3 函数极限与无穷小量

3.1 知识结构

第二章极限论

2.1 数列极限的概念和性质

2.1.1 数列极限的概念

2.1.2 数列极限的性质

- 唯一性
- 有界性
- 保号性

2.1.3 数列的子列

2.1.4 无穷大量与无界变量

2.2 数列极限存在的条件

2.2.1 夹逼原理

2.2.2 单调收敛定理

2.2.3 柯西收敛准则

2.2.4 数列极限的四则运算

2.3 函数极限的概念和性质

2.3.1 函数在一点的极限

2.3.2 单侧极限

2.3.3 函数在无穷远处的极限

2.3.4 函数极限的性质

- 唯一性
- 有界性
- 保号性
- 函数极限与数列极限的关系

2.4 函数极限的运算法则

3.2 习题2.3解答

1. 用定义证明以下各式：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$；

(4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x^2-1}=0$；

(6) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-a})=0$.

解：(1)$|\sin x-\sin x_0|=2|\cos\frac{x+x_0}{2}||\sin\frac{x-x_0}{2}|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\le|x-x_0|$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon>0$，使$0<|x-x_0|<\delta$时，$|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|<\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

(2)$|\frac{(x+h)^2-x^2}{h}-2x|=|\frac{(x+h+x)(x+h-x)}{h}-2x|=|h|$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon>0$，使$0<|x-x_0|<\delta$时，$|\frac{(x+h)^2-x^2}{h}-2x|=|h|<\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x$

(3)$|\sqrt{x^2+5}-3|=\frac{|x-2||x+2|}{\sqrt{x^2+5}+3}<|x-2||x+2|$

不妨设$|x-2|<\frac{1}{2}$，则$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{2}{9}\varepsilon\}$，则当$0<|x-2|<\delta$时，$|\sqrt{x^2+5}-3|<|x-2||x+2|<\frac{9}{2}|x-2|<\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$.

(4)$|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}|=\frac{|x^2-6x+9|}{6|x^2-9|}=\frac{|x-9|}{6|x+9|}$

不妨设$|x-3|<\frac{1}{2}$，即$\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2},\frac{11}{2}<x<\frac{13}{2}$，取$\delta=\min\{\frac{1}{2},33\varepsilon\}$，则当$0<|x-3|<\delta$时，$|\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{1}{6}|=\frac{|x-9|}{6|x+9|}<\frac{|x-9|}{33}<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$.

(5)当$x>1$时，$|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}|=|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}|<\frac{\sqrt{x-1}}{2}$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=2\varepsilon^2$，则当$0<x-1<\delta$时，$|\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}|<\frac{\sqrt{x-1}}{2}<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x^2-1}=0$.

(6)当$x<0$时，$|x+\sqrt{x^2-a}|=\frac{|a|}{-x+\sqrt{x^2-a}}<\frac{|a|}{-x}$

$\forall\varepsilon>0$，取$N>\frac{|a|}{\varepsilon}>0$，则当$-x>N$时，$|x+\sqrt{x^2-a}|<\frac{|a|}{-x}<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-a})=0$.

2. 讨论以下函数在点$x=0$的极限是否存在：

(1)$f(x)=\frac{|x|}{x}$；

$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ x\sin\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$；

$f(x)=\frac{[x]}{x}$；

$f(x)=\begin{cases}2x, & x>0\\ a\cos x+b\sin x, & x<0\end{cases}$.

解：(1)不存在. 当$x<0$时，$f(x)=-1, \lim\limits_{x\to 0^-}=-1$，当$x>0$时，$f(x)=1, \lim\limits_{x\to 0^+}=1\neq\lim\limits_{x\to 1^-}$，故$f(x)$在点$x=0$的极限不存在.

(2)不存在. 当$x>0$时，$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$不存在，故$f(x)$在点$x=0$的极限不存在.

(3)不存在. 当$x>0$时，$f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，当$x<0$时，$f(x)=-\frac{1}{x}, \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$不存在，故$f(x)$在点$x=0$的极限不存在.

(4)当$a=0$时存在，当$a\neq 0$时不存在. $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0-}f(x)=a$，当$a=0$时，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$，故$f(x)$在点$x=0$的极限存在，当$a\neq 0$时，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$，故$f(x)$在点$x=0$的极限不存在.

3. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，证明$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

证明：$\because \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，$\exists\delta_2>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_2$时，$f(x)>0$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}<\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}<\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

4. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上为周期函数，若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明$f(x)\equiv 0$.

证明：假设存在$x_0\in[0,+\infty)$，使得$f(x_0)\neq 0$

$\because f(x)$在$[0,+\infty)$上是周期函数，设T是$f(x)$的最小正周期，则$f(x_0+nT)=f(x_0), n\in\mathbb{Z}^+$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=0$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists N>0$，使$x>N$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$

但对于$\varepsilon=\frac{1}{2}|f(x_0)|, \forall N>0, \exists x=x_0+nT\in\mathbb{Z}^+$，使得$x>N$时，$|f(x)-0|=|f(x_0+nT)-0|=|f(x_0)-0|>\varepsilon$，矛盾.

故$f(x)\equiv 0$.

3.3 习题2.4解答

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}, m,n\in\mathbb{Z}^+$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}(p>0,q>0)$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-4}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+2}=-2.$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$

(3)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)]=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$

(4)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}=\frac{m}{n}.$

(5)$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0.$

(6)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+p^2-p^2}{x^2+q^2-q^2}\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}=\frac{q}{p}.$

2. 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$；

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{(\sin x)^3}$；

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}(b\neq 0)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sin^2 x-\sin^2 9}{x-9}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\sin x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$；

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+n}{x-n})^x$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(}{1}+\tan x)^{\cot x}$；

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{k}{x})^{mx}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}2=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{(\sin x)^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}\frac{x^3}{(\sin x)^3}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\frac{bx}{\sin bx}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\xlongequal{t=x-\frac{\pi}{2}}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\xlongequal{t=\arctan x}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\tan}t=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\frac{1}{\cos x}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sin^2 x-\sin^2 9}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{(\sin x-\sin 9)(\sin x+\sin 9)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\frac{(2\cos\frac{x+9}{2}\sin\frac{x-9}{2})(\sin x+\sin 9)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}(\cos\frac{x+9}{2})(\sin x+\sin 9)\frac{\sin\frac{x-9}{2}}{\frac{x-9}{2}}=2\sin 9\cos 9=\sin 18$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}4(\sqrt{x+1}+1)=8$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\frac{1}{\cos x}=1$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}]^k=e^k$.

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+n}{x-n})^x=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{2n}{x-n})^{\frac{x-n}{2n}}]^{2n}(1+\frac{2n}{x-n})^n=e^{2n}$.

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=e$.

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{k}{x})^{mx}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\frac{k}{x})^{\frac{x}{k}}]^{mk}=e^{-mk}$.

3. 确定a,b，使下列各式成立：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1+x^2}{1+x}-ax-b)=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

解：(1)$\because \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1+x^2}{1+x}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-ax^2-(a+b)x-b}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{1+x}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\frac{1-b}{x}}{\frac{1}{x}+1}=0$

$\therefore 1-a=0$且$a+b=0$

$\therefore a=1,b=-1.$

(2)$\because \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-(1-a^2)x+(1+2ab)-\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}}=0$

$\because$如果$1-a^2\neq 0$，则极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-(1-a^2)x+(1+2ab)-\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}}$不存在

$\therefore 1-a^2=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-(1-a^2)x+(1+2ab)-\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}}=\frac{1+2ab}{1-a}=0$

$\therefore 1+2ab=0$且$1-a\neq 0$

$\therefore a=-1,b=\frac{1}{2}.$

4. 求极限：
(1)$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；
(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.
解：(1)$\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}(1+2\tan x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{\frac{1}{x}}[(1+2\tan x)^{\frac{1}{2\tan x}}]^{\frac{2\tan x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{x}}(1+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{x}}[(1+2\tan x)^{\frac{1}{2\tan x}}]^{\frac{2\tan x}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}}]^{\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{x}}[(1+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}}]^{\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{x}}[(1+2\tan x)^{\frac{1}{2\tan x}}]^{\frac{2\tan x}{x}}=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^2=e^2$.

(2)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x}=4\sqrt{2}.$

5. 分析下面两个函数的极限，说明定理2.4.4中的条件“当$t\neq t_0$时，$g(t)\neq x_0$”是不可缺少的.
(1)$f(x)=\frac{\sin x}{x},g(t)=t\sin\frac{1}{t},x_0=0,t_0=0$；
(2)$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},g(t)=t\sin\frac{1}{t},x_0=0,t_0=0.$

解：(1)$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1,\lim\limits_{t\to0}g(t)=0$，但$\lim\limits_{t\to0}f(g(t))=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin(t\sin\frac{1}{t})}{t\sin\frac{1}{t}}$不存在. 因为$\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0$，当$0<|t-0|<\delta$时，存在无穷多个点$t=\frac{1}{n\pi},n>\frac{1}{\delta\pi},n\in\mathbb{Z}^+$，使得$g(t)=t\sin\frac{1}{t}=0$，从而$f(g(t))=\frac{\sin g(t)}{g(t)}$在这些点处无定义，因而极限不存在. 故虽满足$\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0,\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，但因不满足“当$t\neq t_0$时，$g(t)\neq x_0$”，可导致复合函数的极限$\lim\limits_{t\to t_0}f(g(t))$不存在.

(2)$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1,\lim\limits_{t\to0}g(t)=0$，但$\lim\limits_{t\to0}f(g(t))$不存在. $\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0$，当$0<|t-0|<\delta$时，存在无穷多个点$t=\frac{1}{n\pi},n>\frac{1}{\delta\pi},n\in\mathbb{Z}^+$，使得$g(t)=t\sin\frac{1}{t}=0$，虽然此时$f(g(t))=0$有定义，但$|f(g(t))-1|<\varepsilon$不再$\forall\varepsilon>0$成立，如当$\varepsilon=0.5$时，在这些点处$|f(g(t))-1|>\varepsilon$，易知当$f(0)=1$时$\lim\limits_{t\to0}f(g(t))=1$，此时$f(0)=0$，导致$\lim\limits_{t\to0}f(g(t))$不存在. 故虽满足$\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0,\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，但因不满足"当$t\neq t_0$时，$g(t)\neq x_0$"，可导致复合函数的极限$\lim\limits_{t\to t_0}f(g(t))$不存在.

3.4 习题2.5解答

1. 设当$x\to x_0$时，$f(x)$与$g(x)$为等价无穷小，求证当$x\to x_0$时，$f(x)-g(x)=o(f(x))$.

   证明：$\because\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}[1-\frac{g(x)}{f(x)}]=0$

   $\therefore x\to x_0,f(x)-g(x)=o(f(x))$.

2. 将下列无穷小量（当$x\to0^+$时）按照其阶的高低排列出来：

$$\sin x^2,\quad \sin(\tan x),\quad e^{x^3}-1,\quad \ln(1+\sqrt{x})$$

   解：$\because\sin x^2\sim x^2(x\to0^+),\sin(\tan x)\sim\tan x\sim x(x\to0^+),e^{x^3}-1\sim x^3(x\to0^+),\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}(x\to0^+)$

   $\therefore$上述高阶无穷小量的由高到低的排列顺序为

$$e^{x^3}-1,\quad \sin x^2,\quad \sin(\tan x),\quad \ln(1+\sqrt{x})$$

3. 将下列无穷大量（当$n\to\infty$时）按照其阶的高低排列出来：

$$n^2,\quad e^n,\quad n!,\quad \sqrt{n},\quad n^n$$

   解：记$a_n=\frac{n^2}{e^n},b_n=\frac{e^n}{n!},c_n=\frac{n!}{n^n}$

   $\because\frac{a_{n+1}}{a_n}=(\frac{n+1}{n})^2\frac{1}{e}$

   $\therefore$取$N=[\frac{1}{\sqrt{e}-1}]+1$，则当$n>N$时$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，且$a_n>0$，故当$n>N$时$\{a_n\}$单调减少有下界，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$存在，将$a_{n+1}=(\frac{n+1}{n})^2\frac{1}{e}a_n$两侧取极限，得$A=\frac{1}{e}A$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=0$.

   同理，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

   $\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}=0$

   故上述无穷大量（当$n\to\infty$时）按照其阶由高到低的排列顺序为：

$$n^n,\quad n!,\quad e^n,\quad n^2,\quad \sqrt{n}$$

.

4. 利用极限的四则运算和等价无穷小量互相代换的方法求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$；

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}n^2\sin\frac{1}{2n^2}$；

(3)$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sin\sqrt{x}}$；

(4)$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{\sin x}-1}{x}(a>0)$；

(5)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$；

(6)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos kx}}{x^2}$；

(7)$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$；

(8)$\lim\limits_{x\to0}x(e^{\sin\frac{1}{x}}-1)$；

(9)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^2-1}{x\sin x}$；

(10)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$；

(11)$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan^4x}{\sin^3x(1-\cos x)}$；

(12)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$；

(13)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2x}$；

(14)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}$；

(15)$\lim\limits_{x\to a}\frac{2^x-2^a}{x-a}$.

解：(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2.$

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}n^2\sin\frac{1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}.$

(3)$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sin\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.$

(4)$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln a(\sin x)}{x}=\ln a.$

(5)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\tan x-1+\tan x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=1.$

(6)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos kx}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{x^2(1+\sqrt{\cos kx})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(kx)^2}{x^2(1+\sqrt{\cos kx})}=\frac{1}{4}k^2.$

(7)$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}(x-\tan x)}{x-\tan x}=1.$

(8)$\lim\limits_{x\to0}x(e^{\sin\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin\frac{1}{x}-1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$

(9)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^2-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{\sin x}=0.$

(10)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x}\xlongequal{t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\lim\limits_{x\to0}\frac{t}{-\sin t}\sqrt{1+\sin^2t}=-1.$

(11)$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan^4x}{\sin^3x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^5}{x^3\frac{1}{2}x^2}=2.$

(12)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1.$

(13)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{\frac{1}{2}x^2(1+\cos x)}=0.$

(14)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

(15)$\lim\limits_{x\to a}\frac{2^x-2^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2^a(2^{x-a}-1)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2^a\ln a(x-a)}{x-a}=2^a\ln a.$

3.5 第2章补充题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$.

解：(1)记$a_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

$\because \frac{a_{n+1}}{a_n}=2(\frac{n}{n+1})^n=\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{2}{e}(n\to\infty)$

$\therefore$对于$\varepsilon=\frac{0.5}{e},\exists N>0$，使$n>N$时，$|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{2}{e}|<\frac{0.5}{e},\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{2.5}{e}<1$

$\therefore$在第N项以后$\{a_n\}$单调非增，且$a_n>0$，故$\{a_n\}$收敛

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=A$存在

将$a_{n+1}=2(\frac{n}{n+1})^n a_n$两侧取极限，得到$A=\frac{2}{e}A$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=A=0.$

(2)记$a_n=\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$

$\because \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})^n=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n\to\frac{e}{3}(x\to\infty)$

$\therefore$对于$\varepsilon=\frac{0.1}{3},\exists N>0$，使$n>N$时，$|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{e}{3}|<\frac{0.1}{3},\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{e+0.1}{3}<1$

$\therefore$在第N项以后$\{a_n\}$单调非增，且$a_n>0$，故$\{a_n\}$收敛

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=A$存在

将$a_{n+1}=\frac{1}{3}(\frac{n+1}{n})^n a_n$两侧取极限，得到$A=\frac{e}{3}A$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=A=0.$

2. 设函数f在$[0,+\infty)$单调非负，并且满足$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$. 试证对任意整数$c$，都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1.$$

证明：$\because\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2^nx)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2^nx)}{f(2^{n-1}x)}\frac{f(2^{n-1}x)}{f(2^{n-2}x)}\frac{f(2^{n-2}x)}{f(2^{n-3}x)}\cdots\frac{f(2^2x)}{f(2x)}\frac{f(2x)}{f(x)}=1,n\in\mathbb{Z}^+$

且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(2x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{f(2x)}{f(x)}}=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2^{-n}x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2^{-n}x)}{f(2^{-(n-1)}x)}\frac{f(2^{-(n-1)}x)}{f(2^{-(n-2)}x)}\frac{f(2^{-(n-2)}x)}{f(2^{-(n-3)}x)}\cdots\frac{f(2^{-1}x)}{f(x)}=1,n\in\mathbb{Z}^+$

不妨设f在$[0,+\infty)$单调非减，已知$f(x)\geq 0$，则

i. 当$c=1$时，显然成立

ii. 当$c>1$时，存在$k\in\mathbb{Z}^+$，使$2^{k-1}<c<2^k$，则$\frac{f(2^{k-1}x)}{f(x)}\le\frac{f(cx)}{f(x)}\le\frac{f(2^kx)}{f(x)}$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$.

iii. 当$0<c<1$时，存在$k\in\mathbb{Z}^+$，使$2^{-k}<c<2^{-(k-1)}$，则$\frac{f(2^{-k}x)}{f(x)}\le\frac{f(cx)}{f(x)}\le\frac{f(2^{-(k-1)}x)}{f(x)}$，故$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=1$.

证毕.

3. 设$a>0$. 如果极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$存在，试确定数$p$的值，并求次极限.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\lim\limits_{x\to+\infty}x^pa^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^pa^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x(x+1)}a^{\frac{1}{x+1}}\ln a$

可知，当$p>2$时，极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$不存在；当$p=2$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$；当$p<2$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=0$.

4. 设当$x\to0$时，$u(x)$与$v(x)$是等价的正无穷小量，试求

$$\lim_{x\to0}(1+\sqrt{u(x)})^{v(x)}.$$

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{u(x)})^{v(x)}=\lim\limits_{x\to0}[(1+\sqrt{u(x)})^{\frac{1}{\sqrt{u(x)}}}]^{\frac{\sqrt{u(x)}}{v(x)}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+\sqrt{u(x)})}{\sqrt{u(x)}}\frac{\sqrt{u(x)}}{\sqrt{v(x)}}\frac{1}{\sqrt{v(x)}}}=+\infty$

5. 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}-\frac{\sqrt{1+\sin^2x}}{x^2})$.

解：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}-\frac{\sqrt{1+\sin^2x}}{x^2})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1-\sin^2x}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1+\sin^2x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x+\cos x-2}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1+\sin^2x})}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+2)}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1+\sin^2x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}(\cos x+2)}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{1+\sin^2x})}=-\frac{3}{4}$.

6. 设a_n是一个有界数列，令

$$\alpha_n=\inf_{k\ge n}\{a_k\},\quad \beta_n=\sup_{k\ge n}\{a_k\}.$$

(1)求证$\{\alpha_n\}$为有界的单调非减数列，$\{\beta_n\}$为有界的单调非增数列；

(2)求证$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$；

(3)称$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$分别为数列$\{a_n\}$的下极限和上极限，并分别记为

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}a_n.$$

试证$\lim\limits_{n\to n}a_n$存在的充分必要条件是$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

(4)求证$\forall\varepsilon>0$，在区间$(A-\varepsilon,B+\varepsilon)$之外最多有$\{a_n\}$中的有限项，其中$A=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n,B=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

(1)证明：$\because \alpha_n = \inf\limits_{k\geq n}\{a_k\} = \min\{a_n, \inf\limits_{k\geq n+1}\{a_k\}\} \leq \inf\limits_{k\geq n+1}\{a_k\}\} = \alpha_{n+1}$

$\therefore \{\alpha_n\}$是单调非减数列

又$\because \inf\{a_n\} = \inf\limits_{k\geq 1}\{a_k\} \leq \alpha_n = \inf\limits_{k\geq n}\{a_k\} = \min\{a_n, \inf\limits_{k\geq n+1}\{a_k\}\} \leq a_n \leq \sup\{a_n\}$

故$\{\alpha_n\}$有界.

$\because \beta_n = \sup\limits_{k\geq n}\{a_k\} = \max\{a_n, \sup\limits_{k\geq n+1}\{a_k\}\}\{a_k\} \geq \sup\limits_{k\geq n+1}\{a_k\} \geq \beta_{n+1}$

$\therefore \{\beta_n\}$是单调非增数列

又$\because \sup\{a_n\} = \sup\limits_{k\geq 1}\{a_k\} \geq \beta_n = \sup\limits_{k\geq n}\{a_k\} = \max\{a_n, \sup\limits_{k\geq n+1}\{a_k\}\} \geq a_n \geq \inf\{a_n\}$

故$\{\beta_n\}$有界.

(2)由(1)知，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$均存在

$\because \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$

$\therefore \alpha_n - \beta_n \leq 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n - \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n - \beta_n) \leq 0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n \leq \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$

(3)证明：必要性：$\because \lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$存在

$\therefore \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$时，$|a_n - A| < \varepsilon$，即$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$

$\therefore$当$n > N$时，$A - \varepsilon < \inf\limits_{k\geq n}\{a_k\} \leq \sup\limits_{k\geq n}\{a_k\} < A + \varepsilon$

$\therefore |\inf\limits_{k\geq n}\{a_k\} - A| < \varepsilon, |\sup\limits_{k\geq n}\{a_k\} - A| < \varepsilon$

$\therefore \varliminf\limits_{n\to\infty}a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n = A$

充分性：$\because \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$

又$\because \varliminf\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = A$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n = A$存在.

(4)证明：$\because A = \varliminf\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n, B = \varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$

$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$时，$s.t.|\alpha_n - A| < \varepsilon, |\beta_n - B| < \varepsilon$

$\therefore A - \varepsilon < \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n < B + \varepsilon$

故$\forall\varepsilon > 0$，只有N之前的有限项在区间$(A - \varepsilon, B + \varepsilon)$之外.

7. 设$a_n > 0(n \in \mathbb{Z}^+)$，且$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$，又设$\sum_{k=1}^n a_k \to +\infty(n \to \infty)$. 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} = 1.$$

证明：$\because a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ 且$a_n > 0(n \in \mathbb{Z}^+)$

又$\because \sum_{k=1}^{n} a_k \to +\infty(n \to \infty)$

$\therefore \forall M > 0, \exists N > 0$，当$n > N$时，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > M$

$\therefore a_1 + 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}) > a_1 + 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}) - a_{2n} > a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > M$

$\therefore a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} > \frac{M - a_1}{2}$

$\therefore a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} \to +\infty(n \to \infty)$

$\because \frac{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} \leq \frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} \leq \frac{a_1+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n})-a_{2n}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} < \frac{a_1}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} + 1$

$\because \frac{a_1}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} \to 0(n \to \infty)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} = 1$

8. 在求数列极限方面有一个很著名的定理，即施笃兹（Stolz）定理. 这个定理的内容是：

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个数列，其中$\{b_n\}$单调增加并且趋向于$+\infty$（至少从某一项开始），则有以下结论：

(1)如果$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$；

(2)如果$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \to \infty(n \to \infty)$，则$\frac{a_n}{b_n} \to \infty(n \to \infty)$.

请用施笃兹定理证明下列结论：

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$；

(2)若$a_n > 0(n \in \mathbb{Z}^+)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}(k \in \mathbb{Z}^+)$.

证明：(1)记$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, B_n = n$，则$\{B_n\}$单调增加并且趋向于$+\infty$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = A.$

(2)$\because a_n > 0(n \in \mathbb{Z}^+)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

记$A_n = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n, B_n = n$，则$\{B_n\}$单调增加并且趋向于$+\infty$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{A_n}{B_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}} = A.$

(3)记$A_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k, B_n = n^{k+1}$，则$\{B_n\}$单调增加并且趋向于$+\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-[n^{k+1}-(k+1)n^k+C_{k+1}^2n^{k-1}+\cdots]}=\frac{1}{k+1}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}(k\in\mathbb{Z}^+)$

9. 设$a_n>0(n\in\mathbb{Z}^+)$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$

证明：$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$且$a_n>0(n\in\mathbb{Z}^+)$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}=l$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1}=l.$

10. 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$为正数，求证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{m}(a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}})]^n=(a_1a_2\cdots a_m)^{\frac{1}{m}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\cdots+\frac{1}{a_m^n})^{-\frac{1}{n}}=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$

证明：(1) $[\frac{1}{m}(a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}})]^n=\{1+\frac{1}{m}[(a_1^{\frac{1}{n}}-1)+(a_2^{\frac{1}{n}}-1)+\cdots+(a_m^{\frac{1}{n}}-1)]\}^n=(1+\alpha_n)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{m}(a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}})]^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(1+\alpha_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\alpha_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{m}[\frac{a_1^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{a_2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{a_m^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}]}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{m}[\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_m]}=(a_1a_2\cdots a_m)^m.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_1^n}+\frac{1}{a_2^n}+\cdots+\frac{1}{a_m^n})^{-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{[(\frac{1}{a_1})^n+(\frac{1}{a_2})^n+\cdots+(\frac{1}{a_m})^n]^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\max\{\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_m}\}}=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$