# 7 中值定理与洛必达法则

## 7.1 知识结构

第5章用导数研究函数

5.1 微分中值定理

- 极大值极小值的定义
- 费马定理
- 罗尔定理
- 拉格朗日中值定理（微分中值定理）
- 柯西中值定理

5.2 洛必达法则

- $\frac{0}{0}$型不定式的洛必达法则
- $\frac{\infty}{\infty}$型不定式的洛必达法则

## 7.2 习题5.1解答

1. 证明：

(1)方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$中至多有一个根；

(2)方程$x^n+px+q=0$（$n$为自然数）在$n$为偶数时，最多有两个不同实根，在$n$为奇数时，最多有三个不同实根.

(1)证明：假设方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$中有两个或两个以上的实根$x_1, x_2, \cdots, x_1 < x_2 < \cdots$

则$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0,1), s.t. f'(\xi) = 3\xi^2 - 3 = 0$

此时$\xi = -1$或1均不属于$(0,1)$，矛盾，故方程$x^3-3x+c=0$在$[0,1]$中至多有一个根.

(2)证明：i)当$n=0$或1时，方程$x^n+px+q=0$至多有1个实根，显然成立。

ii)当$n\geq 2$且$n$为偶数时，假设方程$x^n+px+q=0$有三个或三个以上的实根$x_1, x_2, x_3, \cdots$且满足$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$

令$f(x) = x^n + px + q$，根据罗尔定理$\exists \xi_1, \xi_2$，$s.t. x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$，$f'(\xi_1) = n\xi_1^{n-1} + p = 0, f'(\xi_2) = n\xi_2^{n-1} + p = 0$

但当$n \geq 2$且$n$为偶数时，方程$nx^{n-1}+p=0$有且只有一个实根，矛盾，故假设不成立。

又因为当$n=2$时，二次方程$x^n+px+q=0$可以有两个不同实根。故在$n$为偶数时，最多有两个不同实根。

iii)当$n \geq 2$且$n$为奇数时，假设方程$x^n+px+q=0$有四个或四个以上的实根$x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots$且满足$x_1<x_2<x_3<x_4<\cdots$

令$f(x)=x^n+px+q$，根据罗尔定理$\exists \xi_1,\xi_2,\xi_3$，$s.t. x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<x_3<\xi_3<x_4$，$f'(\xi_1)=n\xi_1^{n-1}+p=0, f'(\xi_2)=n\xi_2^{n-1}+p=0, f'(\xi_3)=n\xi_3^{n-1}+p=0$

但当$n \geq 2$且$n$为奇数时，方程$nx^{n-1}+p=0$最多只有两个实根，矛盾，故假设不成立。

又因为当$n=3$时，三次方程$x^n+px+q=0$可以有三个不同实根（比如方程$x^3-2x+1=0$有三个实根$1,\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}),\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$）。故在$n$为奇数时，最多有三个不同实根。

2. 设$f$在$(a,b)$内二阶可导，$a<x_1<x_2<x_3<b$，且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，求证$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

   证明：$\because f$在$(a,b)$二阶可导

   $\therefore f(x)$和$f'(x)$均在$(a,b)$上连续可导

   又$\because f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$

   $\therefore \exists \xi_1 \in (x_1,x_2), \xi_2 \in (x_2,x_3), s.t. f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

   $\therefore \exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (a,b), s.t. f''(\xi)=0$

3. 设$f$在$(-\infty,+\infty)$上有$n$阶导数，$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$为$n$次多项式，如果存在$n+1$个相异的点$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$使得$f(x_i)=p(x_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$，则$\exists \xi$，使得$a_0=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

   证明：令$g(x)=f(x)-p(x)$，不妨设$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$则$g(x_i)=0, i=1,2,\cdots,n+1$

   $\therefore$根据罗尔定理$\exists x_{1,1},x_{1,2},\cdots,x_{1,n}, s.t. x_1<x_{1,1}<x_2<x_{1,2}<x_3<\cdots<x_{1,n}<x_{n+1}, g'(x_{1,i})=0, i=1,2,\cdot,n$

   $\therefore \exists x_{2,1},x_{2,2},\cdots,x_{2,n-1}, s.t. x_{1,1}<x_{2,1}<x_{1,2}<x_{2,2}<x_{1,3}<\cdots<x_{2,n-1}<x_{1,n}, g''(x_{2,i})=0, i=1,2,\cdot,n-1$

   $\vdots$

   $\therefore \exists \xi=x_{n,1}, s.t. x_{n-1,1}<x_{n,1}<x_{n-1,2}, g^{(n)}(\xi)=0$，即$f^{(n)}-p^{(n)}=f^{(n)}-n!a_0=0$

   即$a_0=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

4. 证明下列不等式：

(1)$|\sin x-\sin y|\le|x-y|, x,y\in\mathbb{R}$；

(2)$py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$，其中$0<y<x, p>1$；

(3)$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$，其中$a,b\in\mathbb{R}$；

(4)$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，其中$0<b<a$.

证明：(1)$\because$函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导

$\therefore\exists\xi\in(x,y), s.t.|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}|=|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}|=|f'(\xi)|=|\cos\xi|\le 1$（这里不妨设$x<y$）

$\therefore|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.

(2)$\because$当$p>1$时，$f(x)$在$[y,x]$上连续，且$f(x)$在$(y,x)$内可导

$\therefore\exists\xi\in(y,x), s.t. f'(\xi)=p\xi^{p-1}=\frac{x^p-y^p}{x-y}$

$\because p>1$时$py^{p-1}\le p\xi^{p-1}\le px^{p-1}$

$\therefore py^{p-1}\le\frac{x^p-y^p}{x-y}\le px^{p-1}$

$\therefore py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$.

(3)当$a=b$时，显然成立。

当$a\ne b$时，不妨设$a<b$

则由$f(x)=\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导可知

$\exists\xi\in(a,b), s.t.|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}|=|\frac{\arctan a-\arctan b}{a-b}|=|f'(\xi)|=\frac{1}{1+\xi^2}\le 1$

$\therefore|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

(4)$\because$函数$f(x)=\ln x$在$(0,+\infty)$上连续可导

$\therefore\exists\xi\in(b,a), s.t.\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}\in(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$

$\therefore\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

5. 证明：

(1)$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\mathrm{sgn}(x)$，其中$|x|\ge 1$；

证明：令$f(x)=2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\frac{2-2x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{x^2-1}\frac{2-2x^2}{1+x^2}=0, |x|\ge 1$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$上为常数

当$x\ge 1$时，$f(x)=2\arctan 1+\arcsin\frac{2}{1+1}=\pi=\pi\mathrm{sgn}(x)$

当$x\le -1$时，$f(x)=2\arctan(-1)+\arcsin(-\frac{2}{1+1})=-\pi=\pi\mathrm{sgn}(x)$

综上所述，$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\mathrm{sgn}(x), |x|\ge 1$.

6. 证明下列不等式：

(1)$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x), x>0$；

(2)$x-\frac{x^3}{6}<\sin x, x>0$；

(3)$\tan x>x+\frac{x^3}{3}, 0<x<\frac{\pi}{2}$；

(4)$\sin x+\tan x>2x, 0<x<\frac{\pi}{2}$.

证明：(1)令$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)$

$f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{x-x-x^2}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}<0, x>0$

$\therefore f(x)<f(0)=0$

$\therefore x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)$.

(2)令$f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$

$f'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}=2(\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{2})(\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{2})<0, x>0$

$\therefore f(x)<f(0)=0$

$\therefore x-\frac{x^3}{6}<\sin x$.

(3)令$f(x)=\tan x-x-\frac{x^3}{3}$

$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x)>0$

$\therefore f(x)>f(0)=0$

$\therefore \tan x>x+\frac{x^3}{3}$.

(4)令$f(x)=\sin x+\tan x-2x$

$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2>2\sqrt{\cos x\sec^x}-2>0, 0<x<\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)>f(0)=0$

$\therefore \sin x+\tan x>2x$.

方法2：令$f(x)=\sin x+\tan x-2x$

$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$

$f''(x)=-\sin x+2\sec x\sec x\tan x=\sin x(\sec^3 x-1)>0, 0<x<\frac{\pi}{2}$

$\therefore f'(x)>f'(0)=0$

$\therefore f(x)>f(0)=0$

$\therefore \sin x+\tan x>2x$.

7. 研究下列函数的单调性：

(1)$f(x)=\arctan x-x, x\in\mathbb{R}$；

(2)$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x, 0<x<1$；

(3)$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$；
(4)$f(x)=x^ne^{-x},n>0,x\geq 0.$

解：(1)$\because f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{-x^2}{1+x^2}\leq 0$且$f'(x)$仅在$x=0$处等于0

$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加.

(2)令$g(x)=\ln f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})^x=x\ln(1+\frac{1}{x})=x[\ln(1+x)-\ln x]$

$g'(x)=\ln(1+x)-\ln x+x[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}]=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}$

$\because h(x)=\ln x,0<x<1$在$[x,1+x]$上连续，在$(x,1+x)$上可导

$\therefore \exists\xi\in(x,1+x),s.t.\frac{\ln(1+x)-\ln x}{1+x-x}=\ln(1+x)-\ln x=h'(\xi)=\frac{1}{\xi}$

$\therefore g'(x)=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{1+x}>0$

$\therefore g(x)$在$(0,1)$上单调增加

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上单调增加.

(3)$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$

当$x<-1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加；

当$-1<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少；

当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加.

(4)$f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$

当$0<x<n$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加；

当$x>n$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少.

8. 证明下列不等式：
(1)$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x},x>0$；
(2)$\frac{1}{2^{p-1}}\leq(x^p+(1-x)^p)\leq 1,x\in[0,1],p>1.$

证明：(1)令$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$

$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0,x>0$

$\therefore f(x)>f(0)=0$即$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$.

(2)令$f(x)=x^p+(1-x)^p$

$f'(x)=px^{p-1}-px^{p-1}=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$

$\because p>1$

$\therefore$当$0\leq x<\frac{1}{2}$时，$x<1-x,f'(x)<0$，当$\frac{1}{2}<x\leq 1$时，$x>1-x,f'(x)>0$

又$\because f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}},f(0)=1=f(1)\therefore\frac{1}{2^{p-1}}\leq f(x)\leq 1$

即$\frac{1}{2^{p-1}}\leq(x^p+(1-x)^p)\leq 1.$

9. 设$f(0)=0, f'(x)$单调增加，证明$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加.

证明：令$g(x)=\frac{f(x)}{x}$

$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)x-[f(x)-f(0)]}{x^2}=\frac{f'(x)x-f'(\xi)(x-0)}{x^2}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x}, \xi\in(0,x)$

$\because f'(x)$单调增加

$\therefore f'(x)>f'(\xi), g'(x)>0$

$\therefore g(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调增加.

## 7.3 习题5.2解答

1. 求下列不定式极限：

$(1)\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$；
$(2)\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$；
$(3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$；
$(4)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$；
$(5)\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x-6}{\sec x+5}$；
$(6)\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$；
$(7)\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan x)^{\sin x}$；
$(8)\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x$；
$(9)\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$；
$(10)\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$；
$(11)\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；
$(12)\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$；
$(13)\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x})$；
$(14)\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\frac{1}{x})$.

解：$(1)\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1.$

$(2)\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{-2\cos x}{-3\sin 3x}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$(3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\sin x}=1.$

$(4)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$

$(5)\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x-6}{\sec x+5}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec x\tan x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}=1.$

$(6)\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{xe^x}{e^x-1}}=\frac{1}{2}.$

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\tan x}{\csc x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{-\csc x\cot x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\sin^2 x}{-\sin x\cos^2 x}}=1.$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x\tan x}{-x}=0$

(9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sec^2(x-1)}{-(\frac{\pi}{2})^2\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$

(10)方法1：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{-1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2(\ln x)^2}{x(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4(\ln x)\frac{1}{x}}{1+x^2+2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\ln x}{x+3x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+9x^2}=0.$

方法2：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x\xlongequal[x=\tan\frac{\pi-t}{2}=\cot\frac{t}{2}]{t=\pi-2\arctan x}\lim\limits_{t\to0^+}t\ln\cot\frac{t}{2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln\cot\frac{t}{2}}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{\cot\frac{t}{2}}}{\frac{-1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t^2}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t^2}{\sin t}=0.$

(11) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln x}{\csc x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}}=1.$

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\tan 2x\ln\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{-2\csc^2 2x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\sin^2 2x}{-2\sin x\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\sin^2 2x}{-\sin 2x}}=\frac{1}{e}.$

(13) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}.$

(14) $\lim\limits_{x\to0}(\cot x-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}=0.$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{\tan x}{x^2})$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\pi-2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a},(a>0)$；

(6) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}$；

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$；

(10) $\lim\limits_{x\to a}(2-\frac{x}{a})^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$；

(11) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n[(\frac{n+1}{n})^n-e]$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)-\ln(\cos x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+\sin x}\cos x+\frac{1}{\cos x}\sin x}{\cos x}=1.$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{\tan x}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sec x\sec x\tan x}{2}=0.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to+\infty}t^3e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^3}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{3t^2}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{6t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{6}{e^t}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\pi-2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-2}=0.$

(5)$\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x\ln a-ax^{a-1}}{1}=a^a(\ln a-1).$

(6)$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}[(1+1-x)^{\frac{1}{1-x}}]^{(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}[(1+1-x)^{\frac{1}{1-x}}]^{\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}}=\lim\limits_{x\to 1}[(1+1-x)^{\frac{1}{1-x}}]^{\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}[(1+\frac{\sin x-x}{x})^{\frac{x}{\sin x-x}}]^{\frac{\sin x-x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}[(1+\frac{\sin x-x}{x})^{\frac{x}{\sin x-x}}]^{\frac{\cos x-1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}[(1+\frac{\sin x-x}{x})^{\frac{x}{\sin x-x}}]^{\frac{-\sin x}{2}}=1.$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\frac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}\xlongequal[x=\tan\frac{\pi}{2}t]{t=\frac{2}{\pi}\arctan x}\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\tan\frac{\pi}{2}t\ln t}=\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{\ln t}{\cot\frac{\pi}{2}t}}=\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi}{2}t}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$

(10)$\lim\limits_{x\to a}(2-\frac{x}{a})^{\tan\frac{\pi x}{2a}}\xlongequal{t=\frac{x}{a}}\lim\limits_{t\to 1}(2-t)^{\tan\frac{\pi t}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$（这里利用了(6)的结果）.

(11)$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$

(12)方法1：$\lim\limits_{n\to\infty}n[(\frac{n+1}{n})^n-e]=\lim\limits_{x\to\infty}x[(\frac{x+1}{x})^x-e]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\frac{x+1}{x})^x-e}{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}e\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}-1}{t}=e\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t}=e\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=e\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=e\lim\limits_{t\to 0}\frac{-1}{2(1+t)}=-\frac{1}{2}e.$

方法2：$\lim\limits_{n\to\infty}n[(\frac{n+1}{n})^n-e]=\lim\limits_{x\to\infty}x[(\frac{x+1}{x})^x-e]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\frac{x+1}{x})^x-e}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\frac{x+1}{x})^x[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}]}{-\frac{1}{x^2}}$
**(这里用了对数求导法$[(\frac{1+x}{x})^x]'=(\frac{1+x}{x})^x[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}]$)** $=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^x\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}}{\frac{-1}{x^2}}=e\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}-\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{2}{x^3}}=e\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2+x}-\frac{-1}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x^3}}=-\frac{e}{2}\lim\limits_{x\to\infty}x^3\frac{(x+1)^2-(x^2+x)}{(x^2+x)(x+1)^2}=-\frac{e}{2}\lim\limits_{x\to\infty}x^2\frac{(x+1)^2-(x^2+x)}{(x+1)(x+1)^2}=-\frac{e}{2}\lim\limits_{x\to\infty}x^2\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=-\frac{e}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=-\frac{e}{2}.$

3. 设$f$二阶可导，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$.

解：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)+f'(a)-f'(a-h)}{2h}$
$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a)-f'(a-h)}{h}}{2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}}{2}=\frac{2f''(a)}{2}=f''(a).$

错误做法：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}\neq f''(a).$

注意：这里不能用两次洛必达法则，因为题目只说二阶导数存在，并未说明二阶导数连续，极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$不一定存在，按照洛必达法则的定理条件，只有极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$存在或为无穷大时才能用洛必达法则，如果极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}$不存在且不为无穷大，则不能用洛必达法则，这个极限是可能不存在且不为无穷大的，可以看下一题给出的例子.

4. 设$f$有导数，并且$f(0)=f'(0)=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\sin x}\frac{\sin x}{\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\sin x}\frac{\sin x}{\ln f(x)-\ln f(0)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\frac{\ln f(x)-\ln f(0)}{x-0}}=f'(0)\cdot 1\cdot\frac{1}{[\ln f(x)]'|_{x=0}}=f'(0)\cdot 1\cdot\frac{1}{\frac{f'(0)}{f(0)}}=1$.

错误做法：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)\cos x}{\frac{f'(x)}{f(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)}{f'(x)}f(x)\cos x\neq 1$

注意：这里不能直接用洛必达法则，因为极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)}{f'(x)}f(x)\cos x$不一定存在且不一定为无穷大. 比如可以看下面的例子：

函数

$$f(x)=\begin{cases}(e^x-1)^2\sin\frac{1}{e^x-1}+e^x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},$$

其导数

$$f'(x)=\begin{cases}2e^x(e^x-1)\sin\frac{1}{e^x-1}-e^x\cos\frac{1}{e^x-1}+e^x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},$$

此时$f(x)$满足题目的要求，但$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)}{f'(x)}f(x)\cos x$不存在且不为无穷大:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)}{f'(x)}f(x)\cos x=\frac{2e^{\sin x}(e^{\sin x}-1)\sin\frac{1}{e^{\sin x}-1}-e^{\sin x}\cos\frac{1}{e^{\sin x}-1}+e^{\sin x}}{2e^x(e^x-1)\sin\frac{1}{e^x-1}-e^x\cos\frac{1}{e^x-1}+e^x}f(x)\cos x$$

当$x\to 0$时，分母$2e^x(e^x-1)\sin\frac{1}{e^x-1}-e^x\cos\frac{1}{e^x-1}+e^x$存在一系列的零点，这是因为

$$\begin{aligned}&2e^x(e^x-1)\sin\frac{1}{e^x-1}-e^x\cos\frac{1}{e^x-1}+e^x\\ =&e^x[2(e^x-1)\sin\frac{1}{e^x-1}-\cos\frac{1}{e^x-1}+1]\\ =&e^x[2(e^x-1)2\sin\frac{1}{2(e^x-1)}\cos\frac{1}{2(e^x-1)}+2\sin^2\frac{1}{2(e^x-1)}]\\ =&e^x\sin\frac{1}{2(e^x-1)}[2(e^x-1)2\cos\frac{1}{2(e^x-1)}+2\sin\frac{1}{2(e^x-1)}]\end{aligned}$$

其中$\sin\frac{1}{2(e^x-1)}$在$x\to 0$的过程中存在一系列的零点. 因此函数$\frac{f'(\sin x)}{f'(x)}f(x)\cos x$在0附近不全有定义，故极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)}{f'(x)}f(x)\cos x$不存在且不为无穷大.

如果极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\sin x)}{f'(x)}f(x)\cos x$不存在且不为无穷大则不满足洛必达法则的条件，不能用洛必达法则。