20181015

2019年9月4日 9:30

2.1数列极限的概念习题重点

1. 用极限定义证明下列各题：**（常用结论）**
   (1) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$；
   (2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$；
   (3) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^2 = A^2$；
   (4) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

2.2数列极限存在的条件习题重点

1. **夹逼原理：**
   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
2. **单调有界收敛定理：**
   (1) 设$x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)(\mathrm{n} = 2,3,\cdots)$. 求证：$\{x_n\}$和$\{y_n\}$收敛于同一个实数.
   (2) 设$\mathrm{a_n} \neq 0(\mathrm{n} \in \mathbb{Z}^+)$，$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left|\frac{\mathrm{a_{n+1}}}{\mathrm{a_n}}\right| = \mathrm{q} < 1$，求证：$\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{a_n} = 0$.
3. **柯西收敛准则：**
   (1) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$
4. **四则运算：**
   (1) $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}\right)$
5. **其他**：
   (1) $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

20181022

2019年9月4日 9:32

2.3函数极限的概念和性质习题重点

1. **函数极限的定义：**
   (1) 习题2.3中的1.(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)
2. **唯一性**
3. **有界性**
4. **保号性：**
   (1) 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，证明$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.
5. **函数极限与数列极限的关系：**
   (1) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上为周期函数，若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明$f(x)\equiv 0$.

2.4函数极限的运算法则习题重点

1. **夹逼原理**
2. **单调有界收敛定理**
3. **四则运算：**
   (1) 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}, m,n\in\mathbb{Z}^+$
   (2) 习题2.4中的1.(1)、(6)
   (3) 习题2.4中的3.(1)、(2)
4. **极限的复合运算:**
   (1) 习题2.4中的5.(1)、(2)
5. **两个重要的极限：**
   (1) 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+n}{x-n}\right)^x$
   (2) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$
   (3) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$
   (4) 习题2.4中的2.(6)、(7)、(8)、(12)、(14)

2.5无穷小量与阶的比较习题重点

1. **无穷小量与无穷大量**
2. **阶的比较：**
   (1) 利用极限的四则运算法则和等价无穷小量互相代换的方法求下列极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$.
   (2) 习题2.5中的2
   (3) 习题2.5中的3
   (4) 习题2.5中的4.(5)、(6)、(8)、(10)
   (5) 将下列无穷小量（当$x\to 0^+$时）按照其阶的高低排列出来：$\sin x^2$，$\sin(\tan x)$，$e^{x^3}-1$，$\ln(1+\sqrt{x})$

20181029

2019年9月4日 9:33

3.1连续函数的概念和性质习题重点

1. **函数的连续与间断**

   (1) 研究下列函数在$x_0=0$的连续性：$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$.

   (2) 习题3.1，3.

2. **连续函数的简单性质**
   - **四则运算**
   - **复合函数的连续性**
   - **反函数的连续性**
3. **初等函数的连续性**

3.2区间套定理与列紧性定理习题重点

1. **闭区间套定理：** 假定$[a_n,b_n](n\in\mathbb{Z}^+)$是一列闭区间，满足下列条件：

   A) $[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}], n\in\mathbb{Z}^+$;

   B) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$

   则存在唯一一点ξ，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，且

   $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n].$

   思考题：

   (1) 在闭区间套定理中，如果将闭区间改成开区间，结论是否成立？考察开区间列$\left(0,\frac{1}{n}\right)(n=1,2,\cdots).$

2. **列紧性定理**：

   A) 任意有界数列$\{x_n\}$包含收敛子列；

   B) 设$[a,b]$为有界闭区间，$\{x_n\}\subseteq[a,b]$. 如果$\{x_{n_j}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子列，且$\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_j}=\xi$，则$\xi\in[a,b]$.

3.3闭区间上连续函数的性质习题重点

1. **零点定理：**

   (1) 假设$f\in C[a,b]$，如果$f(x)$在任一点$x\in[a,b]$都不等于零，求证$f(x)$在$[a,b]$不变号.

   (2) 设$a_{2m}<0$. 求证实系数多项式$x^{2m}+a_1x^{2m-1}+a_2x^{2m-2}+\cdots a_{2m-1}x+a_{2m}$至少有两个实零点.

2. **介值定理：**
3. **最大最小值定理：**

   (1) 假设$f\in C[a,b], x_1,x_2,\cdots,x_m\in[a,b]$. 求证存在$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_m)}{m}$.

   (2) 假设$f\in C(-\infty,+\infty)$，当$x\to\infty$时，$f(x)\to+\infty$，求证存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(x)=\min\{f(x)|-\infty<x<+\infty\}$.

3.4函数的一致连续性习题重点

(1) 设$f(x)$在I上有定义. 并且存在正数L和α，对于I中任意两点u, v，有$|f(u)-f(v)| \leq L|u-v|^{\alpha}$. 求证$f(x)$在$I$上一致连续. 如果$\alpha > 1$，求证$f(x)$在$I$上恒等于常数.

(2) 求证x^2在$[0，+\infty)$不一致连续.

20181105

2019年9月4日 9:34

3.4函数的一致连续性习题重点

(1) 设$f(x)$在I上有定义.并且存在正数L和α，对于I中任意两点u,v，有$|f(u)-f(v)|\le L|u-v|^{\alpha}$. 求证$f(x)$在$I$上一致连续.如果$\alpha>1$，求证$f(x)$在$I$上恒等于常数.

(2) 求证x^2在$[0，+\infty)$不一致连续.

4.1导数的概念

1. **导数的定义**
2. **利用定义求导**

(1) 证明：可导偶函数的导函数为奇函数；

(2) 证明：可导奇函数的导函数为偶函数；

(3) 证明：可导周期函数，其导函数为具有相同周期的周期函数。

(4) 利用导数的定义求函数在指定点的导数：$f(x)=\sqrt{x}, x_0=4$.

(5) 习题4.1 5.（5）；6.（6）；7；8；11.

4.2导数的运算法则

1. **导数的四则运算：**

(1) 求下列函数的导数：

i. $y=\sqrt{x^2+1}\cot x$;

ii. $y=\frac{\tan x}{x}$;

iii. $y=\sec x\tan x$;

iv. $g(z)=\frac{\csc z}{z^2}$.

2. **复合函数求导法则：**

(1) 设f为可导函数，求下列函数的导数：$f(e^x)e^{f(x)}$.

(2) 求下列函数的导数：

i. $y=2^{\ln\frac{1}{x}}$;

3. **反函数求导法则：**

(1) 求下列函数的导数：

i. $y=\arcsin\frac{1}{x}$;

ii. $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

iii. $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$.

4.3若干特殊的求导方法

1. **对数求导法：**

(1) 利用对数求导法求下列函数的导数：

i. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

ii. $y=x+x^2+x^{x^x}$.

2. **参数式函数求导法**
3. **隐函数求导法:**

(1) 求下列隐函数的导数$y'(x)$：

i. $x^2=\frac{x-y}{x+y}$.

20181112

2019年9月4日 9:36

第二章补充题

1. 第8题（第7题）

第三章补充题

1. 第3题（第11题、第12题）

第四章补充题

1. 第1题、第6题、第7题、第8题、第9题（第2题、第5题）

（括号里的题目可能讲不到，大家也可以看看。）

20181119

2019年9月4日 9:36

4.4高阶导数

1. **运算法则：**
   (1) 设f为三次可导函数，求y'':$y=f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (2) 习题4.5中的4.、5.（5）（6）（7）（8）（9）（10）
   (3) 第四章补充题6.

5.1微分中值定理

1. **费马定理**
2. **罗尔定理：**
   (1) 习题5.1中的1.（2）、3.
3. **拉格朗日中值定理（微分中值定理）：**
   (1) 习题5.1中的4.（3）、5.（1）、6.（4）、8.（1）（2）、9.
4. **柯西中值定理**

5.2洛必达法则

1. **定理5.2.1（$\frac{0}{0}$型不定式，x趋于点）**
2. **定理5.2.2（$\frac{0}{0}$型不定式，x趋于无穷）**
3. **定理5.2.3（$\frac{\infty}{\infty}$型不定式，x趋于点）**
   (1) 习题5.2中的1.（7）（8）（10）（12）（14）、2.（3）（6）（7）（10）（12）、3.、4.

20181126

2019年9月4日 9:38

5.3函数极值及其应用

1. **函数的极值**
   (1) **定理5.3.2**：设f在点x_0的某个邻域内有一阶导数，并且$f'(x_0)=0$，又设$f''(x_0)$存在，则
      i. $f''(x_0)>0$时，f在点x_0处取得极小值；
      ii. $f''(x_0)<0$时，f在点x_0处取得极大值.
2. **函数的最小值和最大值问题**
3. **应用问题**：
   (1) **定理5.3.3**：假设$f(x)$在区间I处处可导，并且在区间I内部只有一个驻点x_0，则
      i. 如果$f(x_0)$是极小值，则$f(x_0)$是$f(x)$在区间I上的最小值；
      ii. 如果$f(x_0)$是极大值，则$f(x_0)$是$f(x)$在区间I上的最大值.

   思考题：建造一个容积为$300\mathrm{m}^3$的有盖圆筒，如何确定底面半径r和桶高h才能使得所用材料最省？

   习题：习题5.3 1.（4）、2.（3）、3.、6.

5.4函数图形的描绘

1. **曲线的凸性**：
   (1) **定理5.4.2**：设$f\in C[a,b]$.
      i. 如果f在区间(a,b)内一阶可导，则f在区间$[a,b]$上为下（上）凸函数的充分必要条件是$f'(x)$在区间(a,b)内单调非减（非增）.
      ii. 如果$f(x)$在区间(a,b)内二阶可导，则f在区间$[a,b]$上为下（上）凸函数的充分必要条件是$f''(x)$在区间(a,b)内非负（非正）.
   (2) **拐点**：拐点两侧曲线有不同的凸性.

   思考题：确定下列函数的上凸和下凸区间与拐点：$y=x^2+\frac{1}{x}$.

   思考题：证明下列不等式（并讨论等号成立的条件）：$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p\le\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots x_n^p}{n}$，其中$p\ge 1,x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0$.

   习题：习题5.4 2.（1）、2.（3）
2. **函数作图**
   (1) **渐近线**：
      i. 直线$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是：当$x\to {x_0}^+$（或$x\to {x_0}^-$）时，$f(x)$趋向无穷.
      ii. 直线$y=y_0$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线的充分必要条件是当$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时，$f(x)$趋向y_0.
      iii. 设函数f在$[c,+\infty)$上有定义，则曲线$y=f(x)$以直线$y=ax+b(a\ne 0)$为渐近线的充分必要条件是下列两式同时成立：
         1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$；
         2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$.

思考题：已知$y = f(x)$是由方程$y^3 - x^3 + 2xy = 0$所确定的隐函数，设曲线$y = f(x)$有斜渐近线$y = f(x)$有斜渐近线$y = ax + b$，求a, b.

思考题：习题5.4 3.（3）

20181203

2019年9月4日 9:40

5.5泰勒公式及其应用

习题： 按指定次数写出下列函数在指定点的泰勒多项式：$f(x)=\frac{x}{x-1}, x_0=2$，展到n次.

习题： 用泰勒公式进行近似计算：$\sqrt[12]{4000}$，精确到10^{-4}.

习题：习题5.5中的1.（2）、（3）、（4）、（6）2.

20181210

2019年9月4日 9:48

6.1概念和性质

习题： 证明$f(x)=x^2\operatorname{sgn}x$是$|x|$在$(-\infty+\infty)$的一个原函数.

习题： 求下列不定积分：$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

习题： 习题6.1中的2.（2）、（3）、（4）、（5）

习题： 设$f(x)=\begin{cases} e^x, x\geq 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$,求$\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

习题： 习题6.1中的4

6.2换元积分法

1. **第一换元法（凑微分法）：**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{\text{凑微分}} \int g(h(x))\,h'(x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{\text{换元}h(x)=u} \int g(u)\,\mathrm{d}u \xRightarrow{\text{积分}} G(u)+C \xRightarrow{\text{再换元}u=h(x)} G(h(x))+C$$

思考题： 求不定积分$\int \csc x\,\mathrm{d}x$.

习题： 习题6.2中的1.（1）、（2）、（3）、（4）、（5）（积化和差）、（6）、（8）、（10）、（12）、（13）、（14）（sec）、（15）、（16）、（17）、**(18)**、（19）、（21）

2. **第二换元法（换元法）：**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{\text{换元}x=h(t)} \int f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int g(t)\,\mathrm{d}t \xRightarrow{\text{积分}} G(t)+C \xRightarrow{\text{再换元}t=h^{-1}(x)} G(h^{-1}(x))+C$$

思考题： 求不定积分$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,(a>0)$.（提示：令$t=a\sec x$）

习题： 习题6.2中的

1.（11）、（22）、（23）、**(24)**、（25）、（26）、**(27)**、**(28)**、(29)、（30）

3. **习题：** 习题6.2中的1. **(7)**、（9）

6.3分部积分法

1. $\displaystyle\int \boldsymbol{u(x)\,\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\,\mathrm{d}u(x)}$

   (1) 被积函数与对数函数、反三角函数有关的情况

   习题： 习题6.3中的2、3、5（换元）、10（换元）、16、17、18、21

   (2) 被积函数与三角函数、指数函数有关的情况

   习题： 习题6.3中的1、6、7、9（换元）、11、12（tan）、13（换元）、

   (3) 通过分部积分公式建立方程的情况

   习题： 习题6.3中的8、14、15（对数）、

   (4) 通过分部积分公式建立递推关系的情况

   (5) 其他情况

习题： 习题6.3中的4、19、20（tan）、22（换元）

6.4有理函数的积分

1. **分式函数的积分：**
   (1) **有理分式函数、真分式、假分式**
   (2) **最简分式**
   i. $\int \frac{A}{ax+b}\mathrm{d}x$;
   ii. $\int \frac{A}{(ax+b)^k}\mathrm{d}x$;
   iii. $\int \frac{Bx+C}{px^2+qx+r}\mathrm{d}x$;
   iv. $\int \frac{Bx+C}{\left(px^2+qx+r\right)^k}\mathrm{d}x$.
   (3) **定理6.4.1：设$\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$是一个真分式，则它可以唯一地分解为最简分式之和，分解规则如下：**
   i. $Q_n(x)$**的一次单因式**$ax+b$**对应一项**$\frac{A}{ax+b}$;
   ii. $Q_n(x)$**的一次**k**重因式**$(ax+b)^k$**对应**k**项**$\frac{A_1}{ax+b},\frac{A_2}{(ax+b)^2},\cdots,\frac{A_k}{(ax+b)^k}$;
   iii. $Q_n(x)$**的二次单因式**px^2+qx+r**对应一项**$\frac{Bx+D}{px^2+qx+r}$;
   iv. $Q_n(x)$**的二次**k**重因式**$\left(px^2+qx+r\right)^k$**对应**k**项** $\frac{B_1x+D_1}{px^2+qx+r},\frac{B_2x+D_2}{\left(px^2+qx+r\right)^2},\cdots,\frac{B_kx+D_k}{\left(px^2+qx+r\right)^k}$.

   思考题： 求下列不定积分：$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$.

   习题： 习题6.4中的1、2、3、4、5、6、7、8、9、10
2. **三角函数有理式的积分：**
   (1) **习题：** 习题6.4中的11、12、15、19
   习题： 习题6.2中的2
   习题： 习题6.4中的18
   (2) **半角万能变换：** $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x \xRightarrow{t=\tan\frac{x}{2}} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
   习题： 习题6.4中的16、17、20
   思考题： 求下列不定积分：$\int \frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x$
   (3) **全角万能变换：**
   i. **当**$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$**时，令**$t=\sin x$;
   ii. **当**$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$**时，令**$t=\cos x$;
   iii. **当**$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$**时，令**$t=\tan x$.
   习题： 习题6.4中的13、14
   思考题： 求下列不定积分：$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}$.

6.5简单无理式的积分、不定积分小结

1. **简单无理式的积分**
   (1) $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{ax+b=t^n} \int R\left(\frac{t^n-b}{a},t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}\mathrm{d}t\ (a\neq 0)$:
   习题： 习题6.5中的1、3、4、5、6、15
   (2) $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{t^n=\frac{ax+b}{cx+d}} \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{n(ad-cb)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\mathrm{d}t\left(a\neq 0,c\neq 0\right)$;

(3) $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x\left(a\neq 0,4ac-b^2\neq 0\right)$:

i. $\int R\left(x,\sqrt{(x+p)^2-q^2}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{x+p=q\sec t} \int R(x,q\tan t)q\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$;

习题： 习题6.5中的7、9

ii. $\int R\left(x,\sqrt{(x+p)^2+q^2}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{x+p=q\tan t} \int R(x,q\sec t)q\sec^2 t\,\mathrm{d}t$;

习题： 习题6.5中的8、10、12、14

iii. $\int R\left(x,\sqrt{q^2-(x+p)^2}\right)\mathrm{d}x \xRightarrow{x+p=q\sin t} \int R(x,q\cos t)q\cos t\,\mathrm{d}t$.

习题： 习题6.5中的13

(4) 其他

习题： 习题6.5中的2、11

7.1积分概念和积分存在的条件

习题： 习题7.1中的2、3、4

7.2定积分的性质

习题： 习题7.2中的1. **(1)** 、（2），2.（2），3.（1）、（2），4.（1）、（2）

7.3变上限积分与牛顿-莱布尼茨公式

习题：习题7.3中的

1.（2）、（3），2.（2），3.（1）、（4）、（5）、（6）、（7）、（8），4，5.（2）、（3）、（4），6

（**注：**标红的题目课上会讲到。紫色的题目是后来增加的，也会讲到。）

20181217

2019年9月4日　　9:48

6 原函数与不定积分

习题： 习题6.4中的1、3、4、5

习题： 习题6.2中的2

习题： 习题6.4中的15

7定积分

7.1积分概念和积分存在的条件

习题： 习题7.1中的2、3、4

7.2定积分的性质

习题： 习题7.2中的1.（1）、（2），3.（1）、（2），4.（1）、（2）

7.3变上限积分与牛顿-莱布尼茨公式

习题： 习题7.3中的

1.（2）、（3），2.（2），3.（5）、（6）、（7）、（8），4，5.（2）、（3）、（4），6

20181224

2019年9月4日 9:50

7定积分

7.4定积分的换元积分法与分部积分法

习题： 习题7.4中的1.（6）

习题： 求不定积分：$\int \cot^3 x \,\mathrm{d}x$

习题： 习题7.4中的2.（1）、（2），3、4

7.5定积分的几何应用

习题： 习题7.5中的

1.（4），2.（3），3.（1）、（2），4，5.（1），6.（2）、（3），7.（1）、（2）

7.6定积分的物理应用

习题： 习题7.6中的1、5

7.7反常积分

习题： 习题7.7中的1.（1）、（2）、（5）、（7）、（8）

习题： 习题7.7中的2.（1）、（2）、（4）、（5）、（6）、（7）、（8）

习题： 习题7.7中的3

20181229

2019年9月4日 9:52

8级数

8.1数项级数的概念与性质

习题：习题8.1中的1.（1）、（2），2.（1）、（2）、（3）、（4）

8.2正项级数的收敛判别法

习题：习题8.2中的

1.（2）、（4）、（6），2.（1）、（3）、（4）、（6）、（7）、（8），3.，4.，5.（1）、（2）、（3）、（4）

8.3任意项级数

习题：习题8.3中的1.（1）、（3）、（4）、（5）、（6）、（7），2.，3.

8.4函数级数

习题：习题8.4中的

1.（1）、（2）、（3）、（4）、（5）、（6）、（7）、（8）,2.（1）、（2）、（3）、（4），3.，4.