8 极值、图形、泰勒公式

8.1 知识结构

第5章用导数研究函数

5.3 函数极值及其应用

5.3.1 函数的极值

5.3.2 函数的最小值和最大值问题

5.3.3 应用问题

5.4 函数图形的描绘

5.4.1 曲线的凸性

5.4.2 函数作图

5.5 泰勒公式及其应用

5.5.1 函数在一点的泰勒公式

5.5.2 泰勒公式的若干应用

8.2 习题5.3解答

1. 求下列函数的极值：

(1)$y=\frac{2x}{1+x^2}$；

(2)$y=x+\frac{1}{x}$；

(3)$y=\frac{(\ln x)^2}{x}$；

(4)$y=\sin^3 x+\cos^3 x$.

解：(1)$\because y'=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

$\therefore$当$x<-1$时$y'<0$，当$-1<x<1$时$y'>0$，当$x>1$时$y'<0$

$\therefore x=-1$是函数的极小值点，极小值为$y=-1$，$x=1$是函数的极大值，极大值为$y=1$.

(2)$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$\therefore$当$x<-1$时$y'>0$，当$-1<x<0$时$y'<0$，当$0<x<1$时$y'<0$，当$x>1$时$y'>0$

$\therefore x=-1$是函数的极大值点，极大值为$y=-2$，$x=1$是函数的极小值点，极小值为$y=2$.

(3)$y' = \frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$

$y'' = \frac{(\frac{2}{x}-\frac{2}{x}\ln x)x^2-[2\ln x-(\ln x)^2]2x}{x^4} = \frac{(2-2\ln x)-[2\ln x-(\ln x)^2]2}{x^3} = \frac{2-6\ln x+2(\ln x)^2]}{x^3}$

令$y'=0$得$x=1$或$x=e^2$，$y''(1)=2>0, y''(e^2)=-\frac{2}{e^2}<0$

$\therefore\ x = 1$是函数的极小值点，极小值为$y=0$，$x=e^2$是函数的极大值点，极大值为$y=\frac{4}{e^2}$.

(4)$y' = 3\sin^2 x\cos x - 3\cos^2 x\sin x = 3\sin x\cos x(\sin x-\cos x) = \frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)$

$y'' = 3\cos 2x(\sin x-\cos x)+\frac{3}{2}\sin 2x(\cos x+\sin x)$

令$y'=0$得$x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$或$x=\frac{\pi}{4}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$

$$y''(\frac{k\pi}{2}) = 3\cos(k\pi)(\sin\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{k\pi}{2}) = \begin{cases} -3, & k=4i \\ -3, & k=4i+1 \\ 3, & k=4i+2 \\ 3, & k=4i+3 \end{cases}, i\in\mathbb{Z}$$

$$y''(\frac{\pi}{4}+n\pi) = \frac{3}{2}[\cos(\frac{\pi}{4}+n\pi)+\sin(\frac{\pi}{4}+n\pi)] = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{2}, & n=2j \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}, & n=2j-1 \end{cases}, i\in\mathbb{Z}$$

$\therefore x=\frac{k\pi}{2}, k=4i$或$4i+1, i\in\mathbb{Z}, x=\frac{\pi}{4}+n\pi, n=2j-1, j\in\mathbb{Z}$是函数的极大值点，极大值为$y=1$和$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\frac{k\pi}{2}, k=4i+2$或$4i+3, i\in\mathbb{Z}, x=\frac{\pi}{4}+n\pi, n=2j, j\in\mathbb{Z}$是函数的极小值点，极小值为$y=-1$和$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求下列函数在所给区间上的最大值与最小值：

(1)$y=x^5-5x^4+5x^3+1, x\in[-1,2]$；

(2)$f(x)=|x^2-3x+2|, x\in[-10,10]$；

(3)$y=\sqrt{x}\ln x, x\in(0,+\infty)$.

解：(1)$y' = 5x^4-20x^3+15x^2 = 5x^2(x^2-4x+3) = 5x^2(x-1)(x-3)$

$\therefore$函数在$[-1,2]$内的驻点为$x=0, x=1$

$\because y(-1)=-10, y(0)=1, y(1)=2, y(2)=-7$

$\therefore$函数在$[-1,2]$上的最小值为-10，最大值为2.

$$(2)f(x) = |(x-1)(x-2)| = \begin{cases} x^2-3x+2, & x>2\text{或}x<1 \\ -x^2+3x-2, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & x>2\text{或}x<1 \\ -2x+3, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

令$f'(x)=0$得$[-10,10]$内的驻点$x=\frac{3}{2}$

$f(-10)=132, f(1)=0, f(2)=0, f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}, f(10)=72$

$\therefore f(x)$在$[-10,10]$上的最大值为132，最小值为0.

$(3) y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}\ln x+1)$

令$y'=0$得$x=e^{-2}$

当$x<e^{-2}$时$y'<0$，当$x>e^{-2}$时$y'>0$

$\therefore x=e^{-2}$是函数在区间$(0,+\infty)$上的唯一驻点，且是极小值，故$y(e^{-2})=-2e^{-1}$是函数在区间上的最小值，该函数无最大值。

3. 数列$\{n^{\frac{1}{n}}\}(n=1,2,\cdots)$中哪一项最大？

   解：令$f(x)=x^{\frac{1}{x}}, x>0$，$f'(x)=f(x)(\ln f(x))'=x^{\frac{1}{x}}(\frac{\ln x}{x})'=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$

   当$x=e$时$f'(e)=0$，当$0<x<e$时$f'(x)>0$，当$x>e$时$f'(x)<0$，故$x=e$是函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的唯一驻点，且是极大值点，故$x=e$是函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值点

   $\because f(2)=\sqrt{2}<f(3)=\sqrt[3]{3}$

   $\therefore$数列$\{n^{\frac{1}{n}}\}(n=1,2,\cdots)$中$a_3$最大.

4. 求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$而边平行于坐标轴的面积最大的矩形.

   解：考虑在第一象限内内接矩形与椭圆的交点$(x,y)=(x,b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})$，该内接矩形的面积为$f(x)=4bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, 0<x<a$

   $f'(x)=4b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+4bx\frac{-\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=4b\frac{1-\frac{2x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$

   令$f'(x)=0$得$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$，当$0<x<\frac{a}{\sqrt{2}}$时，$f'(x)>0$，当$\frac{a}{\sqrt{2}}<x<a$时，$f'(x)<0$

   $\therefore x=\frac{a}{\sqrt{2}}$是$f(x)$在区间$(0,a)$上的唯一驻点，且是极大值点，故是最大值点

   $\therefore$求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$而边平行于坐标轴的面积最大的矩形是第一象限的顶点为$(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b)$的矩形.

5. 甲船以20km/h的速度向东航行，正午时在其北面82km处有乙船以16km/h的速度向南航行，问何时两船相距最近？

   解：设正午时甲船在坐标原点$(0,0)$处，乙船在y轴上$(0,82)$点处，则在正午之后时刻t，甲船的位置为$(20t,0)$，乙船位置为$(0,82-16t)$

   两船的距离$f(x)=\sqrt{(20t)^2+(82-16t)^2}, t>0$

   $f'(t)=\frac{800t-2(82-16t)\cdot 16}{2\sqrt{(20t)^2+(82-16t)^2}}=\frac{656(t-2)}{\sqrt{(20t)^2+(82-16t)^2}}$

   当$t=2$时$f'(t)=0$，当$0<t<2$时$f'(t)>0$，当$t>2$时$f'(t)<0$

$\therefore t=2$是$f(t)$在$(0,+\infty)$上的唯一驻点，且是极大值点，故是最大值点

$\therefore$正午之后两小时，即下午2时两船相距最近.

6. 用一块半径为r的圆形铁皮，剪去一块圆心角为α的圆扇形后做成一个漏斗，问α取何值时漏斗的容积最大？

解：漏斗的底面周长为$(2\pi-\alpha)r$，底面半径$R=\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}r$，高为$h=\sqrt{r^2-R^2}=r\sqrt{1-(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi})^2}$，记$\beta=\frac{2\pi-\alpha}{2\pi},0<\alpha<2\pi,0<\beta<1$

漏斗容积$f(\beta)=\frac{1}{3}h\pi R^2=\frac{1}{3}\pi(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}r)^2r\sqrt{1-(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi})^2}=\frac{1}{3}\pi r^3\beta^2\sqrt{1-\beta^2}$

$f'(\beta)=\frac{1}{3}\pi r^3[2\beta\sqrt{1-\beta^2}+\beta^2\frac{-2\beta}{2\sqrt{1-\beta^2}}]=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{\beta(2-3\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$

当$\beta=\sqrt{\frac{2}{3}}$时$f'(\beta)=0$，当$0<\beta<\sqrt{\frac{2}{3}}$时$f'(\beta)>0$，当$\sqrt{\frac{2}{3}}<\beta<1$时$f'(\beta)<0$

$\therefore \beta=\sqrt{\frac{2}{3}}$是函数在区间$(0,1)$内的唯一驻点，且是极大值点，故是最大值点

故当$\alpha=2\pi-2\pi\beta=2\pi(1-\sqrt{\frac{2}{3}})$时漏斗的容积最大.

7. 用铝板（不考虑厚度）制作一个容积为$1000\mathrm{m}^3$的圆柱形封闭的油罐. 底面半径为r，高为h. 问r取何值时，所用铝板最少？此时高h与半径r的比值是多少？

解：底面半径r、高h之间满足$h\pi r^2=1000$，即$h=\frac{1000}{\pi r^2}$

铝板面积$f(r)=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r(h+r)=2\pi r(\frac{1000}{\pi r^2}+r)=\frac{2000}{r}+2\pi r^2,r>0$

$f'(r)=-\frac{2000}{r^2}+4\pi r$

令$f'(r)=0$得$r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$，当$0<r<\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$时$f'(r)<0$，当$r>\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$时$f'(r)>0$

$\therefore r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$是$f(r)$在$(0,+\infty)$上的唯一驻点，且是极小值点，故是最小值点，此时$\frac{h}{r}=\frac{1000}{\pi r^3}=2$.

8. 已知甲乙两城相距1000km. 一架动力飞艇以匀速v(km/h)从甲城飞往乙城. 飞艇每小时的燃料消耗与v的立方成正比，比例常数为$k(k>0)$. 飞行中有20km/h的逆风. 问v等于何值时飞艇燃料总消耗最小？

解：飞艇的燃料总消耗为$f(v)=\frac{1000}{v-20}kv^3,v>20$

$f'(v)=\frac{3000kv^2(v-20)-1000kv^3}{(v-20)^2}=1000kv^2\frac{2v-60}{(v-20)^2}$

当$v=30$时$f'(30)=0$，当$20<v<30$时$f'(v)<0$，当$v>30$时，$f'(v)>0$，故$v=30$是$f(v)$在$(20,+\infty)$上的唯一驻点，且是极小值点，故是最小值点，即$v=30\mathrm{km/h}$时飞艇燃料总消耗最小.

9. 将长度等于a的铁丝分成两段，一段围成正方形，一段围成圆形，问两段铁丝各为多长时，正方形面积与圆形面积之和最小？

解：设围成正方形的铁丝长度为x，则围成圆形的铁丝长度为$a-x$，正方形面积和圆形面积之和$f(x)=(\frac{x}{4})^2+\pi(\frac{a-x}{2\pi})^2=\frac{x^2}{16}+\frac{(a-x)^2}{4\pi},0<x<a$

$f'(x)=\frac{x}{8}-\frac{a-x}{2\pi}$

令$f'(x)=0$得$x=\frac{4a}{\pi+4}$，当$0<x<\frac{4a}{\pi+4}$时$f'(x)<0$，当$x>\frac{4a}{\pi+4}$时$f'(x)>0$，故$x=\frac{4a}{\pi+4}$是$f(x)$在$(0,a)$内的唯一驻点，且是极小值点，故是最小值点. 即正方形和圆形铁丝长度分别为$\frac{4a}{\pi+4}$和$\frac{\pi a}{\pi+4}$时，正方形面积与圆形面积之和最小.

10. 建造一个容积为$300\mathrm{m}^3$有盖圆筒，如何确定底面半径r和桶高h才能使得所用材料最省？

解：底面半径r和桶高h应满足$\pi r^2h=300$，材料的总面积$f(r)=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\frac{300}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{600\pi}{r},r>0$

$f'(r)=4\pi r-\frac{600\pi}{r^2}$

令$f'(r)=0$得$r=\sqrt[3]{150}$，当$0<r<\sqrt[3]{150}$时$f'(r)<0$，当$r>\sqrt[3]{150}$时$f'(r)>0$，故$r=\sqrt[3]{150}$是$f(r)$在$(0,+\infty)$内的唯一驻点，且是极小值点，故是最小值点.

故当底面半径$r=\sqrt[3]{150}$，高$h=\frac{300}{\pi(\sqrt[3]{150})^2}=\frac{2\sqrt[3]{150}}{\pi}$.

11. 设D是由曲线$y=\sqrt{x}$，直线$x=9$以及x轴围成的区域. 在D作一个邻边分别平行于两坐标轴的矩形，使得矩形的面积最大.

解：要使该矩形的面积最大，则矩形的底边应在x轴上，右侧边应在直线$x=9$上，左上顶点应在曲线$y=\sqrt{x}$上，设左上顶点为$(x,\sqrt{x})$，则矩形面积为$f(x)=(9-x)\sqrt{x}$，$f'(x)=-\sqrt{x}+\frac{9-x}{2\sqrt{x}},0<x<9$

令$f'(x)=0$得$x=3$，当$0<x<3$时$f'(x)>0$，当$x>3$时$f'(x)<0$，故$x=3$是$f(x)$在$(0,9)$上的唯一驻点，且是极大值点，故是最大值点.

故当矩形的底边在x轴上，右侧边在直线$x=9$上，左上顶点为$(3,\sqrt{3})$时，矩形的面积最大.

8.3 习题5.4解答

1. 确定下列函数的上凸和下凸区间与拐点：

(1)$y=3x^2-x^3$；

(2)$y=\ln(x^2+1)$；

(3)$y=x+\sin x$；

(4)$y=x^2+\frac{1}{x}$.

解：(1)$y'=6x-3x^2,y''=6-6x$

令$y'=0$得$x=1$，当$x<1$时$y''>0$，当$x>1$时$y''<0$

故函数的下凸区间为$(-\infty,1)$，上凸区间为$(1,+\infty)$，拐点为$(1,2)$.

(2)$y'=\frac{2x}{x^2+1},y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

当$x=-1$或$x=1$时$y''=0$，当$x<-1$或$x>1$时$y''<0$，当$-1<x<1$时$y''>0$

故函数的下凸区间是$(-1,1)$，上凸区间是$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$，拐点是$(-1,\ln 2)$和$(1,\ln 2)$.

(3)$y'=1+\cos x,y''=-\sin x$

令$y''=0$得$x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$，当$((2n-1)\pi,2n\pi),n\in\mathbb{Z}$时$y''>0$，当$(2n\pi,(2n+1)\pi),n\in\mathbb{Z}$时$y''<0$

故函数的下凸区间是$((2n-1)\pi,2n\pi),n\in\mathbb{Z}$，上凸区间是$(2n\pi,(2n+1)\pi),n\in\mathbb{Z}$，拐点是$(k\pi,k\pi),k\in\mathbb{Z}$.

(4)$y'=2x-\frac{1}{x^2},y''=2+\frac{2}{x^3}$

令$y''=0$得$x=-1$，当$x<-1$或$x>0$时$y''>0$，当$-1<x<0$时$y''<0$

故函数的下凸区间是$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$，上凸区间是$(-1,0)$，拐点是$(-1,0)$.

2. 证明下列不等式（并讨论等号成立的条件）：
(1)$a^{\frac{x_1+x_2}{2}}\le\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2}),a>0,x_1,x_2\in\mathbb{R}$；
(2)$(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^p\le\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}$，其中$p\ge 1,x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0$；
(3)$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\le a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，其中$x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0,a_1,a_2,\cdots,a_n\ge 0$，且$\sum_{i=1}^n a_i=1$.

首先证明命题：已知函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内二阶可导，且$f''(x)>0$．若$x_1,x_2,\cdots,x_n$是区间$[a,b]$中任意$n(n\ge 2)$个点，满足$x_1<x_2<\cdots<x_n$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是满足$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$的$n$个正实数，则$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\lambda_nx_n)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$．(注意这里是小于号，也就是二阶导数大于零的函数严格下凸，严格上凸也有类似结论．因为题目要求讨论等号成立的条件，这个命题告诉我们什么时候可以不取等号.)

证明：$\because f''(x)>0$

$\therefore f'(x)$**在**(a,b)**上严格单调增加，这是因为由**$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}>0$**知存在**$\delta>0,s.t.$**当**$\delta>\Delta x>0$**时**$f'(x+\Delta x)>f'(x)$

对于$x_1,x_2\in[a,b],x_1<x_2$**和**$\lambda_1,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2<0$**，**

$$\begin{aligned}
&\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)-f(\lambda_1x_2+\lambda_2x_2)\\
=&\lambda_1[f(x_1)-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)]+\lambda_2[f(x_2)-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)]\\
=&\lambda_1f'(\xi_1)(x_1-\lambda_1x_1-\lambda_2x_2)+\lambda_2f'(\xi_2)(x_2-\lambda_1-\lambda_2x_2)\\
=&\lambda_1f'(\xi_1)\lambda_2(x_1-x_2)+\lambda_2f'(\xi_2)\lambda_1(x_2-x_1)\\
=&\lambda_1\lambda_2(x_2-x_1)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]>0,x_1<\xi_1<\lambda_1x_1+\lambda_2x_2<\xi_2<x_2
\end{aligned}$$

故$\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)>f(\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_2)$

假设当$n=k,k>2$时命题成立，即对于区间$[a,b]$中的任意k个点$x_1<x_2<\cdots<x_k$和满足$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$的正数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_kf(x_k)$

当$n=k+1$时，对于区间$[a,b]$中的任意$k+1$个点$x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}$和满足$\sum_{i=1}^{k+1}\mu_i=1$的正数$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k,\mu_{k+1}$

$$
\begin{aligned}
&\mu_1x_1+\mu_2x_2+\cdots+\mu_kx_k+\mu_{k+1}x_{k+1}\\
=&f(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\cdots+(\mu_k+\mu_{k+1})(\frac{\mu_k}{\mu_k+\mu_{k+1}}x_k+\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k+\mu_{k+1}}x_{k+1}))\\
<&\mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)+\cdots+(\mu_k+\mu_{k+1})f(\frac{\mu_k}{\mu_k+\mu_{k+1}}x_k+\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k+\mu_{k+1}}x_{k+1})\\
<&\mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)+\cdots+(\mu_k+\mu_{k+1})[\frac{\mu_k}{\mu_k+\mu_{k+1}}f(x_k)+\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k+\mu_{k+1}}f(x_{k+1})]\\
=&\mu_1f(x_1)+\mu_2f(x_2)+\cdots+\mu_kf(x_k)+\mu_{k+1}f(x_{k+1}).
\end{aligned}
$$

证毕.

解：(1)i)当$a=1$或$x_1=x_2$时，不等式取等号；

ii)当$a\neq1$且$x_1\neq x_2$时，令$f(x)=a^x,f'(x)=a^x\ln a,f''(x)=a^x(\ln a)^2>0$，函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格下凸，则$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，即$a^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2})$.

(2)i)当$p=1$或$x_1=x_2=\cdots=x_n$时取等号；

ii)当$p>1$且$x_1,x_2,\cdots,x_n$不全相等时$f(x)=x^p,f'(x)=px^{p-1},f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0,(x>0)$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上下凸，则$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$，即$(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^p<\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}$. 证毕.

(课上讲到下面过程的原因是，我原来没注意到定理中只要在开区间(a,b)内有$f''(x)>0$就有在闭区间$[a,b]$上严格下凸，实际上不需要下面的过程. 但这里也算是提供给大家一种处理边界点的思路：

当$x_1,x_2,\cdots,x_n$中有$k(0<k<n)$个为零时，不等式左边$=(\frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}{k})^p(\frac{k}{n})^p<\frac{k}{n}(\frac{x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_k}}{k})^p<\frac{k}{n}\frac{x_{i_1}^p+x_{i_2}^p+\cdots+x_{i_k}^p}{k}=\frac{x_{i_1}^p+x_{i_2}^p+\cdots+x_{i_k}^p}{n}=\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}=$右边.)

(3)i)当$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$时取等号；

ii)当$x_1,x_2,\cdots,x_n$中有k个为零时，不妨设$x_1=x_2=\cdots=x_k=0,x_{k+1},\cdots,x_n>0$. (a)若$a_{k+1}=\cdots=a_n=0$则取等号，(b)若$a_{k+1},\cdots,a_n$不全为零，则不等式左边小于右边；

iii)当$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$时，令$f(x)=\ln x,f'(x)=\frac{1}{x},f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,x>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是上凸函数. (a)若$a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少有两个大于0，则$f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)>$

$a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)$，即$\ln(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)>a_1\ln(x_1)+a_2\ln(x_2)+\cdots+a_n\ln(x_n)=\ln(x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n})$，即$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}<a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$. (b)若$a_1,a_2,\cdots,a_n$中只有一个等于1，其余等于0，则$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$.

上述分类可以表示为下面的树形图：

- $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$
- $x_1,x_2,\cdots,x_n$不全为零
  - $x_i\neq 0,a_i=0$
  - $\exists x_i\neq 0,a_i\neq 0$
- $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$
  - $a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少有两个大于0
  - $a_1,a_2,\cdots,a_n$一个为1其余为0

对于这种问题，同时考虑$x_i,i=1,2,\cdots,n$和$a_i,i=1,2,\cdots,n$的分类不太容易．可首先对$x_i,i=1,2,\cdots,n$进行分类，在每个x_i类别之下考虑$a_i,i=1,2,\cdots,n$的分类，这样会容易一些．这也可以视为分而治之（Divide and conquer）思想的一个应用，先找到一个分类，在每一种类别之下剩余的问题可以更简单．

3. 作下列函数的图形：

(1)$y=x^3+6x^2-15x-20$；

(2)$y=\frac{3x}{1+x^2}$；

(3)$y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

(4)$y=x+\arctan x$.

解：(1)i)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$

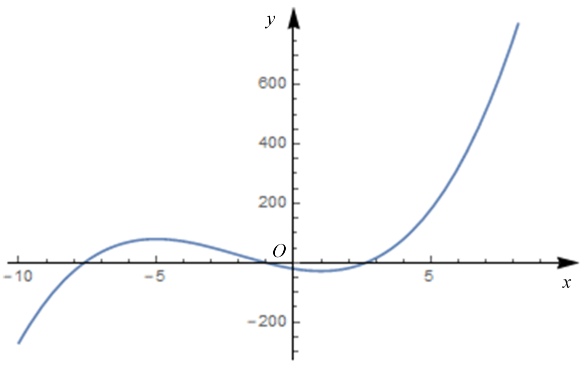
ii)曲线无铅直渐近线，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+6x^2-15x-20)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+6x^2-15x-20)=-\infty$故无水平渐近线，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+6x^2-15x-20}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+6x^2-15x-20}{x}=-\infty$，故无斜渐近线；

iii)$y'=3x^2+12x-15=3(x^2+4x-5)=3(x+5)(x-1),y''=6x+12$，令$y'=0$得$x=-5$或$x=1$，$y''(-5)=-18<0,y''(1)=18>0$，故$(-5,80)$是函数的极大值点，$(1,-28)$是函数的极小值点，当$x=-2$时$y''=0$，故$(-2,26)$是函数的拐点

iv)当$x<-5$时$y'>0,y''<0$，函数单调增加且上凸，当$-5<x<-2$时$y'<0,y''$，当$x>1$时$y'<0,y''<0$函数单调减少且上凸，当$-2<x<1$时$y'<0,y''>0$函数单调减少且下凸，当$x>1$时$y'>0,y''>0$函数单调增加且上凸，如下表所示：

x	$-\infty$	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y''		-	0	-		+	0	+	
y	$-\infty$	上凸↗	极大值80	上凸↘	拐点	下凸↘	极小值-28	下凸↗	$+\infty$

可据此画出函数的略图.



(2)i)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，为奇函数故可仅对$[0,+\infty)$区间进行分析；

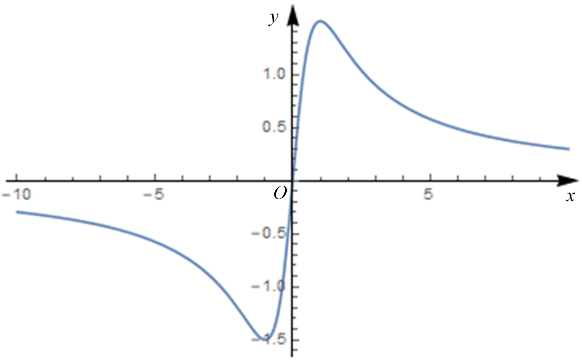
ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{1+x^2}=0$，故水平渐近线为$y=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{3}{1+x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x}{1+x^2}-0)=0$，故无斜渐近线；

iii)$y'=\frac{3(1+x^2)-3x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{3(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}, y''=\frac{-6x(1+x^2)^2-[-3x^2\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{-6x(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^3}$.
令$y'=0$得$x=-1$或$x=1$，令$y''=0$得$x=-1$或$x=1$，函数的拐点为$(-1,-\frac{3}{2})$和$(1,\frac{3}{2})$；

iv)当$x<-1$时$y'<0, y''>0$，函数单调减少且下凸，当$-1<x<1$时$y'>0, y''<0$，函数单调增加且上凸，当$x>1$时$y'<0, y''>0$，函数单调减少且下凸. 故$(-1,-\frac{3}{2})$是函数的极小值点，$(1,\frac{3}{2})$是函数的极大值点. 如下表所示：

x	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y''		+	0	-	0	+	
y	0	下凸↘	极小值$-\frac{3}{2}$、拐点	上凸↗	极大值$\frac{3}{2}$、拐点	下凸↘	1

可据此画出函数的略图.



(3)i)由$\frac{1+x}{1-x}>0$得函数的定义域为$(-1,1)$，$y(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-y(x)$，故函数为奇函数；

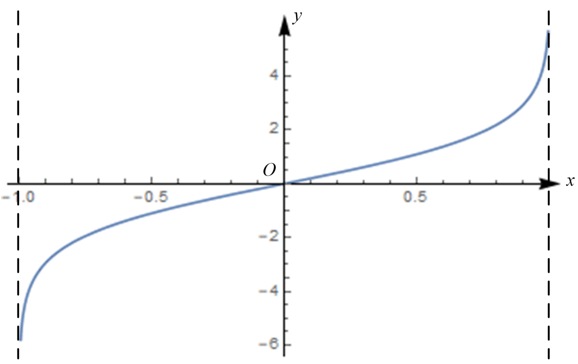
ii) $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\frac{1+x}{1-x}=\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\frac{1+x}{1-x}=-\infty,\lim\limits_{x\to1^-}\ln\frac{1+x}{1-x}=+\infty$，故函数有两条铅直渐近线$x=-1,x=1$；

iii)$y'=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{(1-x)(1+x)}>0,y''=\frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{4x}{(1-x)^2(1+x)^2}$，当$x=0$时$y''=0$，故函数的拐点为$(0,0)$；

iv)当$-1<x<0$时$y''<0$，函数单调增加且上凸，当$0<x<1$时，函数单调减少且下凸. 如下表所示：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
y'		$+$	2	$+$	
y''		-	0	$+$	
y	$-\infty$	上凸$\nearrow$	拐点	下凸$\nearrow$	$+\infty$

可据此画出函数的略图.



(4)i)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，易知函数为奇函数；

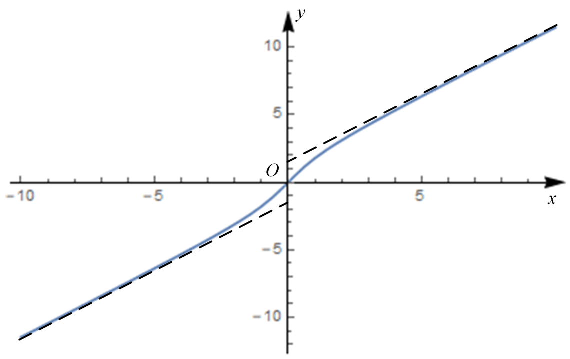
ii)函数无铅直渐近线，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\arctan x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\arctan x)=-\infty$，故无水平渐近线，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，故有斜渐近线$y=x+\frac{\pi}{2}$和$y=x-\frac{\pi}{2}$；

iii)$y'=1+\frac{1}{1+x^2}>0, y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，函数有一个拐点$(0,0)$；

iv)当$x<0$时$y''>0$函数单调增加且下凸，当$x>0$时$y''<0$，函数单调增加且下凸. 如下表所示：

x	$-\infty$	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$	$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y''		-	0	$+$	
y	$x-\frac{\pi}{2}$	上凸$\nearrow$	拐点	下凸$\nearrow$	$x+\frac{\pi}{2}$

可据此画出函数的略图.



4. 已知$y=f(x)$是由方程$y^3-x^3+2xy=0$所确定的隐函数，设曲线$y=y(x)$有斜渐近线$y=ax+b$，求a,b.

解：$\because$曲线有斜渐近线

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=a$存在

将方程$y^3-x^3+2xy=0$两边同除以x^3并取极限得$a^3-1-0=0$，故$a=1$

将$y^3-x^3+2xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)+2xy=0$两边同除以$x^2$并取极限得$[\lim\limits_{x\to+\infty}(x-y)](1+a+a^2)+2a=0$，故$b=-\lim\limits_{x\to+\infty}(x-y)=\frac{-2a}{1+a+a^2}=-\frac{2}{3}$.

8.4 习题5.5解答

1. 按指定次数写出下列函数在指定点的泰勒多项式：

(1)$f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}, x_0=0$，展到4次；

(2)$f(x)=\ln\cos x, x_0=0$，展到6次；
(3)$f(x)=\sqrt{x}, x_0=1$，展到4次；
(4)$f(x)=1+2x-4x^2+x^3+6x^4, x_0=1$，展到6次；
(5)$f(x)=\frac{x}{x-1}, x_0=2$，展到$n$次；
(6)$f(x)=x^3\ln x, x_0=1$，展到5次.

解：(1)方法1：$f(x)(1-x+x^2)=1+x+x^2, f(0)=1$

$f'(x)(1-x+x^2)+f(x)(-1+2x)=1+2x, f'(0)=2$

$f''(x)(1-x+x^2)+2f'(x)(-1+2x)+f(x)2=2, f''(0)=4$

$f'''(x)(1-x+x^2)+3f''(x)(-1+2x)+3f'(x)2=0, f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)(1-x+x^2)+4f'''(x)(-1+2x)+6f''(x)2=0, f''''(0)=-48$

$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''''(0)}{4!}x^4+o(x^4)=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4).$

方法2：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\frac{(1+x+x^2)(x-1)}{(1-x+x^2)(x+1)}\frac{x+1}{x-1}\\
&=\frac{x^3-1}{x^3+1}\frac{x+1}{x-1}=(1-\frac{2}{1+x^3})(1-\frac{2}{1-x})\\
&=\{1-2[\sum_{k=0}^{n}(-x^3)^k+o(x^{3n})]\}\{1-2[\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)]\}\\
&=\{1-2[1-x^3+o(x^4)]\}\{1-2[1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4)]\}\\
&=[-1+2x^3+o(x^4)][-1-2x-2x^2-2x^3-2x^4+o(x^4)]\\
&=1+2x+2x^2+(2-2)x^3+(2-4)x^4+o(x^4)\\
&=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

(2)方法1：$f(x)=\ln\cos x, f(0)=0$

$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x, f'(0)=0$

$f''(x)=-\sec^2 x, f''(0)=-1$

$f'''(x)=-2\sec x\sec x\tan x=2\sec^2 x\tan x, f'(0)=0$

$f^{(4)}(x)=-4\sec x\sec x\tan x\tan x-2\sec^2 x\sec^2 x=-2\sec^2 x(2\tan^2 x+\sec^2 x), f''''(0)=-2$

$f^{(5)}(x)=-4\sec x\sec x\tan x(2\tan^2 x+\sec^2 x)-2\sec^2 x(4\tan x\sec^2 x+2\sec x\sec x\tan x)=-4\sec^2 x\tan x(2\tan^2 x+\sec^2 x)-2\sec^2 x(6\tan x\sec^2 x)=-8\sec^2 x\tan^3 x-16\sec^4 x\tan x=-8\sec^2 x\tan x(\tan^2 x+2\sec^2 x), f^{(5)}(0)=0$

$f^{(6)}=-(16\sec x\tan x+8\sec^4 x)(\tan^2 x+2\sec^2 x)-8\sec^2 x\tan x(2\tan x\sec^2 x+4\sec x\sec x\tan x), f^{(6}$
-16

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$

方法2：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\cos x-1)^k+o((\cos x-1)^n)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}[\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{2i}}{(2i)!}x^{2i}+o(x^{2m+1})-1]^k+o(x^{2mn})\\
&=\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k-1}}{k}[-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)]^k+o(x^{18})\\
&=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)-\frac{1}{2}[\frac{1}{4}x^4-2\cdot\frac{1}{2!\cdot 4!}x^6+o(x^6)]+\frac{1}{3}[-\frac{1}{8}x^6+o(x^6)]+o(x^{18})\\
&=-\frac{1}{2}x^2+(\frac{1}{24}-\frac{1}{8})x^4+(-\frac{1}{720}+\frac{1}{48}-\frac{1}{24})x^6+o(x^6)\\
&=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).
\end{aligned}$$

(3)方法1：$f(x)=\sqrt{x}, f(1)=1$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(1)=\frac{1}{2}$

$f''(x)=\frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}, f''(1)=-\frac{1}{4}$

$f'''(x)=\frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}, f'''(1)=\frac{3}{8}$

$f^{(4)}=\frac{-15}{16x^{\frac{7}{2}}}, f^{(4)}=-\frac{15}{16}$

$\therefore f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+o(x^4)=$
$1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}(x-1)^4+o((x-1)^4).$

方法2：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{x}=\sqrt{1+(x-1)}\\
&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(x-1)^k+o((x-1)^n)\\
&=1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(x-1)^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6}(x-1)^3+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{24}(x-1)^4\\
&\quad+o((x-1)^4)\\
&=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3-\frac{5}{128}(x-1)^4+o((x-1)^4)
\end{aligned}$$

(4)$f(x)=1+2x-4x^2+x^3+6x^4, f(1)=1+2-4+1+6=6$

$f'(x)=2-8x+3x^2+24x^3, f'(1)=2-8+3+24=21$

$f''(x)=-8+6x+72x^2, f''(1)=-8+6+72=70$

$f'''(x)=6+144x, f'''(1)=150$

$f^{(4)}(x)=144$

$f^{(5)}(x)=0$

$f^{(6)}(x)=0$

$f(x)=6+21(x-1)+35(x-1)^2+25(x-1)^3+6(x-1)^4+o((x-1)^6)$.

(5)$f(x)=\frac{x}{x-1}, f(2)=2$

$f'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}, f'(2)=-1$

$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}, f''(2)=2$

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

$f(x)=f(2)+\sum_{k=1}^n\frac{f^{(k)}}{k!}(x-1)^k=2+\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k k!}{k!}(x-1)^k=2+\sum_{k=1}^n(-1)^k(x-1)^k$.

方法2：

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}&=1+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{1+(x-2)}\\&=1+\sum_{k=0}^n[-(x-2)]^k+o((x-2)^n)\\&=2+\sum_{k=1}^n[-(x-2)]^k+o((x-2)^n)\end{aligned}$$

(6)方法1：$f(x)=x^3\ln x, f(1)=0$

$f'(x)=3x^2\ln x+x^3\frac{1}{x}=x^2(3\ln x+1), f'(1)=1$

$f''(x)=2x(3\ln x+1)+x^2\frac{3}{x}=x(6\ln x+5), f''(1)=5$

$f'''(x)=6\ln x+5+x\frac{6}{x}=6\ln x+11, f'''(1)=11$

$f^{(4)}(x)=\frac{6}{x}, f^{(4)}(1)=6$

$f^{(5)}(x)=-\frac{6}{x^2}, f^{(5)}(1)=-6$

$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+\frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5+o((x-1)^5)=(x-1)+\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{11}{6}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4-\frac{1}{20}(x-1)^5+o((x-1)^5)$.

方法2：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3\ln x = [1+(x-1)]^3\ln[1+(x-1)] \\
&= [1+3(x-1)+\frac{3\cdot 2}{2!}(x-1)^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!}(x-1)^3][\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k+o((x-1)^n)] \\
&= [1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3][(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4 \\
&\quad +\frac{1}{5}(x-1)^5+o((x-1)^5)] \\
&= (x-1)+(3-\frac{1}{2})(x-1)^2+(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+3)(x-1)^3+(1-\frac{3}{2}+1-\frac{1}{4})(x-1)^4 \\
&\quad +(-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+\frac{1}{5})(x-1)^5+o((x-1)^5) \\
&= (x-1)+\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{11}{6}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4-\frac{1}{20}(x-1)^5+o((x-1)^5).
\end{aligned}
$$

2. 设函数$f(x)$在点x_0附近有$n+1$阶连续导数且$f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0, f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，证明：若$n$为奇数，则点$x_0$是$f(x)$的极值点；若$n$为偶数，则点$x_0$不是$f(x)$的极值点.

证明：**方法1**：$\because$ $f(x)$在点x_0附近有$n+1$阶连续导数且$f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0, f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$

$\therefore$在x_0的某个去心邻域$N^*(x_0)$内$f^{(n+1)}(x)\neq 0$且在该邻域内$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$介于$x$和$x_0$之间

正确做法：当n为奇数时，在$N^*(x_0)$内$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$与$f^{(n+1)}(\xi)$同号，故$x_0$是$f(x)$的极值点；当$n$为偶数时，在$N^*(x_0)$内$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$在$x_0$两侧异号，故$x_0$不是$f(x)$的极值点.

可能有问题的做法：$\therefore f'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$

当n为偶数时$f'(x)$在x_0两侧附近同号，故点x_0不是$f(x)$的极值点；当n为奇数时$f'(x)$在x_0两侧附近异号，故点x_0是$f(x)$的极值点.

这样做可能有问题，因为$f^{(n+1)}(\xi)$与x有关，求导后不一定等于0，即$f'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n+(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!})'(x-x_0)^{n+1}$

方法2：由$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$及$f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0, f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$可知

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^{n+1}),$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\neq 0$$

由极限的保号性知存在x_0的去心邻域$N^*(x_0)$，在该邻域内$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}$与$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$同号. 当$n$是奇数时，$f(x)-f(x_0)$与$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$非零同号，故$x_0$是$f(x)$的极值点；当$n$是偶数时，$f(x)-f(x_0)$在$x_0$两侧异号，故$x_0$不是$f(x)$的极值点.

注意：方法2可去掉导数连续这个条件，只需要函数在x_0点处有$n+1$阶连续导数，不需要$n+1$阶导数在x_0附近连续，方法1则利用了$n+1$阶导数在x_0附近连续这个条件.

3. 用泰勒公式进行计算：
(1) $\sqrt[12]{4000}$，精确到10^{-4}；
(2)$\ln 1.02$，精确到10^{-5}.

解：(1)令$f(x)=\sqrt[12]{4096-96}=\sqrt[12]{2^{12}-96}=2(1-\frac{96}{4096})^{\frac{1}{12}}$，$f(x)$在$x=0$处的泰勒多项式的拉格朗日余项为

$$R_n(x)=2\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=2\frac{\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{12}-1)\cdot\cdots\cdot(\frac{1}{12}-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\frac{1}{12}-n-1}x^{n+1}$$

ξ介于0和x之间. 当$n=1$时

$$\begin{aligned}|R_1(-\frac{96}{4096})|&=2|\frac{\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{12}-1)}{2!}(1+\xi)^{\frac{1}{12}-2}(-\frac{96}{4096})^2|\\&=2|\frac{\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{12}-1)}{2!}\frac{1}{(1+\xi)^{2-\frac{1}{12}}}(-\frac{96}{4096})^2|\\&<2|\frac{\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{12}-1)}{2!}\frac{1}{(1-\frac{96}{4096})^{2-\frac{1}{12}}}(-\frac{96}{4096})^2|\\&<2|\frac{\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{12}-1)}{2!}\frac{1}{(1-\frac{96}{4096})^{2}}(-\frac{96}{4096})^2|\approx 0.000044<10^{-4}\end{aligned}$$

故$\sqrt[12]{4000}\approx 2\sum_{k=0}^{1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(-\frac{96}{4096})^k=2+2\frac{1/12}{1!}(-\frac{96}{4096})^1\approx 1.9961.$

(2)令$f(x)=\ln(1+x)$，$f(x)$在$x=0$处的泰勒多项式的拉格朗日余项为
$R_n(x)=\frac{(-1)^n\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}}{n+1}x^{n+1}$，$\xi$介于0和$x$之间. 当$n=2$时

$$|R_n(0.02)|=|\frac{(-1)^n\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}}{n+1}0.02^{n+1}|\le|\frac{1}{n+1}0.02^{n+1}|\approx 2.67\times 10^{-6}\le 10^{-5}$$

故$\ln 1.02\approx\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\approx 0.0198.$