4 连续函数

4.1 知识结构

第3章连续函数

3.1 连续函数的概念和性质

3.1.1 函数的连续与间断

- 函数在一点的连续性
- 函数在一点的左右连续性
- 间断点
  i. 第一类间断点
    A. 可去间断点
    B. 跳跃间断点
  ii. 第二类间断点
    A. 无穷间断点
    B. 振荡间断点

3.1.2 连续函数的简单性质

i. 保号性
ii. 四则运算
iii. 复合函数的连续性
iv. 反函数的连续性

3.1.3 初等函数的连续性

3.2 区间套定理与列紧性定理

(a) 闭区间套定理
(b) 列紧性定理

3.3 闭区间上连续函数的性质

(a) 零点定理
(b) 介值定理
(c) 最大最小值定理

3.4 函数的一致连续性

4.2 习题3.1解答

1. 研究下列函数在$x_0=0$的连续性：

(1)$f(x)=|x|$；

(2)$f(x)=[x]$；

(3)$f(x)=\begin{cases}(1+x^2)\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；

(4)$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；

(5)$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$；

(6)$f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，故$f(x)$在$x_0=0$处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，故$f(x)$在$x_0=0$处不连续.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$，故$f(x)$在$x_0=0$处不连续.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，故$f(x)$在$x_0=0$处连续.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，故$f(x)$在$x_0=0$处不连续.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，故$f(x)$在$x_0=0$处不连续.

2. 指出下列函数的间断点及其类型：

(1)$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$；

(2)$f(x)=[|\sin x|]$；

(3)$f(x)=\mathrm{sgn}(|x|)$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$，故$f(x)$在$x=0$处间断，是无穷间断点.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi^+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi^-}f(x)\neq f(\frac{\pi}{2}+k\pi)=1$，故$f(x)$在$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$处间断，是可去间断点.

(3)$f(x)=\mathrm{sgn}(|x|)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

故$f(x)$在$x=0$处间断，是可去间断点.

3. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$，确定$f(x)$的间断点.

解：当$x>1$时，$f(x)=1$

当$x=1$时，$f(x)=2$

当$0<x<1$时，$f(x)=\frac{1}{x}$

当$x=0$时，$f(x)=\infty$

当$-1<x<0$时，$f(x)=\frac{1}{x}$

当$x=-1$时，$f(x)=0$

当$x<-1$时，$f(x)=1$

故$x=1$是$f(x)$的可去间断点，$x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=-1$是$f(x)$的跳跃间断点.

4.3 习题3.2解答

1. 在闭区间套定理中，如果将闭区间改成开区间，结论是否成立？考察开区间列$(0,\frac{1}{n})(n=1,2,\cdots)$.

   解：开区间列$(0,\frac{1}{n})(n=1,2,\cdots)$满足闭区间套定理的两个条件：

   (1)$(0,\frac{1}{n})\supseteq(0,\frac{1}{n+1})(n=1,2,\cdots)$;

   (2)$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-0)=0$.

   但此时$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\notin(0,\frac{1}{n})$，故$\xi\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})$.

2. 考察$(0,1)$中所有的有理点排成的点列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots.$$

   求证：对任意$x\in[0,1]$，均有该点列的一个子列收敛于x.

   证明：$\forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbb{Z}^+/\{1\},\exists k,1\le k\le n-1,s.t.\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}$

   记$[a_1,b_1]=[0,1]$，当$x>\frac{1}{2}$时，$[a_2,b_2]=[\frac{1}{2},1]$，当$x\le\frac{1}{2}$时，$[a_2,b_2]=[0,\frac{1}{2}]$

   当$x>\frac{2}{3}$时，$[a_3,b_3]=[\frac{2}{3},1]\bigcap[a_2,b_2]$，当$\frac{2}{3}\ge x>\frac{1}{3}$时，$[a_3,b_3]=[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\bigcap[a_2,b_2]$

   $\cdots$

   当$x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$时，$[a_n,b_n]=[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\bigcap[a_n,b_n]$

   $\cdots$

   据此构造的一列闭区间$[a_n,b_n]$满足：

   (1)$[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}],n\in\mathbb{Z}^+$；

   (2)$\because 0\le b_n-a_n<\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n},\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

因此存在唯一一点ξ满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$且$\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

又$\because x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$

$\therefore x = \xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

因此存在这样的数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛于x，且$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是已知有理点列的子列.

3. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$有定义. 求证$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在的充要条件是$\forall\varepsilon > 0$，存在正数$N$，只要$x_1 > N, x_2 > N$，就有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

   证明：必要性：$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$存在

   $\therefore \forall\varepsilon, \exists N > 0$，使得当$x_1 > N, x_2 > N$时，$|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

   $\therefore |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$

   必要性得证.

   充分性：取数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

   $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$，使得当$x_1 > N, x_2 > N$时，$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，对于该$N > 0, \exists N' > 0$，当$m, n > N'$时，$x_m, x_n > N'$，则$|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{2}\varepsilon$

   $\therefore \{f(x_n)\}$是柯西列，记$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

   对于上述$\varepsilon, \exists N_1$，当$n > N_1$时，$|f(x_n) - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$

   取$n_0 > \max\{N', N_1\}$，则$x_{n_0} > N$且$|f(x_{n_0}) - A| < \varepsilon$

   $\therefore$当$x > N$时，$|f(x) - A| \le |f(x) - f(x_{n_0})| + |f(x_{n_0}) - A| < \varepsilon$

   故$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$存在.

4.4 习题3.3解答

1. 假设$f \in C[a,b]$，求证f的值域$\{f(x)|a \le x \le b\}$是一个有界闭区间.

   证明：由最大最小值定理知，f在$[a,b]$上有界，且$\exists\xi, \eta \in [a,b]$使得$f(\xi) = \min\{f(x)|a \le x \le b\}, f(\eta) = \max\{f(x)|a \le x \le b\}$

   $\therefore f(\xi) \le f(x) \le f(\eta)$

   由介值定理可知，$\forall\mu \in [f(\xi), f(\eta)], \exists\zeta \in (\xi, \eta)$(或$(\eta, \xi)$)$, s.t. f(\zeta) = \mu$

   故f的值域为$[f(\xi, \eta)]$，为一有界闭区间.

2. 假设$f \in C[a,b]$，如果$f(x)$在任一点$x \in [a,b]$都不等于零，求证$f(x)$在$[a,b]$不变号.

   证明：假设$\exists\xi\eta \in [a,b], s.t. f(\xi)f(\eta) < 0$，则$\exists\zeta \in (\xi, \eta), s.t. f(\zeta) = 0$，与$f(x)$在任一点$x \in [a,b]$都不等于零矛盾，假设不成立，所以$f(x)$在$[a,b]$不变号.

3. 设$a_{2m}<0$. 求证实系数多项式$x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$至少有两个实零点.

证明：记$f(x)=x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$，则$f(0)=a_{2m}<0$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$\therefore$对于$M_1,M_2>0,\exists N_1,N_2>0,s.t.$当$x>N_1$时，$f(x)>M_1$，当$x<-N_2$时，$f(x)>M_2$，

$\therefore \exists\xi\in(-N2,0),\exists\eta\in(0,N1),s.t.f(\xi)=0,f(\eta)=0$

故实系数多项式$x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-1}+\cdots+a_{2m-1}x+a_{2m}$至少有两个实零点.

4. 假设$f\in C[a,b],x_1,x_2,\cdots,x_m\in[a,b]$. 求证存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)}{m}.$$

证明：$\because f\in C[a,b]$

$\therefore \exists\alpha,\beta\in[a,b],s.t.f(\alpha)=\min\{f(x)|a\le x\le b\},f(\beta)=\max\{f(x)|a\le x\le b\}$

$\therefore f(\alpha)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)}{m}\le f(\beta)$

$\therefore \exists\xi\in[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)$,s.t.f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)}{m}$

故存在$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)}{m}$.

5. 设$f\in C(-\infty,+\infty)$，当$x\to\infty$时，$f(x)\to+\infty$. 求证存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(\xi)=\min\{f(x)|-\infty<x<+\infty\}$.

证明：证法1：$\because f(x)\to+\infty(x\to\infty)$，故$\exists x_1>0,x_2<0,s.t.f(x_1)>0,f(x_2)>0$

$\therefore$对于$f(x_1)>0,f(x_2)>0$，$\exists N_1>x_1,N_2>-x_2,s.t.$当$x>N_1$时$f(x)>f(x_1)$，当$x<-N_2$时，$f(x)>f(x_2)$

$\because f$在$[N_1,N_2]$上连续

$\therefore \exists\xi\in[N_1,N_2],s.t.f(\xi)=\min\{f(x)|N_1<x<N_2\}$且$f(\xi)<f(x_1),f(\xi)<f(x_2)$

故$f(\xi)\le f(x),x\in(-\infty,+\infty)$，即$f(\xi)=\min\{f(x)|-\infty<x<+\infty\}$.

证法2：$\because f(x)\to+\infty(x\to\infty)$，故$\exists\alpha>0,\beta<0,s.t.f(x)>f(\alpha)(x>\alpha),f(x)>f(\beta)(x<\beta)$，（假设这样的$\alpha$不存在，即$\forall\alpha>0,\exists x'>\alpha,s.t.f(x')\le f(\alpha)$，对于$x_1>0,\exists x_2>x_1,s.t.f(x_2)\le f(x_1)$，对于该$x_2,\exists x_3>x_2,s.t.f(x_3)\le f(x_2)$，依此类推，可得到单调非增数列$\{f(x_n)\}(x_{n+1}>x_n)$. 对于满足$M_0>f(x_1)$的正数$M_0$，$\forall X>0$，都可以找到$x_n>X,s.t.f(x_n)\le f(x_1)<M_0$，这与$f(x)\to+\infty(x\to\infty)$矛盾，故这样的$\alpha$存在. 同理这样的$\beta$也存在.）

$\because f(x)\in C(-\infty,+\infty)$

$\therefore f(x)\in C[\beta,\alpha],\exists\xi\in[\beta,\alpha],s.t.f(\xi)=\min\{f(x)|\beta\le x\le\alpha\}$

$\therefore f(\xi)\le f(x)(\beta\le x\le\alpha)$且$f(\xi)\le f(\alpha)<f(x)(x>\alpha);f(\xi)\le f(\beta)<f(x)(x<\beta)$

$\therefore f(\xi)=\min\{f(x)|-\infty<x<+\infty\}$.

4.5 习题3.4解答

1. 假设I是一个有界区间（开或闭），$f(x)$在I上一致连续，求证$f(x)$在I上有界. 即存在正数M，使得对于所有的$x\in I$，都有$|f(x)|\le M$.

   证明：当I是一个闭区间$[a,b]$时，$f(x)$在$I=[a,b]$上连续，故有界.

   当I不是闭区间时，不妨设$I=[a,b)$

   $\because f(x)$在I上一致连续

   $\therefore$对于给定的$\varepsilon_0,\exists\delta>0$，对于$[b-\delta,b)$中的任意点$x$，均有$|f(x)-f(b-\delta)|<\varepsilon_0$，即$|f(x)|<|f(b-\delta)|+\varepsilon_0$

   又由$f(x)$在I上一致连续可知$f(x)$在$[a,b-\delta]$上连续

   故$\exists M>0,s.t.|f(x)|<M$

   取$M_0=\max\{M,|f(b-\delta)|+\varepsilon_0\}$

   则$\forall x\in I=[a,b),|f(x)|<M_0$

   故$f(x)$在I上有界.

2. 设$f(x)$在I上有定义. 并且存在正数L和α，对于I中的任意两点u,v，有$|f(u)-f(v)|\le L|u-v|^\alpha$. 求证$f(x)$在$I$上一致连续. 如果$\alpha>1$，求证$f(x)$在$I$上恒等于常数.

   证明：$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{L}}$，则对于$I$中的任意两点，只要$|u-v|<\delta$，$|f(u)-f(v)|=L|u-v|^\alpha<\varepsilon$，故$f(x)$在$I$上一致连续.

   令$x_0\in I,\ \forall x\in I,|f(x)-f(x_0)|=|\sum_{i=1}^n[f(\frac{i}{n}(x-x_0)+x_0)-f(\frac{i-1}{n}(x-x_0)+x_0)]|$
   $\le\sum_{i=1}^n|f(\frac{i}{n}(x-x_0)+x_0)-f(\frac{i-1}{n}(x-x_0)+x_0)|\le\sum_{i=1}^n L|\frac{i}{n}(x-x_0)-\frac{i-1}{n}(x-x_0)|^\alpha$
   $=\sum_{i=1}^n L|\frac{1}{n}(x-x_0)|^\alpha=L|x-x_0|^\alpha\frac{1}{n^{\alpha-1}}$

   由n的任意性和当$\alpha>1$时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}=0$知$|f(x)-f(0)|=0$，即$f(x)$在$I$上恒等于常数$f(x_0)$.

3. 求证$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$一致连续.

   证明：连续函数$\sqrt{x}$在$[0,1]$上一致连续

   $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=2\varepsilon$，则对于区间$[1,+\infty)$中的任意两点u,v，只要满足$|u-v|<\delta$，则$|\sqrt{u}-\sqrt{v}|=\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}\le\frac{\delta}{2}<\varepsilon$，故$\sqrt{x}$在$[1,+\infty)$上一致连续.

   $\therefore\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$一致连续.

4. 求证x^2在$[0,+\infty)$上不一致连续.

证明：对于$\varepsilon_0 = 1, \forall\delta$，令$u = n\delta, v = (n-\frac{1}{2})\delta, n \in \mathbb{Z}^+$. 虽然$|u-v| = \frac{1}{2}\delta < \delta$，但是$|u^2-v^2| = |u-v||u+v| = (n-\frac{1}{4})\delta$，不论$\delta$取何值，总可找到$n \in \mathbb{Z}^+$使得$|u-v| = (n-\frac{1}{4})\delta > 1$，故$x^2$在$[0,+\infty)$上不一致连续.

4.6 第3章补充题

1. 设a_1, a_2, a_3为正数，$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$，则方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$$

在(λ_1,λ_2)和(λ_2,λ_3)各有一个实根.

证明：记$f(x) = \frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3}$

则$\lim\limits_{x\to\lambda_1+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to\lambda_2-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to\lambda_2+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to\lambda_3-} f(x) = -\infty$

故$\exists x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1+\delta)$(不妨设$\delta < \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$)$, s.t. f(x_1) > 0,$

$\exists x_2 \in (\lambda_2-\delta, \lambda_2)$(不妨设$\delta < \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$)$, s.t. f(x_2) < 0$

故$\exists\xi \in (\lambda_1,\lambda_2), s.t. f(\xi) = 0$

同理$\exists\eta \in (\lambda_2,\lambda_3), s.t. f(\eta) = 0$，证毕.

2. 设$f \in C[0,2a]$，且$f(0) = f(2a)$，求证存在点$x \in [0,a]$，使得

$$f(x) = f(x+a).$$

证明：记$g(x) = f(x) - f(x+a)$，则$g(0) = f(0) - f(a) = -[f(a) - f(0)] = -[f(a) - f(2a)] = -g(a)$

当$g(0) = -g(a) = 0$时，可取$x = 0$或a，此时$f(x) = f(x+a)$

当$g(0) = -g(a) \neq 0$时，$g(0)g(a) < 0$，此时$\exists\xi \in (0,a), s.t. g(\xi) = 0$，即$f(\xi) = f(\xi+a)$，证毕.

3. 设$f \in C[0,1], f(0) = f(1)$，试证：
(1)存在$\xi \in [0,1]$，使$f(\xi) = f(\xi+\frac{1}{2})$；
(2)$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，存在$\xi \in [0,1]$，使$f(\xi) = f(\xi+\frac{1}{n})$.

证明：(1)记$g(x) = f(x) - f(x+\frac{1}{2})$，则$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = -[f(\frac{1}{2}) - f(0)] = -[f(\frac{1}{2}) - f(1)] = -g(\frac{1}{2})$

当$g(0) = -g(\frac{1}{2}) = 0$时，可取$\xi = 0$或$\xi = \frac{1}{2}$，使得$f(\xi) = f(\xi+\frac{1}{2})$

当$g(0) = -g(\frac{1}{2}) \neq 0$时，$g(0)g(\frac{1}{2}) < 0$，此时$\exists\xi \in (0,\frac{1}{2}) \subseteq [0,1], s.t. f(\xi) = f(\xi+\frac{1}{2})$.

(2)记$h(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$

则$\sum_{k=0}^{n-1}h(\frac{k}{n})=0$

故必存在$0\le k_1<k_2\le n-1, s.t. h(\frac{k_1}{n})h(\frac{k_2}{n})<0$

$\therefore \exists\xi\in(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}), s.t. g(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})-f(\xi)=0$

4. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，并满足$f(2x)=f(x)$，试证：如果f在点$x=0$连续，则f在$(-\infty,+\infty)$上为常数.

证明：由$f(2x)=f(x)$可知$f(2^{-n}x)=f(x), n\in\mathbb{Z}^+$

$\because f$在点$x=0$连续

$\therefore f(x)=f(2^{-1}x)=\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}f(2^{-n}x)=f(0)$

$\therefore f$在$(-\infty,+\infty)$上为常数$f(0)$.

5. 设f在$(0,+\infty)$上有定义，并满足$f(x^2)=f(x)$，试证：如果f在点$x=1$连续，则$f(x)$恒为常数.

证明：由$f(x^2)=f(x)$知$f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}}), n\in\mathbb{Z}^+$

$\because f(x)$在$x=1$连续

$\therefore f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$

$\therefore f(x)$恒为常数$f(1)$.

6. 设f在$(-\infty,+\infty)$上有定义，并且存在$q\in(0,1)$，使得

$$|f(x)-f(y)|\le q|x-y|,\quad \forall x,y\in(-\infty,+\infty).$$

任取$a_0\in(-\infty,+\infty)$，令$a_1=f(a_0), a_n=f(a_{n-1})(n=2,3,\cdots)$，求证：点列$\{a_n\}$收敛于某个点$a$，并且$a$是$f$的惟一不动点（即有$f(a)=a$）.

证明：$\because |a_n-a_{n-1}|=|f(a_{n-1})-f(a_{n-2})|\le q|a_{n-1}-a_{n-2}|\le q^{n-1}|a_1-a_0|$

$\therefore |a_{n+p}-a_n|=|a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n+p-1}-a_{n+p-2}+\cdots+a_{n+1}-a_n|$
$\le |a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$
$\le |a_1-a_0|(q^{n+p-1}+q^{n+p-2}+\cdots+q^n)=|a_1-a_0|q^n\frac{1-q^p}{1-q}<|a_1-a_0|\frac{q^n}{1-q}$

$\forall\varepsilon>0$, 取$N=[\log_q\frac{\varepsilon(1-q)}{|a_1-a_0|}]+1$，使得当$n>N$时，对于任意的$p\in\mathbb{Z}^+, s.t. |a_{n+p}-a_n|\le |a_1-a_0|\frac{q^n}{1-q}<\varepsilon$.（这里不妨设$a_1\ne a_0$，当$a_1=a_0$时显然成立.）故$\{a_n\}$是柯西列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$存在.

$|f(a_n)-a_n|=|f(a_n)-f(a_{n-1})|\le q|a_{n-1}-a_{n-2}|\le\cdots\le q^{n-1}|a_1-a_0|$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}|a_1-a_0|=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}|f(a_n)-a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}[f(a_n)-a_n]=0$

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty),\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{q}$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|\le q|x-x_0|<\varepsilon$

故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续

故$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(a)$

故由极限存在的唯一性知存在唯一的$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$满足$f(a)=a$.

7. 设$f\in C(-\infty,+\infty)$，并且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x,y\in(-\infty,+\infty).$$

求证：存在常数a，使得$f(x)=ax$.

证明：$\because f(x+y)=f(x)+f(y)$

$\therefore f(\frac{m}{n})=mf(\frac{1}{n}),f(1)=nf(\frac{1}{n}),m,n\in\mathbb{Z}$，且$n\ne0$

$\therefore f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1)$，即$\forall x\in\mathbb{Q},\exists a=f(1),s.t.f(x)=ax$

假设存在无理数$x_0,s.t.f(x_0)\ne ax_0$

则f在$x=x_0$处不连续，矛盾，故这样的无理数不存在.

综上所述，存在常数a，使得$f(x)=ax$.

8. 设$f\in C[0,+\infty)$，如果$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$，则$f$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证明：$\because \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使得当$x>X$时，$|f(x)-x|<\frac{\varepsilon}{3}$

对于该ε，取$\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，使得$\forall u,v\in[X+1,+\infty)$，只要满足$|u-v|<\delta$，则$|f(u)-f(v)|\le|f(u)-u|+|f(v)-v|+|u-v|<\varepsilon$

故f在$[N+1,+\infty)$上一致连续，又知f在$[0,N+1]$上一致连续，故f在$[0,+\infty)$上一致连续.

9. 设$f\in C[0,+\infty)$，如果$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=0$，则$f$在$[0,+\infty)$上非一致连续.

解：$\because \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=0$

$\therefore$对于$\varepsilon_0=1,\exists X>0$，使得当$x>X$时，$|f(x)-x^2|<1$，即$x^2-1<f(x)<x^2+1$，这里不妨设$X>1$，则$x^2-1<|f(x)|<x^2+1$

对于该$\varepsilon_0,\forall\delta>0$，取$u=n\delta,v=(n-\frac{1}{2})\delta$，满足$u,v>X$，且$|u-v|=\frac{1}{2}\delta<\delta$

此时$|f(u)-f(v)|>|f(u)|-|f(v)|\ge|u^2-1|-|v^2+1|>(u^2-v^2)-2=\frac{1}{2}(2n-\frac{1}{2})\delta^2-2$，无论$\delta$有多小，总存在足够大的$n$使得$|f(u)-f(v)|>\frac{1}{2}(2n-\frac{1}{2})\delta^2-2>\varepsilon_0$

f在$[0,+\infty)$上非一致连续.

10. 设A和B是平面上的两个互不相交的区域（平面区域指由连续闭曲线围成的部分），用连续函数的介值定理解释：(1)存在直线l，将区域A分成面积相等的两个区域；(2)存在直线l，将区域A和B同时分成面积相等的两个区域；(3)存在两条相互垂直的直线l_1和l_2，将区域A分成面积相等的四个区域.

解：见附录.

11. 在平面上满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=1$的$(x,y)$组成的集合是什么？

解：当$|x|<1,|y|<1$时，不妨设$|x|\le|y|$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=\lim_{n\to\infty}y^2\sqrt[n]{(\frac{x}{y})^{2n}+1}=y^2<1$$

当$|x|=1,|y|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=1$

当$|x|<1,|y|=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=1$

当$|x|=1,|y|=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=1$

当$|x|>1,|y|\le1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(x^{2n}+y^{2n})}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x^{2n}}{n}+\frac{\ln[1+(\frac{y}{x})^{2n}]}{n}}=x^2>1$

当$|x|\le1,|y|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=y^2>1$

当$|x|>1,|y|>1$时，不妨设$|x|\ge|y|$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(x^{2n}+y^{2n})}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln x^{2n}}{n}+\frac{\ln[1+(\frac{y}{x})^{2n}]}{n}}=x^2>1$

综上所述，在平面上满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}+y^{2n}}=1$的$(x,y)$组成的集合是以$(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的正方形.

12. 假设$f\in C[0,1],f(0)=f(1)=0$，当$0<x<1$时$f(x)>0$. 求证：对于任意正数$r\in(0,1)$，存在$\xi\in[0,1]$，使得$\xi+r<1$，并且$f(\xi+r)=f(\xi)$.

证明：记$g(x)=f(x+r)-f(x)$

$\because g(0)=f(r)-f(0)=f(r)>0,g(1-r)=f(1)-f(1-r)=-f(1-r)<0$

$\therefore\exists\xi\in(0,1-r),s.t.g(\xi)=f(\xi+r)-f(\xi)=0$，此时$\xi+r<1$，证毕.

13. 举例说明：若在上题中缺少$f(x)$非负这个条件，则结论一般不再成立.

解：如$y=\sin2\pi x$，当$r>\frac{1}{2}$时，不存在满足$f(\xi+r)=f(\xi)$的ξ.

14. 设物体用100s连续移动距离100m.

(1)求证存在某个时刻$t_0(0<t_0<100)$，使得在时间段$[t_0,t_0+10)$中物体恰好移动了10m；

(2)求证存在某个时刻$t_0(0 < t_0 < 100)$，使得在时间段$[t_0, t_0+20)$中物体恰好移动了20m；
(3)能否证明：存在某个时刻$t_0(0 < t_0 < 100)$，使得在时间段$[t_0, t_0+30]$中物体恰好移动了30m；
(4)能否证明：对于任意正数$s(0 < s < 100)$，是（否）存在某个时刻$t_0(0 < t_0 < 100)$，使得在时间段$[t_0, t_0+s]$中物体恰好移动了sm？

(1)证明：记物体移动的距离与时间的函数关系为$s = f(t)$，已知$f(0) = 0, f(100) = 100$且$f(t)$在$[0, 100]$连续，单调非减

记$g(t) = f(t+10) - f(t) - 10$

则$\sum_{i=0}^{9} g(10i) = 0$，必存在$0 \le i_1 < i_2 \le 9, s.t. g(10i_1)g(10i_2) < 0$

故$\exists t_0 \in (10i_1, 10i_2) \subseteq (0, 100), s.t. g(t_0) = f(t_0+10) - f(t_0) - 10 = 0$

即存在某个时刻$t_0(0 < t_0 < 100)$，使得在时间段$[t_0, t_0+10)$中物体恰好移动了10m.

(2)证明$h(t) = f(t+20) - f(t) - 20$

则$\sum_{i=0}^{4} g(20i) = 0$，必存在$0 \le i_3 < i_4 \le 4, s.t. g(20i_3)g(20i_4) < 0$

故$\exists t_0 \in (20i_3, 20i_3) \subseteq (0, 100), s.t. g(t_0) = f(t_0+20) - f(t_0) - 20 = 0$

即存在某个时刻$t_0(0 < t_0 < 100)$，使得在时间段$[t_0, t_0+20)$中物体恰好移动了20m.

(3)见附录2.

(4)见附录2.

4.7 附录1

以证明由正方形或矩形内部点组成的平面上的区域不是紧致的,但是如果加上边界点就成为紧致的了.还有,顶点在一个已知圆的内部或圆周上的所有三角形组成的集是紧致的.

如果变量 X 的变域是在任一已定义有极限概念的集 S 上,我们可以把连续性的概念推广到这种情形.函数 $u=F(X)$,其中 u 是实数,如果对于以 X 为极限的任一元素序列 X_1, X_2, X_3, …, 对应的数列 $F(X_1)$, $F(X_2)$, …趋于极限 $F(X)$,那么就说该函数在元素 X 处是连续的(也可以给一个对应的(ϵ, δ)定义).对一个定义在任一紧致集上的一般连续函数很容易证明维尔斯特拉斯定理也成立:

如果 $u=F(X)$ 是定义在紧致集 S 上的任一连续函数,那么在 S 中总有一个元素,使 $F(X)$ 取得最大值,也有一个元素,使 $F(X)$ 取得最小值.

掌握住所涉及的一般概念,证明便很简单,但是我们将不进一步讨论这些了.它在第七章中还要出现,在那里,维尔斯特拉斯的普遍定理,在极大和极小值理论中是很重要的.

§6 布尔查诺定理的一些应用

☞1. 几何上的应用

布尔查诺这个简单而普遍的定理,可以用来证明许多初看不很明显的事实.我们先证明:**如果 A 和 B 是平面内的任意两个区域,那么在平面内一定存在一条直线,该直线同时平分 A 和 B.** 所谓一个"区域",是指平面内一条简单闭曲线所包围的部分.

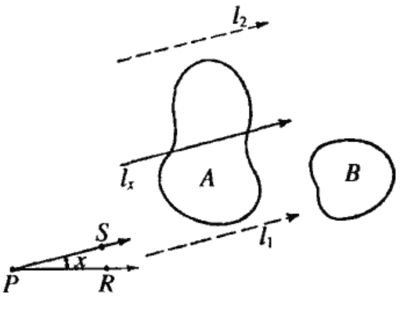


图 173 同时平分两个区域

让我们先在平面上选择某一固定点 P,并且从 P 引出一条射线 PR 当作度量角度的始边.如果作与 PR 的夹角为 x 的任一射线 PS,那么在平面上会有一条与 PS 同方向且**平分区域 A** 的有向直线.因为,如果我们作

一条与 PS 同方向的有向直线 l_1，但它整个在 A 的一侧，然后平行地移动这条直线，直到直线处在位置 l_2(见图 173)，那么由区域 A 在直线右侧(如果直线指北，则东向是右侧)的面积减去 A 在直线左侧的面积所定义的函数，其值对 l_1 是负的，对 l_2 是正的. 因为这个函数是连续的，由布尔查诺定理，必有某个中间位置 l_x，使它为零，也就是 l_x 平分了 A. 同此，对于 x 由 $x=0°$到 $x=360°$的每个值 x，平分 A 的直线 l_x 都是唯一确定的.

现在把函数 $y=f(x)$定义为 B 在直线 l_x 右侧面积减去 B 在 l_x 左侧的面积. 假设直线 l_0 与 PR 同方向且平分了 A，并且 B 在 l_0 右侧的面积大于左侧，则对 $x=0°$，y 是正的. 如果 x 增加到 180°，那么直线 l_{180} 和 RP 平行，它虽然和 l_0 一样地分割 A，但与 l_0 方向相反，右和左互换，因此 y 在 $x=180°$时和在 $x=0°$时的数值相同，但符号相反，所以是负的. 当 l_x 旋转时，y 是 x 的连续函数，那么在 0°和 180°之间，存在 x 的某个值 α，使 y 等于零. 因此方向线 l_α 同时平分 A 和 B. 到此证明完毕.

注意，虽然我们证明了具有所需要的性质的直线的**存在**，但没有说明怎样真正**作出**这条直线. 与构造性定理比较，这又一次显示了数学存在性证明的不同之处.

一个类似的问题如下：在平面内只给出一个区域，要求用两条相互**垂直**的直线把它分割为**四个**相等的部分. 为了证明这总是可能的，我们回到前面对任意角 x 定义了 l_x 的情形，但不再去管 B. 我们取 l_{x+90}，l_{x+90} 与 l_x 垂直，且也平分 A. 如果 A 的四片如图 174 所示，那么有

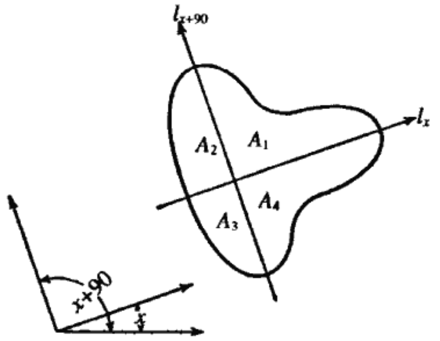


图 174

$$A_1+A_2=A_3+A_4$$

和 $$A_2 + A_3 = A_1 + A_4.$$

由此，由第一个等式减去第二个等式，则

$$A_1 - A_3 = A_3 - A_1,$$

即 $$A_1 = A_3,$$

并因此有 $$A_2 = A_4.$$

所以如果我们能证明存在一个角 α，使得对 l_α 有

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha),$$

那么定理就得到证明，因为对这样的角，四个面积都相等. 为此，通过作 l_x 定义一个函数 $y=f(x)$，设

$$f(x) = A_1(x) - A_2(x).$$

当 $x=0°$ 时，$f(0)=A_1(0)-A_2(0)$ 可能是正的. 在这种情况下，当 $x=90°$ 时，

$$A_1(90) - A_2(90) = A_2(0) - A_3(0) = A_2(0) - A_1(0)$$

就将是负的. 因为当 x 由 0°增加到 90°时 $f(x)$ 是连续变动的，所以在 0°和 90°之间存在某个值 α，使

$$f(\alpha) = A_1(\alpha) - A_2(\alpha) = 0.$$

直线 l_α 和 $l_{\alpha+90}$ 就把这个区域分成了四个相等的部分.

有趣的是这些问题可以推广到三维和更高维空间去. 在三维情形，第一个问题变为：已知空间的三个立体，求同时平分三个立体的平面. 找出这个平面，永远是可能的，它的证明要再次利用布尔查诺定理. 高于三维的情形，定理也是正确的，但其证明需要更高深的方法.

☞ *2. 力学问题上的一个应用

作为本节的结束，我们将讨论一个表面看来很困难的力学问题，但在连续性概念的基础上加以讨论，它却很容易解决（这是惠特尼

4.8 附录2

上册 111 页 14 题（3）（4）问

（3）存在时刻$t_0 \in [0,70]$，使得在时间段$[t_0, t_0+30]$中物体恰好移动了 30 米。证明如下：

令 $f(t)=\dfrac{s(t+30)-s(t)}{30}$。

（A）若 $f(0)<1$，$f(30)<1$，则曲线$s=s(t)$与直线$s=t$在$(0,60)$上没交点。但根据题意，曲线$s=s(t)$与直线$s=t$在$(0,100]$上存在交点（参见下图）。

这时问题“存在 $t_0 \in [0,70]$，使得 $f(t_0)=\dfrac{s(t_0+30)-s(t_0)}{30}=1$”转化为：若函数$g(x)\in C[a,b]$，且$g(a)=g(b)=0$，$g(x)<0$，$x\in(a,b)$，则对任意的$0<m<b-a$，存在$x_0\in(a,b-m)$，使得$g(x_0+m)-g(x_0)=0$。该问题的证明为：

令$G(x)=g(x+m)-g(x)$，则$G(x)\in C[a,b-m]$，且

$$G(a)=g(a+m)-g(a)<0,\quad G(b-m)=g(b)-g(b-m)>0,$$

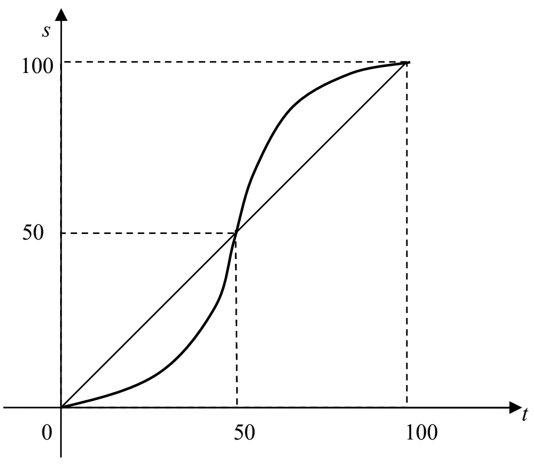
所以存在$x_0\in(a,b-m)$，使得$G(x_0)=g(x_0+m)-g(x_0)=0$。

（B）若 $f(0)<1$，$f(30)<1$，证明方法同（A）。

（C）若 $f(0)<1$，$f(30)>1$（或$f(0)>1$，$f(30)<1$），利用连续函数的介值定理证明。

注： 事实上，当$s\leqslant 50$时，同样的方法可以证明：存在时刻t_0，使得在时间段$[t_0,t_0+s]$中物体恰好移动了s米。

（4）



当$s>50$时，不见得存在时刻t_0，使得在时间段$[t_0,t_0+s]$中物体恰好移动了s米。如图的情

形就有：对任意的 $t_0 \in [0,100-s]$，都有 $\frac{s(t_0+s)-s(t_0)}{s} > 1$ 成立！