6 高阶导数与微分

6.1 知识结构

第4章导数与微分

4.4 高阶导数

- 高阶导数的运算法则：设f, g具有n阶导数，则

  (1) $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$；

  (2) $(cf)^{(n)} = cf^{(n)}$；

  (3) $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$（乘积函数$n$阶导数的莱布尼茨公式.）

4.5 微分

4.5.1 微分概念

4.5.2 微分用于近似计算

4.5.3 微分运算法则

- 四则运算法则
- 复合函数的链式微分法

6.2 习题4.4解答

1. 求$y''(x)$：

(1)$y = x\sqrt{1+x^2}$；

(2)$y = \arcsin x$；

(3)$y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$；

(4)$y = x\ln x$；

(5)$y = e^{-x^2}$；

(6)$y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$；

(7)$y = \tan^2 x$；

(8)$y = \ln f(x)$，其中f二阶可导.

解：(1)$y' = \sqrt{1+x^2} + x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

$y'' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - (1+2x^2)\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{4x(1+x^2)-(1+2x^2)x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(2)$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y''=\frac{2x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$(3)y'=\frac{2x\sqrt{1-x^2}-x^2\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{2x(1-x^2)+x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2x-x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$y''=\frac{(2-3x^2)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+(2x-x^3)\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(1-x^2)^3}=\frac{2+x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

$(4)y'=\ln x+1$

$y''=\frac{1}{x}$.

$(5)y'=e^{-x^2}(-2x)=-2xe^{-x^2}$

$y''=-2e^{-x^2}-2xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(-2+4x^2)$.

$(6)y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x[\cos(\ln x)\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\frac{1}{x}]=2\cos(\ln x)$

$y''=-2\sin(\ln x)\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$.

$(7)y'=2\tan x\sec^2 x$

$y''=2\sec^4 x+4\tan^2 x\sec^2 x=2\sec^2 x(3\sec^2 x-2)$.

$(8)y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

$y''=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$.

2. 设f为三次可导函数，求y''：

$(1)y=f(x^2)$；

$(2)y=f(e^x)$；

$(3)y=f(\frac{1}{x})$；

$(4)y=f(\ln x)$.

解：$(1)y'=2xf'(x^2)$

$y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$

$(2)y'=f'(e^x)e^x$

$y''=f''(e^x)e^{2x}+f'(e^x)e^x$

$(3)y'=\frac{-1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$

$y''=\frac{2}{x^3}f'(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^4}f''(\frac{1}{x})$

$(4)y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$

$y''=\frac{-1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)$

3. 设函数$y=y(x)$由方程$y-2x=(x-y)\ln(x-y)$确定，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：将$y-2x=(x-y)\ln(x-y)$两边求关于x的导数得$y'-2=(1-y')\ln(x-y)+(1-y')$，即$y'=\frac{3+\ln(x-y)}{2+\ln(x-y)}$

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''=\frac{\frac{1-y'}{x-y}[2+\ln(x-y)]-[3+\ln(x-y)]\frac{1-y'}{x-y}}{[2+\ln(x-y)]^2}=\frac{y'-1}{[2+\ln(x-y)]^2(x-y)}=\frac{1}{[2+\ln(x-y)]^3(x-y)}$.

4. 已知$\begin{cases}x=f'(t)\\y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$ 其中f为三次可导函数，且$f''(t)\neq 0$，求$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{f''(t)}$

$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{-f'''(t)}{[f'(t)]^2}}{f''(t)}=\frac{-f'''(t)}{[f'(t)]^3}$.

5. 求下列函数的制定阶数的导数：

(1)$y=\sqrt{1+x}$，求y''；

(2)$y=\sqrt{x}$，求 $y^{(10)}$；

(3)$y=e^xx^4$，求$y^{(4)}$；

(4)$y=\frac{\ln x}{x}$，求$y^{(5)}$；

(5)$y=x^2\sin 2x$，求$y^{(50)}$；

(6)$f(x)=\ln(1+x)$，求$f^{(n)}(x)$；

(7)$f(x)=e^{ax}\sin bx(a,b\in\mathbb{R})$，求$f^{(n)}(x)$；

(8)$y=x\sinh x$，求$y^{(100)}$；

(9)$y=\frac{1}{2-x-x^2}$，求$y^{(20)}$；

(10)$y=x^3e^x$，求$y^{(20)}$.

解：(1)$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$y''=\frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$.

(2)$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$y''=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}$

$y'''=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}}$

$\cdots$

$y^{(10)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-9)x^{\frac{1}{2}-10}=(-1)^9\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot 17}{2^{10}}x^{-\frac{19}{2}}=-\frac{17!!}{2^{10}}x^{-\frac{19}{2}}$.

(3)$y'=e^xx^4+4e^xx^3=e^x(x^4+4x^3)$

$y''=e^x(x^4+4x^3+4x^3+12x^2)=e^x(x^4+8x^3+12x^2)$

$y'''=e^x(x^4+8x^3+12x^2+4x^3+24x^2+24x)=e^x(x^4+12x^3+36x^2+24x),y^{(4)}=e^x(x^4+12x^3+36x^2+24x+4x^3+36x^2+72x+24)=e^x(x^4+16x^3+72x^2+96x+24)$.

(4)$y'=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$y''=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$

$y'''=\frac{\frac{2}{x}x^3-(-3+2\ln x)3x^2}{x^6}=\frac{11-6\ln x}{x^4}$

$y^{(4)}=\frac{-\frac{6}{x}x^4-(11-6\ln x)4x^3}{x^8}=\frac{-50+24\ln x}{x^5}$

$y^{(5)}=\frac{\frac{24}{x}x^5-(-50+24\ln x)5x^4}{x^{10}}=\frac{274-120\ln x}{x^6}$.

(5)$y^{(50)}=(\sin 2x)^{(50)}x^2+50(\sin 2x)^{(49)}2x+\frac{50\cdot 49}{2}(\sin 2x)^{(48)}2=2^{50}x^2\sin(2x+\frac{50\pi}{2})+50\cdot 2^{50}x\sin(2x+\frac{49\pi}{2})+50\cdot 49\cdot 2^{48}\sin(2x+\frac{48\pi}{2})=-2^{50}x^2\sin 2x+50\cdot 2^{50}x\cos 2x+50\cdot 49\cdot 2^{48}\sin 2x$.

(6)$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

$f''(x)=-(1+x)^{-2}$

$f'''(x)=(-1)^2 2!(1+x)^{-3}$

$f^{(4)}(x)=(-1)^3 3!(1+x)^{-4}$

$\cdots$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$.

(7)$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{ax})^{(k)}(\sin bx)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(a^ke^{ax})[b^{n-k}\sin(bx+\frac{(n-k)\pi}{2})]=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}e^{ax}\sin(bx+\frac{(n-k)\pi}{2})$.

(8)$\because (\sinh x)'=(\frac{e^x-e^{-x}}{2})'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x, (\cosh x)'=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$

$\therefore y^{(100)}=(\sinh x)^{100}x+100\cdot(\sinh x)^{(99)}=x\sinh x+100\cosh x$.

(9)$y=\frac{1}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{3}\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}$

$y^{(20)}=\frac{1}{3}(-1)^{20}20!(2+x)^{-21}+\frac{1}{3}(-1)^{20}20!(1-x)^{-21}(-1)^{20}=\frac{20!}{3}(\frac{1}{(2+x)^{21}}+\frac{1}{(1-x)^{21}})$.

(10)$y^{(20)}=(e^x)^{(20)}x^3+20(e^x)^{19}3x^2+\frac{20\cdot 19}{2}(e^x)^{(19)}6x+\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}(e^x)^{(18)}6=e^x(x^3+60x^2+1140x+6840)$.

6.3 习题4.5解答

1. 对所给的x_0和Δx，计算Δf：

(1)$f(x)=\sqrt{x}, x_0=4, \Delta x=0.2$；

(2)$f(x)=\sqrt[3]{2+x^2}, x_0=5, \Delta x=-0.1$；

(3)$f(x)=x^3-2x+1, x_0=1, \Delta x=-0.01$.

解：(1)$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \Delta f=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{4}\cdot 0.2=0.05$.

(2)$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(2+x^2)^2}}, \Delta f=f'(x_0)\Delta x=\frac{10}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot(-0.1)=-\frac{1}{27}$.

(3)$f'(x)=3x^2-2, \Delta f=f'(x_0)\Delta x=-0.01$.

2. 求下列函数的微分：

(1)$y=\frac{1}{x}$；

(2)$y=\sin x^2$；

(3)$f(x)=\sin(\cos x)$；

(4)$y=x\sqrt{1-x}$；

(5)$u=\frac{x^2+2}{x^3-3}$；

(6)$y=\sin x-x\cos x$；

(7)$f(x)=\frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}|$；

(8)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

解：(1)$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

(2)$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2x\cos x^2\mathrm{d}x$.

(3)$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x=\cos(\cos x)(-\sin x)\mathrm{d}x=-\sin x\cos(\cos x)\mathrm{d}x$.

(4)$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(\sqrt{1-x}+x\frac{-1}{2\sqrt{1-x}})\mathrm{d}x=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

(5)$\mathrm{d}u=u'\mathrm{d}x=\frac{2x(x^3-3)-(x^2+2)(3x^2)}{(x^3-3)^2}\mathrm{d}x=\frac{-x^4-6x^2-6x}{(x^3-3)^2}\mathrm{d}x$.

(6)$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(\cos x-\cos x+x\sin x)\mathrm{d}x=x\sin x\mathrm{d}x$.

(7)$f(x)=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)$

当$x>1$时，$f(x)=\frac{1}{2}[\ln(x-1)-\ln(x+1)],\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}]=\frac{1}{x^2-1}$

当$1>x>-1$时，$f(x)=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(x+1)],\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{x+1}]\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$

当$x<-1$时，$f(x)=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(-1-x)],\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\frac{-1}{1-x}-\frac{-1}{-1-x}]\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$

故$\mathrm{d}f(x)=\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

(8)$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$.

3. 计算：

(1)$\mathrm{d}(xe^{-x})$；

(2)$\mathrm{d}(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2})$；

(3)$\mathrm{d}(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})$；

(4)$\mathrm{d}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$；

(5)$\mathrm{d}[\ln(1-x^2)]$；

(6)$\mathrm{d}(\arccos\frac{1}{|x|})$；

(7)$\mathrm{d}(\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}})$；

(8)$\mathrm{d}(-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}})$.

解：(1)$\mathrm{d}(xe^{-x})=(e^{-x}-xe^{-x})\mathrm{d}x=(1-x)e^{-x}\mathrm{d}x$.

(2)$\mathrm{d}(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2})=\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

(3)$\mathrm{d}(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(4)$\mathrm{d}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

(5)$\mathrm{d}[\ln(1-x^2)]=\frac{-2x}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

(6)当$x>0$时，$\mathrm{d}(\arccos\frac{1}{|x|})=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

当$x<0$时，$\mathrm{d}(\arccos\frac{1}{|x|})=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

故$\mathrm{d}(\arccos\frac{1}{|x|})=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

(7)$\mathrm{d}(\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}})=[\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+\sin x)]'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x})\mathrm{d}x=\frac{-\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\sec x\mathrm{d}x$.

(8)$\mathrm{d}(-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}})=[-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{1}{2}\ln\sin x]'\mathrm{d}x=(-\frac{-2\sin^3 x-\cos x4\sin x\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{1}{2}\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x})\mathrm{d}x=(\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}-\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}-\frac{1}{2}\cot x)\mathrm{d}x=\sec x\cot^2 x\mathrm{d}x$.

4. 设u,v,w均为x的可微函数，求函数y的微分：

(1)$y=uvw$；

(2)$y=\frac{u}{v^2}$；

(3)$y=\arctan\frac{u}{v}$；

(4)$y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

解：(1)$\mathrm{d}y=w\mathrm{d}(uv)+uv\mathrm{d}w=w(v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v)+uv\mathrm{d}w=vw\mathrm{d}u+uw\mathrm{d}v+uv\mathrm{d}w$.

(2)$\mathrm{d}y=\frac{v^2\mathrm{d}u-2uv\mathrm{d}v}{v^4}=\frac{v\mathrm{d}u-2u\mathrm{d}v}{v^3}$.

(3)$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\mathrm{d}(\frac{u}{v})=\frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{u^2+v^2}$.

(4)$\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}(2u\mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v)=\frac{u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v}{u^2+v^2}$.

5. 利用函数微分近似函数值改变量的方法，求下列各式的近似值：

(1)$\sqrt[3]{1.02}$；

(2)$\sin 29^\circ$；

(3)$\cos 151^\circ$；

(4)$\arctan 1.05$.

解：(1)$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\sqrt[3]{1.02}=\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}0.02=1.0067$.

(2)$(\sin x)'=\cos x,\sin 29^\circ=\sin 30^\circ+\cos 30^\circ\cdot(\frac{-1}{180}\pi)=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{360}=0.485$.

(3)$(\cos x)'=-\sin x,\cos 151^\circ=\cos 150^\circ+(-\sin 150^\circ)\frac{1}{180}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{360}\pi=0.875$.

(4)$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\arctan 1.05=\arctan 1+\frac{1}{1+1^2}\cdot 0.05=\frac{\pi}{4}+0.025=0.810$.

6. 证明近似公式

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}},a>0,$$

其中$|x|\ll a^n$，并利用此公式求下列各式近似值：

(1)$\sqrt[3]{29}$；

(2) $\sqrt[10]{1000}$.

证明：$\mathrm{d}(\sqrt[n]{a^n+x})|_{x=0}=(\sqrt[n]{a^n+x})'|_{x=0}\mathrm{d}x=\frac{1}{n\sqrt[n]{(a^n+x)^{n-1}}}|_{x=0}\mathrm{d}x=\frac{1}{na^{n-1}}\mathrm{d}x$

当$|x|\ll a^n$时，$\sqrt[n]{a^n+x}-\sqrt[n]{a^n+0}\approx\frac{\mathrm{d}(\sqrt[n]{a^n+x})}{\mathrm{d}x}|_{x=0}(x-0)=\frac{1}{na^{n-1}}x$

即$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}$.

(1)$\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{3^3+2}\approx 3+\frac{2}{3\cdot 3^2}=3.074$.

(2) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1.995$.

7. 摆振动的周期T(以s计算)按下式确定：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中l为摆长（以cm计算），$g=980\mathrm{cm/s^2}$，为了使周期T增大0.05s，问：对摆长$l=20\mathrm{cm}$需作多少修改.

解：$T'=2\pi\frac{1}{2\sqrt{gl}}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}$

$\Delta T\approx\mathrm{d}T=T'\mathrm{d}l,\Delta l=\mathrm{d}l\approx\frac{\Delta T}{T'}=\frac{0.05}{\frac{\pi}{\sqrt{980\cdot 20}}}=2.228\mathrm{cm}$，即应将摆长增加2.228cm.

6.4 第4章补充题

1. 设$f(x)=|x|^p\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$，且$f(0)=0$. 试讨论实数$p$满足何种条件时：

(1)$f(x)$在$x=0$连续；

(2)$f(x)$在$x=0$可导；

(3)$f'(x)$在$x=0$连续.

解：(1)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|^p\sin\frac{1}{x}$

当$p>0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，$f(x)$在$x=0$连续

当$p=0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在，故$f(x)$在$x=0$不连续

当$p<0$时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|^{-p}}\sin\frac{1}{x}$不存在，故$f(x)$在$x=0$不连续

所以，当$p>0$时，$f(x)$在$x=0$连续.

(2)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^p\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathrm{sgn}(\Delta x)|\Delta x|^{p-1}\sin\frac{1}{\Delta x}$

当$p>1$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathrm{sgn}(\Delta x)|\Delta x|^{p-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0$，$f(x)$在$x=0$可导

当$p=1$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$不存在，$f(x)$在$x=0$不可导

当$p<1$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathrm{sgn}(\Delta x)|\Delta x|^{1-p}\sin\frac{1}{\Delta x}$不存在，$f(x)$在$x=0$不可导

所以，当$p>1$时，$f(x)$在$x=0$可导，$f'(0)=0$.

$(3)f'(x)=\begin{cases}px^{p-1}\sin\frac{1}{x}+x^p\cos\frac{1}{x}\frac{-1}{x^2}, & x>0\\ -p(-x)^{p-1}\sin\frac{1}{x}+(-x)^p\cos\frac{1}{x}\frac{-1}{x^2}, & x<0\end{cases}$

$=\begin{cases}px^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ -p(-x)^{p-1}\sin\frac{1}{x}-(-x)^{p-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}[px^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}],\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0-}[-p(-x)^{p-1}\sin\frac{1}{x}-(-x)^{p-2}\cos\frac{1}{x}]$

当$p>2$时，$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=f'(0)$

当$2\geq p>1$时，$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)$和$\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)$在$x=0$处不存在

故当$p>2$时，$f'(x)$在$x=0$连续.

2. 设$f'(0)$存在，且$\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x})^{\frac{1}{x}}=e$. 试求$f'(0)$.

解：$\because\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x})}=e$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{1-\cos f(x)}{\sin x})=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{\sin x}=0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}[1-\cos f(x)]=0,\cos f(0)=1,\sin f(0)=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos f(x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos f(0)-\cos f(x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{f(0)+f(x)}{2}\sin\frac{f(0)-f(x)}{2}}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin(\frac{f(0)+f(x)}{2}-f(0))\sin\frac{f(0)-f(x)}{2}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{f(x)-f(0)}{2}\sin\frac{f(0)-f(x)}{2}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{f(x)-f(0)}{2}}{x^2}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[f(x)-f(0)]^2}{2x^2}=\frac{1}{2}[f'(0)]^2=1$

故$f'(0)=\pm\sqrt{2}$.

3. 证明双曲线$xy=a^2$上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于某个常数，并且切点是三角形斜边的中点.

证明：将$xy=a^2$两边求关于x的导数得$y+xy'=0$，即$y'=-\frac{y}{x},x\neq 0,y\neq 0$

该双曲线上任一点(x_0,y_0)处的切线为$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$，纵截距为$2y_0$，横截距为$2x_0$，切线与两坐标轴围成的三角形的面积$S=|4x_0y_0|=4a^2$是常数. 斜边中点$(\frac{2x_0+0}{2},\frac{0+2y_0}{2})=(x_0,y_0)$为切点.

4. 求曲线$y=\frac{1}{x}$与$y=\sqrt{x}$的交角（即交点处的两条曲线的切线的交角）.

解：曲线$y=\frac{1}{x}$与$y=\sqrt{x}$的交点为$(1,1)$，交点处$y=\frac{1}{x}$的切线斜率为$y'(1)=\frac{-1}{x^2}|_{x=1}=-1$，倾斜角为$135°$，$y=\sqrt{x}$的切线斜率为$y'(1)=\frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=1}=\frac{1}{2}$，倾斜角为$\arctan\frac{1}{2}$，则曲线$y=\frac{1}{x}$与$y=\sqrt{x}$的交角为$\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{2}$.

5. 设x,y满足方程$x^3+y^3-3xy=0$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}$.

解：记$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=A$将方程$x^3+y^3-3xy=0$两边同除以$x^3$，两边取$x\to+\infty$的极限得$1+A^3-3A\cdot 0=0$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=A=-1$.**（题目没有给定这个极限存在，所以这种解法不准确，可参考下面的做法。）**

【正确做法：】

令$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi)$代入原方程得

$$r(\theta)^3\cos^3\theta+r(\theta)^3\sin^3\theta-3r(\theta)^2\cos\theta\sin\theta=0,$$

即

$$r(\theta)=\frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta},$$

$\because$当且仅当$\theta\to\frac{3}{4}\pi^-$时$r(\theta)=\frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\to+\infty,\ x=r(\theta)\cos\theta\to+\infty,$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{\theta\to\frac{3}{4}\pi^-}\tan\theta=-1.$

6. 设$y=f(x)$在点x_0三阶可导，且$f'(x_0)\neq 0$. 若存在反函数$x=g(y),y_0=f(x_0)$. 试用$f'(x_0),f''(x_0)$和$f'''(x_0)$表示$g'''(y_0)$.

解：$g'(y)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{f'(x)}$

$g''(y)=\frac{\mathrm{d}g'}{\mathrm{d}y}=\frac{\frac{\mathrm{d}g'}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

$g'''(y)=\frac{\mathrm{d}g''}{\mathrm{d}y}=\frac{\frac{\mathrm{d}g''}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{-\frac{f'''(x)[f'(x)]^3-3[f''(x)]^2[f'(x)]^2}{[f'(x)]^6}}{f'(x)}=\frac{3[f''(x)]^2-f'''(x)f'(x)}{[f'(x)]^5}$

故$g'''(y_0)=\frac{3[f''(x_0)]^2-f'''(x_0)f'(x_0)}{[f'(x_0)]^5}$.

7. 设$f(a)>0,f'(a)$存在，求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)})^n$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)})^n=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)})^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}}]^{\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}f(a)}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

8. 设曲线$y=f(x)$在原点与$y=\sin x$相切，试求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt{f(\frac{2}{n})}.$$

解：因为曲线$y=f(x)$在原点与$y=\sin x$相切

$\therefore f(0)=\sin 0=0, f'(0)=(\sin x)'|_{x=0}=1$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt{f(\tfrac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}.$$

9. 构造函数$f(x)$，使它在点$x=0$处可导，在其他任意点都不连续.

解：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}.$