常微分方程

- 微分方程的基本概念
  - 引例
    - 曲线方程问题
    - 列车制动问题
    - 振动问题
  - 微分方程的基本概念
    - 微分方程 常微分方程
    - 微分方程的阶
    - 微分方程的解
      - 通解、特解
      - 定解条件、初始条件、初值问题
      - 积分曲线（族）
  - 一阶微分方程解的存在唯一性定理
    - Cauchy—Picard 定理
    - 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$,
    - 只要函数$p(x), q(x)$连续,其初值问题的解总是存在唯一的.
- 微分方程的初等解法
  - 分离变量法
    - 变量可分离方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$
    - 齐次型方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(\frac{y}{x})$
  - 一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$
    - 性质
      - 一阶齐次线性微分方程($q(x) = 0$)的叠加原理
      - 一阶非齐次线性微分方程($q(x) \neq 0$)的叠加原理
    - 一阶齐次线性微分方程
      - 通解公式 $y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$
      - 公式推导方法-分离变量法
    - 一阶非齐次线性微分方程
      - 通解公式 $y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C)$
      - 公式推导方法-常数变易法 $y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \Rightarrow y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$
      - 也可用全微分法推导出通解公式
    - 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n, n \neq 0, 1$
      - 变量代换：化为$y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$，令$z = y^{1-n}$,
        从而转化成一阶线性微分方程
      - 也可用常数变易法求解
  - 全微分方程 $X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y = 0$
    - 充要条件:平面单连通域D上$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$
    - 求法
      - 变上限积分法 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y = C$
      - 不定积分法
      - 凑微分法
    - 积分因子
  - 可降阶的高阶微分方程
    - ①$y^{(n)} = f(x)$ 则n次积分
    - ② 不显含y的二阶方程 $y'' = f(x, y')$，令$p(x) = y'$
    - ③ 不显含x的二阶方程 $y'' = f(y, y')$，令$y' = p(y), y'' = p'y' = p'p$
- 高阶线性微分方程解的结构
- 高阶线性常系数齐次微分方程
- 线性常系数微分方程组
- 稳定性初步

变量替换法

常数变易法