多元函数积分学

- 重积分的概念与性质
  - 重积分的概念
    - 几何与物理意义
      - 曲顶柱体的体积
      - 非均匀薄板的质量
      - 划分、取点、求和、取极限
    - 重积分的定义
      - 二重积分的定义
        - 平面区域的划分、划分的子域、子域直径、划分直径
        - 定义 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta\sigma_k$
        - 几何意义
          - $\iint_D \mathrm{d}\sigma$ 为区域D的面积
          - $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为曲顶柱体的体积
      - 三重积分的定义
    - 可积的必要条件 $f(x,y)$ 在有界闭域 D上可积$\Rightarrow$ $f(x,y)$在D上有界，即$\exists M>0, s.t. |f(x,y)|\leqslant M, (x,y)\in D$
    - 可积的充分条件 $f(x,y)$ 在有界闭域D上连续$f(x,y)$在D上可积
  - 重积分的性质
    - 线性性质 $\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$
    - 区域可加性 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
    - 区域对称性、被积函数的奇偶性
      - 积分域D关于x轴对称且$f(x,-y)=-f(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$
      - 积分域D关于y轴对称且$f(-x,y)=-f(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$
      - 积分域Ω关于xOy平面对称且$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\Rightarrow\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = 0$
      - 积分域D关于x轴对称且$f(x,-y)=f(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
      - 积分域D关于y轴对称且$f(-x,y)=f(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
    - 比较定理(保序性) $f(x,y)\leqslant g(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$
    - 估值定理 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M\Rightarrow mA(D)\leqslant\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant MA(D)$
    - 绝对值函数的可积性 $f(x,y)$在有界闭域D上可积,则函数$|f(x,y)|$在D上可积,且$|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma|\leqslant\iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$
    - 积分中值定理 $f(x,y)\in C(D)\Rightarrow\exists(\xi,\eta)\in D, s.t. \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A(D)$
- 二重积分的计算
  - 二重积分在直角坐标系下的计算
    - 长方形区域 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$
    - 一般区域
      - $D=\{(x,y)|x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y), c\leqslant y\leqslant d\}\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$
      - $D=\{(x,y)|y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$
  - 二重积分的变量替换
    - 变量替换的Jacobi行列式
      - $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = |\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{|\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
    - 二重积分的变量替换公式 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x(u,v),y(u,v))|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
  - 二重积分的极坐标变换 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
    - $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$
    - $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$
- 三重积分的计算与应用
- 第一型曲线积分
- 第一型曲面积分