,1) = TRUE$ et $T(j,l) = FALSE$ pour $l > 1$.

Q3
On considère dans cette question le dernier cas non traité, c'est à dire le cas où $l \geq 1, j > s_l - 1$. Il y a deux possibilités :

— Soit la case (i,j) restera blanche après la coloration, dans quel cas $T(j,l) = T(j-1,l)$.
— Soit la case (i,j) sera noire après la coloration, ce qui signifie que le bloc s_l se termine à la case (i,j). On en déduit qu'il commence à la case $(i, j-(s_l-1))$. Les blocs étant séparés par au moins une case blanche, la case $(i, j-s_l)$ sera blanche. Si $j - s_l > 0$, alors $T(j,l) = T(j-s_l-1, l-1)$. Si $j - s_l = 0$, alors $T(j,l) = TRUE$ si et seulement si $l = 1$.

1.2 Généralisation

Q5

1. Si $l = 0$ et $j \in \{0, \ldots, m-1\}$: On peut colorier $j+1$ premières cases avec 0 blocs si aucune de cases $0, \ldots, j$ n'est pas déjà coloriée à noir (ce qui imposerait une présence d'un bloc, ou au moins de sa partie).

2. On suppose maintenant $l \geq 1$.
   (a) $j < s_l - 1 \Rightarrow T(j,l) = FALSE$ pour le même raison que précédamment.
   (b) $j = s_l$ **A FINIR PLUS TARD ! ! ! (J'ai la flemme...)**

Q8
Voici le tableau des temps de résolution pour les instances 1-10 :

numéro d'instance	temps de résolution [s]
1	0.013
2	5.8
3	4.2
4	10.7
5	7.7
6	22.7
7	10.7
8	18.5
9	342.7
10	349.2

2 La PLNE

2.1 Modélisation

Q10
Soit l_i la i-ième ligne avec une séquence associée $(s_1, \ldots, s_k)$. Si le bloc t de longueur s_t commence par la case (i, j), alors les cases (i, j) à $(i, j + s_t - 1)$ doivent être noires, ce qui s'exprime comme :

$$y_{ij}^t \leq \frac{\sum_{l=j}^{j+s_t-1} x_{il}}{s_t}$$

De manière analogue, on a pour la j-ième colonne c_j possédant la séquence $(s'_1, \ldots, s'_{k'})$:

$$z_{ij}^t \leq \frac{\sum_{l=i}^{i+s'_t-1} x_{lj}}{s_t}$$

Q11
Avec les notations de la question précédente, on souhaite d'exprimer le fait que si le bloc t de la i-ième ligne commence à la case (i, j), alors le $(t + 1)$-ième bloc ne peut pas commencer avant la case $(i, j + s_t + 1)$. Ce qui se formule par :

$$y_{ij}^t \leq \sum_{l=j+s_t+1}^{N} y_{il}^{t+1}, t \in \{1, \ldots, k - 1\}$$

De manière analogue, on obtient pour les colonnes :

$$z_{ij}^t \leq \sum_{l=j+s_t+1}^{M} y_{lj}^{t+1}, t \in \{1, \ldots, k' - 1\}$$

Q12

2.2 Implantations et tests

Q13