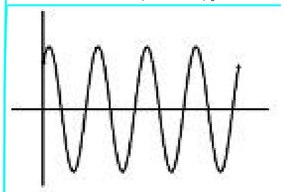
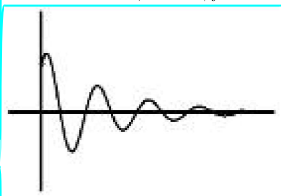
高阶线性常系数齐次微分方程

- 高阶常系数齐次线性微分方程的特征法
  - 二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$
    - 特征方程$\lambda^2+a\lambda+b=0$的特征根λ_1,λ_2
    - λ_1,λ_2是两个不等实特征根$\Rightarrow$通解$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$
    - $\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow$通解$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_2 x}$
    - $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i\Rightarrow$通解$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
  - n阶常系数齐次线性微分方程
- 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法
  - 待定系数法
    - 自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\mu x}$
      - 设特解形式为 $y=x^kQ_n(x)e^{\mu x}$
      - $Q_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
        - μ不是特征根，$k=0$
        - μ是单特征根，$k=1$
        - μ是重特征根，$k=2$
    - 自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$
      - 设特解形式为$y=x^ke^{\alpha x}[Q(x)\cos\beta x+W(x)\sin\beta x]$
      - $Q_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
      - $W_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$
        - $\alpha+\beta i$不是特征根，$k=0$
        - $\alpha+\beta i$是特征根，$k=1$
      - 自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 的处理方式相同
  - 常数变易法
    - 用于处理待定系数法无法处理的情况
    - 第一步：用特征法求齐次方程的两个线性无关解$y_1(x),y_2(x)$
    - 第二步：设非齐次方程的特解为$y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$
    - 第三步：求解线性方程组$\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)\end{cases}$得到$C_1'(x),C_2'(x)$
    - 第四步：积分得到$C_1(x),C_2(x)$，则特解$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$
    - 第五步:非齐次方程的通解为 $y=C_1y_2(x)+C_2y_2(x)+y^*$
- 一般二阶线性微分方程的常数变易法
  - 已知$y''+a(x)y'+b(x)y=0$的一个非零特解$y_1(x)$的情形
    - 设非齐次方程的特解为$y=C(x)y_1(x)$，代入非齐次方程，
    - 得到关于$C(x)$的可降阶方程，用降阶的方法求解.
  - 已知$y''+a(x)y'+b(x)y=0$的通解 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$的情形
    - 第一步：设非齐次方程的特解$y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$
    - 第二步：求解线性方程组$\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)\end{cases}$得到$C_1'(x),C_2'(x)$
    - 第三步：积分得到$C_1(x),C_2(x)$，则特解$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$
    - 第四步:非齐次方程的通解为 $y=C_1y_2(x)+C_2y_2(x)+y^*$
- 欧拉方程
  - 概念$x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=f(x)$
  - 解法
    - 以二阶方程 $x^2y''+axy'+by=f(x)$为例
    - 第一步：当$x>0$时，令$x=e^t$，记$D^k=\frac{d^k}{dt^k}$
    - 第二步:将原二阶方程化为$D(D-1)y+aDy+by=f(e^t)$
    - 第三步：整理上述方程为$D^2y+(a-1)Dy+by=f(e^t)$，即$y''+(a-1)y'+by=f(e^t)$
    - 第四步：求解该线性常系数微分方程得$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+y^*(t)$
    - 第五步：将$t=\ln x$代入$y(t)$得到$y(x)=C_1y_1(\ln x)+C_2y_2(\ln x)+y^*(\ln x)$
- 振动问题的微分方程
  - $y''+2ny'+w^2y=f(t)$
  - 无阻尼自由振动，$n=0,f=0$



  - 小阻尼自由振动，$n<w,f=0$



  - 小阻尼强迫振动，强迫力为$f(t)=H\sin wt,n=0$