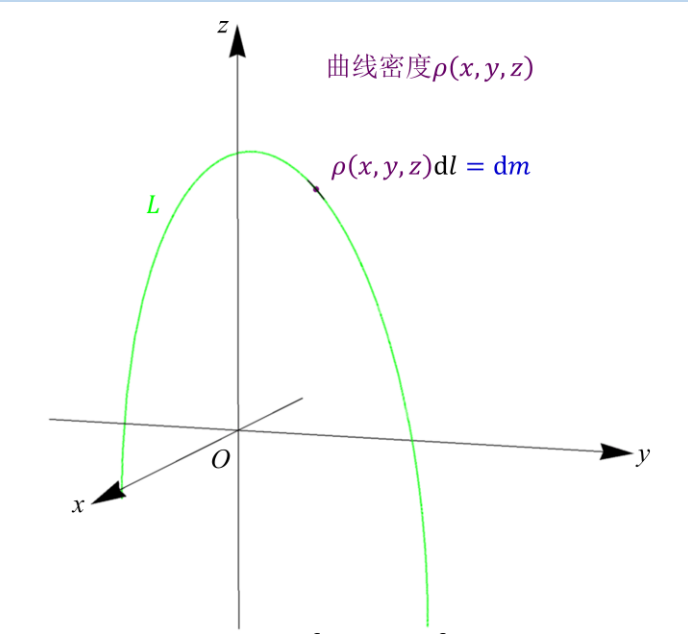
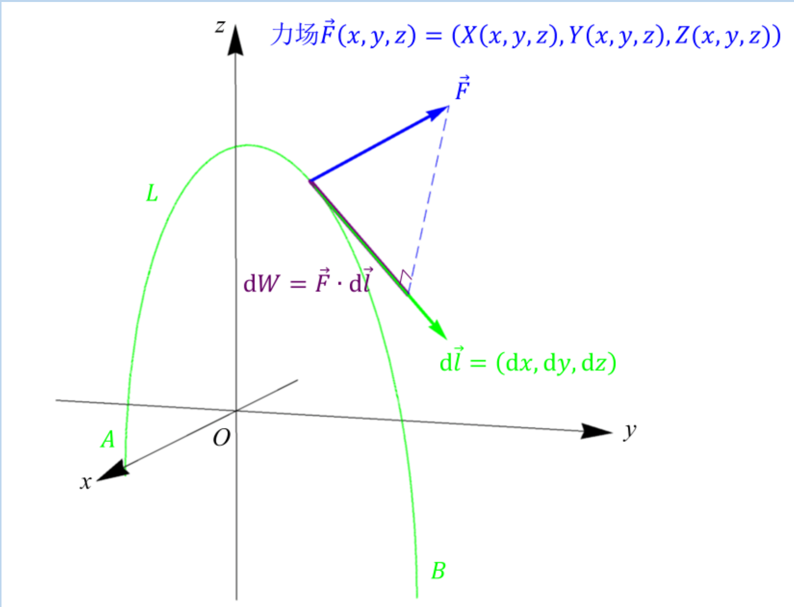
第一型曲线积分与第二型曲线积分的比较

第一型曲线积分	第二型曲线积分
物理背景	
非均匀(密度为$\rho(x,y,z)$)曲线L的质量M	力$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(X,Y,Z)$在有向曲线$L$上做功$W$的计算
图示	
 质量 $M=\int_M \mathrm{d}m=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}l$	 功 $W=\int_W \mathrm{d}W=\int_{L(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{L(A)}^{(B)}X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$
数学抽象	
数量场$\rho(x,y,z)$在曲线L上的积分	向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)$在有向曲线L上的积分
定义	
$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(x_k,y_k,z_k)\Delta l=\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}l$ 数量场$\rho(x,y,z)$与弧长元素Δl相乘； $\rho(x,y,z)=1$时表示求曲线长度.	$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)$与有向弧段$\Delta\boldsymbol{l}$点乘，可用来表示力做功
弧长和有向弧段	
弧长元素是长度： $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$	有向弧段是向量： $\Delta\boldsymbol{l}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$
表示形式	
只有一种： $\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}l$	分量形式： $\int_{L_+}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ $=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$ $=\int_{L(A)}^{(B)}X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$ $=\int_L X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$ $=\int_{L_+} X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$
空间曲线的计算	
(空间第一型曲线积分：目前只能计算参数方程一种形式，遇到空间曲线，需先化成参数方程.	

空间第二型曲线积分：除了将曲线方程写成参数方程形式进行计算外，还可用斯托克斯公式计算.）

已知曲线的参数方程

$$L:\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

$$= \sqrt{(x'(t)\mathrm{d}t)^2 + (y'(t)\mathrm{d}t)^2 + (z'(t)\mathrm{d}t)^2}$$

$$= \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_L \rho(x, y, z)\mathrm{d}l$$

$$= \int_\alpha^\beta \rho\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

已知曲线的参数方程

$$L:\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta], A{:}\, t = \alpha, B{:}\, t = \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = (x'(t)\mathrm{d}t, y'(t)\mathrm{d}t, z'(t)\mathrm{d}t),$$

$$\int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

$$= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y, z)\mathrm{d}x + Y(x, y, z)\mathrm{d}y + Z(x, y, z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta X\left(x(t), y(t), z(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t + Yy'(t)\mathrm{d}t + Zz'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[X\left(x(t), y(t), z(t)\right)x'(t) + Yy'(t) + Zz'(t)\right]\mathrm{d}t$$

平面曲线的计算

已知曲线的参数方程

$$L:\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta],$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{(x'(t)\mathrm{d}t)^2 + (y'(t)\mathrm{d}t)^2} = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_L \rho(x, y)\mathrm{d}l = \int_\alpha^\beta \rho\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

已知曲线的参数方程

$$L:\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta], A{:}\, t = \alpha, B{:}\, t = \beta,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (x'(t)\mathrm{d}t, y'(t)\mathrm{d}t),$$

$$\int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

$$= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)\mathrm{d}x + Y(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta X\left(x(t), y(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t + Y\left(x(t), y(t)\right)y'(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\alpha \left[X\left(x(t), y(t)\right)x'(t) + Yy'(t)\right]\mathrm{d}t$$

已知曲线的显示方程：

$$L:\ y = f(x), x \in [a, b],$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (f'(x)\mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1^2 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_L \rho(x, y)\mathrm{d}l = \int_a^b \rho\left(x, f(x)\right)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

已知曲线的显示方程：

$$L:\ y = f(x), x \in [a, b], A{:}\, x = a, B{:}\, x = b,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\mathrm{d}x, f'(x)\mathrm{d}x),$$

$$\int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

$$= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)\mathrm{d}x + Y(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b X\left(x, f(x)\right)\mathrm{d}x + Y\left(x, f(x)\right)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left[X\left(x, f(x)\right) + Y\left(x, f(x)\right)f'(x)\right]\mathrm{d}x$$

已知曲线的极坐标方程：

$$L:\ r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta],$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{[(r(\theta)\cos\theta)'\mathrm{d}\theta]^2 + [(r(\theta)\sin\theta)'\mathrm{d}\theta]^2}$$

$$= \sqrt{[(r(\theta)\cos\theta)']^2 + [(r(\theta)\sin\theta)']^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_L \rho(x, y)\mathrm{d}l$$

$$= \int_\alpha^\beta \rho(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

已知曲线的极坐标方程：

$$L:\ r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta], A{:}\, x = \alpha, B{:}\, x = \beta,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \left((r(\theta)\cos\theta)'\mathrm{d}\theta, (r(\theta)\sin\theta)'\mathrm{d}\theta\right),$$

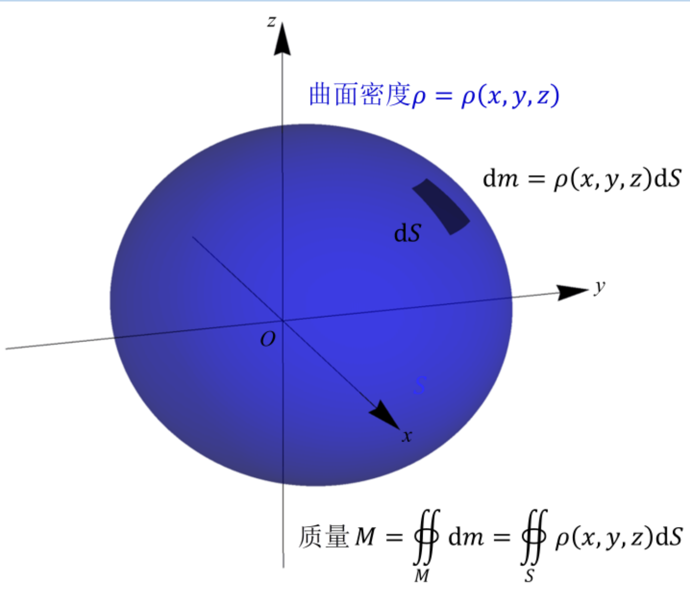
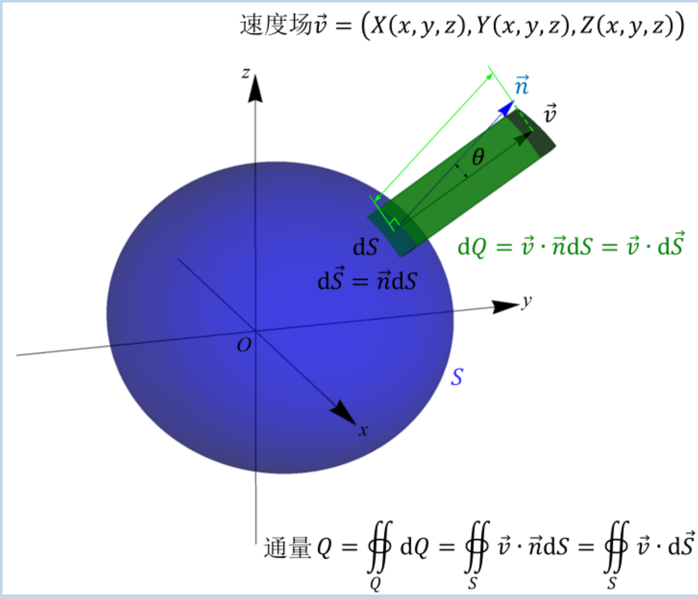
$$\int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L(A)}^{(B)} \boldsymbol{F}(x, y) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

$$= \int_{L(A)}^{(B)} X(x, y)\mathrm{d}x + Y(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta X(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)(r(\theta)\cos\theta)'\mathrm{d}\theta + Y(r(\theta)\sin\theta)'\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta [X(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)(r(\theta)\cos\theta)' + Y(r(\theta)\sin\theta)']\mathrm{d}\theta$$

第一型曲面积分与第二型曲面积分的比较

第一型曲面积分	第二型曲面积分
物理背景	
非均匀（密度为$\rho(x,y,z)$）曲面S的质量M	速度场$\boldsymbol{v}(x,y,z)=(X,Y,Z)$穿过有向曲面$S$的通量$Q$
图示	
	
数学抽象	
数量场$\rho(x,y,z)$在曲面S上的积分	向量场$\boldsymbol{v}(x,y,z)$在有向曲面S上的积分， 有向曲面S规定了正方向，也就是规定了一侧的法向量为正，另一侧的法向量为负
定义	
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(x_k,y_k,z_k)\Delta S=\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$ 数量场$\rho(x,y,z)$与曲面面积元素ΔS相乘 $\rho(x,y,z)=1$时表示求曲面面积.	$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{v}(x_k,y_k,z_k)\cdot\boldsymbol{n}\Delta S=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$ $$=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$ ■ $\boldsymbol{n}$为S的正向单位法向量 ■ 向量场$\boldsymbol{v}(x,y,z)$与有向面积元素$\boldsymbol{n}\Delta S$点乘，表示ΔS为底$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$为高的柱体体积，这就是通量的定义，记住即可 ■ S_+表示在曲面的正向积分，如只写S默认为在曲面正向积分 ■ $\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$记作$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ ■ 实质是点积$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$的第一型曲面积分
面积元素和有向面积元素	
曲面$S:z=f(x,y)$的面积元素ΔS用切平面的面积代替： $$\Delta S=\sqrt{f_x(\xi,\eta,\zeta)^2+f_y(\xi,\eta,\zeta)^2+1}\Delta x\Delta y$$ $$\mathrm{d}S=\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$	■ 曲面$S:z=f(x,y)$的正向单位法向量： $\boldsymbol{n}$ $$=\text{"}\pm\text{"}\frac{1}{\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}}\big(-f_x(x,y,z),-f_y(x,y,z),1\big)$$ 若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号 ■ 曲面$S:z=f(x,y)$的有向面积元素： $\Delta\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\Delta S$ $$=\text{"}\pm\text{"}\frac{1}{\sqrt{f_x(\xi,\eta,\zeta)^2+f_y(\xi,\eta,\zeta)^2+1}}\big(-f_x(\xi,\eta,\zeta),-f_y(\xi,\eta,\zeta),1\big)$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$\times\sqrt{f_x(\xi,\eta,\zeta)^2+f_y(\xi,\eta,\zeta)^2+1}\Delta x\Delta y$$

$$="\pm"\big(-f_x(\xi,\eta,\zeta),-f_y(\xi,\eta,\zeta),1\big)\Delta x\Delta y$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$

$$="\pm"\frac{1}{\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}}\big(-f_x(x,y,z),-f_y(x,y,z),1\big)$$

$$\times\sqrt{f_x(x,y,z)^2+f_y(x,y,z)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$="\pm"\big(-f_x(x,y,z),-f_y(x,y,z),1\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="2">表示形式</th>
</tr>
<tr>
<td>

只有一种：

$$\iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

</td>
<td>

- 记$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$
- 分量形式：

$$\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

$$=\iint_{S_+}X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

- 法向量可用方向余弦表示：

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

其中α,β,γ为该法向量与三个坐标轴正向的夹角，可以证明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

故$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是一个单位向量,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=(\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\cos\beta\,\mathrm{d}S,\cos\gamma\,\mathrm{d}S)$$

$$=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

- 化成第一型曲面积分：

$$\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{S_+}X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S_+}X(x,y,z)\cos\alpha\,\mathrm{d}S+Y\cos\beta\,\mathrm{d}S+Z\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{S_+}[X(x,y,z)\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

- $\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\cos\beta\,\mathrm{d}S,\cos\gamma\,\mathrm{d}S$分别是$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$在三个坐标面上的投影
- 同样的$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\pm\big(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),1\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中"$\pm$"$f_x(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,"$\pm$"$f_y(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,"$\pm$"$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$分别是有向面积元素$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$在三个坐标面上的投影

</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="2">计算</th>
</tr>
<tr>
<td>

已知曲面的显式方程

$$S:\ z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_S\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D\rho\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

</td>
<td>

已知曲面的显式方程

$$S:\ z=f(x,y),(x,y)\in D$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S="\pm"\big(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$,

若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号

$$\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$="\pm"\iint_{S_+}\boldsymbol{v}\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\big(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

</td>
</tr>
</table>

	$=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+}\left[-X\big(x,y,f(x,y)\big)f_x(x,y)-Yf_y(x,y)+Z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ S_+表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的上侧为正，则$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$取正号，S_+就表示在曲面的上侧做积分，S_-表示在曲面下侧做积分 $\iint_{S_-}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ $=-\iint_{S_+}\left[-X\big(x,y,f(x,y)\big)f_x(x,y)-Yf_y(x,y)+Z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 若只写S则表示在曲面的正侧做积分.
已知曲面的显式方程 $S:\ y=g(z,x),(z,x)\in D,$ $\mathrm{d}S=\sqrt{g_x(z,x)^2+1+g_z(z,x)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $\iint_S\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ $=\iint_D\rho(x,g(z,x),z)\sqrt{g_x(z,x)^2+1+g_z(z,x)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$	已知曲面的显式方程 $S:\ y=g(z,x),(x,y)\in D$ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\text{"}\pm\text{"}\big(-g_x(z,x),1,-g_z(z,x)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y),$ 若规定曲面$y>0$侧为正，也就是$y>0$侧的法向量为正，取正号；若规定曲面$y<0$侧为正，也就是$y<0$侧的法向量为正，则$y>0$侧的法向量为负，故取负号 $\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ $=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,g(z,x),z)\cdot\big(-g_x(z,x),1,-g_z(z,x)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+}[-X(x,g(z,x),z)g_x(z,x)+Y-Zg_z(z,x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ S_+表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的$y>0$侧为正，则$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$取正号；S_+就表示在曲面的$y>0$侧做积分，S_-表示在曲面$y<0$侧做积分 $\iint_{S_-}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ $=-\iint_{S_+}[-X(x,g(z,x),z)g_x(z,x)+Y-Zg_z(z,x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 若只写S则表示在曲面的正侧做积分.
已知曲面的显式方程 $S:\ x=h(y,z),(y,z)\in D,$ $\mathrm{d}S=\sqrt{1+h_y(y,z)^2+h_z(y,z)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\iint_S\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ $=\iint_D\rho(h(y,z),y,z)\sqrt{1+h_y(y,z)^2+h_z(y,z)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	已知曲面的显式方程 $S:\ x=h(y,z),(y,z)\in D,$ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\text{"}\pm\text{"}\Big(1,-h_y(y,z),-h_z(y,z)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y),$ 若规定曲面$x>0$侧为正，也就是$x>0$侧的法向量为正，取正号；若规定曲面$x<0$侧为正，也就是$x<0$侧的法向量为正，则$x>0$侧的法向量为负，故取负号 $\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ $=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(h(y,z),y,z)\cdot\Big(1,-h_y(y,z),-h_z(y,z)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+}\left[X(h(y,z),y,z)-Yh_y(y,z)-Zh_z(y,z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ S_+表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的$x>0$侧为正，则$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$取正号，S_+就表示在曲面的 x> 0侧做积分，S_-表示在曲面$x<0$侧做积分 $\iint_{S_-}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ $=-\iint_{S_+}\left[X(h(y,z),y,z)-Yh_y(y,z)-Zh_z(y,z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 若只写S则表示在曲面的正侧做积分.

已知曲面的参数方程：

$$L:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),(u,v)\in D,\\ z=z(u,v),\end{cases}$$

- 记$A=\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)},B=\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)},C=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}\right)^2+1}|C|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\iint_S\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_1}\rho\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\rho\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- 记$\boldsymbol{r}_u=(x_u,y_u,z_u),\boldsymbol{r}_v=(x_v,y_v,z_v)$
$E=|\boldsymbol{r}_u|^2,F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,G=|\boldsymbol{r}_v|^2$,

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2$$

$$\iint_S\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D\rho\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

已知曲面的参数方程：

$$L:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),(u,v)\in D,\\ z=z(u,v),\end{cases}$$

记$A=\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)},B=\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)},C=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$,

$$\boldsymbol{n}=\text{"}\pm\text{"}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\text{"}\pm\text{"}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\text{"}\pm\text{"}(A,B,C)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

若规定曲面 z> 0侧为正，也就是$z>0$侧的法向量为正，选取正负号使得"±"C>0；若规定曲面$z<0$侧为正，也就是$z<0$侧的法向量为正，则$z>0$侧的法向量为负，故应选取正负号使得"±"C<0.

x,y方向的情况类似.

当规定内侧和外侧时，例如对于一个球面，选取球坐标极角和圆周角$(\varphi,\theta)=(u,v)$作为参数，则$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$表示指向外侧的单位法向量，若规定外侧为正，则取正号$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$；若规定内侧为正，则取负号$\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C)$.

$$\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+}\boldsymbol{v}\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot(A,B,C)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\text{"}\pm\text{"}\iint_{S_+}\big[X\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)A+YB+ZC\big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

S_+表示在曲面的正侧做积分.　例如对于上述球面，选择球面的外侧为正，则d$\boldsymbol{S}$取正号，S_+就表示在球面的外侧做积分，S_-表示在球面内侧做积分

$$\iint_{S_-}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_{S_+}\boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=-\iint_{S_+}\big[X\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)A+YB+ZC\big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

若只写S则表示在曲面的正侧做积分.