上册 111 页 14 题（3）（4）问

（3）存在时刻 $t_0 \in [0,70]$，使得在时间段 $[t_0, t_0+30]$ 中物体恰好移动了 30 米。证明如下：

令 $f(t) = \dfrac{s(t+30)-s(t)}{30}$。

（A）若 $f(0)<1$，$f(30)<1$，则曲线 $s=s(t)$ 与直线 $s=t$ 在 $(0,60)$ 上没交点。但根据题意，曲线 $s=s(t)$ 与直线 $s=t$ 在 $(0,100]$ 上存在交点（参见下图）。

这时问题"存在 $t_0 \in [0,70]$，使得 $f(t_0) = \dfrac{s(t_0+30)-s(t_0)}{30} = 1$"转化为：若函数 $g(x) \in C[a,b]$，且 $g(a)=g(b)=0$，$g(x)<0$，$x \in (a,b)$，则对任意的 $0<m<b-a$，存在 $x_0 \in (a, b-m)$，使得 $g(x_0+m)-g(x_0)=0$。该问题的证明为：

令 $G(x) = g(x+m)-g(x)$，则 $G(x) \in C[a,b-m]$，且

$$G(a) = g(a+m)-g(a) < 0,\quad G(b-m) = g(b)-g(b-m) > 0,$$

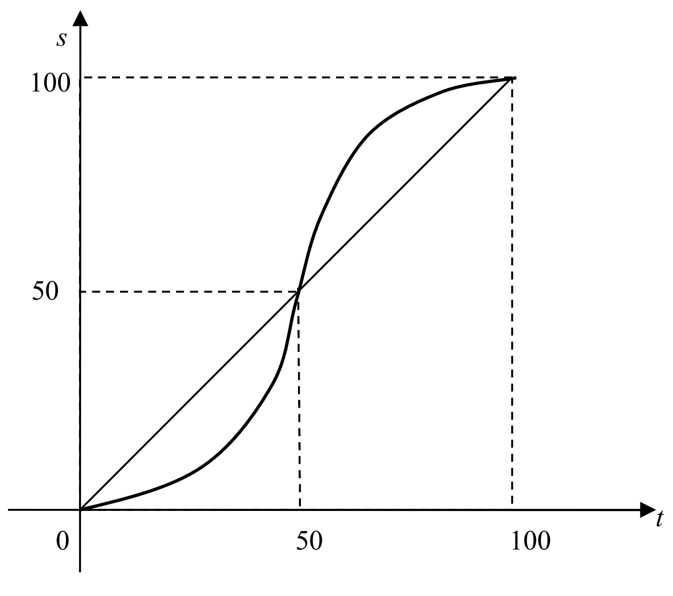
所以存在 $x_0 \in (a,b-m)$，使得 $G(x_0) = g(x_0+m)-g(x_0) = 0$。

（B）若 $f(0)<1$，$f(30)<1$，证明方法同（A）。

（C）若 $f(0)<1$，$f(30)>1$（或 $f(0)>1$，$f(30)<1$），利用连续函数的介值定理证明。

注：事实上，当 $s \leqslant 50$ 时，同样的方法可以证明：存在时刻 t_0，使得在时间段 $[t_0, t_0+s]$ 中物体恰好移动了 s 米。

（4）



当 $s>50$ 时，不见得存在时刻 t_0，使得在时间段 $[t_0, t_0+s]$ 中物体恰好移动了 s 米。如图的情

形就有：对任意的$t_0 \in [0,100-s]$，都有$\dfrac{s(t_0+s)-s(t_0)}{s}>1$成立！