多元函数积分学

- 重积分的概念与性质
- 二重积分的计算
- 三重积分的计算与应用
  - 直角坐标系下
    - $\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$
      - $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$
    - $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z, a\leqslant z\leqslant b\}$
      - $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}z\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - 三重积分的变量替换
    - 变量替换 $\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$ 的Jacobi行列式
      - $\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{vmatrix}$
    - 三重积分的变量替换公式
      - $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$
  - 三重积分在柱坐标系下的计算
    - 柱坐标系
      - $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$
    - $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
  - 三重积分在球坐标系下的计算
    - 球坐标系
      - $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$
    - $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$
  - 三重积分的应用
    - 曲面面积
    - 重积分的物理应用
      - 质心问题
        - 质心坐标公式
          - $\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$
          - $\bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$
        - 形心坐标公式
          - $\bar{x}=\frac{\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$
          - $\bar{y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$
      - 引力问题
        - 平面引力分量公式
          - $F_x=\iint_D G\frac{\rho(x,y)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\cdot\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
          - $F_y=\iint_D G\frac{\rho(x,y)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\cdot\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
        - 空间引力分量公式
          - $F_x=\iiint_D G\frac{\rho(x,y,z)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\cdot\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
      - 转动惯量问题
        - 平面薄板的转动惯量
          - $J_x=\iint_D\rho(x,y)y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
          - $J_y=\iint_D\rho(x,y)x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
          - $J_z=\iint_D\rho(x,y)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
        - 空间物体的转动惯量
          - $J_x=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
          - $J_y=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)(z^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
          - $J_z=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- 第一型曲线积分
- 第一型曲面积分