向量场的微积分

- 向量值函数在曲线上的积分、格林公式
- 向量值函数在曲面上的积分
  - 有向曲面
    - 双侧曲面　莫比乌斯带
    - 有向曲面　选定了正向法向量的双侧曲面
    - 正向单位法向量的求法
      - 曲面方程是显示方程
        - $\Sigma: z=f(x,y)\in C^1$
        - $\Rightarrow \boldsymbol{n}=''\pm''\frac{1}{sqrt1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1)$
        - 上正下负
        - $\Sigma: x=g(y,z)\in C^1$，前正后负
        - $\Sigma: y=g(z,x)\in C^1$，右正左负
      - 曲面方程是参数方程
        - $\Sigma: \begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^1, \\ z=z(u,v), \end{cases}$
        - $A=\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}, B=\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}, C=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$
        - $\Rightarrow \boldsymbol{n}=''\pm''\frac{1}{A^2+B^2+C^2}(A,B,C)$
          - 注意正负号的选取
  - 第二型曲面积分的概念
    - 物理背景　定常流$\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)$穿过某双侧曲面的流体体积
      - 分割、取点、求和、取极限
    - 第二型曲面积分的定义
      - 分割、取点、求和、取极限
      - $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^m[\boldsymbol{F}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\boldsymbol{n}(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)]\Delta S_k$
      - $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$为有向面积元素
      - 第一型曲面积分和第二型曲面积分的关系
        - $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_\Sigma[\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}(x,y,z)]\mathrm{d}S$
      - 记$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,

        $\Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S=(\cos\alpha\mathrm{d}S,\cos\beta\mathrm{d}S,\cos\gamma\mathrm{d}S)$

        $=(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$
      - 分量形式 $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_\Sigma X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
    - 第二型曲面积分的性质
      - 有向性
        - $\iint_{\Sigma^-}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
      - 区域可加性 $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\Sigma_2}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
    - 第二型曲面积分的计算
      - 曲面方程是显式方程
        - $\Sigma: z=f(x,y),(x,y)\in D,\boldsymbol{F}(x,y,z)\in C(\Sigma)$

          $\Rightarrow \iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

          $=\iint_\Sigma X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

          $=''\pm''\iint_D[-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}X(x,y,f(x,y))-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}Y(x,y,f(x,y))+Z(x,y,f(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
        - $\Sigma: y=g(z,x)$ 右正左负
        - $\Sigma: x=h(y,z)$ 前正后负
        - 平行于坐标轴的直线与Σ最多只有一个交点时
          - $\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_\Sigma X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

            $=''\pm''\iint_{D_{yz}}X(h(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+''\pm''\iint_{D_{zx}}Y(x,g(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+''\pm''\iint_{D_{xy}}Z(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
      - 曲面方程是参数方程
        - $\Sigma: \begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), (u,v)\in D, F(x,y,z)\in C(\Sigma), \\ z=z(u,v), \end{cases}$

          $\Rightarrow \iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

          $=\iint_\Sigma X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

          $=''\pm''\iint_D[X(x(u,v),y(u,v),z(u,v))A+YB+ZC]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

          其中$A=\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}, B=\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}, C=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$
- 高斯公式与斯托克斯公式
- 保守场
- 向量场的微分运算