反比例函数

2025 年 9 月 21 日

1 反比例函数最初的样子

如果你在读初中：

反比例函数最初的样子是 $y = \frac{1}{x}$，x 的取值范围是 $x \neq 0$，y 的取值范围是 $y \neq 0$。它的函数图像是两条曲线，人们常称之为双曲线。它的函数图像关于原点对称，是一个中心对称图形。它的函数图像关于直线 $y = x$ 和直线 $y = -x$ 对称，是轴对称图形，有两条对称轴。函数图像均位于第一、三象限，在第一象限内，函数图像随着 x 的增大无限接近但达不到 x 的正半轴，函数图像随着 x 的减小无限接近但达不到 y 的正半轴；在第三象限内，函数图像随着 x 的减小无限接近但达不到 x 的负半轴，函数图像随着 x 的增大无限接近但达不到 y 的负半轴；可见，函数 $y = \frac{1}{x}$ 的渐近线为直线 $x = 0$ 和 $y = 0$，两条渐近线交于原点。总之，它是一条悲伤的双曲线。
如果你在读高中：

反比例函数最初的样子是 $f(x) = \frac{1}{x}$，该函数的定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R} \wedge x \neq 0\}$，值域为 $\{y|y \in \mathbf{R} \wedge y \neq 0\}$。它的函数图像是两条曲线，人们常称之为双曲线。它的函数图像关于原点对称，是一个中心对称图形，该函数是一个奇函数。它的函数图像关于直线 $y = x$ 和直线 $y = -x$ 对称，是轴对称图形，有两条对称轴。函数图像均位于第一、三象限，在第一象限内，函数图像随着 x 的增大无限接近但达不到 x 的正半轴，函数图像随着 x 的减小无限接近但达不到 y 的正半轴；在第三象限内，函数图像随着 x 的减小无限接近但达不到 x 的负半轴，函数图像随着 x 的增大无限接近但达不到 y 的负半轴；可见，函数 $y = \frac{1}{x}$ 的渐近线为直线 $x = 0$ 和 $y = 0$，两条渐近线交于原点。总之，它是一条悲伤的双曲线。
如果你在读大学：

反比例函数最初的样子是 $f(x) = \frac{1}{x}$，该函数的定义域为 $\{x|x \in \mathbf{R} \wedge x \neq 0\}$，

值域为 $\{y|y \in \mathbf{R} \wedge y \neq 0\}$。它的函数图像是两条曲线，人们常称之为双曲线。它的函数图像关于原点对称，是一个中心对称图形，该函数是一个奇函数。它的函数图像关于直线 $y = x$ 和直线 $y = -x$ 对称，是轴对称图形，有两条对称轴。函数图像均位于第一、三象限，当 x（从 0）无限趋于 $-\infty$ 时，y 从 $-\infty$ 无限趋于 0；当 x 从 $-\infty$ 无限趋于 0 时，y 从 0 无限趋于 $-\infty$；当 x 从 $+\infty$ 无限趋于 0 时，y 从 0 无限趋于 $+\infty$；当 x（从 0）无限趋于 $+\infty$ 时，y 从 $+\infty$ 无限趋于 0；总之，我们有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$、$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$、$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$。可见，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的渐近线为直线 $x = 0$ 和 $y = 0$，两条渐近线交于原点。

2 修改 x 导致函数图像左右平移

牢记一句口诀：“左加右减”，即：将函数表达式中的 x **全部**换成 $(x+h)$ 时（$h > 0$），函数图像向左平移 h 个单位；将 x **全部**换成 $(x-h)$ 时（$h > 0$），函数图像向右平移 h 个单位。**请注意，该口诀对包括反比例函数、一次函数和二次函数在内的所有实数范围内的函数均成立。**

例如，将函数图像 $y = \dfrac{1}{x}$ 向左平移 1 个单位，我们可以得到 $y = \dfrac{1}{x+1}$；将函数图像向左平移 h 个单位（$h > 0$），我们可以得到 $y = \dfrac{1}{x+h}$；将函数图像 $y = ax^2+k$ 向左平移 h 个单位（$h > 0$），我们可以得到 $y = a(x-h)^2+k$（当 $a \neq 0$ 时为二次函数的顶点式），请注意加括号。

如何理解“左加右减”？原本我的 $y = \dfrac{1}{x}$ 可以在 $x = 5$ 时得到 $y = \dfrac{1}{5}$ 的，但现在函数变成了 $y = \dfrac{1}{x+1}$，我原本在 $x = 5$ 时就能得到的 $y = \dfrac{1}{5}$ 变成了在 $x = 4$ 时才能得到 $y = \dfrac{1}{5}$，因为把 $x = 4$ 代入 $y = \dfrac{1}{x+1}$ 才能得到 $y = \dfrac{1}{5}$，也就是说，原来的 $\left(5, \dfrac{1}{5}\right)$ 变成了 $\left(4, \dfrac{1}{5}\right)$，那就说明函数图像往左平移了一位。所以，“左加右减”是对的。

3 修改 y 导致函数图像上下平移

牢记一句口诀：“上加下减”，即：将形如 $y = f(x)$ 的函数表达式中等号的右侧加上 k 时（$k > 0$），函数图像向上平移 k 个单位；将形如 $y = f(x)$ 的函数表达式中等号的右侧减去 k 时（$k > 0$），函数图像向下平移 k 个单

位。**请注意，该口诀对包括反比例函数、一次函数和二次函数在内的所有实数范围内的函数均成立；该口诀在使用时，请确保等号左侧只有一个** y**，等号右侧不含** y。

例如，将函数图像 $y=\dfrac{1}{x}$ 向上平移 1 个单位，我们可以得到 $y=\dfrac{1}{x}+1$；将函数图像向上平移 k 个单位（$k>0$），我们可以得到 $y=\dfrac{1}{x}+k$；将函数图像 $y=ax$（当 $a\neq 0$ 时为一次函数）向上平移 b 个单位（$b>0$），我们可以得到 $y=ax+b$；将函数图像 $y=a(x-h)^2$向上平移 k 个单位（$k>0$），我们可以得到 $y=a(x-h)^2+k$（当 $a\neq 0$ 时为二次函数的顶点式）。

如何理解"上加下减"？把等式右边整体加上或减去一个正值，对应的 y 值也就会相应地加上或减去一个正值，反映在图像上就是整体相应地向上或向下移动。

事实上，如果你有能力，你也可以类似"左加右减"那样定义修改 y 导致函数图像上下平移，但可能就成为了"上减下加"，即：将函数表达式中的 y **全部**换成 $(y-k)$ 时（$k>0$），函数图像向上平移 k 个单位；将 y **全部**换成 $(y+k)$ 时（$k>0$），函数图像向下平移 k 个单位。不过，在日常数学中，人们一般将函数表达式写为 $y=f(x)$ 的形式，即等式左边只有一个 y，等式右边不含有 y，因此，更推荐的且人们更常用的是"上加下减"。

4 复合平移

理科中的复合，指的是多个独立的过程按一定的顺序结合在一起，例如由 $u(x)=\dfrac{1}{x}$ 和 $v(x)=x+1$ 可以得到 $f(x)=u(v(x))=\dfrac{1}{x+1}$ 和 $g(x)=v(u(x))=\dfrac{1}{x}+1$，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 被称为复合函数。

联合上述所学的知识，我们不难发现 $y=\dfrac{1}{x+1}+2$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 先将 x（全部）换成 $x+1$，再把 $\dfrac{1}{x+1}$ 变成 $\dfrac{1}{x+1}+2$ 得来的，因此，函数 $y=\dfrac{1}{x+1}+2$ 的图像是 $y=\dfrac{1}{x}$ 先向左平移 1 个单位（"左加"）再向上平移 2 个单位（"上加"）得来的。

反之，如果将函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像先向右平移 5 个单位，再向下平移 4 个单位，就会得到函数 $y=\dfrac{1}{x-5}-4$。

一般地，函数 $y=\dfrac{1}{x-h}+k$ 的图像可以理解为由函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像先向右平移 h 个单位，再向上平移 k 个单位得来，其中向右平移 $-|h|$ 个单位意为向左平移 $|h|$ 个单位，向上平移 $-|k|$ 个单位意为向下平移 $|k|$ 个单位。由于是平移，我们同样可以得出以下四个结论：

（1） 函数 $y=\dfrac{1}{x-h}+k$ 的图像关于点 (h,k) 对称。

（2） 对直线 $y=x$ 先向右平移 h 个单位，再向上平移 k 个单位，可以得到 $y=(x-h)+k$，故函数 $y=\dfrac{1}{x-h}+k$ 的图像关于直线 $y=x-h+k$ 对称。

（3） 对直线 $y=-x$ 先向右平移 h 个单位，再向上平移 k 个单位，可以得到 $y=-(x-h)+k$，故函数 $y=\dfrac{1}{x-h}+k$ 的图像关于直线 $y=-x+h+k$ 对称。

（4） 函数 $y=\dfrac{1}{x-h}+k$ 的图像的渐近线为直线 $x=h$ 和直线 $y=k$，两条渐近线交于点 (h,k)。

5 伸缩

令 $t\geqslant 1$，有如下函数图像变换：

（1） 将函数表达式中的 x **全部**换成 tx 时，函数图像在 x 方向上收缩为原来的 $\dfrac{1}{t}$。

（2） 将函数表达式中的 x **全部**换成 $\dfrac{x}{t}$ 时，函数图像在 x 方向上伸展为原来的 t 倍。

（3） 将函数表达式中的 x **全部**换成 $-\dfrac{x}{t}$ 时，函数图像在 x 方向上伸展为原来的 t 倍并关于 y 轴对称。

（4） 将函数表达式中的 x **全部**换成 $-tx$ 时，函数图像在 x 方向上收缩为原来的 $\dfrac{1}{t}$ 并关于 y 轴对称。

（5） 将形如 $y=f(x)$ 的函数表达式中等号的右侧变为 $tf(x)$ 时，函数图像在 y 方向上伸展为原来的 t 倍。

（6） 将形如 $y=f(x)$ 的函数表达式中等号的右侧变为 $\dfrac{f(x)}{t}$ 时，函数图像在 y 方向上收缩为原来的 $\dfrac{1}{t}$。

（7） 将形如 $y=f(x)$ 的函数表达式中等号的右侧变为 $-\dfrac{f(x)}{t}$ 时，函数图像在 y 方向上收缩为原来的 $\dfrac{1}{t}$ 并关于 x 轴对称。

（8） 将形如 $y=f(x)$ 的函数表达式中等号的右侧变为 $-tf(x)$ 时，函数图像在 y 方向上伸展为原来的 t 倍并关于 x 轴对称。

（9） 将函数表达式中的 y **全部**换成 ty 时，函数图像在 y 方向上收缩为原来的 $\dfrac{1}{t}$。

（10） 将函数表达式中的 y **全部**换成 $\dfrac{y}{t}$ 时，函数图像在 y 方向上伸展为原来的 t 倍。

（11） 将函数表达式中的 y **全部**换成 $-\dfrac{y}{t}$ 时，函数图像在 y 方向上伸展为原来的 t 倍并关于 x 轴对称。

（12） 将函数表达式中的 y **全部**换成 $-ty$ 时，函数图像在 y 方向上收缩为原来的 $\dfrac{1}{t}$ 并关于 x 轴对称。

以上思考过程，可类比“左加右减”。

6 反比例函数的一般式

一个反比例函数的一般式为 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（$c\neq 0$），通常，我们会做向分母看齐的处理——$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}=\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}+\dfrac{a}{c}=\dfrac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+\dfrac{a}{c}=\left(\dfrac{bc-ad}{c^2}\right)\dfrac{1}{x+\frac{d}{c}}+\dfrac{a}{c}$。因此，该一般式的函数图像可被认为是由函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 先向左平移 $\dfrac{d}{c}$ 个单位（“左加”），再在 y 方向上伸缩为向左平移后所得图

像的 $\dfrac{bc-ad}{c^2}$，再将伸缩所得图像向上平移 $\dfrac{a}{c}$ 个单位得到的图像。类似地，我们同样可以得出以下两个结论：

（1） 从原点 $(0,0)$ 向左平移 $\dfrac{d}{c}$ 个单位得到 $\left(-\dfrac{d}{c},0\right)$（“左加右减”和“上加下减”仅适用于函数图像平移而不适用于点的平移），再将该点在 y 方向上伸缩为该点的 $\dfrac{bc-ad}{c^2}$ 得到 $\left(-\dfrac{d}{c},0\right)$（没有变化），再将该点向上平移 $\dfrac{a}{c}$ 得到 $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$。因此，函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（$c\neq 0$）的图像关于点 $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ 对称。

（2） 函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（$c\neq 0$）的图像的渐近线为直线 $x=-\dfrac{d}{c}$ 和直线 $y=\dfrac{a}{c}$，两条渐近线交于点 $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$。

由于函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（$c\neq 0$）的图像可能涉及横坐标和纵坐标方向不等比例的伸缩，因此当且仅当 $\dfrac{bc-ad}{c^2}=\pm 1$ 时，该函数的图像保持有两条对称轴。

（1） 对直线 $y=x$ 先向左平移 $\dfrac{d}{c}$ 个单位（“左加”），再在 y 方向上伸缩为向左平移后所得图像的 $\dfrac{bc-ad}{c^2}$，再将伸缩所得图像向上平移 $\dfrac{a}{c}$ 个单位得到的图像。此时，我们得到 $y=\dfrac{bc-ad}{c^2}\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\dfrac{a}{c}$。由于 $\dfrac{bc-ad}{c^2}=\pm 1$，该函数简化为 $y=\pm\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\dfrac{a}{c}$。

（2） 对直线 $y=-x$ 先向左平移 $\dfrac{d}{c}$ 个单位（“左加”），再在 y 方向上伸缩为向左平移后所得图像的 $\dfrac{bc-ad}{c^2}$，再将伸缩所得图像向上平移 $\dfrac{a}{c}$

个单位得到的图像。此时，我们得到 $y = -\dfrac{bc-ad}{c^2}\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\dfrac{a}{c}$。

由于 $\dfrac{bc-ad}{c^2}=\pm 1$，该函数简化为 $y=\mp\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\dfrac{a}{c}$。

综上所述，当且仅当 $\dfrac{bc-ad}{c^2}=\pm 1$ 时，该函数的图像保持有两条对称轴，分别为 $y=x+\dfrac{a+d}{c}$ 和 $y=-x+\dfrac{a-d}{c}$。