向量场的微积分

- 向量场在曲线上的积分、格林公式
- 向量场在曲面上的积分
- 高斯公式与斯托克斯公式
  - 空间单连通区域、曲面单连通区域
    - 实例
      - 球体既是空间单连通域，又是曲面单连通域
      - 圆环体(轮胎)是空间单连通域，但不是曲面单连通域
      - 球壳不是空间单连通域，但是曲面单连通域
    - 空间单连通域内部没有洞，不中空，空间复连通域内部存在中空的区域
    - 空间区域的边界面定侧
      - 空间单连通的有界闭域的边界面外侧为正
      - 非空间单连通的有界闭域的边界面中外面的外侧为正，里面的内侧为正
    - 有向曲面的边界线定向
      - 右手法则
  - 高斯公式
    - 高斯公式建立了向量场在封闭曲面上的积分与其散度在该曲面围成的区域中的积分之间的关系
      - 即向量场穿过封闭曲面的通量等于该向量场在曲面内部的的产生量
    - 定理
      - $\boldsymbol{F}(x,y,z) \in C^1(\Omega)$
      - $\Rightarrow \iint_{\partial\Omega_+} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
      - $= \iint_{\partial\Omega_+ X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}$
      - $= \iiint_\Omega [\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
    - 注意：$\boldsymbol{F}(x,y,z)$在Ω内每一点都具有连续偏导数
    - 注意：$\partial\Omega_+$是Ω的所有正向边界面
    - 放到平面中，高斯公式就是格林公式的散度形式
      - $\oint_{\partial D_+} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot n(x,y)\mathrm{d}l = \iint_D [\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
    - 高斯公式的应用
      - (1)利用三重积分计算曲面积分
        - 封闭曲面(直接代入公式)
        - 非封闭曲面(需补出曲面构成封闭区域)
        - 特殊点(奇异点处需选取简单曲面去除奇异点)
      - (2)利用曲面积分求空间域的体积
      - (3)利用高斯公式证明有关结论
  - 斯托克斯公式
    - 斯托克斯公式建立了空间向量场在空间闭合曲线上的积分与该向量场的旋度在该曲线围成的任意曲面上的积分之间的关系
      - 即向量场在空间闭合曲线上的环量等于该向量场在该曲线围成的任意曲面上的每一点的旋度的集合
    - 定理
      - $\boldsymbol{F}(x,y,z) \in C^1(\Omega), \Sigma \in \Omega$
      - $\Rightarrow \oint_{\partial\Sigma} X(x,y,z)\mathrm{d}x + Y(x,y,z)\mathrm{d}y + Z(x,y,z)\mathrm{d}z$
      - $= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$
    - 注意曲线和曲面的方向：$\partial\Sigma$与Σ的方向满足右手法则
    - 注意：$\boldsymbol{F}(x,y,z)$在曲面Σ上应处处有一阶连续偏导数
    - 在平面中，斯托克斯公式就是格林公式
      - $\int_{\partial\Sigma} X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y = \iint_\Sigma (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_\Sigma (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
    - 应用斯托克斯公式时应尽量选取简单的曲面，比如平面
- 保守场、向量场的微分运算