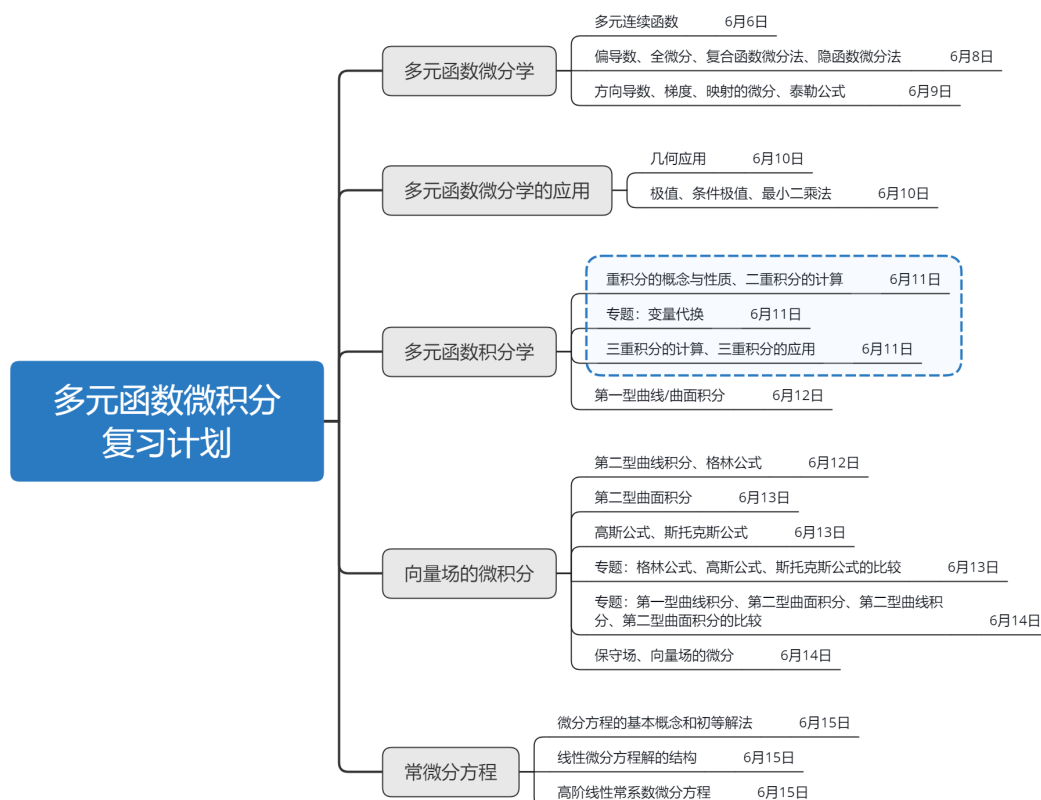
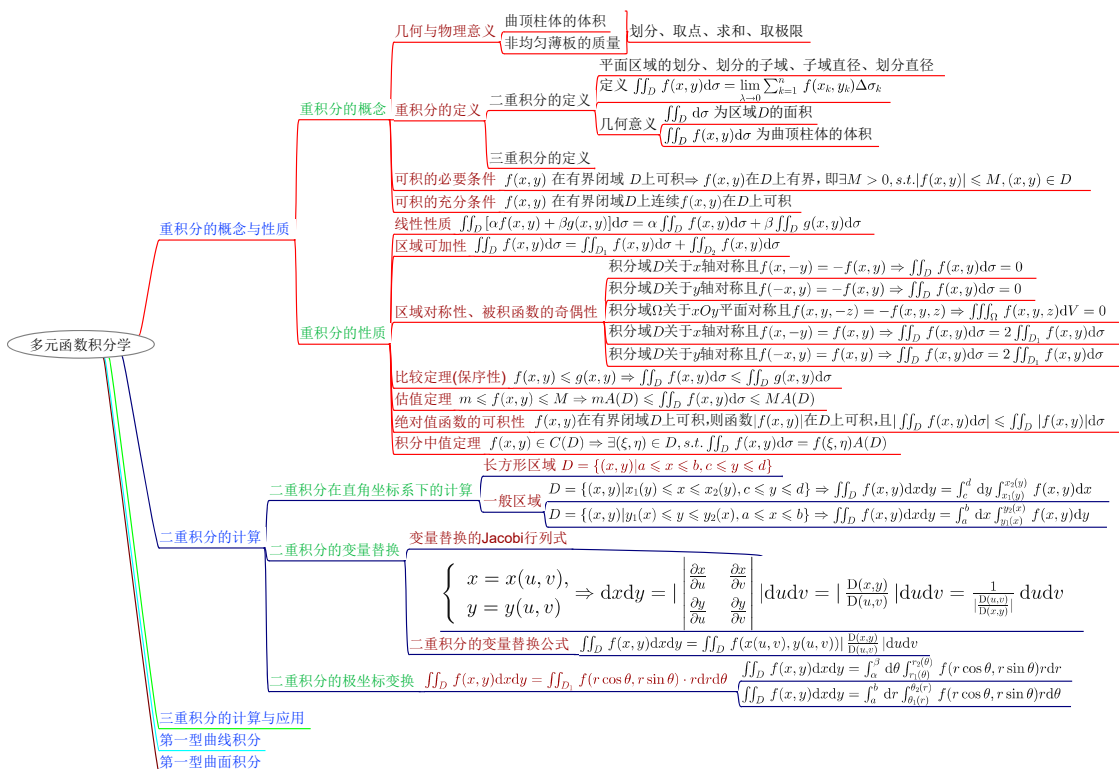


6 重积分的概念与性质、二重积分的计算

6.1 复习计划



6.2 知识结构



6.3 重要图示

1. 直角坐标系下的二重积分化为先 x 后 y 的二次积分

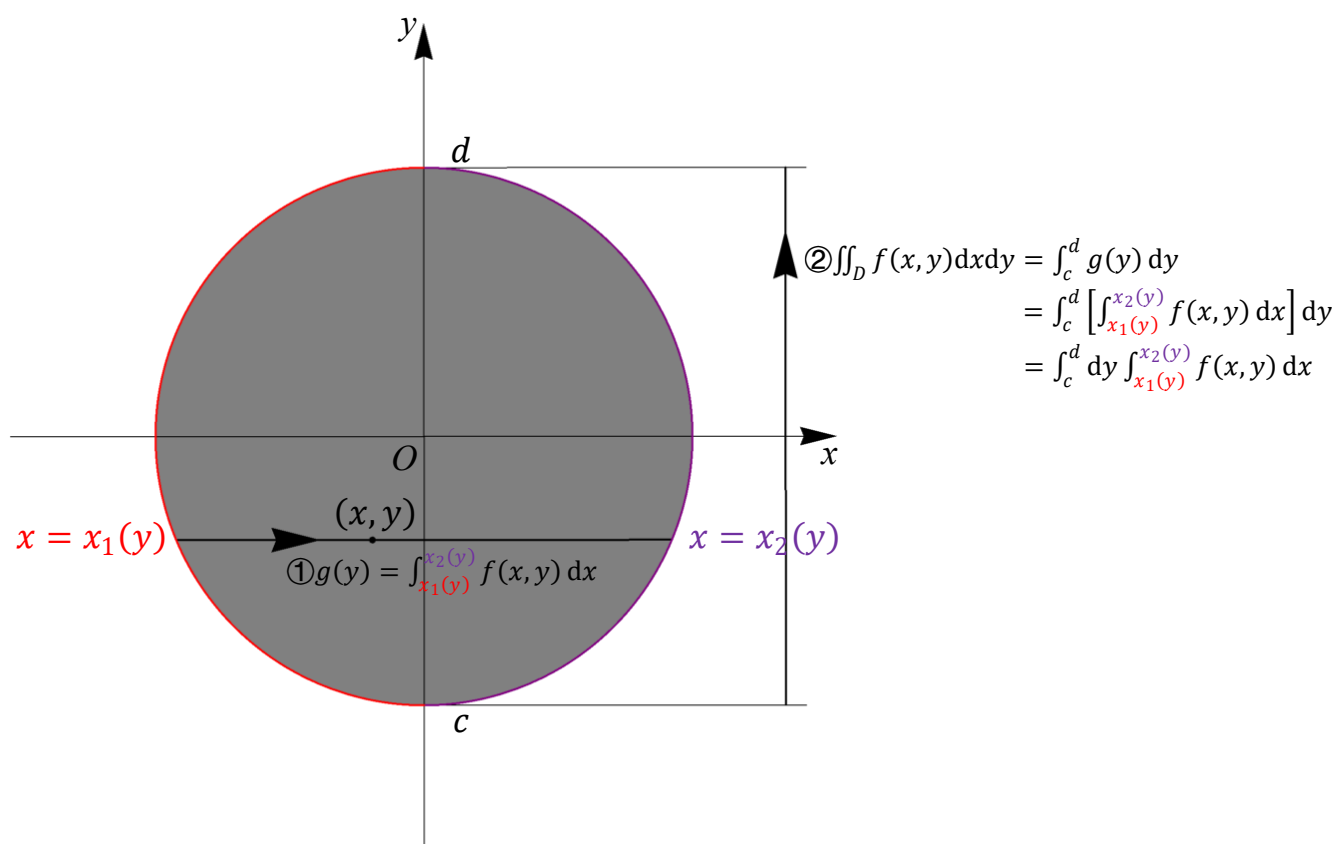


图 1: 直角坐标系下的二重积分化为先 x 后 y 的二次积分

2. 直角坐标系下的二重积分化为先 y 后 x 的二次积分

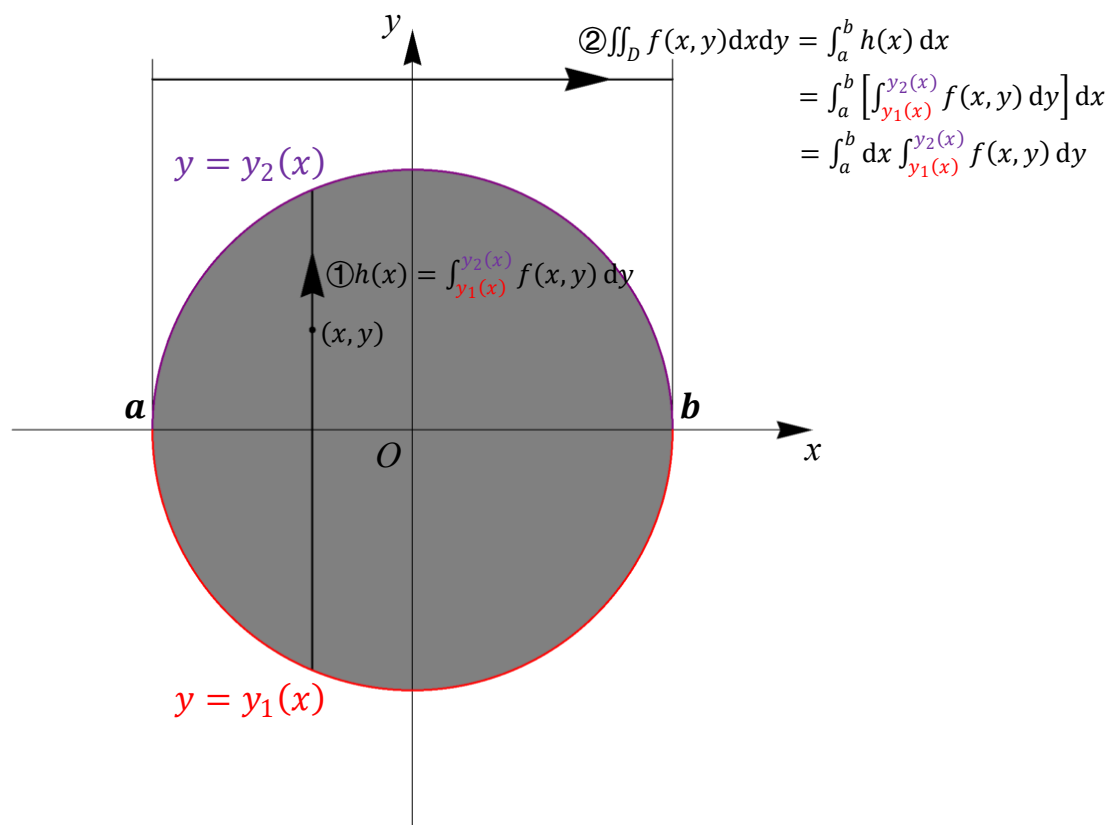


图 2: 直角坐标系下的二重积分化为先 y 后 x 的二次积分

3. 极坐标系下的二重积分化为先 r 后 θ 的二次积分

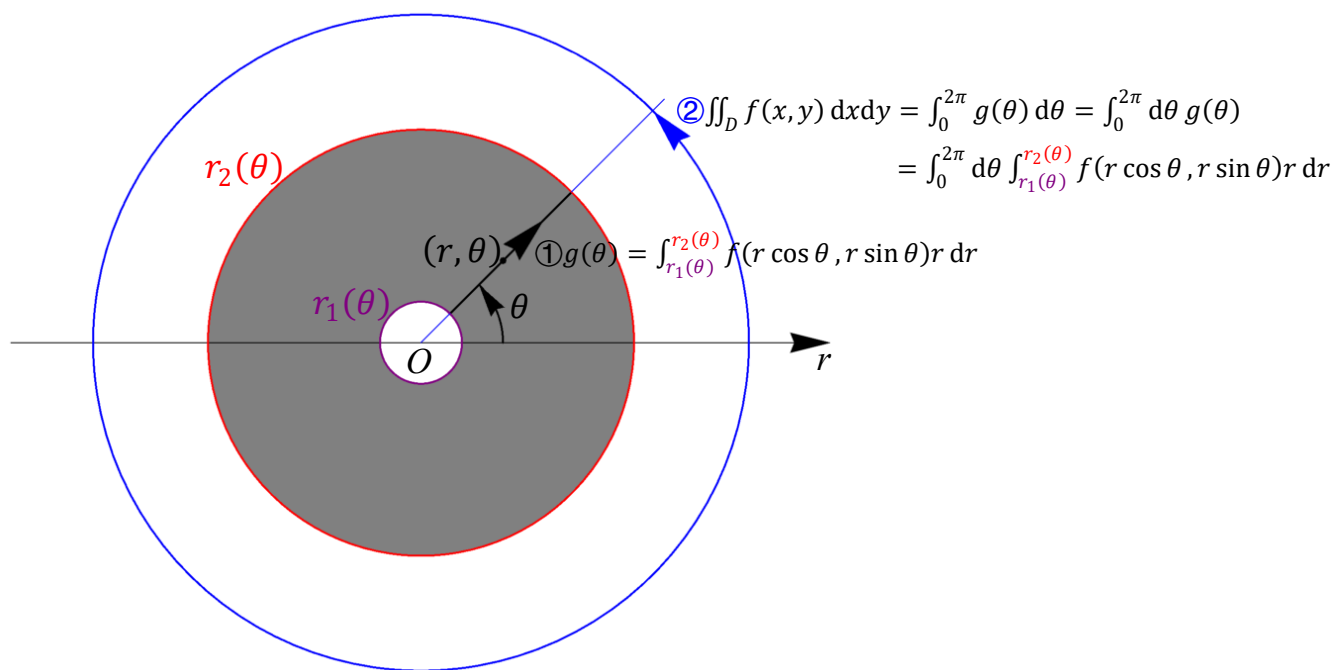
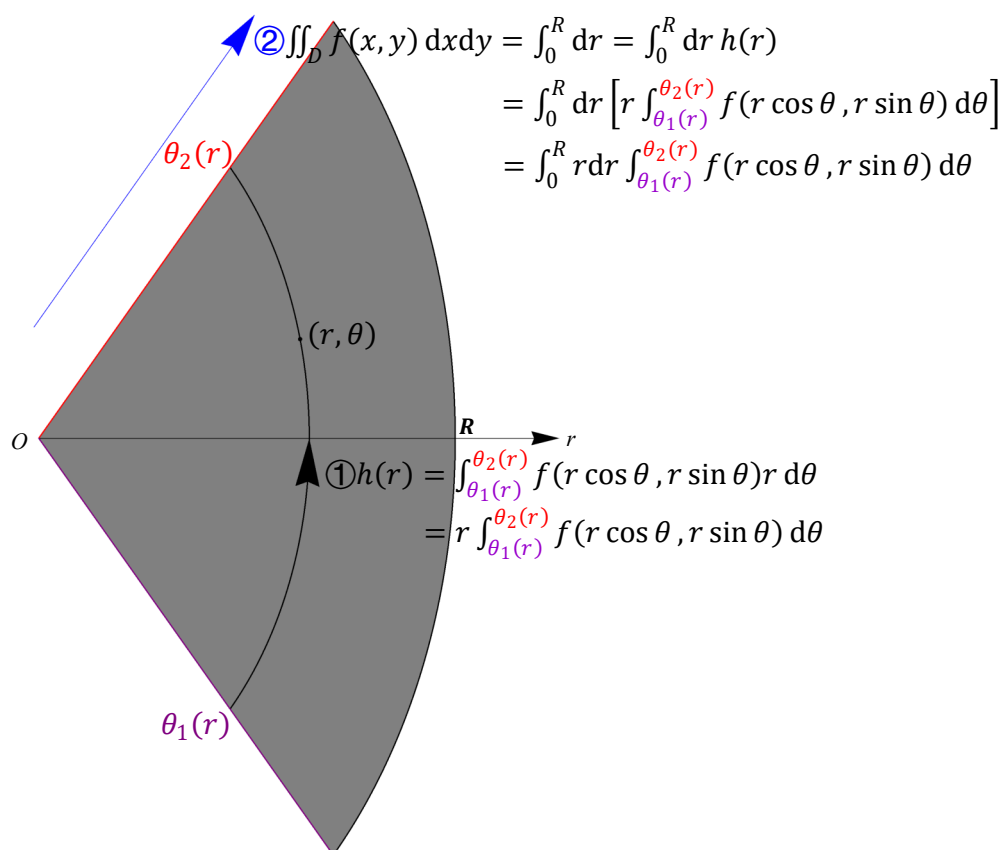


图 3: 极坐标系下的二重积分化为先 r 后 θ 的二次积分

4. 极坐标系下的二重积分化为先 θ 后 r 的二次积分

图 4: 极坐标系下的二重积分化为先 θ 后 r 的二次积分

6.4 习题分类与解题思路

1. 重积分的概念和性质

(a) 考查重积分的几何意义.

【如习题12.1中的1.(1)/(2).】

(b) 考查重积分的估值定理.

【如习题12.1中的2.(1)/(2).】

(c) 考查重积分的比较定理.

【如习题12.1中的3.(1)/(2).】

(d) 考查积分域的可加性.

【如习题12.1中的4.】

(e) 考查积分值中值定理.

【如习题12.1中的5.】

(f) 考查对称性和奇偶性.

【如习题12.1中的6.】

2. 二重积分的计算.

(a) 利用直角坐标系下的计算公式计算.

【如习题12.2中的1.(1)/(2)/(3)/(4)/(5).】

(b) 利用极坐标系下的计算公式计算.

【如习题12.2中的2.(1)/(2)/(3)/(4).】

(c) 交换积分顺序. 关键是写出不同积分顺序下积分域的集合表示.

【如习题12.2中的3., 4.】

(d) 利用对称性计算二重积分的值.

【如习题12.2中的5. 该题的技巧大家可以做一个积累.】

6.5 习题12.1解答

1. 利用重积分的几何意义求下列积分值:

$$(1) \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\};$$

$$(2) \iint_D 2d\sigma, D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, y - x \leq 1, y \geq 0\}.$$

解: (1) $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$ 的大小是曲面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 与平面 $z = 0$ 围成区域的体积, 即等于半径为 a 的半球的体积, 故

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

(2) 区域 D 的图形如图 5 所示,

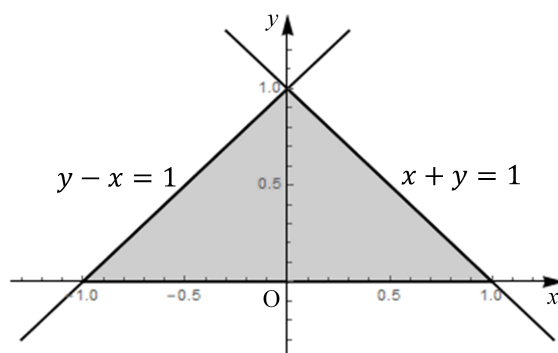


图 5: 习题12.1 1.(2)题图示

积分 $\iint_D 2d\sigma$ 表示以区域 D 为底, 高为 2 的棱柱体的体积, 故

$$\iint_D 2d\sigma = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2\right) = 2.$$

2. 利用重积分的性质估计下列积分值:

(1) $\iint_D (1+y)x d\sigma, D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$

(2) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, D = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}.$

解: (1) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
 $= \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$

\therefore 当 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $0 \leq \cos \theta \leq 1, 0 \leq \sin 2\theta \leq 1,$

$\therefore (1+y)x = (1+r \sin \theta)r \cos \theta = r \cos \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta = r \cos \theta + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta \in [0, \frac{3}{2}],$

$\therefore \iint_D d\sigma = \frac{\pi}{4},$

$\therefore 0 \leq \iint_D (1+y)x d\sigma \leq \frac{3}{2} \iint_D d\sigma = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}\pi, \text{ 即 } \iint_D (1+y)x d\sigma \in [0, \frac{3}{8}\pi].$

(2) 方法1: $\because 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2x, \\ x^2 + y^2 \leq 4x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \geq 1, \\ (x-2)^2 + y^2 \leq 4, \end{cases}$

\therefore 区域 D 如图 6 所示,

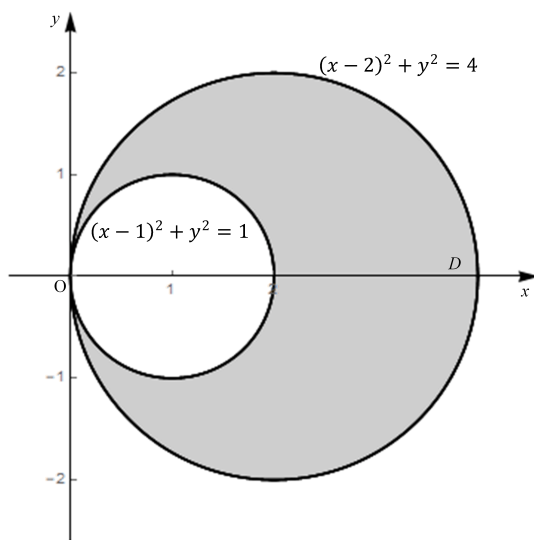


图 6: 习题12.1 2.(2)题图示

由图 6 可知 $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2 + 0^2 = 16,$

$$\therefore \iint_D d\sigma = 2^2\pi - 1^2\pi = 3\pi,$$

$$\therefore 0 \leq \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \leq 16 \iint_D d\sigma = 48\pi.$$

方法2: 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $D = \{(x, y) \mid 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x\}$
 $= \{(r, \theta) \mid 2r \cos \theta \leq r^2 \leq 4r \cos \theta\} = \{(r, \theta) \mid 2 \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$

$$\therefore 0 \leq 2 \cos^2 \theta \leq r^2 \leq 16 \cos^2 \theta \leq 16, \text{ 即 } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2 + 0^2 = 16,$$

$$\therefore \iint_D d\sigma = 2^2\pi - 1^2\pi = 3\pi,$$

$$\therefore 0 \leq \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma \leq 16 \iint_D d\sigma = 48\pi.$$

3. 比较下列各组积分值的大小:

(1) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2\}$;

(2) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 由直线 $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=1$ 围成.

解: (1) 区域 D 的图形如图 7 所示,

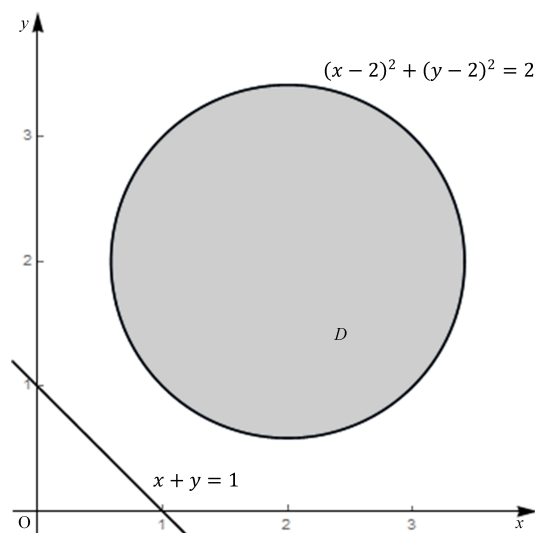


图 7: 习题12.1 3.(1)题图示

由图 7 可知在区域 D 上 $x+y > 1$, 则 $(x+y)^2 < (x+y)^3$,

$$\therefore \iint_D (x+y)^2 d\sigma < \iint_D (x+y)^3 d\sigma.$$

(2) 区域 D 的图形如图 8 所示,

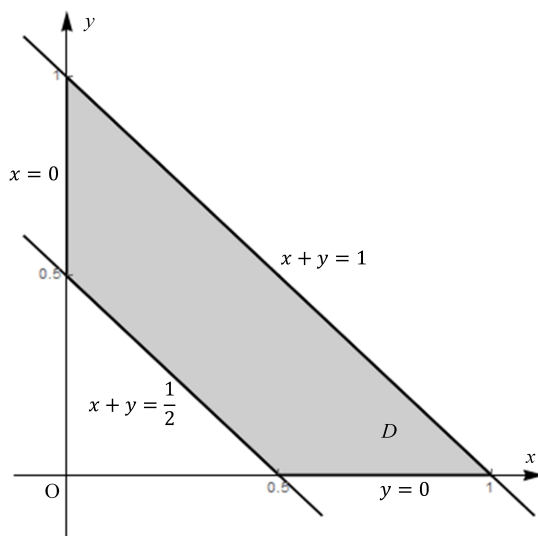


图 8: 习题12.1 3.(2)题图示

由图 7 可知在区域 D 上 $0 < x + y \leq 1$, 则 $\ln(x + y) \leq 0 \leq xy$,

$$\therefore \iint_D \ln(x + y) d\sigma < 0 < \iint_D xy d\sigma.$$

4. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一有界闭域, $f(x, y) \in C(D)$ 且非负, 试证: 若 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$, 则 $f(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in D$.

证明: 假设 $f(x, y)$ 不恒为 0,

$\therefore f(x, y) \in C(D)$ 且非负,

$\therefore \exists P(x_0, y_0) \in D$ 满足 $f(x_0, y_0) > 0$, 且存在 $P(x_0, y_0)$ 的一个邻域 $N(P, \delta)$ 使得

$$f(x, y) > \frac{1}{2} f(x_0, y_0) > 0,$$

$$\therefore \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{N(P, \delta)} f(x, y) d\sigma + \iint_{D \setminus N(P, \delta)} f(x, y) d\sigma \geq \iint_{N(P, \delta)} f(x, y) d\sigma + 0 > 0, \text{ 这 }$$

与 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ 矛盾,

\therefore 假设不成立,

$$\therefore f(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in D.$$

5. 证明: 若 $f(x, y) \in C(D), g(x, y) \in R(D)$ 且不变号, 则 $\exists (\xi, \eta) \in D$ 使得

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

证明: $\because f(x, y) \in C(D)$,

$$\therefore \exists P, Q \in D, \text{ s.t. } f(P) = m, f(Q) = M, \text{ 且 } m \leq f(x, y) \leq M, \forall (x, y) \in D,$$

$\because g(x, y) \in R(D)$ 且不变号, 不妨设 $g(x, y) \geq 0$,

$\therefore mg(x, y) \leq f(x, y)g(x, y) \leq Mg(x, y)$,

$\therefore m \iint_D g(x, y) d\sigma \leq \iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma \leq M \iint_D g(x, y) d\sigma$,

\therefore

i) 当 $\iint_D g(x, y) d\sigma = 0$ 时 $\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma = 0$, 故 $\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma$ 成立;

ii) 当 $\iint_D g(x, y) d\sigma \neq 0$ 时 $m \leq \frac{\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma}{\iint_D g(x, y) d\sigma} \leq M$, 由连续函数的介值定理知 $\exists(\xi, \eta) \in D$ 满足

$$f(\xi, \eta) = \frac{\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma}{\iint_D g(x, y) d\sigma},$$

即

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

6. 利用性质7的结论计算下列积分 (其中区域 D 为圆盘 $x^2 + y^2 \leq R^2$):

(1) $\iint_D y\sqrt{R^2 - x^2} d\sigma$; (2) $\iint_D y^3 x^2 d\sigma$;

(3) $\iint_D x^5 \sqrt{R^2 - y^2} d\sigma$; (4) $\iint_D x^m y^n d\sigma$.

解: (1) 因为区域 D 关于 x 轴对称, 被积函数 $f(x, y) = y\sqrt{R^2 - x^2} = -f(x, -y)$ 关于 y 是奇函数, 故 $\iint_D y\sqrt{R^2 - x^2} d\sigma = 0$.

(2) 因为区域 D 关于 x 轴对称, 被积函数 $f(x, y) = y^3 x^2 = -f(x, -y)$ 关于 y 是奇函数, 故 $\iint_D y^3 x^2 d\sigma = 0$.

(3) 因为区域 D 关于 y 轴对称, 被积函数 $f(x, y) = x^5 \sqrt{R^2 - y^2} = -f(-x, y)$ 关于 x 是奇函数, 故 $\iint_D x^5 \sqrt{R^2 - y^2} d\sigma = 0$.

(4) 区域 D 关于 x 轴和 y 轴均对称,

i) 当 m 与 n 都是偶数时, $f(x, y) = x^m y^n = f(-x, y) = f(x, -y)$ 关于 x 和 y 均是偶函数, 故 $\iint_D x^m y^n d\sigma = 4 \iint_{D_1} x^m y^n d\sigma$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$;

ii) 当 m 与 n 都是奇数时, $f(x, y) = x^m y^n = -f(-x, y)$ 关于 x 是奇函数, $\iint_D x^m y^n d\sigma = 0$;

iii) 当 m 是奇数 n 是偶数时, $f(x, y) = x^m y^n = -f(-x, y)$ 关于 x 是奇函数, $\iint_D x^m y^n d\sigma = 0$;

iv) 当 m 是偶数 n 是奇数时, $f(x, y) = x^m y^n = -f(x, -y)$ 关于 y 是奇函数, $\iint_D x^m y^n d\sigma = 0$.

综上所述,当 m, n 均为偶数时, $\iint_D x^m y^n d\sigma = 4 \iint_{D_1} x^m y^n d\sigma$, 其中 D_1 为区域 D 落在第一象限的部分; 当 m, n 中至少有一个奇数时, $\iint_D x^m y^n d\sigma = 0$.

6.6 习题12.2解答

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D \cos(x+y) d\sigma$, D 是由 $x=0, y=\pi$ 和 $y=x$ 围成的区域;

(2) $\iint_D xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$, D 是由 $y=x^3, y=1$ 和 $x=-1$ 围成的区域;

(3) $\iint_D \sin(x+y) d\sigma$, 其中 D 由直线 $x=0, y=x, y=\pi$ 围成;

(4) $\iint_D |x^2 - y| d\sigma$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$;

(5) $\iint_D \frac{x \sin y}{y} d\sigma$, 其中 D 由 $y=x, y=x^2$ 围成.

解: (1) 方法1: $\iint_D \cos(x+y) d\sigma = \int_0^\pi dx \int_x^\pi \cos(x+y) dy = \int_0^\pi \sin(x+y) \Big|_x^\pi dx$
 $= \int_0^\pi [\sin(x+\pi) - \sin 2x] dx = \int_0^\pi (-\sin x - \sin 2x) dx = \cos x \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^\pi$
 $= -1 - 1 + \frac{1}{2}(1 - 1) = -2.$

方法2: $\iint_D \cos(x+y) d\sigma = \int_0^\pi dy \int_0^y \cos(x+y) dx = \int_0^\pi \sin(x+y) \Big|_0^y dy$
 $= \int_0^\pi (\sin 2y - \sin x) dy = -\frac{1}{2} \cos 2y \Big|_0^\pi + \cos x \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2}(1 - 1) + (-1 - 1) = -2.$

(2) 区域 D 如图 9 所示,

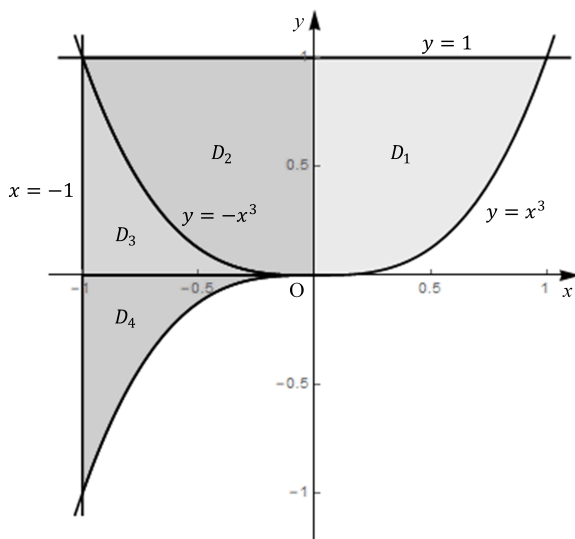


图 9: 习题12.2 1.(2)题图示

可将区域 D 划分为图中的四个区域, 其中 D_1 与 D_2 关于 y 轴对称, D_3 与 D_4 关于 x 轴对称, 被积函数 $f(x, y) = xy \ln(1+x^2+y^2)$ 关于 x 和 y 均为奇函数,

$$\therefore \iint_{D_1} x dy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma + \iint_{D_2} x dy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma = 0,$$

$$\iint_{D_3} xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma + \iint_{D_4} xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma = 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_D xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma \\ = \iint_{D_1} xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma + \iint_{D_2} xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma + \iint_{D_3} xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma \\ + \iint_{D_4} xy \ln(1+x^2+y^2) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{方法1: } \iint_D \sin(x+y) d\sigma &= \int_0^\pi dy \int_0^y \sin(x+y) dx = \int_0^\pi [-\cos(x+y)]_0^y dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos y + \cos 2y) dy = (-\sin y + \frac{1}{2} \sin 2y) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{方法2: } \iint_D \sin(x+y) d\sigma &= \int_0^\pi dx \int_x^\pi \sin(x+y) dy = \int_0^\pi [-\cos(x+y)]_x^\pi dx \\ &= \int_0^\pi [-\cos(\pi+x) + \cos 2x] dx = \int_0^\pi (\cos x + \cos 2x) dx = (\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

(4) 将积分域 D 划分为以下两个区域 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

和 $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D |x^2-y| d\sigma &= \iint_{D_1} (x^2-y) d\sigma + \iint_{D_2} (y-x^2) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2-y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (y-x^2) dy \\ &= \int_0^1 (x^2 y - \frac{1}{2} y^2) \Big|_0^{x^2} dx + \int_0^1 (\frac{1}{2} y^2 - x^2 y) \Big|_{x^2}^1 dx = \int_0^1 (x^4 - \frac{1}{2} x^4) dx + \int_0^1 (\frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2} x^4 + x^4) dx \\ &= \int_0^1 (2x^4 - x^4 - x^2 + \frac{1}{2}) dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + \frac{1}{2}) dx = (\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{30}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \iint_D \frac{x \sin y}{y} d\sigma &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy \int_y^{\sqrt{y}} x dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \frac{1}{2} x^2 \Big|_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \frac{1}{2} (y - y^2) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = \frac{1}{2} (-\cos y \Big|_0^1 + y \cos y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos 1 + \cos 1 - \sin y \Big|_0^1) = \frac{1}{2} (1 - \sin 1). \end{aligned}$$

注意: 该题应先对 x 积分后对 y 积分, 因 $\frac{\sin y}{y}$ 无初等原函数, 故不能先对 y 积分.

2. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sin \sqrt{x^2+y^2} d\sigma, D = \{(x, y) \mid \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\};$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} d\sigma, D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\};$$

$$(3) \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma, D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(4) \iint_D |x^2+y^2-4| d\sigma, D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 16\}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) \iint_D \sin \sqrt{x^2+y^2} d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\pi^{2\pi} r \sin r dr = 2\pi (-r \cos r \Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi} \cos r dr) \\ &= 2\pi (-2\pi - \pi + \sin r \Big|_\pi^{2\pi}) = -6\pi^2. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \pi \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \pi \ln 2.$$

$$(3) \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \arctan(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta}) dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta \int_1^2 r dr = (\frac{1}{2} \theta^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}) (\frac{1}{2} r^2 \Big|_1^2) = \frac{3\pi^2}{16}.$$

$$(4) \iint_D |x^2 + y^2 - 4| d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 |r^2 - 4| r dr = \int_0^{2\pi} d\theta [\int_0^2 (4r - r^3) dr + \int_2^4 (r^3 - 4r) dr] \\ = 2\pi [(2r^2 - \frac{1}{4}r^4)|_0^2 + (\frac{1}{4}r^4 - 2r^2)|_2^4] = 2\pi(8 - 4 + 64 - 32 - 4 + 8) = 80\pi.$$

3. 改变下列累次积分中的积分顺序, 并给出相应重积分的积分域的集合表示:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx; \quad (2) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy; \quad (4) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

解: (1) 积分域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$,

$$\text{则 } \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

$$(2) \text{积分域 } D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \\ = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\text{则 } \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(3) \text{积分域 } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, a-x \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}\} \\ = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a, a-y \leq x \leq \sqrt{a^2-y^2}\} \\ = \{(x, y) \mid \text{直线 } x+y=a \text{ 与圆 } x^2+y^2=a^2 \text{ 在第一象限围成的部分}\},$$

$$\text{则 } \int_0^a dx \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(4) \text{积分域 } D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, e^y \leq x \leq e\},$$

$$\text{则 } \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

4. 将下列累次积分交换积分顺序:

$$(1) \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy; \quad (2) \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$\text{解: (1) 积分域 } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq \sqrt{2ax-x^2}\} \\ = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a, a-\sqrt{a^2-y^2} \leq x \leq y\},$$

$$\text{则 } \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^y f(x, y) dx.$$

$$(2) \text{积分域 } D = \{(x, y) \mid -6 \leq x \leq 2, \frac{1}{4}x^2 - 1 \leq y \leq 2-x\} \\ = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 8, -2\sqrt{1+y} \leq x \leq 2-y\} \cup \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, -2\sqrt{1+y} \leq x \leq 2\sqrt{1+y}\},$$

$$\text{则 } \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx.$$

5. 已知函数 f 连续且 $f > 0$, 试求 $\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} d\sigma$ 的值, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

解: \because 积分域 D 关于 $y = x$ 对称, 且在关于 $y = x$ 的对称点 (x, y) 和 $(x', y') = (y, x)$ 处

$$\frac{f(x')}{f(x')+f(y')} = \frac{f(y)}{f(y)+f(x)},$$

$$\therefore \iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)} dx dy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{f(x)+f(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \pi R^2,$$

$$\therefore \iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = a \iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)} dx dy + b \iint_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)} dx dy = \frac{a+b}{2} \pi R^2.$$