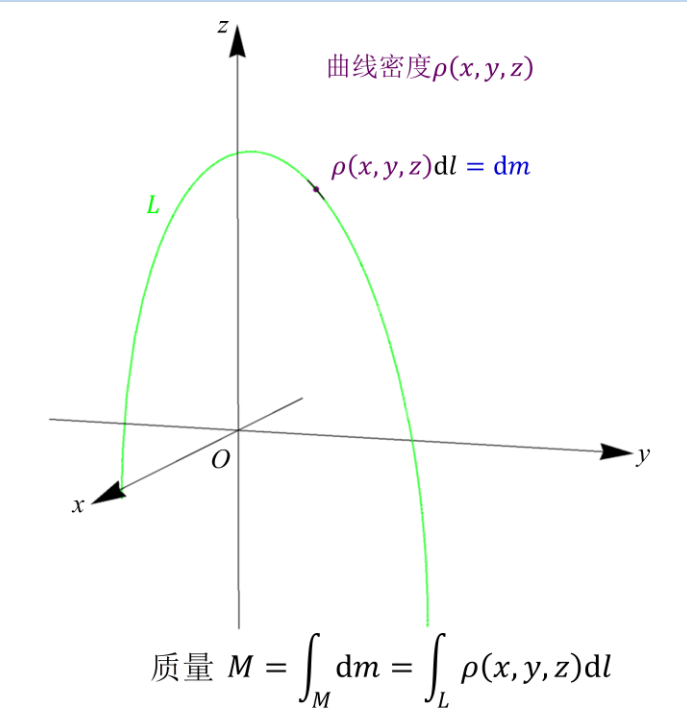
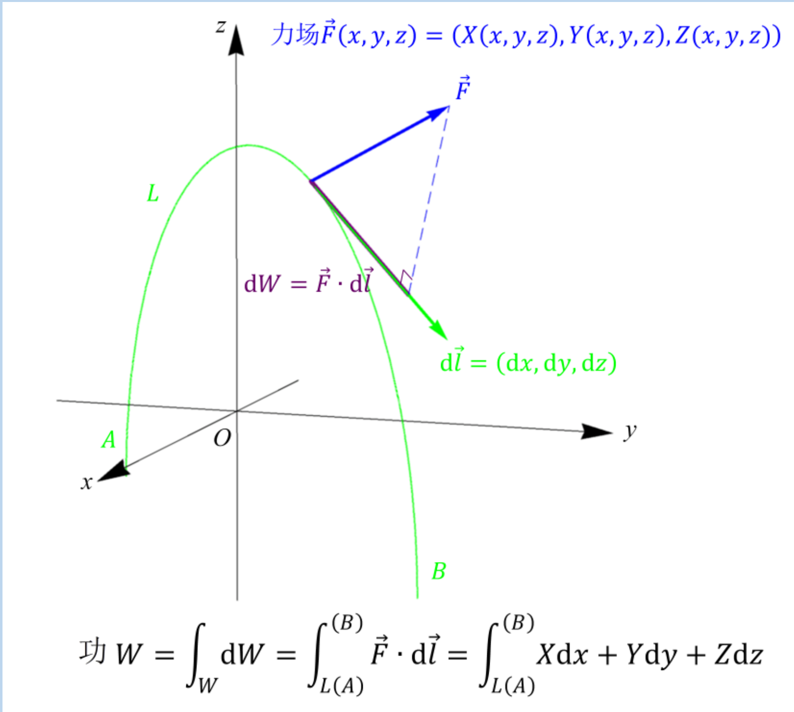
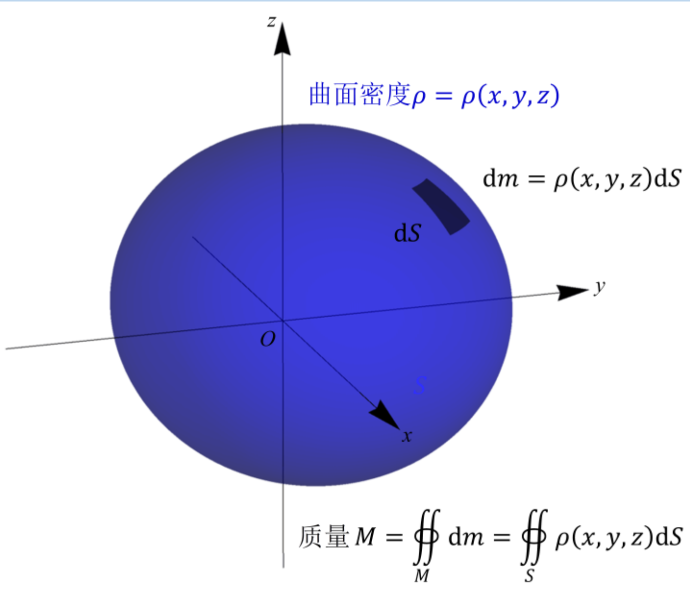
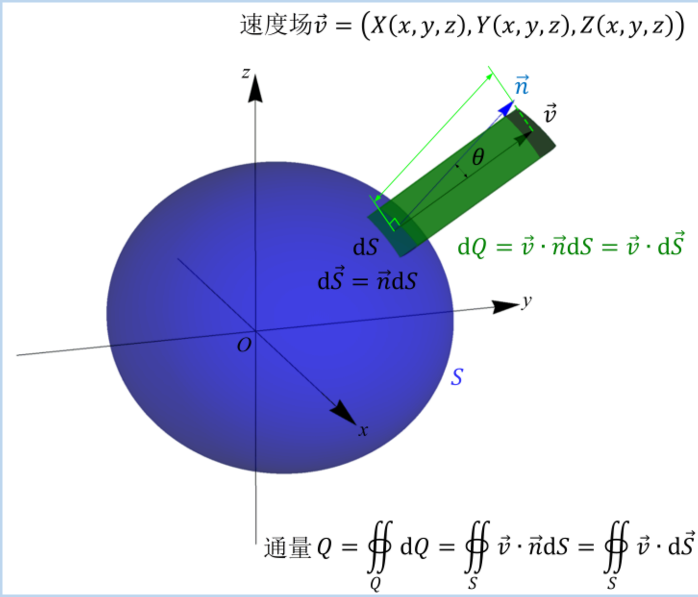
第一型曲线积分与第二型曲线积分的比较

第一型曲线积分	第二型曲线积分
物理背景	
非均匀（密度为$\rho(x,y,z)$）曲线L的质量M	力$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(X,Y,Z)$在有向曲线$L$上做功$W$的计算
图示	
 	
数学抽象	
数量场$\rho(x,y,z)$在曲线L上的积分	向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)$在有向曲线L上的积分
定义	
$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(x_k,y_k,z_k)\Delta l=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}l$ 数量场$\rho(x,y,z)$与弧长元素Δl相乘； $\rho(x,y,z)=1$时表示求曲线长度.	$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)$与有向弧段$\Delta\boldsymbol{l}$点乘，可用来表示力做功
弧长和有向弧段	
弧长元素是长度： $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$	有向弧段是向量： $\Delta\boldsymbol{l}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$
表示形式	
只有一种： $\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}l$	分量形式： $\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ $=\int_{L(A)}^{(B)}X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$
空间曲线的计算 （空间第一型曲线积分：目前只能计算参数方程一种形式，遇到空间曲线，需先化成参数方程. 空间第二型曲线积分：除了将曲线方程写成参数方程形式进行计算外，还可用斯托克斯公式计算.）	
已知曲线的参数方程 $L:\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),t\in[\alpha,\beta],\\z=z(t),\end{cases}$	已知曲线的参数方程 $L:\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),t\in[\alpha,\beta],A:t=\alpha,B:t=\beta,\\z=z(t),\end{cases}$

$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$ $=\sqrt{(x'(t)\mathrm{d}t)^2+(y'(t)\mathrm{d}t)^2+(z'(t)\mathrm{d}t)^2}$ $=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\mathrm{d}t,$ $\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}l$ $=\int_\alpha^\beta \rho\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\mathrm{d}t.$	$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)=(x'(t)\mathrm{d}t,y'(t)\mathrm{d}t,z'(t)\mathrm{d}t),$ $\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ $=\int_{L(A)}^{(B)}X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$ $=\int_\alpha^\beta X\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t+Yy'(t)\mathrm{d}t+Zz'(t)\mathrm{d}t$ $=\int_\alpha^\beta \left[X\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)+Yy'(t)+Zz'(t)\right]\mathrm{d}t$
平面曲线的计算	
已知曲线的参数方程 $L:\ \begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} t\in[\alpha,\beta],$ $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ $=\sqrt{(x'(t)\mathrm{d}t)^2+(y'(t)\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\mathrm{d}t,$ $\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta \rho\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\mathrm{d}t.$	已知曲线的参数方程 $L:\ \begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} t\in[\alpha,\beta],A{:}\,t=\alpha,B{:}\,t=\beta,$ $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=(x'(t)\mathrm{d}t,y'(t)\mathrm{d}t),$ $\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ $=\int_{L(A)}^{(B)}X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ $=\int_\alpha^\beta X\left(x(t),y(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t+Y\left(x(t),y(t)\right)y'(t)\mathrm{d}t$ $=\int_\alpha^\alpha \left[X\left(x(t),y(t)\right)x'(t)+Yy'(t)\right]\mathrm{d}t$
已知曲线的显示方程： $L:\ y=f(x),x\in[a,b],$ $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ $=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(f'(x)\mathrm{d}x)^2}=\sqrt{1^2+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x,$ $\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}l=\int_a^b \rho\left(x,f(x)\right)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\mathrm{d}x.$	已知曲线的显示方程： $L:\ y=f(x),x\in[a,b],A{:}\,x=a,B{:}\,x=b,$ $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=(\mathrm{d}x,f'(x)\mathrm{d}x),$ $\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ $=\int_{L(A)}^{(B)}X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ $=\int_a^b X\left(x,f(x)\right)\mathrm{d}x+Y\left(x,f(x)\right)f'(x)\mathrm{d}x$ $=\int_a^b \left[X\left(x,f(x)\right)+Y\left(x,f(x)\right)f'(x)\right]\mathrm{d}x$
已知曲线的极坐标方程： $L:\ r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta],$ $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$ $=\sqrt{[(r(\theta)\cos\theta)'\mathrm{d}\theta]^2+[(r(\theta)\sin\theta)'\mathrm{d}\theta]^2}$ $=\sqrt{[(r(\theta)\cos\theta)']^2+[(r(\theta)\sin\theta)']^2}\mathrm{d}\theta$ $=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta,$ $\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}l$ $=\int_\alpha^\beta \rho(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta.$	已知曲线的极坐标方程： $L:\ r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta],A{:}\,x=\alpha,B{:}\,x=\beta,$ $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=\left((r(\theta)\cos\theta)'\mathrm{d}\theta,(r(\theta)\sin\theta)'\mathrm{d}\theta\right),$ $\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ $=\int_{L(A)}^{(B)}X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ $=\int_\alpha^\beta X(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)(r(\theta)\cos\theta)'\mathrm{d}\theta+Y(r(\theta)\sin\theta)'\mathrm{d}\theta$ $=\int_\alpha^\beta [X(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)(r(\theta)\cos\theta)'+Y(r(\theta)\sin\theta)']\mathrm{d}\theta$

第一型曲面积分与第二型曲面积分的比较

第一型曲面积分	第二型曲面积分
物理背景	
非均匀(密度为$\rho(x,y,z)$)曲面S的质量M	速度场$\boldsymbol{v}(x,y,z)=(X,Y,Z)$穿过有向曲面$S$的通量$Q$
图示	
	
数学抽象	
数量场$\rho(x,y,z)$在曲面S上的积分	向量场$\boldsymbol{v}(x,y,z)$在有向曲面S上的积分， 有向曲面S规定了正方向，也就是规定了一侧的法向量为正，另一侧的法向量为负
定义	
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k,y_k,z_k)\Delta S=\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$ 数量场$\rho(x,y,z)$与曲面面积元素ΔS相乘 $\rho(x,y,z)=1$时表示求曲面面积.	$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{v}(x_k,y_k,z_k)\cdot\boldsymbol{n}\Delta S=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$ $$=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$ ■ $\boldsymbol{n}$为S的正向单位法向量 ■ 向量场$\boldsymbol{v}(x,y,z)$与有向面积元素$\boldsymbol{n}\Delta S$点乘，表示ΔS为底$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$为高的柱体体积，这就是通量的定义，记住即可 ■ S_+表示在曲面的正向积分，如只写S默认为在曲面正向积分 ■ $\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$记作$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ ■ 实质是点积$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$的第一型曲面积分
面积元素和有向面积元素	
曲面$S: z=f(x,y)$的面积元素ΔS用切平面的面积代替： $$\Delta S=\sqrt{f_x(\xi,\eta,\zeta)^2+f_y(\xi,\eta,\zeta)^2+1}\Delta x\Delta y$$ $$\mathrm{d}S=\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$	■ 曲面$S: z=f(x,y)$的正向单位法向量： $\boldsymbol{n}$ $$=\text{"}\pm\text{"}\frac{1}{\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}}\big(-f_x(x,y,z),-f_y(x,y,z),1\big)$$ 若规定曲面上侧($z>0$)为正，则以指向$z>0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$z>0$方向，$\boldsymbol{n}$的z分量为正，故取正号；若规定曲面下侧($z<0$)为正，则以指向$z<0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$z<0$方向，$\boldsymbol{n}$的z分量为负，故取负号. ■ 曲面$S: z=f(x,y)$的有向面积元素： $\Delta\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\Delta S$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$= "\pm" \frac{1}{\sqrt{f_x(\xi,\eta,\zeta)^2+f_y(\xi,\eta,\zeta)^2+1}}\left(-f_x(\xi,\eta,\zeta),-f_y(\xi,\eta,\zeta),1\right)$
$\times\sqrt{f_x(\xi,\eta,\zeta)^2+f_y(\xi,\eta,\zeta)^2+1}\Delta x\Delta y$
$= "\pm"\left(-f_x(\xi,\eta,\zeta),-f_y(\xi,\eta,\zeta),1\right)\Delta x\Delta y$
$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$
$= "\pm" \frac{1}{\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}}\left(-f_x(x,y,z),-f_y(x,y,z),1\right)$
$\times\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$= "\pm"\left(-f_x(x,y,z),-f_y(x,y,z),1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">表示形式</td>
</tr>
<tr>
<td>只有一种：
$\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$</td>
<td>■ 记$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$
■ 分量形式：
$\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$
$=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$
$=\iint_{S_+}X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
■ 法向量可用方向余弦表示：
$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$
其中α,β,γ为该法向量与三个坐标轴正向的夹角，可以证明
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
故$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是一个单位向量，
$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S$
$=(\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\cos\beta\,\mathrm{d}S,\cos\gamma\,\mathrm{d}S)$
$=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$
■ 化成第一型曲面积分：
$\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$
$=\iint_{S_+}X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
$=\iint_{S_+}X(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S+Y\cos\beta\,\mathrm{d}S+Z\cos\gamma\,\mathrm{d}S$
$=\iint_{S_+}[X(x,y,z)\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma]\mathrm{d}S$
■ $\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\cos\beta\,\mathrm{d}S,\cos\gamma\,\mathrm{d}S$分别是$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$在三个坐标面上的投影
■ 同样的$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\pm\left(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中"$\pm$"$f_x(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,"$\pm$"$f_y(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,"$\pm$"$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$分别是有向面积元素$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$在三个坐标面上的投影</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">计算</td>
</tr>
<tr>
<td>已知曲面的显式方程
$S\colon\ z=f(x,y),(x,y)\in D,$
$\mathrm{d}S=\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$\iint_S\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$
$=\iint_D\rho\left(x,y,f(x,y)\right)\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$</td>
<td>已知曲面的显式方程
$S\colon\ z=f(x,y),(x,y)\in D$
$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S="\pm"\left(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y),$
若规定曲面上侧$(z>0)$为正，则以指向$z>0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$z>0$方向，$\boldsymbol{n}$的z分量为正，故取正号，若规定曲面下侧$(z<0)$为正，则以指向$z<0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$z<0$方向，$\boldsymbol{n}$的z分量为负，故取负号.</td>
</tr>
</table>

	$\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ $= "\pm" \iint_{S_+} \boldsymbol{v}\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\big(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $= "\pm" \iint_{S_+} \big[-X\big(x,y,f(x,y)\big)f_x(x,y) - Yf_y(x,y) + Z\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ S_+表示在曲面的正侧做积分．S_-表示在曲面的负侧做积分. $\iint_{S_-} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 若只写S则表示在曲面的正侧做积分.
已知曲面的显式方程 $S\colon\ y = g(z,x), (z,x)\in D,$ $\mathrm{d}S = \sqrt{g_x(z,x)^2 + 1 + g_z(z,x)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ $= \iint_D \rho(x,g(z,x),z)\sqrt{g_x(z,x)^2 + 1 + g_z(z,x)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$	已知曲面的显式方程 $S\colon\ y = g(z,x), (x,y)\in D$ $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = "\pm"\big(-g_x(z,x),1,-g_z(z,x)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $= (\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y),$ 若规定曲面右侧$(y>0)$为正，则以指向$y>0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$y>0$方向，$\boldsymbol{n}$的y分量为正，故取正号；若规定曲面左侧$(y<0)$为正，则以指向$y<0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$y<0$方向，$\boldsymbol{n}$的y分量为负，故取负号. $\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ $= "\pm" \iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,g(z,x),z)\cdot\big(-g_x(z,x),1,-g_z(z,x)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $= "\pm" \iint_{S_+} [-X(x,g(z,x),z)g_x(z,x) + Y - Zg_z(z,x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ S_+表示在曲面的正侧做积分．S_-表示在曲面的负侧做积分. $\iint_{S_-} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 若只写S则表示在曲面的正侧做积分.
已知曲面的显式方程 $S\colon\ x = h(y,z), (y,z)\in D,$ $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + h_y(y,z)^2 + h_z(y,z)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ $= \iint_D \rho(h(y,z),y,z)\sqrt{1 + h_y(y,z)^2 + h_z(y,z)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	已知曲面的显式方程 $S\colon\ x = h(y,z), (y,z)\in D,$ $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = "\pm"\Big(1,-h_y(y,z),-h_z(y,z)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $= (\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y),$ 若规定曲面前侧$(x>0)$为正，则以指向$x>0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$x>0$方向，$\boldsymbol{n}$的x分量为正，故取正号，若规定曲面后侧$(x<0)$为正，则以指向$x<0$侧的法向量为正，意思就是计算时法向量$\boldsymbol{n}$指向$x<0$方向，$\boldsymbol{n}$的x分量为负，故取负号. $\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ $= "\pm" \iint_{S_+} \boldsymbol{v}(h(y,z),y,z)\cdot\Big(1,-h_y(y,z),-h_z(y,z)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $= "\pm" \iint_{S_+} \big[X(h(y,z),y,z) - Yh_y(y,z) - Zh_z(y,z)\big]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ S_+表示在曲面的正侧做积分．S_-表示在曲面的负侧做积分. $\iint_{S_-} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 若只写S则表示在曲面的正侧做积分.
已知曲面的参数方程： $L\colon \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), (u,v)\in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$	已知曲面的参数方程： $L\colon \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), (u,v)\in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$

■ 记$A=\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}, B=\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}, C=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}\right)^2+1}|C|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_1} \rho\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \rho\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

■ 记$\boldsymbol{r}_u=(x_u,y_u,z_u), \boldsymbol{r}_v=(x_v,y_v,z_v)$

$E=|\boldsymbol{r}_u|^2, F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v, G=|\boldsymbol{r}_v|^2$,

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2$$

$$\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D \rho\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

记$A=\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}, B=\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}, C=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$,

$$\boldsymbol{n}=\text{"}\pm\text{"}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\text{"}\pm\text{"}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\text{"}\pm\text{"}(A,B,C)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

若规定曲面$z>0$侧为正，也就是代入$z>0$侧的法向量计算，则选取正负号使得"±"C>0；若规定曲面$z<0$侧为正，也就是代入$z<0$侧的法向量计算，则选取正负号使得"±"C<0.

若规定曲面$y>0$侧为正，也就是代入$y>0$侧的法向量计算，则选取正负号使得"±"B>0；若规定曲面$y<0$侧为正，也就是代入$y<0$侧的法向量计算，则选取正负号使得"±"B<0.

若规定曲面$x>0$侧为正，也就是代入$x>0$侧的法向量计算，则选取正负号使得"±"A>0；若规定曲面$x<0$侧为正，也就是代入$x<0$侧的法向量计算，则选取正负号使得"±"A<0.

当规定内侧和外侧时，例如对于一个球心在原点的球面，选取球坐标的极角和圆周角$(\varphi,\theta)=(u,v)$作为参数，则$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$表示指向外侧的单位法向量，若规定外侧为正，则代入指向外侧的法向量计算，$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$；若规定内侧为正，则代入指向内侧的法向量计算，$\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$.

$$\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+} \boldsymbol{v}\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot(A,B,C)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+} \Big[X\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)A+YB+ZC\Big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

S_+表示在曲面的正侧做积分. S_-表示在曲面的负侧做积分.

$$\iint_{S_-} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_{S_+} \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

若只写S则表示在曲面的正侧做积分.