5 导数的概念、运算法则与若干特殊函数的求导方法

5.1 知识结构

第4章导数与微分

4.1 导数的概念

4.1.1 导数

- 运动物体的瞬时速度
- 曲线的切线问题
  - 切线
  - 法线

4.1.2 基本初等函数的导数

- 常数函数
- 三角函数
- 对数函数
- 指数函数

4.2 导数的运算法则

4.2.1 导数的四则运算

- 导数的四则运算法则
- 复合函数求导法则

4.2.2 反函数求导法则

4.3 若干特殊的求导方法

4.3.1 对数求导法

4.3.2 参数式函数求导法

4.3.3 隐函数求导法

5.2 习题4.1解答

1. 当物体温度高于室内温度时，物体就会逐渐冷却. 设物体温度T与时间t的关系为$T = T(t)$，试求物体在时刻t的冷却速率.

   解：物体在时刻t的冷却速率为$T'(t)$.

2. 求等边三角形的面积关于其边长的变化率.

解：等边三角形的面积$S(a)=\frac{1}{2}a^2\sin 60°$关于其边长$a$的变化率为$S'(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

3. 求球体体积关于其半径的变化率. 并问：该变化率与这个球的表面积是什么关系？

解：球体体积$V(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$关于其半径R的变化率$V'(R)=4\pi R^2$，等于球的表面积.

4. 利用导数的定义求函数在指定点的导数：

(1)$f(x)=-5, x_0=2$；

(2)$f(x)=-2x+1, x_0=1$；

(3)$f(x)=\frac{1}{x}, x_0=-2$；

(4)$y=\cos x, x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$；

(5)$f(x)=\sqrt{x}, x_0=4$；

(6)$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{2}}, & x>1 \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{2}, & x\le 1 \end{cases}, x_0=1.$

解：(1)$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0.$

(2)$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-2.$

(3)$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4}.$

(4)$y'(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{y(x)-y(x_1)}{x-x_1}=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{\cos x-\cos x_1}{x-x_1}=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{-2\sin\frac{x+x_1}{2}\sin\frac{x-x_1}{2}}{x-x_1}=-\sin x_1=0;y'(x_2)=-\sin x_2=-1.$

(5)$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{4}.$

(6)$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{2}, f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2}=f'_-(x_0)$，故$f'(x_0)=\frac{1}{2}$.

5. 证明下列函数在其定义域内每一点处都可导，并求其导数：

(1)$f(x)=ax+b(a,b$为常数$)$；

(2)$f(x)=\sqrt{x^3}$；

(3)$f(x)=\frac{1}{2x}$；

(4)$f(x)=\sin 3x$；

(5)$f(x)=x^{\frac{1}{n}}(x\ne 0, n$为正整数$)$.

证明：(1)$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=a, x\in(-\infty,+\infty).$

(2)$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^3}-\sqrt{x^3}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x[\sqrt{(x+\Delta x)^3}+\sqrt{x^3}]}=\frac{3}{2}\sqrt{x}, x>0, f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\sqrt{\Delta x^3}-0}{\Delta x}=0.$

(3)$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+\Delta x)}-\frac{1}{2x}}{\Delta x}=\frac{1}{2x},x\neq 0.$

(4)$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 3(x+\Delta x)-\sin 3x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{6x+3\Delta x}{2}\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}=3\cos 3x,x\in(-\infty,+\infty).$

(5)当$n=1$时，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1,x\neq 0$

当$n\geq 2$时，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n}}}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x[(x+\Delta x)^{\frac{n-1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}}+\cdots+x^{\frac{n-1}{n}}]}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(x+\Delta x)^{\frac{n-1}{n}}+(x+\Delta x)^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}}+\cdots+x^{\frac{n-1}{n}}}$
$=\frac{1}{(x)^{\frac{n-1}{n}}+(x)^{\frac{n-2}{n}}x^{\frac{1}{n}}+\cdots+x^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
当n为奇数时，$x\neq 0$，导函数与原函数的定义域相同，当n为偶数时，$x>0$，导函数与原函数的定义域也相同，故函数$f(x)$在其定义域内每一点处都可导.

两种情况合并可得$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$，当$n$为奇数时，$x\neq 0$，当$n$为偶数时，$x>0$.

6. 研究下列分段函数在分段点处的可导性，若可导，求出导数值：

(1)$y=|x-3|$，在点$x=3$；

(2)$y=\begin{cases}x, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geq 0\end{cases}$，在点$x=0$；

(3)$f(x)=|x|+2x$，在点$x=0$；

(4)$g(x)=\begin{cases}3x^2+4x, & x<0\\ x^2-1, & x\geq 0\end{cases}$，在点$x=0$；

(5)$y(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在点$x=0$；

(6)$y(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在点$x=0$.

解：(1)$y'_+(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{y(3+\Delta x)-y(3)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1,y'_-(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{y(3+\Delta x)-y(3)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1\neq y'_+(3)$，故原函数在点$x=3$处不可导.

(2)$y'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\ln(1+\Delta x)-0}{\Delta x}=1,y'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1=y'_+(0)$，故原函数在点$x=0$处可导，导数为1.

(3)$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x+2\Delta x-0}{\Delta x}=3,f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x+2\Delta x-0}{\Delta x}=1\neq f'_+(0)$，故原函数在$x=0$处不可导.

(4)$g(0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}g(x)=-1,g(0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}g(x)=0\neq g(0+0)$，原函数在$x=0$处不连续，故不可导.

(5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$，该极限不存在，故原函数在$x=0$处不可导.

(6)$y(0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{1}{1+e^{1/x}}=0, y(0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{1}{1+e^{1/x}}=1\neq y(0+0)$，原函数在$x=0$处不连续，故不可导.

7. 设函数$f(x)$在点x_0处可导，求$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$.

解：$\because f(x)$在点x_0处可导

$\therefore f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

记$g(t)=\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$，则$\lim\limits_{t\to 0}g(t)=f'(x_0)$

$\because$数列$a_n=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且$a_n\neq 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]=\lim\limits_{n\to\infty}g(a_n)=f'(x_0)$.

8. 设函数$f(x)$在点x_0处可导，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0).$$

反之，若此极限存在，问：$f(x)$在点x_0处是否可导？

解：若$f(x)$在点x_0处可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{2}[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}]=\frac{1}{2}[2f'(x_0)]=f'(x_0)$.

可能不正确的做法：若$f(x)$在点x_0处可导，则$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\xlongequal{t=x_0+\frac{\Delta x}{2}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(t+\frac{\Delta x}{2})-f(t-\frac{\Delta x}{2})}{2\frac{\Delta x}{2}}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t-h)}{2h}\neq\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

反之，若此极限存在，则函数$f(x)$在点x_0处不一定可导. 如取$f(x)=|x|$，在$x_0=0$处，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0-h|}{2h}=0$，但$f(x)$在$x=0$处的导数不存在.

9. 假设$f'(a)$存在，试求：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$.

解：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=-f'(a)$.

10. 假设$f(x)$在点a处可导，并令

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a\end{cases}$$

试证：$g(x)$在a处连续.

证明：$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=g(a)$，故$g(x)$在$a$处连续.

11. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le x_0\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$，为了使函数$f(x)$在点$x_0$处可导，应当如何选取系数$a$和$b$?

解：$\because f(x)$在点x_0处可导

$\therefore f(x)$在点x_0处连续

$\therefore f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=ax_0+b=f(x_0-0)=x_0^2$

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0, f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{ax+b-x_0^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{ax+b-ax+b}{x-x_0}=a$

由$f(x)$在点x_0处可导又可知$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$，故$a=2x_0, b=x_0^2-ax_0=-x_0^2$.

12. 证明：
(1)可导偶函数的导函数为奇函数；
(2)可导奇函数的导函数为偶函数；
(3)可导周期函数，其导函数为具有相同周期的周期函数.

证明：(1)记$f(x)$为可导偶函数，则$f(x)=f(-x)$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}=-f'(-x)$，故导函数$f'(x)$为奇函数.

(2)记$f(x)$为可导奇函数，则$f(x)=-f(-x)$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-f(-x-\Delta x)+f(-x)}{-\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}=f'(-x)$，故导函数$f'(x)$为偶函数.

(3)记$f(x)$为可导周期函数，T为其周期，则$f(x+T)=f(x)$

$f'(x+T)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$，故导函数$f'(x)$为具有相同周期的周期函数.

5.3 习题4.2解答

1. 求下列各函数的导数：
(1)$f(x)=x^3-4x+5$；
(2)$y=2x^4-3x^3+x-\frac{1}{3x^2}+\frac{7}{x^3}$；
(3)$y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}+2\sqrt{x}$；
(4)$f(x)=7x^2+\cos x-\ln x$；
(5)$f(x)=\sqrt{x}\cos x$；
(6)$g(x)=e^x\sin x$；
(7)$y=\sqrt{x^2+1}\cot x$；

(8)$f(t)=(t+t^2)^2$；

(9)$y=\frac{\tan x}{x}$；

(10)$y=\frac{x}{1-\cos x}$；

(11)$y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$；

(12)$y=\frac{x}{\sin^2 x}$；

(13)$g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$；

(14)$y=\frac{\ln x}{\cos x}$；

(15)$f(x)=\sqrt{x}\sec x$；

(16)$y=\sec x\tan x$；

(17)$y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$；

(18)$g(z)=\frac{\csc z}{z^2}$；

(19)$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$；

(20)$y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\cos x}$.

解：(1)$f'(x)=3x^2-4$.

(2)$y'=8x^3-9x^2+1+\frac{2}{3x^3}-\frac{21}{x^4}$.

(3)$y'=\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

(4)$f'(x)=14x-\sin x-\frac{1}{x}$.

(5)$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sqrt{x}\sin x$.

(6)$g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$.

(7)$y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cot x-\sqrt{x^2+1}\csc^2 x=\frac{x\cot x-(x^2+1)\csc^2 x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(8)$f'(t)=2(t+t^2)(1+2t)$.

(9)$y'=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$.

(10)$y'=\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

(11)$y'=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)+(1+\ln x)\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

(12)$y'=\frac{\sin^2 x-x2\sin x\cos x}{\sin^4 x}=\frac{\sin x-2x\cos x}{\sin^3 x}$.

(13)$g'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin x}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\arcsin x$.

(14)$y'=\frac{\frac{1}{x}\cos x+\ln x\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x+x\ln x\sin x}{x\cos^2 x}$.

(15)$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec x+\sqrt{x}\sec x\tan x$

(16)$y'=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$.

(17)$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x+\frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2}$.

(18)$g'(z)=\frac{-z^2\csc z\cot z-2z\csc z}{z^4}=\frac{-z\csc z\cot z-2\csc z}{z^3}$.

(19)$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$.

(20)$y' = \frac{(\cos x - \cos x + x\sin x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)(-\sin x + \sin x + x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2}$

$= \frac{x\sin x(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

2. 设$y = 2 + x - x^2$，求$y'(0), y'(\frac{1}{2}), y'(1), y'(-10)$.

解：$\because y'(x) = 1 - 2x$

$\therefore y'(0) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 0, y'(1) = -1, y'(-10) = 21$.

3. 求出下列各题中的a值：

(1)$f(x) = -2x^2, f'(a) = f(4)$；

(2)$f(x) = \frac{1}{x}, f'(a) = -\frac{1}{9}$；

(3)$f(x) = \sin x, f'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

解：(1)$f'(x) = -4x, f'(a) = f(4) \Rightarrow -4a = -32$，故$a = 8$.

(2)$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(a) = -\frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{9}$，故$a = \pm 3$.

(3)$f'(x) = \cos x, f'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$，故$a = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

4. 求下列函数的导数：

(1)$y = 2\sin 3x$；

(2)$y = xe^{-x^2}$；

(3)$y = \ln(1 - 2t)$；

(4)$y = \ln\ln x$；

(5)$y = \sqrt{1 + 2\tan x}$；

(6)$y = \ln(\cos x)$；

(7)$y = \arcsin\frac{1}{x}$；

(8)$y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$；

(9)$y = 2^{\ln\frac{1}{x}}$；

(10)$y = x\sqrt{1 - x^2}$；

(11)$y = \sqrt{2 - x}\sqrt[3]{3 + x}$；

(12)$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$；

(13)$y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$；

(14)$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$；

(15)$y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$；

(16)$y = \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$；

(17)$y = e^{-3x}\sin 2x$；

(18)$y = \lg^3 x^2$；

(19)$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$；

(20)$y=\ln\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$；

(21)$y=\arcsin(\sin^2 x)$；

(22)$y=\arccos\sqrt{1-x^2}$；

(23)$y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$；

(24)$y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$；

(25)$y=\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$.

解：(1)$y'=6\cos 3x$.

(2)$y'=e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$.

(3)$y'=\frac{1}{1-2t}(-2)=\frac{2}{2t-1}$.

(4)$y'=\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x}$.

(5)$y'=\frac{2\sec^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}=\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}$.

(6)$y'=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

(7)$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{\sqrt{x^4-x^2}}$.

(8)$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2}}\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{-2}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$.

(9)$y'=2^{\ln\frac{1}{x}}\ln 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}=-2^{\ln\frac{1}{x}}\frac{\ln 2}{x}$.

(10)$y'=\sqrt{1-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

(11)$y'=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}\sqrt[3]{3+x}+\sqrt{2-x}\frac{1}{3\sqrt{(3+x)^2}}=\frac{-\sqrt[3]{3+x}}{2\sqrt{2-x}}+\frac{\sqrt{2-x}}{3\sqrt{(3+x)^2}}$.

(12)$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(13)$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(\frac{1+x}{1-x})^2}\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\frac{2}{3}\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt[3]{(\frac{1+x}{1-x})^2}$.

(14)$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(15)$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}(1+\frac{-1}{2\sqrt{x}})=\frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x^2-x\sqrt{x}}}$.

(16)$y'=\frac{2\sin x\cos x\sin(x^2)-2x\sin^2 x\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}=\frac{\sin 2x\sin(x^2)-2x\sin^2 x\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$.

(17)$y'=-3e^{-3x}\sin 2x+2e^{-3x}\cos 2x=e^{-3x}(-3\sin 2x+2\cos 2x)$.

(18)$y'=(3\lg^2 x^2)\frac{1}{x^2\ln 10}2x=6\frac{\lg^2 x^2}{x\ln 10}$.

(19)$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x}{2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}$.

(20)$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\sec^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{\sec^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{2\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}=\sec x$.

(21)$y'=\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}=\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

(22)$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-1+x^2}}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$.

(23)$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\frac{-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

(24)$y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\frac{1}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{a^2-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$.

(25)$y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}=-\frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{x}}$.

5. 设f为可导函数，求下列各函数的导数：

(1)$f(\sqrt{1-x^2})$；

(2)$f(\frac{1}{x})$；

(3)$f(\ln x)$；

(4)$f(e^x)e^{f(x)}$；

(5)$f(f(f(x)))$；

(6)$\sqrt{f^2(x)}$.

解：(1)$(f(\sqrt{1-x^2}))'=f'(\sqrt{1-x^2})\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=f'(\sqrt{1-x^2})\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2)$(f(\frac{1}{x}))'=\frac{-1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$.

(3)$(f(\ln x))'=f'(\ln x)\frac{1}{x}$.

(4)$(f(e^x)e^{f(x)})'=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}(f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x))$.

(5)$(f(f(f(x))))'=f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$.

(6)$(\sqrt{f^2(x)})'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)}}2f(x)f'(x)=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

5.4 习题4.3解答

1. 利用对数求导法求下列函数的导数：

(1)$y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$；

(2)$y=(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}$；

(3)$y=x^{\sin x}$；

(4)$y=(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$；

(5)$y=\sqrt[x]{x}(x>0)$；

(6)$y=x+x^x+x^{x^x}(x>0)$.

解：(1)$(\ln y)'=[2\ln x-\ln(1-x)+\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3}\ln(1+x+x^2)]'=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\frac{1+2x}{1+x+x^2}$

$y'=y(\ln y)'=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{x+1}{1+x+x^2}}[\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\frac{1+2x}{1+x+x^2}]$.

(2)$(\ln y)'=[a_1\ln(x-a_1)+a_2\ln(x-a_2)+\cdots+a_n\ln(x-a_n)]'=\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-a_n}$

$y'=y(\ln y)'=(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}(\frac{a_1}{x-a_1}+\frac{a_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{x-a_n})$.

(3)$(\ln y)'=(\sin x\ln x)'=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$

$y'=y(\ln y)'=y=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$.

(4)$(\ln y)'=[x\ln(1+\frac{1}{x})]'=\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$

$y'=y(\ln y)'=(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}]$.

(5)$(\ln y)'=(\frac{1}{x}\ln x)'=\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

$y'=y(\ln y)'=\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$.

(6)记$y_1=x,y_2=x^x,y_3=x^{x^x}$

$y_1'=1$

$y_2'=y_2(\ln y_2)'=x^x(\ln x+1)$

$y_3'=y_3(\ln y_3)'$

$\because(\ln y_3)'=(\ln y_3)[\ln(\ln y_3)]'=(x^x\ln x)[x\ln x+\ln(\ln x)]'=(x^x\ln x)[\ln x+1+\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}]=(\ln x+1)(x^x\ln x)+x^{x-1}$

$\therefore y_3'=y_3(\ln y_3)'=x^{x^x}[(\ln x+1)x^x\ln x+x^{x-1}]$

$\therefore y'=y_1'+y_2'+y_3'=1+x^x(\ln x+1)+x^{x^x}[(\ln x+1)x^x\ln x+x^{x-1}]$.

2. 求导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1)$\begin{cases}x=\sin^2 t\\ y=\cos^2 t\end{cases}$；

(2)$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$；

(3)$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$；

(4)$\begin{cases}x=e^{2t}\cos^2 t\\ y=e^{2t}\sin^2 t\end{cases}$；

(5)$\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^3}\\ y=\frac{3at^3}{1+t^3}\end{cases}$；

(6)$\begin{cases}x=3t^2+2t\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$.

解：(1)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-2\cos t\sin t}{2\sin t\cos t}=-1$.

(2)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$.

(3)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$.

(4)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}2\sin t\cos t}{2e^{2t}\cos^2 t-e^{2t}2\cos t\sin t}=\frac{\sin^2 t+\sin t\cos t}{\cos^2 t-\cos t\sin t}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\tan t$.

(5)$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{9at^2(1+t^3)-3at^3(3t^2)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3)-3at(3t^2)}{(1+t^3)^2}}=\frac{3t^2(1+t^3)-t^3(3t^2)}{(1+t^3)-t(3t^2)}=\frac{3t^2}{1-2t^3}$.

(6)将$e^y\sin t-y+1=0$两边求关于t的导数$e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin t+e^y\cos t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}}{6t+2}=\frac{e^y\cos t}{(6t+2)(1-e^y\sin t)}$.

3. 求星形线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$在$t=\frac{3}{4}\pi$处的切线与Ox轴的夹角.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=\frac{3}{4}\pi}=1$

故星形线在$t=\frac{3}{4}\pi$处的切线与Ox轴的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

4. 求下列隐函数的导数$y'(x)$：

(1)$x^2+x^2y^2+y^2=3$；

(2)$x^2=\frac{x-y}{x+y}$；

(3)$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$；

(4)$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解：(1)对$x^2+x^2y^2+y^2=3$两边求关于x的导数得$2x+2xy^2+x^2 2yy'+2yy'=0$，故$y'=-\frac{x+xy^2}{x^2y+y}$.

(2)对$x^2=\frac{x-y}{x+y}$两边求关于x的导数得$2x=\frac{(1-y')(x+y)-(x-y)(1+y')}{(x+y)^2}$，故$y'=\frac{y-x(x+y)^2}{x}$.

方法2：对$x^2(x+y)=x-y$两边求关于x的导数得$2x(x+y)+x^2(1+y')=1-y'$，故$y'=\frac{1-3x^2-2xy}{1+x^2}$.

可以证明两种方法得到的结果是等价的：

$\because 1+x^2=\frac{x-y}{x+y}+1=\frac{2x}{x+y}$

$\therefore y'=\frac{y-x(x+y)^2}{x}=\frac{y-x(x+y)^2}{\frac{(x+y)(1+x^2)}{2}}=\frac{2y-2x(x+y)^2}{(x+y)(1+x^2)}=\frac{2y+2x-2x-2x(x+y)^2}{(x+y)(1+x^2)}=\frac{2}{1+x^2}-\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{2x(x+y)}{1+x^2}=\frac{2-1-x^2-2x^2-2xy}{1+x^2}=\frac{1-3x^2-2xy}{1+x^2}$.

(3)对$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$两边求关于$x$的导数得$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$，故$y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

(4)对$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$两边求关于$x$的导数得$\frac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy')=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$，故$y'=\frac{x+y}{x-y}$.

5. 设由方程$e^{x+y}=xy$确定了函数$x=x(y)$，求$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

   解：将$e^{x+y}=xy$两边求关于y的导数得$e^{x+y}(x'+1)=x'y+x$，故$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x'=\frac{x-e^{x+y}}{e^{x+y}-y}$.

6. 设函数$y=y(x)$由方程$\cos(xy)-\ln\frac{x+y}{y}=1$确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}$.

   解：将$\cos(xy)-\ln\frac{x+y}{y}=1$两边求关于$x$的导数得$-\sin(xy)(y+xy')-\frac{y}{x+1}\frac{y-(x+1)y'}{y^2}=0$，令其中的$x=0$得$-\frac{y(0)-y'(0)}{y(0)}=0$

   将$x=0$代入$\cos(xy)-\ln\frac{x+y}{y}=1$得$y(0)=1$，代入$-\frac{y(0)-y'(0)}{y(0)}=0$得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=y'(0)=1$.