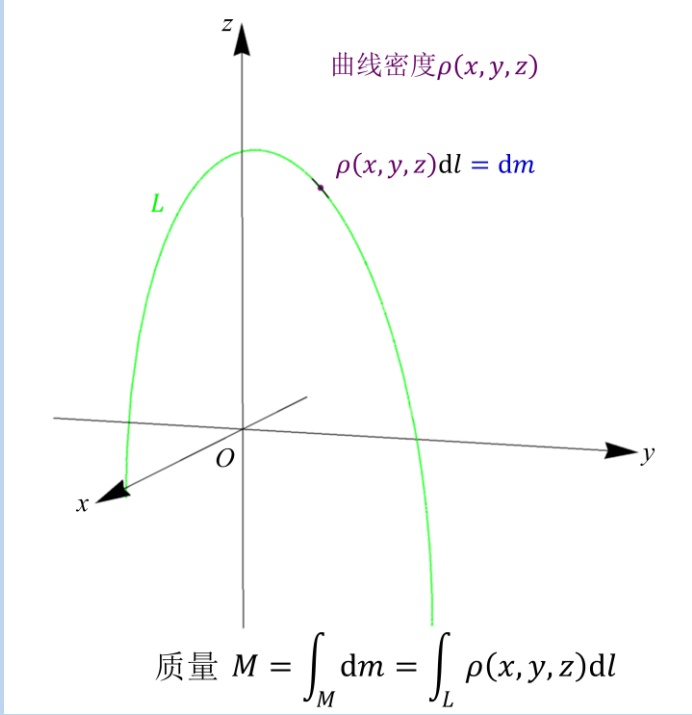
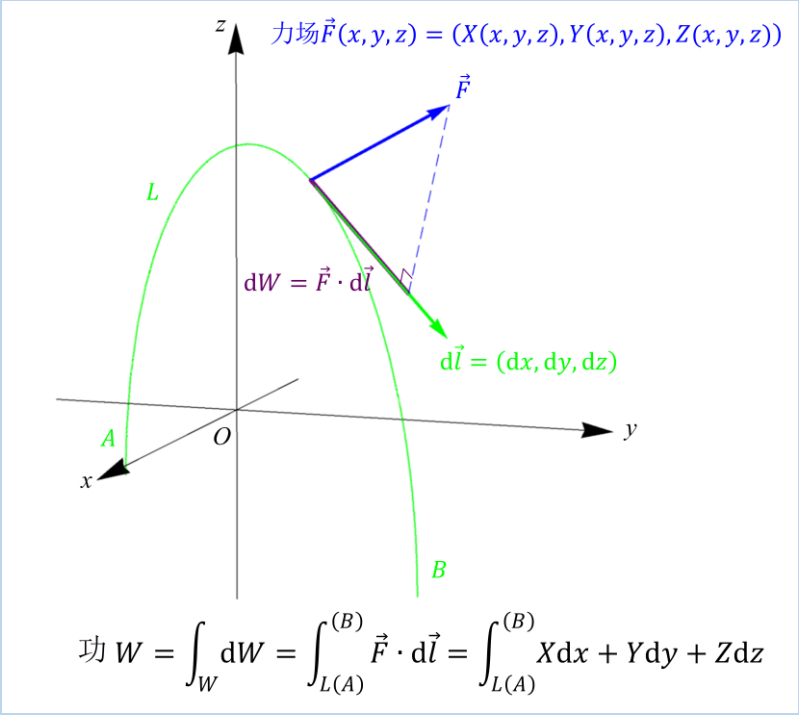
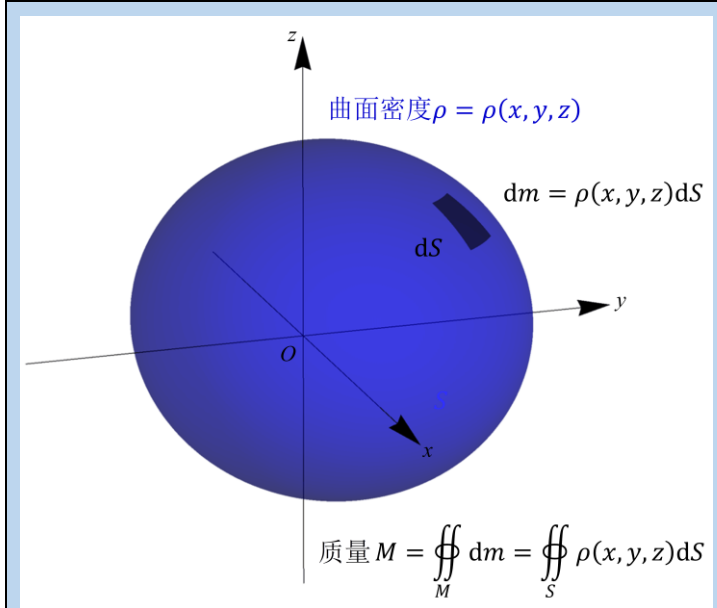
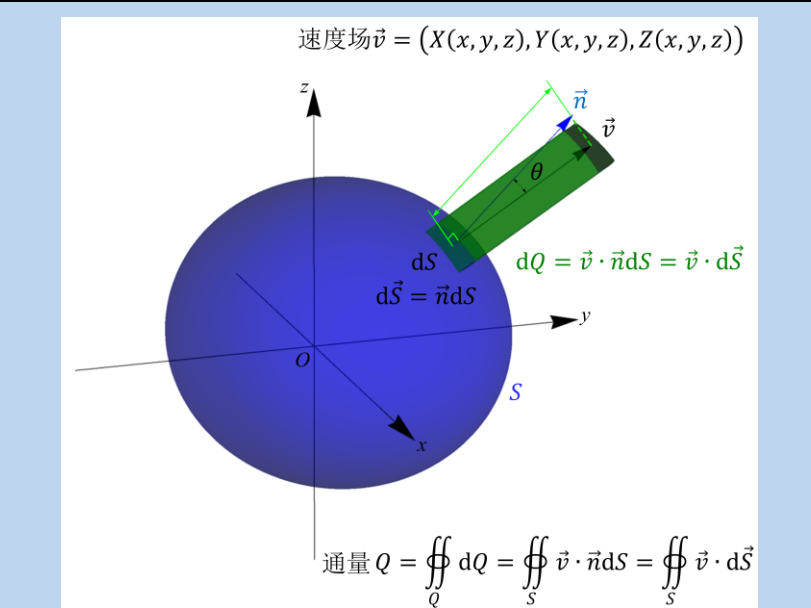


第一型曲线积分与第二型曲线积分的比较

第一型曲线积分	第二型曲线积分
物理背景	
非均匀(密度为 $\rho(x, y, z)$)曲线 L 的质量 M	力 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X, Y, Z)$ 在有向曲线 L 上做功 W 的计算
图示	
 <p>曲线密度$\rho(x, y, z)$</p> <p>$\rho(x, y, z)dl = dm$</p> <p>质量 $M = \int_M dm = \int_L \rho(x, y, z)dl$</p>	 <p>力场$\vec{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$</p> <p>$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$</p> <p>$d\vec{l} = (dx, dy, dz)$</p> <p>功 $W = \int_W dW = \int_{L(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{L(A)}^{(B)} Xdx + Ydy + Zdz$</p>
数学抽象	
数量场 $\rho(x, y, z)$ 在曲线 L 上的积分	向量场 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在有向曲线 L 上的积分
定义	
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta l = \int_L \rho(x, y, z) dl$ <p>数量场$\rho(x, y, z)$与弧长元素Δl相乘; $\rho(x, y, z) = 1$时表示求曲线长度.</p>	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta \mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l}$ <p>向量场$\mathbf{F}(x, y, z)$与有向弧段$\Delta \mathbf{l}$点乘, 可用来表示力做功</p>
弧长和有向弧段	
弧长元素是长度: $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$	有向弧段是向量: $\Delta \mathbf{l} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$
表示形式	
只有一种: $\int_L \rho(x, y, z) dl$	分量形式: $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot (dx, dy, dz)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$
空间曲线的计算	
(空间第一型曲线积分: 目前只能计算参数方程一种形式, 遇到空间曲线, 需先化成参数方程. 空间第二型曲线积分: 除了将曲线方程写成参数方程形式进行计算外, 还可利用斯托克斯公式计算.)	
已知曲线的参数方程 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$	已知曲线的参数方程 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], A: t = \alpha, B: t = \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$

$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ $= \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2 + (z'(t)dt)^2}$ $= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$ $\int_L \rho(x, y, z) dl$ $= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$	$d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot (dx, dy, dz)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$ $= \int_{\alpha}^{\beta} X(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + Yy'(t)dt + Zz'(t)dt$ $= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Yy'(t) + Zz'(t)]dt$
平面曲线的计算	
<p>已知曲线的参数方程</p> $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta],$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ $= \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$ $\int_L \rho(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$	<p>已知曲线的参数方程</p> $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta], A: t = \alpha, B: t = \beta,$ $d\mathbf{l} = (dx, dy) = (x'(t)dt, y'(t)dt),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ $= \int_{\alpha}^{\beta} X(x(t), y(t))x'(t)dt + Y(x(t), y(t))y'(t)dt$ $= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t))x'(t) + Yy'(t)]dt$
<p>已知曲线的显示方程:</p> $L: y = f(x), x \in [a, b],$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ $= \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1^2 + (f'(x))^2} dx,$ $\int_L \rho(x, y) dl = \int_a^b \rho(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$	<p>已知曲线的显示方程:</p> $L: y = f(x), x \in [a, b], A: x = a, B: x = b,$ $d\mathbf{l} = (dx, dy) = (dx, f'(x)dx),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ $= \int_a^b X(x, f(x))dx + Y(x, f(x))f'(x)dx$ $= \int_a^b [X(x, f(x)) + Y(x, f(x))f'(x)]dx$
<p>已知曲线的极坐标方程:</p> $L: r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta],$ $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ $= \sqrt{[(r(\theta) \cos \theta)'d\theta]^2 + [(r(\theta) \sin \theta)'d\theta]^2}$ $= \sqrt{[(r(\theta) \cos \theta)']^2 + [(r(\theta) \sin \theta)']^2} d\theta$ $= \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta,$ $\int_L \rho(x, y) dl$ $= \int_{\alpha}^{\beta} \rho(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$	<p>已知曲线的极坐标方程:</p> $L: r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta], A: x = \alpha, B: x = \beta,$ $d\mathbf{l} = (dx, dy) = ((r(\theta) \cos \theta)'d\theta, (r(\theta) \sin \theta)'d\theta),$ $\int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \mathbf{F}(x, y) \cdot (dx, dy)$ $= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ $= \int_{\alpha}^{\beta} X(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)(r(\theta) \cos \theta)'d\theta + Y(r(\theta) \sin \theta)'d\theta$ $= \int_{\alpha}^{\beta} [X(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)(r(\theta) \cos \theta)' + Y(r(\theta) \sin \theta)']d\theta$

第一型曲面积分与第二型曲面积分的比较

第一型曲面积分	第二型曲面积分
物理背景	
非均匀(密度为 $\rho(x, y, z)$)曲面 S 的质量 M	速度场 $\mathbf{v}(x, y, z) = (X, Y, Z)$ 穿过有向曲面 S 的通量 Q
图示	
 <p>曲面密度$\rho = \rho(x, y, z)$</p> <p>$dm = \rho(x, y, z) dS$</p> <p>质量 $M = \iint_M dm = \iint_S \rho(x, y, z) dS$</p>	 <p>速度场$\mathbf{v} = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$</p> <p>$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$</p> <p>$dQ = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$</p> <p>通量 $Q = \iint_Q dQ = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$</p>
数学抽象	
数量场 $\rho(x, y, z)$ 在曲面 S 上的积分	向量场 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 在有向曲面 S 上的积分， 有向曲面 S 规定了正方向，也就是规定了一侧的法向量为正，另一侧的法向量为负
定义	
$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta S = \iint_S \rho(x, y, z) dS$ <p>数量场$\rho(x, y, z)$与曲面面积元素ΔS相乘 $\rho(x, y, z) = 1$时表示求曲面面积.</p>	$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{n} \Delta S = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ $= \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ <ul style="list-style-type: none"> ■ \mathbf{n}为S的正向单位法向量 ■ 向量场$\mathbf{v}(x, y, z)$与有向面积元素$\mathbf{n} \Delta S$点乘，表示ΔS为底$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$为高的柱体体积，这就是通量的定义，记住即可 ■ S_+表示在曲面的正向积分，如只写S默认为在曲面正向积分 ■ $\mathbf{n} dS$记作$d\mathbf{S}$ ■ 实质是点积$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$的第一型曲面积分
面积元素和有向面积元素	
<p>曲面$S: z = f(x, y)$的面积元素ΔS用切平面的面积代替:</p> $\Delta S = \sqrt{f_x(\xi, \eta, \zeta)^2 + f_y(\xi, \eta, \zeta)^2 + 1} \Delta x \Delta y$ $dS = \sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1} dx dy$	<ul style="list-style-type: none"> ■ 曲面$S: z = f(x, y)$的正向单位法向量: $\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1}} (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), 1)$ <p>若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号</p> ■ 曲面$S: z = f(x, y)$的有向面积元素: $\Delta S = \mathbf{n} \Delta S$ $= \pm \frac{1}{\sqrt{f_x(\xi, \eta, \zeta)^2 + f_y(\xi, \eta, \zeta)^2 + 1}} (f_x(\xi, \eta, \zeta), f_y(\xi, \eta, \zeta), 1)$ $\times \sqrt{f_x(\xi, \eta, \zeta)^2 + f_y(\xi, \eta, \zeta)^2 + 1} \Delta x \Delta y$

	$= \pm (f_x(\xi, \eta, \zeta), f_y(\xi, \eta, \zeta), 1) \Delta x \Delta y$ $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ $= \pm \frac{1}{\sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1}} (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), 1) \times \sqrt{f_x(x, y, z)^2 + f_y(x, y, z)^2 + 1} dx dy$ $= \pm (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), 1) dx dy$
--	--

表示形式	
<div>只有一种：</div> <div> $\iint_S \rho(x, y, z) dS$ </div>	<div> <div> <div>■ 记$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$</div> <div>■ 分量形式：</div> <div> $\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ $= \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ $= \iint_{S_+} X(x, y, z) dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$ </div> <div>■ 法向量可用方向余弦表示：</div> <div> $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ <div>其中α, β, γ为该法向量与三个坐标轴正向的夹角，可以证明</div> $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ <div>故$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$是一个单位向量，</div> $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS$ $= (\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS)$ $= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ </div> <div>■ 化成第一型曲面积分：</div> <div> $\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ $= \iint_{S_+} X(x, y, z) dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$ $= \iint_{S_+} X(x, y, z) \cos \alpha dS + Y \cos \beta dS + Z \cos \gamma dS$ $= \iint_{S_+} [X(x, y, z) \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma] dS$ </div> <div>■ $\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS$分别是$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$在三个坐标面上的投影</div> <div>■ 同 样 的 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \pm (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), 1) dx dy$ 中 $\pm (f_x(x, y, z) dx dy, \pm f_y(x, y, z) dx dy, \pm dx dy$分别是有向面积元素$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$在三个坐标面上的投影</div> </div> </div>

计算	
<div>已知曲面的显式方程</div> <div> $S: z = f(x, y), (x, y) \in D,$ $dS = \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$ $\iint_S \rho(x, y, z) dS$ $= \iint_D \rho(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$ </div>	<div>已知曲面的显式方程</div> <div> $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$ $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \pm (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) dx dy$ $= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy),$ <div>若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号</div> $\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ $= \pm \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) dx dy$ $= \pm \iint_{S_+} [-X(x, y, f(x, y)) f_x(x, y) - Y f_y(x, y) + Z] dx dy$ </div>

	<p>S_+表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的上侧为正, 则$d\mathbf{S}$取正号, S_+就表示在曲面的上侧做积分, S_-表示在曲面下侧做积分</p> $\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ $= - \iint_{S_+} [-X(x, y, f(x, y))f_x(x, y) - Yf_y(x, y) + Z]dxdy$ <p>若只写S则表示在曲面的正侧做积分.</p>
<p>已知曲面的显式方程</p> $S: y = g(z, x), (z, x) \in D,$ $dS = \sqrt{g_x(z, x)^2 + 1 + g_z(z, x)^2}dzdx$ $\iint_S \rho(x, y, z)dS$ $= \iint_D \rho(x, g(z, x), z)\sqrt{g_x(z, x)^2 + 1 + g_z(z, x)^2}dzdx$	<p>已知曲面的显式方程</p> $S: y = g(z, x), (x, y) \in D$ $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = "\pm"(-g_x(z, x), 1, -g_z(z, x))dzdx$ $= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy),$ <p>若规定曲面$y > 0$侧为正, 也就是$y > 0$侧的法向量为正, 取正号; 若规定曲面$y < 0$侧为正, 也就是$y < 0$侧的法向量为正, 则$y > 0$侧的法向量为负, 故取负号</p> $\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}dS$ $= "\pm" \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, g(z, x), z) \cdot (-g_x(z, x), 1, -g_z(z, x))dzdx$ $= "\pm" \iint_{S_+} [-X(x, g(z, x), z)g_x(z, x) + Y - Zg_z(z, x)]dzdx$ <p>S_+表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的$y > 0$侧为正, 则$d\mathbf{S}$取正号; S_+就表示在曲面的$y > 0$侧做积分, S_-表示在曲面$y < 0$侧做积分</p> $\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ $= - \iint_{S_+} [-X(x, g(z, x), z)g_x(z, x) + Y - Zg_z(z, x)]dzdx$ <p>若只写S则表示在曲面的正侧做积分.</p>
<p>已知曲面的显式方程</p> $S: x = h(y, z), (y, z) \in D,$ $dS = \sqrt{1 + h_y(y, z)^2 + h_z(y, z)^2}dydz$ $\iint_S \rho(x, y, z)dS$ $= \iint_D \rho(h(y, z), y, z)\sqrt{1 + h_y(y, z)^2 + h_z(y, z)^2}dydz$	<p>已知曲面的显式方程</p> $S: x = h(y, z), (y, z) \in D,$ $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = "\pm"(1, -h_y(y, z), -h_z(y, z))dydz$ $= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy),$ <p>若规定曲面$x > 0$侧为正, 也就是$x > 0$侧的法向量为正, 取正号; 若规定曲面$x < 0$侧为正, 也就是$x < 0$侧的法向量为正, 则$x > 0$侧的法向量为负, 故取负号</p> $\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}dS$ $= "\pm" \iint_{S_+} \mathbf{v}(h(y, z), y, z) \cdot (1, -h_y(y, z), -h_z(y, z))dydz$ $= "\pm" \iint_{S_+} [X(h(y, z), y, z) - Yh_y(y, z) - Zh_z(y, z)]dydz$ <p>S_+表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的$x > 0$侧为正, 则$d\mathbf{S}$取正号, S_+就表示在曲面的 $x > 0$侧做积分, S_-表示在曲面$x < 0$侧做积分</p> $\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$ $= - \iint_{S_+} [X(h(y, z), y, z) - Yh_y(y, z) - Zh_z(y, z)]dydz$ <p>若只写S则表示在曲面的正侧做积分.</p>
已知曲面的参数方程:	已知曲面的参数方程:

$$L: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), (u, v) \in D, \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

$$\blacksquare \quad \text{记 } A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

$$dS = \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$$

$$= \sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 + 1} |C| du dv$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

$$\iint_S \rho(x, y, z) dS$$

$$= \iint_{D_1} \rho(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy$$

$$= \iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

$$\blacksquare \quad \text{记 } \mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

$$E = |\mathbf{r}_u|^2, F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, G = |\mathbf{r}_v|^2,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

$$\iint_S \rho(x, y, z) dS$$

$$= \iint_D \rho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$L: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), (u, v) \in D, \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

$$\text{记 } A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \\ = \pm (A, B, C) du dv$$

若规定曲面 $z > 0$ 侧为正, 也就是 $z > 0$ 侧的法向量为正, 选取正负号使得 " $\pm C > 0$ "; 若规定曲面 $z < 0$ 侧为正, 也就是 $z < 0$ 侧的法向量为正, 则 $z > 0$ 侧的法向量为负, 故应选取正负号使得 " $\pm C < 0$."

x, y 方向的情况类似.

当规定内侧和外侧时, 例如对于一个球面, 选取球坐标极角和圆周

角 $(\varphi, \theta) = (u, v)$ 作为参数, 则 $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$ 表示指向外侧的单

位法向量, 若规定外侧为正, 则取正号 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$; 若

规定内侧为正, 则取负号 $\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$.

$$\iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= \pm \iint_{S_+} \mathbf{v}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (A, B, C) du dv$$

$$= \pm \iint_{S_+} [X(x(u, v), y(u, v), z(u, v))A + YB + ZC] du dv$$

S_+ 表示在曲面的正侧做积分. 例如对于上述球面, 选择球面的外侧为正, 则 $d\mathbf{S}$ 取正号, S_+ 就表示在球面的外侧做积分, S_- 表示在球面内侧做积分

$$\iint_{S_-} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_+} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= - \iint_{S_+} [X(x(u, v), y(u, v), z(u, v))A + YB + ZC] du dv$$

若只写 S 则表示在曲面的正侧做积分.