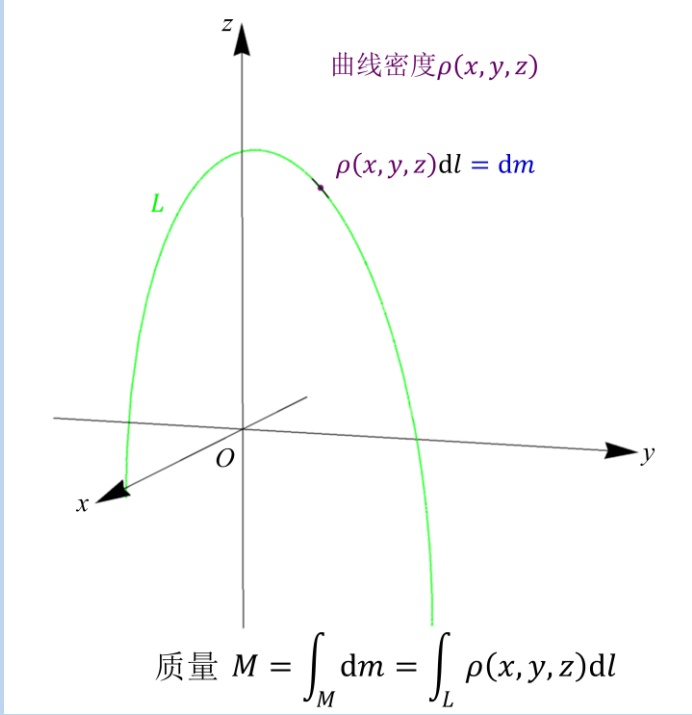
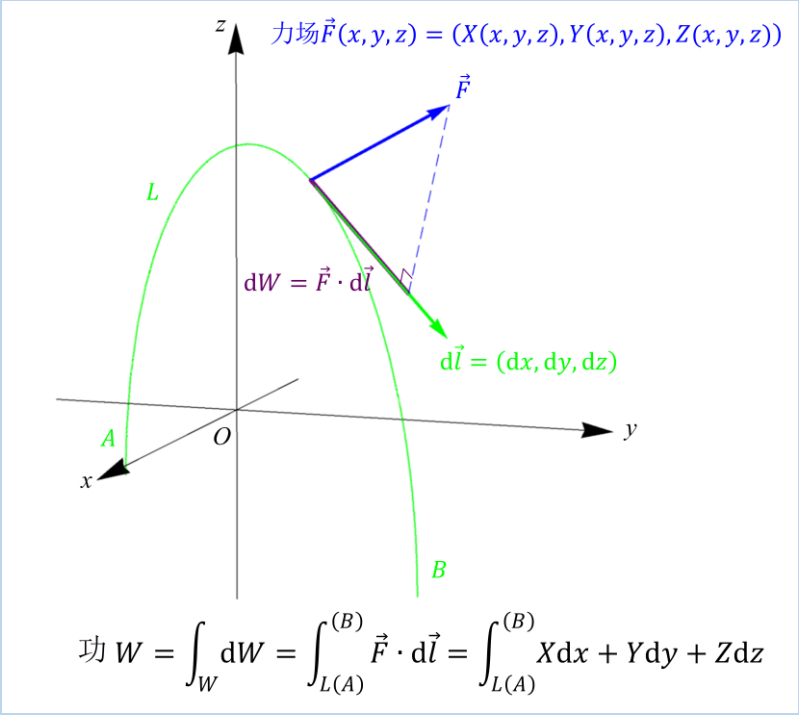
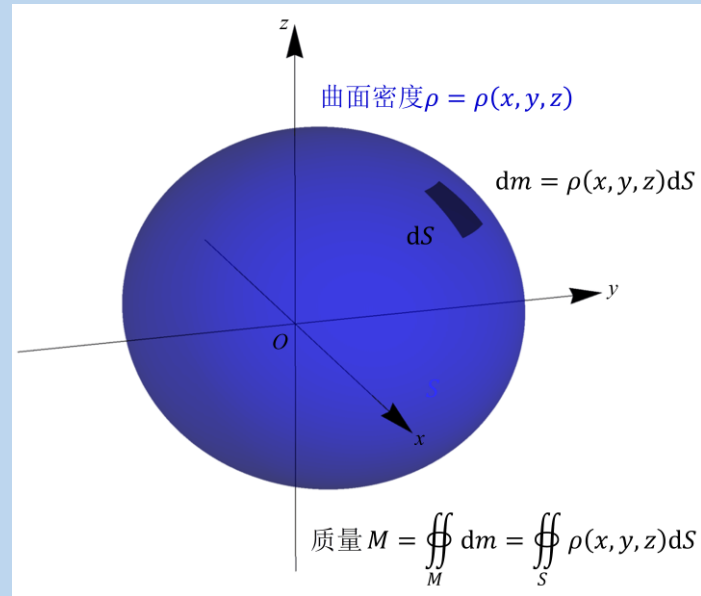
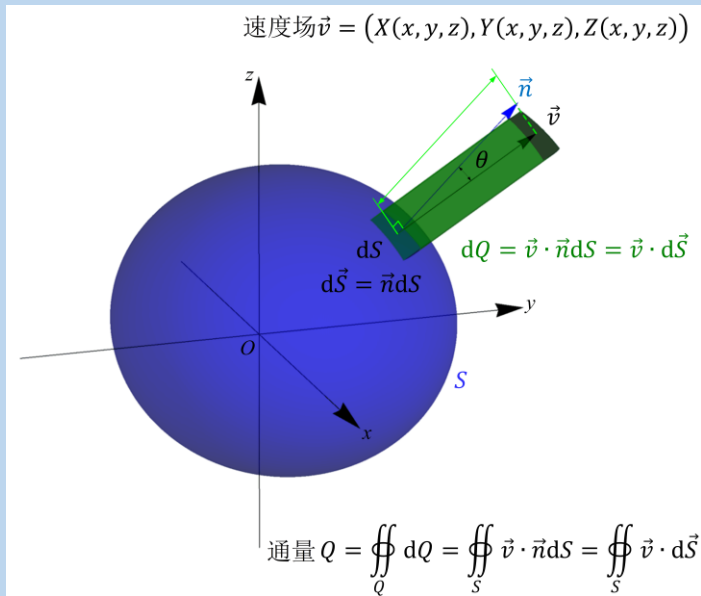


# 第一型曲线积分与第二型曲线积分的比较

第一型曲线积分	第二型曲线积分
物理背景	
非均匀(密度为 $\rho(x,y,z)$ )曲线 $L$ 的质量 $M$	力 $\mathbf{F}(x,y,z) = (X,Y,Z)$ 在有向曲线 $L$ 上做功 $W$ 的计算
图示	
 <p>曲线密度<math>\rho(x,y,z)</math></p> <p><math>\rho(x,y,z)dl = dm</math></p> <p>质量 <math>M = \int_M dm = \int_L \rho(x,y,z)dl</math></p>	 <p>力场<math>\vec{F}(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))</math></p> <p><math>dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}</math></p> <p><math>d\vec{l} = (dx, dy, dz)</math></p> <p>功 <math>W = \int_W dW = \int_{L(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{L(A)}^{(B)} Xdx + Ydy + Zdz</math></p>
数学抽象	
数量场 $\rho(x,y,z)$ 在曲线 $L$ 上的积分	向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 在有向曲线 $L$ 上的积分
定义	
$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta l = \int_L \rho(x,y,z) dl$ <p>数量场<math>\rho(x,y,z)</math>与弧长元素<math>\Delta l</math>相乘; <math>\rho(x,y,z) = 1</math>时表示求曲线长度.</p>	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta \mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{l}$ <p>向量场<math>\mathbf{F}(x,y,z)</math>与有向弧段<math>\Delta \mathbf{l}</math>点乘, 可用来表示力做功</p>
弧长和有向弧段	
弧长元素是长度: $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$	有向弧段是向量: $\Delta \mathbf{l} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$
表示形式	
只有一种: $\int_L \rho(x,y,z) dl$	分量形式: $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot (dx, dy, dz)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$
空间曲线的计算	
(空间第一型曲线积分: 目前只能计算参数方程一种形式, 遇到空间曲线, 需先化成参数方程. 空间第二型曲线积分: 除了将曲线方程写成参数方程形式进行计算外, 还可利用斯托克斯公式计算.)	
已知曲线的参数方程 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$	已知曲线的参数方程 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], A: t = \alpha, B: t = \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$

$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ $= \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2 + (z'(t)dt)^2}$ $= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$ $\int_L \rho(x, y, z) dl$ $= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$	$d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot (dx, dy, dz)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$ $= \int_{\alpha}^{\beta} X(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + Yy'(t)dt + Zz'(t)dt$ $= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Yy'(t) + Zz'(t)]dt$
平面曲线的计算	
<p>已知曲线的参数方程</p> $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta],$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ $= \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$ $\int_L \rho(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$	<p>已知曲线的参数方程</p> $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta], A: t = \alpha, B: t = \beta,$ $d\mathbf{l} = (dx, dy) = (x'(t)dt, y'(t)dt),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ $= \int_{\alpha}^{\beta} X(x(t), y(t))x'(t)dt + Y(x(t), y(t))y'(t)dt$ $= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t))x'(t) + Yy'(t)]dt$
<p>已知曲线的显示方程:</p> $L: y = f(x), x \in [a, b],$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ $= \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1^2 + (f'(x))^2} dx,$ $\int_L \rho(x, y) dl = \int_a^b \rho(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$	<p>已知曲线的显示方程:</p> $L: y = f(x), x \in [a, b], A: x = a, B: x = b,$ $d\mathbf{l} = (dx, dy) = (dx, f'(x)dx),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ $= \int_a^b X(x, f(x))dx + Y(x, f(x))f'(x)dx$ $= \int_a^b [X(x, f(x)) + Y(x, f(x))f'(x)]dx$
<p>已知曲线的极坐标方程:</p> $L: r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta],$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ $= \sqrt{[(r(\theta) \cos \theta)'d\theta]^2 + [(r(\theta) \sin \theta)'d\theta]^2}$ $= \sqrt{[(r(\theta) \cos \theta)']^2 + [(r(\theta) \sin \theta)']^2} d\theta$ $= \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta,$ $\int_L \rho(x, y) dl$ $= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$	<p>已知曲线的极坐标方程:</p> $L: r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta], A: x = \alpha, B: x = \beta,$ $d\mathbf{l} = (dx, dy) = ((r(\theta) \cos \theta)'d\theta, (r(\theta) \sin \theta)'d\theta),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ $= \int_{\alpha}^{\beta} X(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) (r(\theta) \cos \theta)'d\theta + Y(r(\theta) \sin \theta)'d\theta$ $= \int_{\alpha}^{\beta} [X(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) (r(\theta) \cos \theta)' + Y(r(\theta) \sin \theta)']d\theta$

# 第一型曲面积分与第二型曲面积分的比较

第一型曲面积分	第二型曲面积分
物理背景	
非均匀(密度为 $\rho(x, y, z)$ )曲面 $S$ 的质量 $M$	速度场 $\mathbf{v}(x, y, z) = (X, Y, Z)$ 穿过有向曲面 $S$ 的通量 $Q$
图示	
 <p>曲面密度<math>\rho = \rho(x, y, z)</math></p> <p><math>dm = \rho(x, y, z)dS</math></p> <p>质量<math>M = \iint_M dm = \iint_S \rho(x, y, z)dS</math></p>	 <p>速度场<math>\mathbf{v} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))</math></p> <p><math>d\mathbf{Q} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}</math></p> <p>通量<math>Q = \iint_Q dQ = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dS = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}</math></p>
数学抽象	
数量场 $\rho(x, y, z)$ 在曲面 $S$ 上的积分	向量场 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 在有向曲面 $S$ 上的积分， 有向曲面 $S$ 规定了正方向，也就是规定了一侧的法向量为正，另一侧的法向量为负
定义	
$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta S = \iint_S \rho(x, y, z) dS$ <p>数量场<math>\rho(x, y, z)</math>与曲面面积元素<math>\Delta S</math>相乘  <math>\rho(x, y, z) = 1</math>时表示求曲面面积.</p>	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{n} \Delta S = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ $= \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>\mathbf{n}</math>为<math>S</math>的正向单位法向量</li> <li>■ 向量场<math>\mathbf{v}(x, y, z)</math>与有向面积元素<math>\mathbf{n} \Delta S</math>点乘，表示<math>\Delta S</math>为底<math>\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}</math>为高的柱体体积，这就是通量的定义，记住即可</li> <li>■ <math>S_+</math>表示在曲面的正向积分，如只写<math>S</math>默认为在曲面正向积分</li> <li>■ <math>\mathbf{n} dS</math>记作<math>d\mathbf{S}</math></li> <li>■ 实质是点积<math>\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}</math>的第一型曲面积分</li> </ul>
面积元素和有向面积元素	
<p>曲面<math>S: z = f(x, y)</math>的面积元素<math>\Delta S</math>用切平面的面积代替：</p> $\Delta S = \sqrt{f_x(\xi, \eta, \zeta)^2 + f_y(\xi, \eta, \zeta)^2 + 1} \Delta x \Delta y$ $dS = \sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1} dx dy$	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ 曲面<math>S: z = f(x, y)</math>的正向单位法向量：  <math>\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1}} (-f_x(x, y, z), -f_y(x, y, z), 1)</math>                      若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号</li> <li>■ 曲面<math>S: z = f(x, y)</math>的有向面积元素：  <math>\Delta \mathbf{S} = \mathbf{n} \Delta S</math>  <math>= \pm \frac{1}{\sqrt{f_x(\xi, \eta, \zeta)^2 + f_y(\xi, \eta, \zeta)^2 + 1}} (-f_x(\xi, \eta, \zeta), -f_y(\xi, \eta, \zeta), 1)</math></li> </ul>

	$\begin{aligned} &\times \sqrt{f_x(\xi, \eta, \zeta)^2 + f_y(\xi, \eta, \zeta)^2 + 1} \Delta x \Delta y \\ &= " \pm " (-f_x(\xi, \eta, \zeta), -f_y(\xi, \eta, \zeta), 1) \Delta x \Delta y \\ d\mathbf{S} &= \mathbf{n} dS \\ &= " \pm " \frac{1}{\sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1}} (-f_x(x, y, z), -f_y(x, y, z), 1) \\ &\quad \times \sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1} dx dy \\ &= " \pm " (-f_x(x, y, z), -f_y(x, y, z), 1) dx dy \end{aligned}$
表示形式	
<p>只有一种：</p> $\iint_S \rho(x, y, z) dS$	<ul style="list-style-type: none"> <li>记 <math>d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)</math></li> <li>分量形式： <math display="block">\begin{aligned} \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} &amp;= \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS \\ &amp;= \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \\ &amp;= \iint_{S_+} X(x, y, z) dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy \end{aligned}</math> </li> <li>法向量可用方向余弦表示： <math display="block">\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)</math> <p>其中 <math>\alpha, \beta, \gamma</math> 为该法向量与三个坐标轴正向的夹角，可以证明</p> <math display="block">\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1</math> <p>故 <math>\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)</math> 是一个单位向量，</p> <math display="block">\begin{aligned} d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS &amp;= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS \\ &amp;= (\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS) \\ &amp;= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \end{aligned}</math> </li> <li>化成第一型曲面积分： <math display="block">\begin{aligned} \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} &amp;= \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS \\ &amp;= \iint_{S_+} X(x, y, z) dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy \\ &amp;= \iint_{S_+} X(x, y, z) \cos \alpha dS + Y \cos \beta dS + Z \cos \gamma dS \\ &amp;= \iint_{S_+} [X(x, y, z) \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma] dS \end{aligned}</math> </li> <li><math>\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS</math> 分别是 <math>d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS</math> 在三个坐标面上的投影</li> <li>同样的 <math>d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \pm (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), 1) dx dy</math> 中 " <math>\pm</math> " <math>f_x(x, y, z) dx dy, " \pm " f_y(x, y, z) dx dy, " \pm " dx dy</math> 分别是有向面积元素 <math>d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS</math> 在三个坐标面上的投影</li> </ul>
计算	
<p>已知曲面的显式方程</p> $S: z = f(x, y), (x, y) \in D,$ $dS = \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$ $\iint_S \rho(x, y, z) dS$ $= \iint_D \rho(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$	<p>已知曲面的显式方程</p> $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$ $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = " \pm " (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) dx dy$ $= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy),$ <p>若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号</p> $\begin{aligned} \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= " \pm " \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) dx dy \end{aligned}$

	$= \pm \iint_{S_+} [-X(x, y, f(x, y))f_x(x, y) - Yf_y(x, y) + Z]dxdy$ <p><math>S_+</math>表示在曲面的正侧做积分。 例如选择曲面的上侧为正，则<math>d\mathbf{S}</math>取正号，<math>S_+</math>就表示在曲面的上侧做积分，<math>S_-</math>表示在曲面下侧做积分</p> $\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ $= - \iint_{S_+} [-X(x, y, f(x, y))f_x(x, y) - Yf_y(x, y) + Z]dxdy$ <p>若只写<math>S</math>则表示在曲面的正侧做积分。</p>
<p>已知曲面的显式方程</p> $S: y = g(z, x), (z, x) \in D,$ $dS = \sqrt{g_x(z, x)^2 + 1 + g_z(z, x)^2}dzdx$ $\iint_S \rho(x, y, z)dS$ $= \iint_D \rho(x, g(z, x), z)\sqrt{g_x(z, x)^2 + 1 + g_z(z, x)^2}dzdx$	<p>已知曲面的显式方程</p> $S: y = g(z, x), (x, y) \in D$ $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = \pm(-g_x(z, x), 1, -g_z(z, x))dzdx$ $= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy),$ <p>若规定曲面<math>y &gt; 0</math>侧为正，也就是<math>y &gt; 0</math>侧的法向量为正，取正号；若规定曲面<math>y &lt; 0</math>侧为正，也就是<math>y &lt; 0</math>侧的法向量为正，则<math>y &gt; 0</math>侧的法向量为负，故取负号</p> $\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}dS$ $= \pm \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, g(z, x), z) \cdot (-g_x(z, x), 1, -g_z(z, x))dzdx$ $= \pm \iint_{S_+} [-X(x, g(z, x), z)g_x(z, x) + Y - Zg_z(z, x)]dzdx$ <p><math>S_+</math>表示在曲面的正侧做积分。 例如选择曲面的<math>y &gt; 0</math>侧为正，则<math>d\mathbf{S}</math>取正号；<math>S_+</math>就表示在曲面的<math>y &gt; 0</math>侧做积分，<math>S_-</math>表示在曲面<math>y &lt; 0</math>侧做积分</p> $\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ $= - \iint_{S_+} [-X(x, g(z, x), z)g_x(z, x) + Y - Zg_z(z, x)]dzdx$ <p>若只写<math>S</math>则表示在曲面的正侧做积分。</p>
<p>已知曲面的显式方程</p> $S: x = h(y, z), (y, z) \in D,$ $dS = \sqrt{1 + h_y(y, z)^2 + h_z(y, z)^2}dydz$ $\iint_S \rho(x, y, z)dS$ $= \iint_D \rho(h(y, z), y, z)\sqrt{1 + h_y(y, z)^2 + h_z(y, z)^2}dydz$	<p>已知曲面的显式方程</p> $S: x = h(y, z), (y, z) \in D,$ $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = \pm(1, -h_y(y, z), -h_z(y, z))dydz$ $= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy),$ <p>若规定曲面<math>x &gt; 0</math>侧为正，也就是<math>x &gt; 0</math>侧的法向量为正，取正号；若规定曲面<math>x &lt; 0</math>侧为正，也就是<math>x &lt; 0</math>侧的法向量为正，则<math>x &gt; 0</math>侧的法向量为负，故取负号</p> $\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}dS$ $= \pm \iint_{S_+} \mathbf{v}(h(y, z), y, z) \cdot (1, -h_y(y, z), -h_z(y, z))dydz$ $= \pm \iint_{S_+} [X(h(y, z), y, z) - Yh_y(y, z) - Zh_z(y, z)]dydz$ <p><math>S_+</math>表示在曲面的正侧做积分。 例如选择曲面的<math>x &gt; 0</math>侧为正，则<math>d\mathbf{S}</math>取正号，<math>S_+</math>就表示在曲面的 <math>x &gt; 0</math>侧做积分，<math>S_-</math>表示在曲面<math>x &lt; 0</math>侧做积分</p> $\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ $= - \iint_{S_+} [X(h(y, z), y, z) - Yh_y(y, z) - Zh_z(y, z)]dydz$ <p>若只写<math>S</math>则表示在曲面的正侧做积分。</p>

已知曲面的参数方程：

$$L: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), (u, v) \in D, \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

■ 记  $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)},$

$$dS = \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1} dx dy$$

$$= \sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 + 1} |C| du dv$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

$$\iint_S \rho(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{D_1} \rho(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$$

$$= \iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

■ 记  $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$

$$E = |\mathbf{r}_u|^2, F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, G = |\mathbf{r}_v|^2,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

$$\iint_S \rho(x, y, z) dS$$

$$= \iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

已知曲面的参数方程：

$$L: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), (u, v) \in D, \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

记  $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)},$

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \\ = \pm (A, B, C) du dv$$

若规定曲面  $z > 0$  侧为正，也就是  $z > 0$  侧的法向量为正，选取正负号使得  $\pm C > 0$ ；若规定曲面  $z < 0$  侧为正，也就是  $z < 0$  侧的法向量为正，则  $z > 0$  侧的法向量为负，故应选取正负号使得  $\pm C < 0$ 。

$x, y$  方向的情况类似。

当规定内侧和外侧时，例如对于一个球面，选取球坐标极角和圆周

角  $(\varphi, \theta) = (u, v)$  作为参数，则  $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$  表示指向外侧的单

位法向量，若规定外侧为正，则取正号  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$ ；若

规定内侧为正，则取负号  $\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$ 。

$$\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= \pm \iint_{S_+} \mathbf{v}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (A, B, C) du dv$$

$$= \pm \iint_{S_+} [X(x(u, v), y(u, v), z(u, v))A + YB + ZC] du dv$$

$S_+$  表示在曲面的正侧做积分。例如对于上述球面，选择球面的外侧为正，则  $d\mathbf{S}$  取正号， $S_+$  就表示在球面的外侧做积分， $S_-$  表示在球面内侧做积分

$$\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= - \iint_{S_+} [X(x(u, v), y(u, v), z(u, v))A + YB + ZC] du dv$$

若只写  $S$  则表示在曲面的正侧做积分。