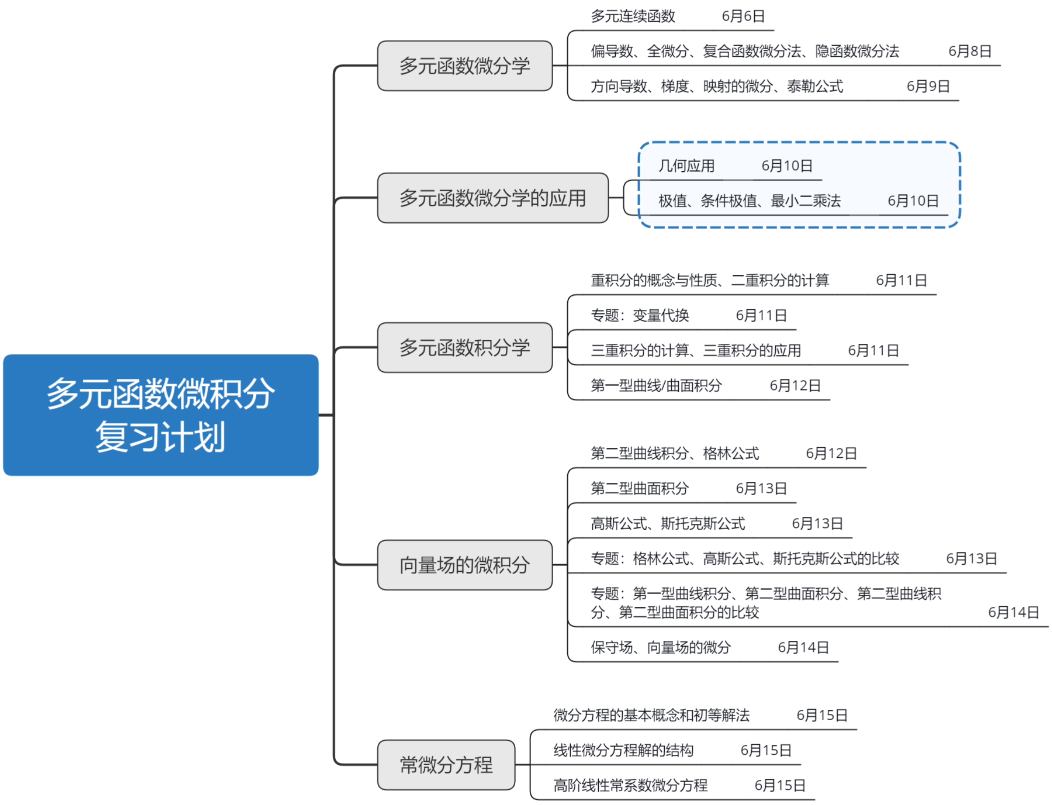
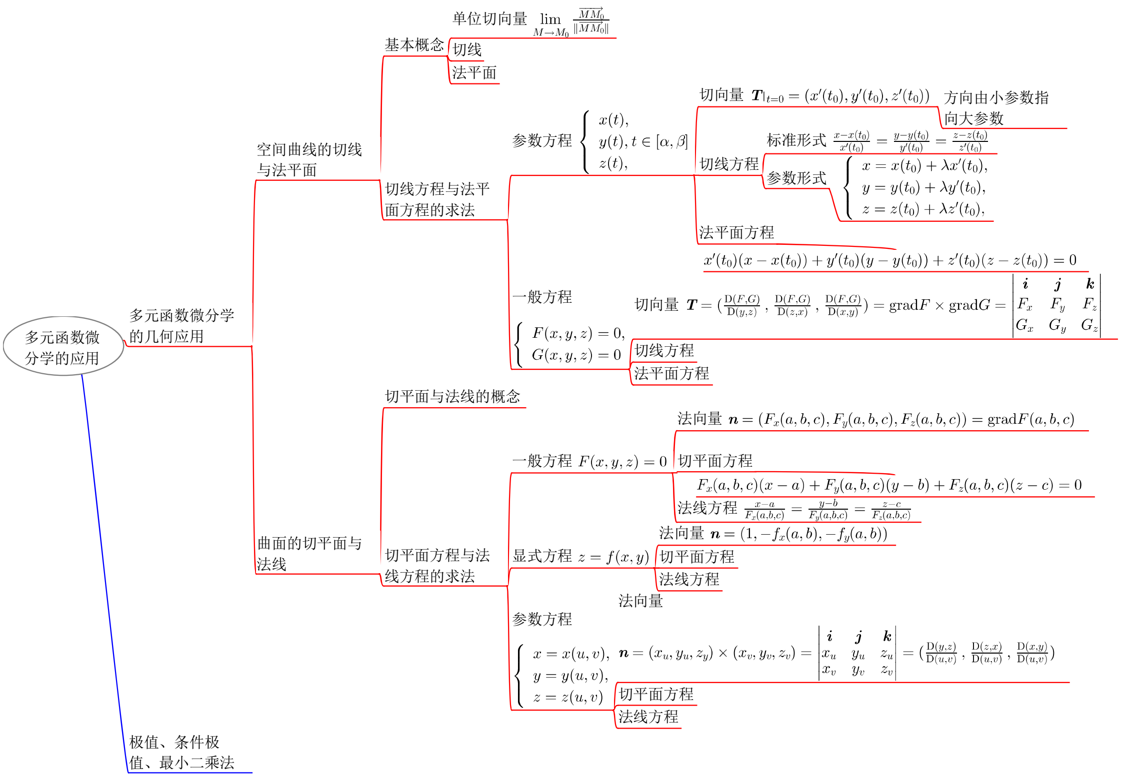
4 几何应用

4.1 复习计划



4.2 知识结构


多元函数微分学的应用
多元函数微分学的几何应用
空间曲线的切线与法平面
基本概念
单位切向量 $\lim\limits_{M\to M_0}\frac{\overrightarrow{MM_0}}{\|\overrightarrow{MM_0}\|}$
切线
法平面
切线方程与法平面方程的求法
参数方程 $\begin{cases} x(t), \\ y(t), t\in[\alpha,\beta] \\ z(t), \end{cases}$
切向量 $\boldsymbol{T}|_{t=0}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$
方向由小参数指向大参数
切线方程
标准形式 $\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$
参数形式 $\begin{cases} x=x(t_0)+\lambda x'(t_0), \\ y=y(t_0)+\lambda y'(t_0), \\ z=z(t_0)+\lambda z'(t_0), \end{cases}$
法平面方程
$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$
一般方程
$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
切向量 $\boldsymbol{T}=(\frac{D(F,G)}{D(y,z)},\frac{D(F,G)}{D(z,x)},\frac{D(F,G)}{D(x,y)})=\mathrm{grad}F\times\mathrm{grad}G=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$
切线方程
法平面方程
曲面的切平面与法线
切平面与法线的概念
切平面方程与法线方程的求法
一般方程 $F(x,y,z)=0$
法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x(a,b,c),F_y(a,b,c),F_z(a,b,c))=\mathrm{grad}F(a,b,c)$
切平面方程
$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$
法线方程 $\frac{x-a}{F_x(a,b,c)}=\frac{y-b}{F_y(a,b,c)}=\frac{z-c}{F_z(a,b,c)}$
显式方程 $z=f(x,y)$
法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-f_x(a,b),-f_y(a,b))$
切平面方程
法线方程
参数方程
$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}$
法向量
$\boldsymbol{n}=(x_u,y_u,z_y)\times(x_v,y_v,z_v)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)})$
切平面方程
法线方程
极值、条件极值、最小二乘法

4.3 重要知识

1. 切平面的图示.

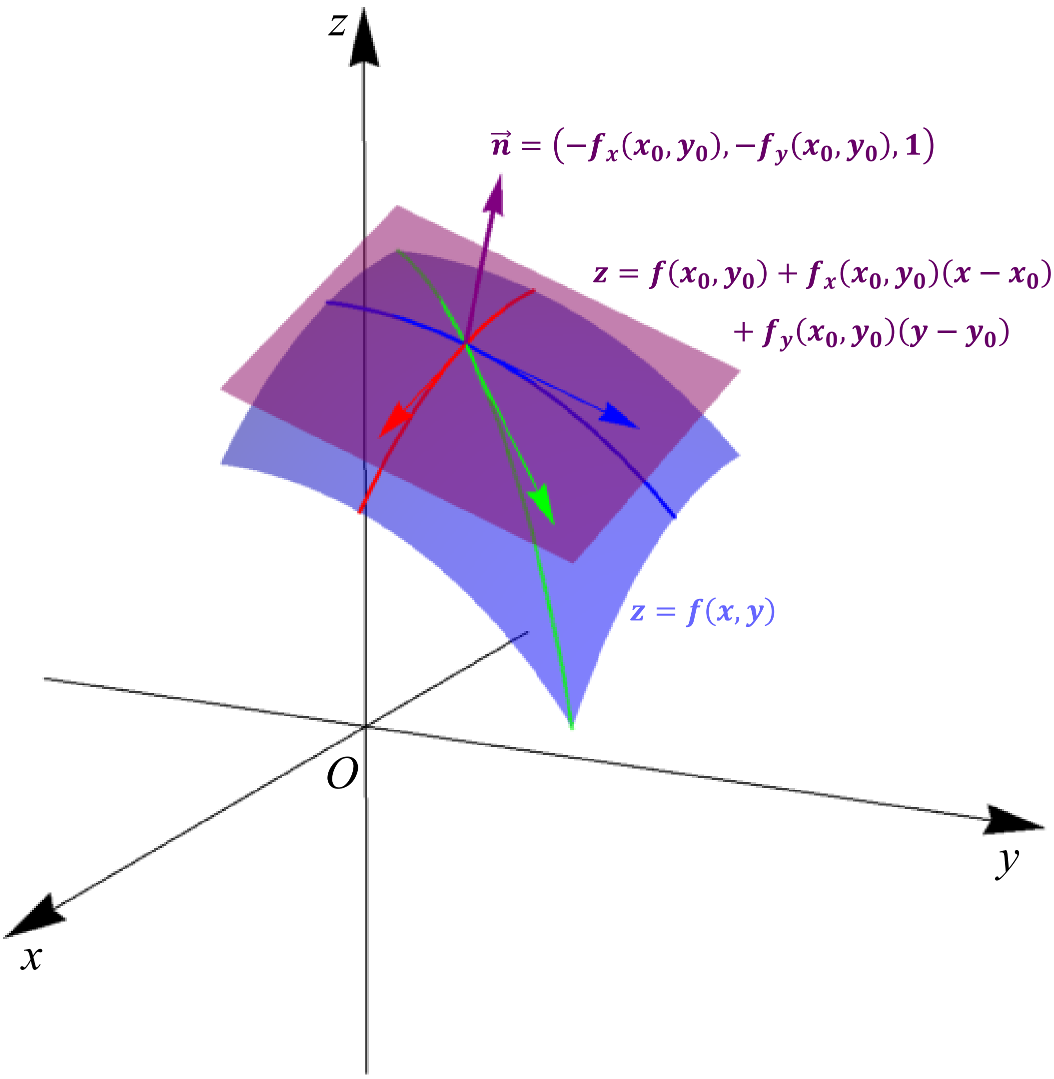


图 1: 切平面的图示

4.4 习题分类与解题思路

1. 已知曲线的参数方程，求切向量或切线方程. 可直接代入公式计算.

   【如习题11.1中的2., 3., 7., 8.】

2. 求曲面的切平面和法线方程，可分成以下情况，代入公式求解.

   (a) 已知一般(隐式)方程或显式方程.

   【如习题11.2中的1.(1)/(2)/(3)/(4), 4.】

   (b) 已知参数方程.

   【如习题11.2中的1.(5), 2.(3).】

3. 求曲面的满足一定要求的切平面方程.

   (a) 求曲面上与已知平面平行的切平面. 法向量已知，关键是求切点. 注意椭球面有两个切点.

   【如习题11.2中的2.(1).】

   (b) 求曲面上与已知直线垂直的切平面. 需求出直线的方向向量，等于切平面的法向量，进一步可求切点.

   【如习题11.2中的2.(2).】

4. 证明曲面的全体切平面满足特殊关系. 可先利用公式求出曲面的全体切平面方程，结合要证明的结论对方程进行化简.

   【如习题11.2中的3., 5., 6.】

5. 其他类型的题目. 大家可以做一下积累.

   【习题11.2中的7., 8.】

4.5 习题11.1解答

2. 求下列曲线在指定点的单位切向量：

   (1)$\boldsymbol{r}(t)=(\mathrm{e}^{2t},\mathrm{e}^{-2t},t\mathrm{e}^{2t}),t=0$；

   (2)$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+2\sin t\boldsymbol{j}+3\cos t\boldsymbol{k},t=\frac{\pi}{6}$.

   解：(1)单位切向量$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{(2\mathrm{e}^{2t},-2\mathrm{e}^{-2t},(1+2t)\mathrm{e}^{2t})}{\|(2\mathrm{e}^{2t},-2\mathrm{e}^{-2t},(1+2t)\mathrm{e}^{2t})\|}\Big|_{t=0}=\frac{(2,-2,1)}{\sqrt{4+4+1}}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

   (2)单位切向量$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}=\frac{\boldsymbol{i}+2\cos t\boldsymbol{j}-3\sin t\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{i}+2\cos t\boldsymbol{j}-3\sin t\boldsymbol{k}\|}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}-\frac{3}{2}\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+3+\frac{9}{4}}}=\frac{2}{5}\boldsymbol{i}+\frac{2\sqrt{3}}{5}\boldsymbol{j}-\frac{3}{5}\boldsymbol{k}$.

3. 求下列曲线在指定点的切线方程：

   (1)$\boldsymbol{r}(t)=(1+2t,1+t-t^2,1-t+t^2-t^3),M(1,1,1)$；

   (2)$\boldsymbol{r}(t)=\sin(\pi t)\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\boldsymbol{j}+\cos(\pi t)\boldsymbol{k},M(0,1,-1)$.

   解：(1)在$M(1,1,1)$点处$t=0$，切向量$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}'(0)=(2,1-2t,-1+2t-3t^2)_{t=0}=(2,1,-1)$，则切线方程为

$$\frac{x-1}{2}=y-1=-(z-1).$$

(2)在$M(0,1,-1)$点处$t=1$，切向量$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}'(1)=\pi\cos(\pi t)\boldsymbol{i}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\boldsymbol{j}-\pi\sin(\pi t)\boldsymbol{k}\big|_{t=1}=-\pi\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$，则切线方程为$\begin{cases}\frac{x}{-\pi}=2(y-1),\\ z=-1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x+2\pi y=2\pi,\\ z=-1.\end{cases}$

7. 求等速圆周运动$\boldsymbol{r}=R\cos(\omega t)\boldsymbol{i}+R\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$在$t$时刻的速度与加速度.

   解：t时刻的速度$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=-R\omega\sin(\omega t)\boldsymbol{i}+R\omega\cos(\omega t)\boldsymbol{j}$,

   t时刻的加速度$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{v}'(t)=-R\omega^2\cos(\omega t)\boldsymbol{i}-R\omega^2\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$.

8. 已知螺旋线的向量方程为$\boldsymbol{r}=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+b\theta\boldsymbol{k}(a>0,b>0)$，求在$\theta_0$处的切线方程.

   解：在θ_0处的切向量$\boldsymbol{r}'(\theta_0)=-a\sin\theta_0\boldsymbol{i}+a\cos\theta_0\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$，切线方程

$$\frac{x-a\cos\theta_0}{-a\sin\theta_0}=\frac{y-a\sin\theta_0}{a\cos\theta_0}=\frac{z-b\theta_0}{b}.$$

4.6 习题11.2解答

1. 求下列曲面在指定点的法线方程与切平面的方程：

   (1)$x^2+y^2+z^2=14$，在点$(1,2,3)$；

   (2)$z=\frac{1}{2}x^2-y^2$，在点$(2,-1,1)$；

   (3)$(2a^2-z^2)x^2-a^2y^2=0$，在点(a,a,a)；

   (4)$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，在点$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$；

   (5)$\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v,\\ z=av,\end{cases}$ 在$(u,v)=(u_0,v_0)$处.

   解：(1)法向量$\boldsymbol{n}=(2x,2y,2z)\big|_{(1,2,3)}=2(1,2,3)$,

   法线方程$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$,

   切平面方程$(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$，即$x+2y+3z=14$.

   (2)法向量$\boldsymbol{n}=(x,-2y,-1)\big|_{(2,-1,1)}=(2,2,-1)$,

   法线方程$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=-(z-1)$,

   切平面方程$2(x-2)+2(y+1)-(z-1)=0$，即$2x+2y-z=1$.

   (3)法向量$\boldsymbol{n}=(2(2a^2-z^2)x,-2a^2y,-2x^2z)\big|_{(a,a,a)}=2a^3(1,-1,-1)$,

   法线方程$x-a=-(y-a)=-(z-a)$,

   切平面方程$(x-a)-(y-a)-(z-a)=0$，即$x-y-z=-a$.

(4)法向量$\boldsymbol{n}=(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})\big|_{(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$,

法线方程$a(x-\frac{a}{\sqrt{3}})=b(y-\frac{b}{\sqrt{3}})=c(z-\frac{c}{\sqrt{3}})$,

切平面方程$\frac{1}{a}(x-\frac{a}{\sqrt{3}})+\frac{1}{b}(y-\frac{b}{\sqrt{3}})+\frac{1}{c}(z-\frac{c}{\sqrt{3}})=0$，即$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

(5)法向量$\boldsymbol{n}=(\cos v,\sin v,0)\times(-u\sin v,u\cos v,a)\big|_{(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\cos v_0&\sin v_0&0\\-u_0\sin v_0&u_0\cos v_0&a\end{vmatrix}$

$=(\begin{vmatrix}\sin v_0&0\\u_0\cos v_0&a\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&a\\a&u_0\cos v_0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\cos v_0&\sin v_0\\-u_0\sin v_0&u_0\cos v_0\end{vmatrix})=(a\sin v_0,-a\cos v_0,u_0)$,

法线方程$\frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\frac{z-av_0}{u_0}$,

切平面方程$a\sin v_0(x-u_0\cos v_0)-a\cos v_0(y-u_0\sin v_0)+u_0(z-av_0)=0$，

即$ax\sin v_0-ay\cos v_0+zu_0=au_0v_0$.

2. 按要求求下列曲面的切平面方程：

(1)曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$的与平面$x+4y+6z=0$平行的切平面；

(2)曲面$z=x^2+y^2$的与直线$\begin{cases}x+2z=1,\\y+2z=2\end{cases}$垂直的切平面；

(3)双曲抛物面$\boldsymbol{r}=(u+v,u-v,uv)$在$u=1,v=-1$处的切平面.

解：(1)曲面的法向量$\boldsymbol{n}=(2x,4y,6z)$，平面的法向量$\boldsymbol{n}_1=(1,4,6)$，

则由$\begin{cases}(2x,4y,6z)=a(1,4,6),\\x^2+2y^2+3z^2=21\end{cases}$得曲面上与该平面相切的切平面的切点为$\pm(1,2,2)$，

切平面方程$x-1+4(y-2)+6(z-2)=0$或$x+1+4(y+2)+6(z+2)=0$，即$x+4y+6z=\pm21$.

(2)直线的切向量$\boldsymbol{t}=(1,0,2)\times(0,1,2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&2\\0&1&2\end{vmatrix}=(\begin{vmatrix}0&2\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix})=(-2,-2,1)$，

曲面的法向量$\boldsymbol{n}=(2x,2y,-1)$，曲面上与直线垂直的切平面的法向量$\boldsymbol{n}_0=a\boldsymbol{t}$，

由$\begin{cases}(2x,2y,-1)=a(-2,-2,1),\\z=x^2+y^2\end{cases}$可得切点为$(1,1,2)$,

切平面方程$-2(x-1)-2(y-1)+z-2=0$，即$2x+2y-z=2$.

(3)法向量$\boldsymbol{n}=(1,1,v)\times(1,-1,u)\big|_{(1,-1)}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix})$

$=(0,-2,-2)$，切点为$(0,2,-1)$，

切平面的方程$-2(y-2)-2(z+1)=0$，即$y+z=1$.

3. 求证：曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a},a>0$在任意点处的切平面在各坐标轴上的截距之和为$a$.

证明：曲面在任意点(x_0,y_0,z_0)处的法向量$\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}})$,
切平面方程$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$，即$\frac{x}{ax_0}+\frac{y}{ay_0}+\frac{z}{az_0}=1$,
切平面在x,y,z轴上的截距之和

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

4. 证明二次曲面$ax^2+by^2+cz^2=1$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1.$$

证明：曲面在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量$\boldsymbol{n}=2(ax_0,by_0,cz_0)$,

切平面方程

$$\begin{aligned}&ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)\\=&ax_0x-ax_0^2+by_0y-by_0^2+cz_0z-cz_0^2\\=&ax_0x-by_0y-cz_0z-1=0,\end{aligned}$$

即

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=1.$$

5. 设函数f可微，试证曲面$z=yf(\frac{x}{y})$的所有切平面相交于一个公共点.

证明：曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的法向量$\boldsymbol{n}=(yf'(\frac{x}{y})\frac{1}{y},f(\frac{x}{y})+yf'(\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2}),-1)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$
$=(f'(\frac{x_0}{y_0}),f(\frac{x_0}{y_0})-\frac{x_0}{y_0}f'(\frac{x_0}{y_0}),-1)$,

切平面的方程

$$\begin{aligned}&f'(\frac{x_0}{y_0})(x-x_0)+[f(\frac{x_0}{y_0})-\frac{x_0}{y_0}f'(\frac{x_0}{y_0})](y-y_0)-(z-z_0)\\=&f'(\frac{x_0}{y_0})x+[f(\frac{x_0}{y_0})-\frac{x_0}{y_0}f'(\frac{x_0}{y_0})]y-z-x_0f'(\frac{x_0}{y_0})-y_0f(\frac{x_0}{y_0})+x_0f'(\frac{x_0}{y_0})+z_0\\=&f'(\frac{x_0}{y_0})x+[f(\frac{x_0}{y_0})-\frac{x_0}{y_0}f'(\frac{x_0}{y_0})]y-z\\=&0,\end{aligned}$$

$\because$无论切点(x_0,y_0,z_0)取在何处，点$(x,y,z)=(0,0,0)$始终满足以上方程，

$\therefore$曲面$z=yf(\frac{x}{y})$的所有切平面相交于一个公共点$(0,0,0)$.

6. 已知函数f可微，证明曲面$f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$上任意一点处的切平面通过一定点，并求出此点的位置.

证明：曲面上任一点(x_0, y_0, z_0)处的法向量

$$\boldsymbol{n} = (\frac{1}{z_0 - c}f_1', \frac{1}{z_0 - c}f_2', -\frac{x_0 - a}{(z_0 - c)^2}f_1' - \frac{y_0 - b}{(z_0 - c)^2}f_2'),$$

切平面方程

$$\begin{aligned}
&\frac{x - x_0}{z_0 - c}f_1' + \frac{y - y_0}{z_0 - c}f_2' + [-\frac{x_0 - a}{(z_0 - c)^2}f_1' - \frac{y_0 - b}{(z_0 - c)^2}f_2'](z - z_0) \\
=&[\frac{x - x_0}{z_0 - c} - \frac{x_0 - a}{(z_0 - c)^2}(z - z_0)]f_1' + [\frac{y - y_0}{z_0 - c} - \frac{y_0 - b}{(z_0 - c)^2}(z - z_0)]f_2' \\
=&0,
\end{aligned}$$

其中偏导数均在$(\frac{x_0 - a}{z_0 - c}, \frac{y_0 - b}{z_0 - c})$处取值，

$\because$无论切点(x_0, y_0, z_0)取在何处，$(x, y, z) = (a, b, c)$始终满足以上方程，

$\therefore$曲面$f(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}) = 0$上任意一点处的切平面通过定点$(a, b, c)$.

7. 设曲面S_1和S_2的方程分别为$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0$，其中$F_1$和$F_2$是可微函数，试证$S_1$与$S_2$垂直的充分必要条件是对交线上的任意一点$(x, y, z)$，均有

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0.$$

证明：必要性：$\because S_1$与S_2垂直，

$\therefore$交线上的任意一点(x, y, z)处两曲面的法向量互相垂直，即

$$(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}) \cdot (\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0;$$

充分性：$\because$交线上的任意一点(x, y, z)处

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z} = (\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}) \cdot (\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z}) = 0,$$

$\therefore$交线上的任意一点(x, y, z)处曲面S_1与S_2的法向量互相垂直，

$\therefore S_1$与S_2垂直.

8. 已知函数F可微，若T为曲面S : $F(x, y, z) = 0$在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$处的切平面，l为T上任意一条过M_0的直线，求证：在S上存在一条曲线，该曲线在M_0处的切线恰好为l.

证明：方法1：设直线l的方程为$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$，因$l$在$T$上，其方向向量$(a, b, c)$应满足

$$(a, b, c) \cdot \mathrm{grad}F(x_0, y_0, z_0) = aF_x' + bF_y' + cF_z' = 0,$$

过直线l且与切平面T垂直的平面A的法向量

$$\boldsymbol{n}=(a,b,c)\times \mathrm{grad}F(x_0,y_0,z_0)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a&b&c\\F'_x&F'_y&F'_z\end{vmatrix}=(\begin{vmatrix}b&c\\F'_y&F'_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c&a\\F'_z&F'_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a&b\\F'_x&F'_y\end{vmatrix})$$
$$=(bF'_z-cF'_y,cF'_x-aF'_z,aF'_y-bF'_x),$$

曲面S与平面A的交线在点M_0处的切向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}=&\mathrm{grad}F(x_0,y_0,z_0)\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\bF'_z-cF'_y&cF'_x-aF'_z&aF'_y-bF'_x\end{vmatrix}\\
=&(\begin{vmatrix}F'_y&F'_z\\cF'_x-aF'_z&aF'_y-bF'_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_z&F'_x\\aF'_y-bF'_x&bF'_z-cF'_y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_x&F'_y\\bF'_z-cF'_y&cF'_x-aF'_z\end{vmatrix})\\
=&[a(F'_y)^2-bF'_xF'_y-cF'_xF'_z+a(F'_z)^2]\boldsymbol{i}-[aF'_xF'_y-b(F'_x)^2-b(F'_z)^2+cF'_yF'_z]\boldsymbol{j}\\
&+[c(F'_x)^2-aF'_xF'_z-bF'_yF'_z+c(F'_y)^2]\boldsymbol{k}\\
=&[a(F'_y)^2-F'_x(bF'_y+cF'_z)+a(F'_z)^2]\boldsymbol{i}-[F'_y(aF'_x+cF'_z)-b(F'_x)^2-b(F'_z)^2]\boldsymbol{j}\\
&+[c(F'_x)^2-F'_z(aF'_x+bF'_y)+c(F'_y)^2]\boldsymbol{k}\\
=&[a(F'_y)^2+a(F'_x)^2+a(F'_z)^2]\boldsymbol{i}-[-(F'_y)^2-b(F'_x)^2-b(F'_z)^2]\boldsymbol{j}+[c(F'_x)^2+c(F'_z)^2+c(F'_y)^2]\boldsymbol{k}\\
=&[(F'_x)^2+(F'_z)^2+(F'_y)^2](a,b,c),\end{aligned}$$

$\therefore \boldsymbol{t}\parallel(a,b,c)$,

$\therefore$曲面S与平面A的交线在点M_0处的切线为l，即在S上存在一条曲线，该曲线在M_0处的切线恰好为l.

方法2：设直线l的方程为$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$，因$l$在$T$上，其方向向量$(a,b,c)$应满足

$$(a,b,c)\perp \mathrm{grad}F(x_0,y_0,z_0),$$

过直线l且与切平面T垂直的平面A的法向量

$$\boldsymbol{n}=(a,b,c)\times\mathrm{grad}F(x_0,y_0,z_0),$$

曲面S与平面A的交线在点M_0处的切向量

$$\boldsymbol{t}=[\mathrm{grad}F(x_0,y_0,z_0)\times\boldsymbol{n}]\parallel(a,b,c),$$

$\therefore$曲面S与平面A的交线在点M_0处的切线为l，即在S上存在一条曲线，该曲线在M_0处的切线恰好为l.