数列极限

2018年12月11日　　21:44

2.1数列极限的概念习题重点

1. 用极限定义证明下列各题：**（常用结论）**
    (1) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$；
    (2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$；
    (3) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^2 = A^2$；
    (4) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

2.2数列极限存在的条件习题重点

1. **夹逼原理：**
    (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
2. **单调有界收敛定理：**
    (1) 设$x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)(\mathrm{n} = 2,3,\cdots)$. 求证：$\{x_n\}$和$\{y_n\}$收敛于同一个实数.
    (2) 设$\mathrm{a_n} \neq 0(\mathrm{n} \in \mathbb{Z}^+)$，$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left|\frac{\mathrm{a_{n+1}}}{\mathrm{a_n}}\right| = \mathrm{q} < 1$，求证：$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{a_n} = 0$.
3. **柯西收敛准则：**
    (1) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}$
4. **四则运算：**
    (1) $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}\right)$
5. **其他**：
    (1) $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

函数极限

2018年12月11日　　21:44

2.3函数极限的概念和性质习题重点

1. **函数极限的定义：**
   (1) 习题2.3中的1.(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)
2. **唯一性**
3. **有界性**
4. **保号性：**
   (1) 设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$，证明$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.
5. **函数极限与数列极限的关系：**
   (1) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上为周期函数，若$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明$f(x)\equiv 0$.

2.4函数极限的运算法则习题重点

1. **夹逼原理**
2. **单调有界收敛定理**
3. **四则运算：**
   (1) 求极限$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}, m,n\in\mathbb{Z}^+$
   (2) 习题2.4中的1.(1)、(6)
   (3) 习题2.4中的3.(1)、(2)
4. **极限的复合运算:**
   (1) 习题2.4中的5.(1)、(2)
5. **两个重要的极限：**
   (1) 求极限$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+n}{x-n}\right)^x$
   (2) 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$
   (3) 求极限$\lim_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$
   (4) 习题2.4中的2.(6)、(7)、(8)、(12)、(14)

2.5无穷小量与阶的比较习题重点

1. **无穷小量与无穷大量**
2. **阶的比较：**
   (1) 利用极限的四则运算法则和等价无穷小量互相代换的方法求下列极限：$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$.
   (2) 习题2.5中的2
   (3) 习题2.5中的3
   (4) 习题2.5中的4.(5)、(6)、(8)、(10)
   (5) 将下列无穷小量（当$x\to 0^+$时）按照其阶的高低排列出来：$\sin x^2$，　$\sin(\tan x)$，
   $e^{x^3}-1$，　$\ln(1+\sqrt{x})$

连续函数

2018年12月11日 21:45

3.1连续函数的概念和性质习题重点

1. **函数的连续与间断**
   (1) 研究下列函数在$x_0 = 0$的连续性：$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$.
   (2) 习题3.1，3.
2. **连续函数的简单性质**
   - **四则运算**
   - **复合函数的连续性**
   - **反函数的连续性**
3. **初等函数的连续性**

3.2区间套定理与列紧性定理习题重点

1. **闭区间套定理：** 假定$[a_n, b_n](n \in \mathbb{Z}^+)$是一列闭区间，满足下列条件：
   A) $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}], n \in \mathbb{Z}^+$；
   B) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$
   则存在唯一一点ξ，满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$，且
   $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n].$
   思考题：
   (1) 在闭区间套定理中，如果将闭区间改成开区间，结论是否成立？考察开区间列$\left(0, \frac{1}{n}\right)(n = 1,2,\cdots)$.
2. **列紧性定理**：
   A) 任意有界数列$\{x_n\}$包含收敛子列；
   B) 设$[a,b]$为有界闭区间，$\{x_n\} \subseteq [a,b]$. 如果$\{x_{n_j}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子列，且$\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = \xi$，则$\xi \in [a,b]$.

3.3闭区间上连续函数的性质习题重点

1. **零点定理：**
   (1) 假设$f \in C[a,b]$，如果$f(x)$在任一点x $\in [a,b]$都不等于零，求证$f(x)$在$[a,b]$不变号.
   (2) 设$a_{2m} < 0$. 求证实系数多项式$x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + a_2 x^{2m-2} + \cdots a_{2m-1}x + a_{2m}$至少有两个实零点.
2. **介值定理：**
3. **最大最小值定理：**
   (1) 假设$f \in C[a,b], x_1, x_2, \cdots, x_m \in [a,b]$. 求证存在$\xi \in [a,b]$，使得f$(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_m)}{m}$.
   (2) 假设$f \in C(-\infty,+\infty)$，当x $\to \infty$时，f$(x) \to +\infty$，求证存在$\xi \in (-\infty,+\infty)$，使得f$(x) = \min\{f(x) | -\infty < x < +\infty\}$.

3.4函数的一致连续性习题重点

(1) 设$f(x)$在I上有定义.并且存在正数L和α，对于I中任意两点u, v，有$|f(u)-f(v)| \leq L|u-v|^{\alpha}$. 求证$f(x)$在$I$上一致连续.如果$\alpha > 1$，求证$f(x)$在$I$上恒等于常数.

(2) 求证x^2在$[0, +\infty)$不一致连续.

导数与微分

2018年12月11日 21:45

4.1导数的概念

1. **导数的定义**
2. **利用定义求导**
   (1) 证明：可导偶函数的导函数为奇函数；
   (2) 证明：可导奇函数的导函数为偶函数；
   (3) 证明：可导周期函数，其导函数为具有相同周期的周期函数。
   (4) 利用导数的定义求函数在指定点的导数：$f(x)=\sqrt{x}, x_0=4$.
   (5) 习题4.1 6.（6）；7；8；11.

4.2导数的运算法则

1. **导数的四则运算：**
   (1) 求下列函数的导数：
      i. $y=\sqrt{x^2+1}\cot x$;
      ii. $y=\frac{\tan x}{x}$;
      iii. $y=\sec x\tan x$;
      iv. $g(z)=\frac{\csc z}{z^2}$.
2. **复合函数求导法则：**
   (1) 设f为可导函数，求下列函数的导数：$f(e^x)e^{f(x)}$.
   (2) 求下列函数的导数：
      i. $y=2^{\ln\frac{1}{x}}$;
3. **反函数求导法则：**
   (1) 求下列函数的导数：
      i. $y=\arcsin\frac{1}{x}$;
      ii. $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;
      iii. $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$.

4.3若干特殊的求导方法

1. **对数求导法：**
   (1) 利用对数求导法求下列函数的导数：
      i. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;
      ii. $y=x+x^2+x^{x^x}$.
2. **参数式函数求导法**
3. **隐函数求导法:**
   (1) 求下列隐函数的导数$y'(x)$：
      i. $x^2=\frac{x-y}{x+y}$.

4.4高阶导数

1. **运算法则：**设f,g具有n阶导数，则

A) $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$;

B) $(cf)^{(n)}=cf^{(n)}$，其中c为任意常数;

C) $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}$（乘积函数$n$阶导数的莱布尼茨公式）.

思考题:

(1) 设f为三次可导函数，求y'':$y=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(2) 求下列函数的指定阶数的导数：$y=x^2\sin 2x$，求$y^{(50)}$.

4.5微分

1. **微分概念**
2. **微分用于近似计算**
3. **微分运算法则:**
   - **A) 四则运算法则**
   - **B) 复合函数的链式微分法**

思考题:

(1) 计算：$d\left(\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$.

(2) 2.（7）3.（6）4.（1）（2）（3）（4）7.

用导数研究函数

2018年12月11日　21:47

5.1微分中值定理

1. **费马定理：**设函数f在点x_0取得极值，如果$f'(x_0)$存在，则必有$f'(x_0)=0$.
2. **罗尔定理：**设函数f在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，又设$f(a)=f(b)$，则存在点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.
   (1) **思考题：**证明：方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$中至多有一个根.
   (2) **思考题：**设f在(a,b)内二阶可导，$a<x_1<x_2<x_3<b$，且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，求证$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.
3. **拉格朗日中值定理（微分中值定理）：**设函数f在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   (1) **思考题：**证明下列不等式：$|\sin x-\sin y|\le|x-y|,x,y\in\mathbb{R}$.
   (2) **思考题：**研究下列函数的单调性：$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,0<x<1$.
   (3) **思考题：**证明下列不等式：$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x),x>0$.
4. **柯西中值定理：**设函数f和g在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，并且$g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

5.2洛必达法则

1. **定理5.2.1（$\frac{0}{0}$型不定式，x趋于点）：**设$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=0$，并且$\exists\delta>0$，使得$f$与$g$在$(x_0-\delta,x_0)$内可导，其中$g'(x)\neq 0$，那么：
   (1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a(-\infty<a<+\infty)$，则有$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=a$；
   (2) 如果当$x\to x_0^-$时，$\frac{f'(x)}{g'(x)}\to+\infty(-\infty)$，则有$\frac{f(x)}{g(x)}\to+\infty(-\infty),(x\to x_0^-)$.
2. **定理5.2.2（$\frac{0}{0}$型不定式，x趋于无穷）：**设函数f,g在$[b,+\infty)$上有定义且可导，并且$g'(x)\neq 0$，又设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.
   (1) 如果$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a(-\infty<a<+\infty)$，则有$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=a$；
   (2) 如果当$x\to+\infty$时，$\frac{f'(x)}{g'(x)}\to+\infty(-\infty)$，则有$\frac{f(x)}{g(x)}\to+\infty(-\infty),(x\to+\infty)$.
3. **定理5.2.3（$\frac{\infty}{\infty}$型不定式，x趋于点）：**设f,g在点x_0的某个空心邻域$N^*(x_0,\delta)$内可导，并且$g'(x)\neq 0$，又设当$x\to x_0$时，$f(x)\to\infty,g(x)\to\infty$.
   (1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a(-\infty<a<+\infty)$，则有$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=a$；
   (2) 如果当$x\to x_0$时，$\frac{f'(x)}{g'(x)}\to+\infty(-\infty)$，则有$\frac{f(x)}{g(x)}\to+\infty(-\infty),(x\to x_0^-)$.

   思考题：求下列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-e\right]$.
   思考题：设f二阶可导，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$.

5.3函数极值及其应用

1. **函数的极值**
   (1) **定理5.3.2：**设f在点x_0的某个邻域内有一阶导数，并且$f'(x_0)=0$，又设$f''(x_0)$存在，则
      i. $f''(x_0)>0$时，f在点x_0处取得极小值；

ii. $f''(x_0) < 0$时，f在点x_0处取得极大值.

2. **函数的最小值和最大值问题**

3. **应用问题：**

   (1) 定理5.3.3： 假设$f(x)$在区间I处处可导，并且在区间I内部只有一个驻点x_0，则

   i. 如果$f(x_0)$是极小值，则$f(x_0)$是$f(x)$在区间I上的最小值；

   ii. 如果$f(x_0)$是极大值，则$f(x_0)$是$f(x)$在区间I上的最大值.

思考题： 建造一个容积为$300\mathrm{m}^3$的有盖圆筒，如何确定底面半径r和桶高h才能使得所用材料最省?

习题： 习题5.3 1.（4）、2.（3）、3.、6.

5.4函数图形的描绘

1. **曲线的凸性：**

   (1) **定理5.4.2**：设$f \in C[a,b]$.

   i. 如果f在区间(a,b)内一阶可导，则f在区间$[a,b]$上为下（上）凸函数的充分必要条件是$f'(x)$在区间(a,b)内单调非减（非增）.

   ii. 如果$f(x)$在区间(a,b)内二阶可导，则f在区间$[a,b]$上为下（上）凸函数的充分必要条件是$f''(x)$在区间(a,b)内非负（非正）.

   (2) **拐点**：拐点两侧曲线有不同的凸性.

思考题： 确定下列函数的上凸和下凸区间与拐点：$\mathrm{y} = x^2 + \frac{1}{x}$.

思考题： 证明下列不等式（并讨论等号成立的条件）：$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p \le \frac{x_1^p+x_2^p+\cdots x_n^p}{n}$，其中$\mathrm{p} \ge 1, x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$.

习题： 习题5.4 2.（1）、2.（3）

2. **函数作图**

   (1) 渐近线：

   i. 直线$x = x_0$为曲线$y = f(x)$的渐近线的充分必要条件是：当$\mathrm{x} \to {x_0}^+$（或$\mathrm{x} \to {x_0}^-$）时，$f(x)$趋向无穷.

   ii. 直线$\mathrm{y} = y_0$为曲线$y = f(x)$的水平渐近线的充分必要条件是当$\mathrm{x} \to +\infty$（或$\mathrm{x} \to -\infty$）时，$f(x)$趋向y_0.

   iii. 设函数f在$[c,+\infty)$上有定义，则曲线$y = f(x)$以直线$y = ax + b(a \ne 0)$为渐近线的充分必要条件是下列两式同时成立：

   1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$;

   2) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b$.

思考题： 已知$y = f(x)$是由方程$y^3 - x^3 + 2xy = 0$所确定的隐函数，设曲线$y = f(x)$有斜渐近线$y = f(x)$有斜渐近线$y = ax + b$，求a, b.

思考题： 习题5.4 3.（3）

5.5泰勒公式及其应用

1. **带有拉格朗日余项的n阶泰勒公式：** 设函数f在某个包含点x_0的开区间(a,b)中有1到$n+1$阶的各阶导数，则$\forall x \in (a,b)$，有

$$f(x)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x-x_0)^n$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

其中ξ是介于点x_0与x之间的某个点，当点x_0固定之后，点ξ只与x有关.

思考题：按指定次数写出下列函数在指定点的泰勒多项式：$f(x) = \frac{x}{x-1}, x_0 = 2$，展到n次.

思考题：用泰勒公式进行近似计算：$\sqrt[12]{4000}$，精确到10^{-4}.

思考题：习题5.5 1.（1）、（2）、（3）、（4）、（6）2.

2. Maclaurin公式

(1) $$\boldsymbol{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(2) $$\boldsymbol{\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}} + \frac{\sin[\xi + (n+1)\pi]}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\sin\left(\eta + \frac{2n+3}{2}\pi\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$$

(3) $$\boldsymbol{\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}} + \frac{\cos\left(\xi + \frac{2n+1}{2}\pi\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{\cos[\eta + (n+1)\pi]}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

(4) $$\boldsymbol{(1+x)^{\alpha}}$$
$$= \boldsymbol{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

i. $$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n)$$

ii. $$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{x^k} + o(x^n)$$

(5) $$\boldsymbol{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$$

思考题：按指定次数写出下列函数在指定点的泰勒多项式：$f(x) = \frac{x}{x-1}, x_0 = 2$，展到n次.

5.5泰勒公式及其应用

1. 泰勒公式

2. Maclaurin公式：

(1) $$\boldsymbol{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k} + o(x^n)$$

(2) $$\boldsymbol{\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}} + o(x^{2n+1})(或o(x^{2n+2}))$$

(3) $$\boldsymbol{\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}} + o(x^{2n})(或o(x^{2n+1}))$$

(4) $$\boldsymbol{(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k} + o(x^n)$$

i. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}=\sum_{k=0}^{n}(-\boldsymbol{x})^{k}+o(x^{n})$

ii. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}=\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{x}^{k}+o(x^{n})$

(5) $\ln(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-\mathbf{1})^{k-1}}{k}\boldsymbol{x}^{k}+o(x^{n})$

思考题：按指定次数写出下列函数在指定点的泰勒多项式：$f(x)=\frac{x}{x-1}, x_0=2$，展到n次.

习题：按指定次数写出下列函数在指定点的泰勒多项式：$f(x)=\frac{x}{x-1}, x_0=2$，展到n次.

习题：用泰勒公式进行近似计算：$\sqrt[12]{4000}$，精确到10^{-4}.

习题：习题5.5中的1.（1）、（2）、（3）、（4）、（6）2.

原函数与不定积分

2018年12月11日 21:32

6.1概念和性质

1. **原函数**

   思考题： 证明$f(x) = x^2\text{sgn } x$是$|x|$在$(-\infty + \infty)$的一个原函数.

2. **不定积分**
3. **基本积分公式：**

   (1) $\int 0 \, \mathrm{d}x = C$

   (2) $\int \mathrm{d}x = x + C$

   (3) $\int x^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1+p} x^{p-1} + C, p \neq 1$

   (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0$

   (5) $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

   (6) $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

   (7) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

   (8) $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

   (9) $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$

   (10) $\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$

   (11) $\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$

   (12) $\int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C$

   (13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

   (14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C = -\text{arccot } x + C$

   思考题： 求下列不定积分：$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

4. **原函数存在的条件：** 如果$f(x)$在区间I上连续，则$f(x)$在I上存在原函数.
5. **不定积分的线性性质**

   思考题： 设$f(x) = \begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ x+1, x < 0 \end{cases}$,求$\int f(x) \, \mathrm{d}x$.

   习题： 证明$f(x) = x^2\text{sgn } x$是$|x|$在$(-\infty + \infty)$的一个原函数.

习题： 求下列不定积分：$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

习题： 习题6.1中的2.（2）、（3）、（4）、（5）

习题： 设$f(x)=\begin{cases} e^x, x \ge 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$，求$\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

习题： 习题6.1中的4

6.2换元积分法

1. **第一换元法（凑微分法）：**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{\text{凑微分}} \int g(h(x))\,h'(x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{\text{换元}h(x)=u} \int g(u)\,\mathrm{d}u \xRightarrow{\text{积分}} G(u)+C \xRightarrow{\text{再换元}u=h(x)} G(h(x))+C$$

思考题： 求不定积分$\int \csc x \,\mathrm{d}x$.

习题： 习题6.2中的1.（1）、（2）、（3）、（4）、（5）（积化和差）、（6）、（8）、（10）、（12）、（13）、（14）（sec）、（15）、（16）、（17）、（18）、（19）、（21）

2. **第二换元法（换元法）：**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{\text{换元}x=h(t)} \int f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t = \int g(t)\,\mathrm{d}t \xRightarrow{\text{积分}} G(t)+C \xRightarrow{\text{再换元}t=h^{-1}(x)} G(h^{-1}(x))+C$$

思考题： 求不定积分$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,(a>0)$.（提示：令$t=a\sec x$）

思考题： 求下列不定积分$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$.

习题： 习题6.2中的1.（11）、（22）、（23）、（24）、（25）、（26）、（27）、（28）、（29)、（30）

3. **习题：** 习题6.2中的1.（7）、（9）

6.3分部积分法

1. $$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$

   (1) 被积函数与对数函数、反三角函数有关的情况

   习题： 习题6.3中的2、3、5（换元）、10（换元）、16、17、18、21

   (2) 被积函数与三角函数、指数函数有关的情况

   习题： 习题6.3中的1、6、7、9（换元）、11、12（tan）、13（换元）、

   (3) 通过分部积分公式建立方程的情况

   习题： 习题6.3中的8、14、15（对数）、

   (4) 通过分部积分公式建立递推关系的情况

   (5) 其他情况

   习题： 习题6.3中的4、19、20（tan）、22（换元）

思考题： 求下列不定积分：$\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

思考题： 求下列不定积分：$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

2. **其他常用的积分公式：**

   (1) $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

   (2) $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(3) $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$;

(4) $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$;

(5) $\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$.

6.4有理函数的积分

1. **分式函数的积分：**

(1) **有理分式函数、真分式、假分式**

(2) **最简分式**

i. $$\int \frac{A}{ax+b} dx (a \neq 0) = \frac{A}{a} \ln|ax+b|$$

ii. $$\int \frac{A}{(ax+b)^k} dx (a \neq 0, k > 1) = \frac{A}{(1-k)a} \frac{1}{(ax+b)^{k-1}}$$

iii. $$\int \frac{Bx+C}{px^2+qx+r} dx \left(p > 0, q^2 - 4pr < 0\right)$$

$$= \frac{B}{2p} \int \frac{2px+q}{px^2+qx+r} dx + \left(D - \frac{Bq}{2p}\right) \frac{1}{p} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr-q^2}{4p^2}}$$

$$= \frac{B}{2p} \ln|px^2+qx+r| + \frac{2pD-qB}{p\sqrt{4pr-q^2}} \arctan \frac{2px+q}{\sqrt{4pr-q^2}}$$

习题： 习题6.4中的2、4、8、9、10

iv. $$\int \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^k} dx \left(p \neq 0, q^2 - 4pr < 0, k > 1\right)$$

$$= \frac{B}{2p} \int \frac{2px+q}{(px^2+qx+r)^k} dx + \left(D - \frac{Bq}{2p}\right) \frac{1}{p} \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr-q^2}{4p^2}\right]^k}$$

$$= \frac{B}{2p(1-k)} \cdot \frac{1}{(px^2+qx+r)^{k-1}} + \left(D - \frac{Bq}{2p}\right) \frac{1}{p} \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr-q^2}{4p^2}\right]^k}$$

此时利用公式：$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} (n \geq 1) = I_n$,

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{x}{2na^2(a^2+x^2)^n}, I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

习题： 习题6.4中的1、7

(3) **定理6.4.1：设$\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$是一个真分式，则它可以唯一地分解为最简分式之和，分解规则如下：**

i. **$Q_n(x)$的一次单因式$ax+b$对应一项$\frac{A}{ax+b}$；**

ii. **$Q_n(x)$的一次k重因式$(ax+b)^k$对应k项$\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \cdots, \frac{A_k}{(ax+b)^k}$；**

iii. **$Q_n(x)$的二次单因式px^2+qx+r对应一项$\frac{Bx+D}{px^2+qx+r}$；**

iv. **$Q_n(x)$的二次k重因式$\left(px^2+qx+r\right)^k$对应k项**
$\frac{B_1x+D_1}{px^2+qx+r}, \frac{B_2x+D_2}{\left(px^2+qx+r\right)^2}, \cdots, \frac{B_kx+D_k}{\left(px^2+qx+r\right)^k}$.

习题： 习题6.4中的3、6

思考题： 求下列不定积分：$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$.

(4) **习题：** 习题6.4中的5、6

2. **三角函数有理式的积分：**

(1) $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{A(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{B(a\sin x + b\cos x)'}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x$

习题： 习题6.2中的2

(2) **半角万能变换：** $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{t=\tan\frac{x}{2}} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

习题： 习题6.4中的16、17、20

思考题： 求下列不定积分：$\int \frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x$

(3) **全角万能变换：**

i. **当**$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$**时，令**$t = \sin x$**；**

ii. **当**$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$**时，令**$t = \cos x$**；**

iii. **当**$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$**时，令**$t = \tan x$**.**

习题： 习题6.4中的11、13、14

思考题： 求下列不定积分：$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}$.

(4) $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x = I_n$,

$I_n = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}, I_1 = \sin x + C, I_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

习题： 习题6.4中的18

(5) **习题：** 习题6.4中的11、12、15、19

6.5简单无理式的积分、不定积分小结

1. 简单无理式的积分

(1) $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{ax+b=t^n} \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}\mathrm{d}t\ (a \neq 0)$:

习题： 习题6.5中的1、3、4、5、6、15

(2) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{t^n=\frac{ax+b}{cx+d}} \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\frac{n(ad-cb)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t(a \neq 0, c \neq 0)$;

(3) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x\ (a \neq 0, 4ac - b^2 \neq 0)$:

i. $\int R\left(x, \sqrt{(x+p)^2 - q^2}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{x+p=q\sec t} \int R(x, q\tan t)q\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$;

习题： 习题6.5中的7、9

ii. $\int R\left(x, \sqrt{(x+p)^2 + q^2}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{x+p=q\tan t} \int R(x, q\sec t)q\sec^2 t\,\mathrm{d}t$;

习题： 习题6.5中的8、10、12、14

iii. $\int R\left(x, \sqrt{q^2 - (x+p)^2}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{x+p=q\sin t} \int R(x, q\cos t)q\cos t\,\mathrm{d}t$.

习题： 习题6.5中的13

(4) **其他**

习题： 习题6.5中的2、11

定积分

2019年1月3日　　17:37

7.1积分概念和积分存在的条件

1. **曲边梯形的面积**
2. **黎曼积分的定义**
3. **积分存在的充分必要条件：**

   思考题：举例说明：由$|f| \in R[a,b]$一般不能推出$f \in R[a,b]$.

7.2定积分的性质

1. **方向性**
2. **线性性质**
3. **区间可加性**
4. **特殊函数定积分的性质（奇偶性、周期性）**
5. **比较定理（保号性）**
   (1) **估值定理**
6. **绝对值函数的可积性**
7. **积分中值定理**
   (1) **第一积分中值定理**

思考题：证明不等式：$f \in C[0,1], f(0)=0, f(1)=1, f''(x)>0$，则$\int_0^1 f(x)\,dx < \frac{1}{2}$.

7.3定积分的换元积分法与分部积分法

1. **换元积分法**

   思考题：设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

   (1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

   (2) $$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

2. **分部积分法**

   (1) **思考题：** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2}, & n=2m \\ \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}, & n=2m-1 \end{cases}$.

7.4定积分的几何应用

1. **平面图形的面积**
   (1) **直角坐标系：**$S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   (2) **极坐标系：**$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
   (3) **参数方程：**$S=\int_c^d y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

   思考题：求椭圆的面积：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$.（答案：$\pi ab$）

2. **曲线长度的计算**
   (1) **直角坐标方程：**$l=\int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$
   (2) **极坐标方程：**$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$
   (3) **参数方程：**

i. **平面曲线：** $l=\int_c^d\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$

ii. **空间曲线：** $l=\int_c^d\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$

思考题： 求下列曲线的弧长：心脏线$\rho=a(1+\cos\theta),\theta\in[0,2\pi]$.

3. **平面曲线的曲率**

(1) **参数方程：** $k=\left|\frac{y''x'-y'x''}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right|$

(2) **直角坐标方程：** $k=\left|\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right|$

(3) **极坐标方程：** $k=\left|\frac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{[\rho^2+(\rho')^2]^{\frac{3}{2}}}\right|$

思考题： 求曲线$y=\mathrm{e}^x$上弯曲程度最大的点.

4. **旋转体体积**

(1) **直角坐标方程（$y=y(x)\geq 0$）：**

i. **绕x轴旋转：** $V=\int_a^b\pi y^2\,\mathrm{d}x$

1) **参数方程：** $V=\int_{x(c)}^{x(d)}\pi y(t)^2\,\mathrm{d}x(t)$

2) **极坐标方程：** $V=\int_{\rho\cos\alpha}^{\rho\cos\beta}\pi(\rho\sin\theta)^2\,\mathrm{d}(\rho\cos\theta)$

ii. **绕y轴旋转：** $V=\int_a^b 2\pi x\cdot y\,\mathrm{d}x$

1) **参数方程：** $V=\int_{x(c)}^{x(d)}2\pi x(t)\cdot y(t)\,\mathrm{d}x(t)$

2) **极坐标方程：** $V=\int_{\rho\cos\alpha}^{\rho\cos\beta}2\pi(\rho\cos\theta)\cdot(\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}(\rho\cos\theta)$

思考题： 求旋转体的体积：$\rho=a(1+\cos\theta),\theta\in[0,2\pi]$绕极轴,$a>0$.

5. **旋转曲面的面积**

(1) **直角坐标方程：**

i. **绕x轴旋转：** $S=\int_a^b 2\pi|y|\sqrt{1+[y']^2}\,\mathrm{d}x$

1) **参数方程：** $S=\int_c^d 2\pi|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$

2) **极坐标方程：** $S=\int_\alpha^\beta 2\pi|\rho\sin\theta|\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$

ii. **绕y轴旋转：** $S=\int_a^b 2\pi x\sqrt{1+[y']^2}\,\mathrm{d}x,(a\geq 0)$

1) **参数方程：** $S=\int_c^d 2\pi x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$

2) **极坐标方程：** $S=\int_\alpha^\beta 2\pi(\rho\cos\theta)\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$

思考题： 求旋转曲面的面积：$y^2=2px+a,0\leq x\leq a,a>1$绕$x$轴.

7.5反常积分

1. **无穷积分**
2. **瑕积分**
3. **反常积分收敛性的判定**

(1) **无穷积分**

i. **比较判别法**

ii. **比较判别法的极限形式**

iii. **比阶判别法的极限形式**

思考题： 讨论下列广义积分的收敛性：$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}, p>0, q>0.$

iv. **无穷积分的柯西收敛准则**

v. **绝对收敛与条件收敛**

(2) 瑕积分

i. **比阶判别法的极限形式**

思考题： 讨论下列广义积分的收敛性：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}, p>0, q>0.$

级数

2019年1月3日 17:39

8.1数项级数的概念与性质

1. **基本概念**
   (1) **级数**
   (2) **级数的部分和**
   (3) **级数的收敛与发散**

   思考题： 求下列级数的和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
2. **级数的性质**
   (1) **级数收敛的必要条件**

   思考题： 利用级数的基本性质研究下列级数的收敛性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-100}{n}$.

   (2) **收敛级数的线性性质**

   思考题： 利用级数的基本性质研究下列级数的收敛性：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{4}{3^n}\right)$.

   (3) **收敛级数满足结合律**
   (4) **级数是否收敛与该级数的前有限项无关**
3. **几何级数与p级数**
   (1) **几何级数**
   (2) **p级数**

8.2正项级数的收敛判别法

1. **比较判别法和比阶判别法**
   (1) **比较判别法**
   (2) **比较判别法的极限形式**
   (3) **比阶判别法**
   (4) **比阶判别法的极限形式**

   思考题： 设$p>0$，研究级数$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^{2p}}\right]$的收敛性.
2. **比值判别法与根值判别法**
   (1) **比值判别法**
   (2) **根值判别法**

   思考题： 利用比值判别法或根值判别法判断下列级数的收敛性：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{a^n}(a>0)$.
3. **积分判别法**

8.3任意项级数

1. **交错级数**
2. **绝对收敛与条件收敛**
3. **绝对收敛级数的性质**

8.4函数级数

1. **函数级数及其收敛域**

   思考题： 求下列级数的收敛域，并指出使级数绝对收敛、条件收敛的x的范

围：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2. **函数级数的一致收敛性**
3. **一致收敛级数的分析性质**

8.4幂级数

1. **幂级数的收敛半径与收敛域**
2. **幂级数的分析性质**

   思考题： 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=3$处条件收敛，试求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛半径.
3. **函数的幂级数展开**
4. **幂级数求和**

   思考题： 求下列幂级数的收敛域及和函数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$.

8.5傅里叶级数

1. **周期函数的傅里叶级数**
2. **正弦级数与余弦级数**
3. **傅里叶级数的复数形式**
4. **傅里叶级数的平均收敛**

思考题： 比较函数$f(x)=-x+1$按下列要求展开得到的各和函数的图形.

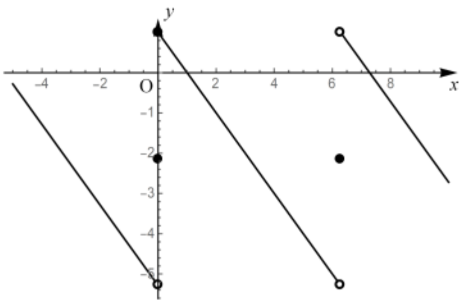
(1) 在$(0,2\pi)$展成以2π为周期的傅里叶级数；

(2) 在$(0,\pi)$展成以2π为周期的正弦级数；

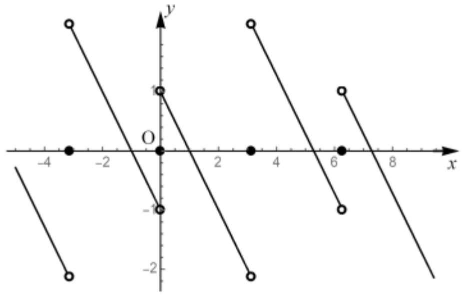
(3) 在$(0,\pi)$展成以π为周期的傅里叶级数；

(4) 在$(-1,1)$展成以2为周期的傅里叶级数.

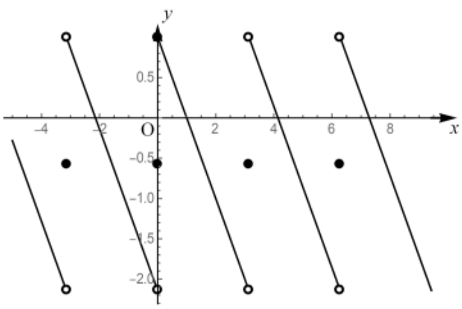
解答：



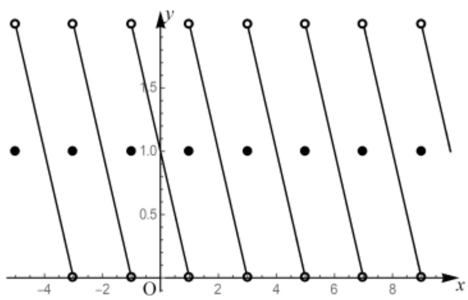
(1)



(2)



(3)



(4)