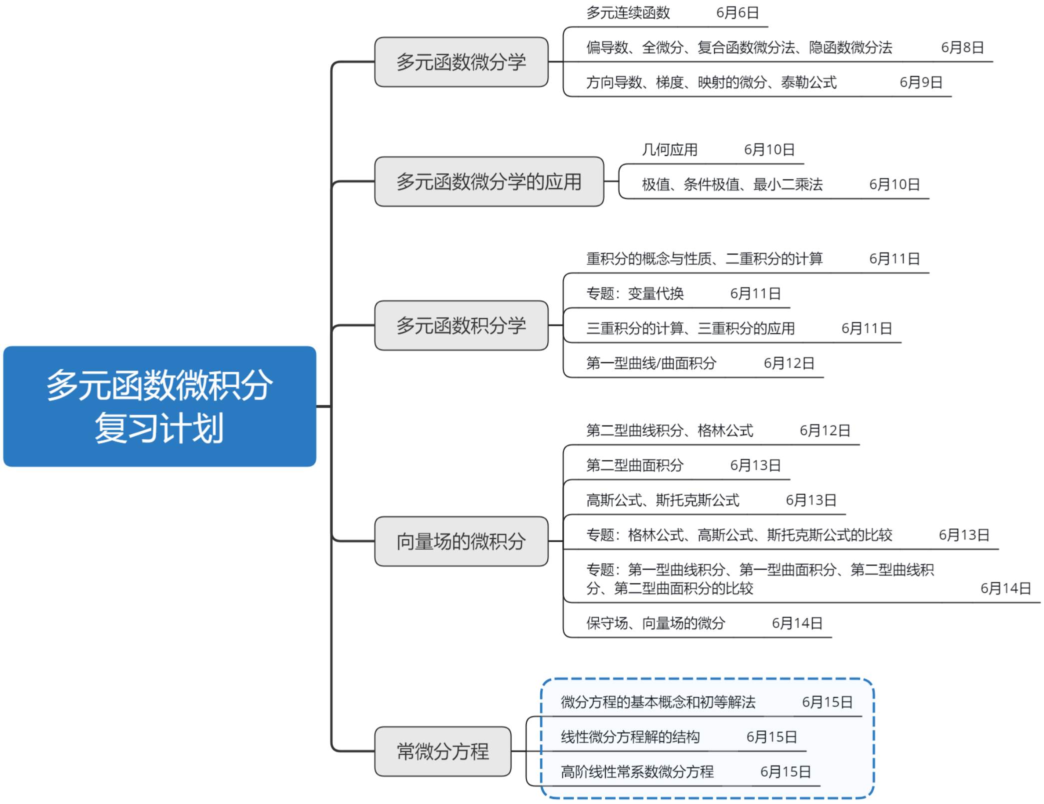
# 17 高阶线性微分方程解的结构

## 17.1 复习计划



## 17.2 知识结构

常微分方程
微分方程的基本概念
微分方程的初等解法
高阶线性微分方程解的结构
$n$阶线性常微分方程
$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=\varphi(x)$
存在唯一性定理
当$a_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$及$\varphi(x)$连续时，$n$阶常微分方程的初值问题存在唯一解.
线性微分方程解的性质
齐次线性微分方程解的叠加原理
非齐次线性微分方程解的叠加原理
函数组的线性相关、线性无关
函数组线性相关(无关)的定义
$\exists$不全为零的$c_1,c_2,\cdots,c_n$, $s.t.\sum_{k=1}^n c_kg_k(x)=0,x\in I$,
则$\{g_k(x)\}_{k=1}^n$线性相关，否则线性无关.
函数组线性相关的必要条件
函数组的Wronsky行列式
$W[g_1,g_2,\cdots,g_n](x) = \begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \cdots & g_n(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & \cdots & g_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^{(n-1)}(x) & g_2^{(n-1)}(x) & \cdots & g_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$
函数组线性相关的必要条件
$W[g_1,g_2,\cdots,g_n](x)=0$
线性微分方程的解函数组
线性相关(无关)的判别
(充要条件)
$\{g_k(x)\}_{k=1}^n$ 是$n$阶齐次线性常微分方程的$n$个解,
则$\{g_k(x)\}_{k=1}^n$在$I$上线性无关
$\Leftrightarrow W[g_1,g_2,\cdots,g_n](x)\neq 0,x\in I$
$\Leftrightarrow \exists x_0\in I,s.t.W[g_1,g_2,\cdots,g_n](x_0)\neq 0.$
$n$阶线性微分方程的通解
1. 齐次线性微分方程的解空间
$n$维线性空间.
2. 齐次线性微分方程的通解
已知$n$个线性无关解$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$
$\Rightarrow$通解$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$.
3. 非齐次线性微分方程的通解
齐次方程的$n$个线性无关解$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$,
非齐次方程的一个特解, $y^*(x)$
$\Rightarrow$通解$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)+y^*(x)$.
高阶线性常系数齐次微分方程
线性常系数微分方程组
稳定性初步

## 17.3 习题分类与解题思路

1. 判断函数组在定义区间内是否线性相关. 可参考以下思路：

第一步 计算Wronsky行列式. 若Wronsky行列式不恒等于零，则函数组线性无关.

【如习题14.3中的1.(1)/(2)/(3)/(4)/(5)/(6).】

第二步 若Wronsky行列式恒等于零，则可按照线性相关的定义，判断是否存在不全为零的$c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$使得$\sum_{i=1}^n c_n g_n(x) = 0$，若存在则线性相关，若不存在则线性无关.

若已知函数组是$n$阶线性微分方程的解函数组，则由Wronsky行列式恒等于零，可直接得到该函数组线性相关.

2. 考查齐次和非齐次线性方程解的叠加原理.

【如习题14.3中的3.】

3. 考查线性微分方程解的存在唯一性定理.

【如习题14.3中的6.】

4. 考查$n$阶线性微分方程的解函数组线性相关(无关)判别的充要条件.

【如习题14.3中的7.】

5. 考查$n$阶齐次线性微分方程解的结构. $n$阶齐次线性微分方程的解空间是$n$维线性空间，找到该齐次线性微分方程的$n$个线性无关的解，就可写出该齐次线性微分方程的通解.

【如习题14.3中的2.】

6. 考查$n$阶非齐次线性微分方程解的结构. 先确定该非齐次方程对应的齐次方程的$n$个线性无关的解，从而求出齐次方程的通解，加上该非齐次方程的一个特解即可得到该非齐次方程的通解.

【如习题14.3中的8.】

7. 其他类型的题目. 利用Wronsky行列式证明$n$阶非齐次线性微分方程有$n+1$个线性无关的解.

【如习题14.3中的9.】

## 17.4 习题14.3解答

1. 判断下列函数组在其定义区间内是否线性相关：

   (1)$1, x, x^2, x^3, x^4$;　(2)$\mathrm{e}^{-x}, 1, \mathrm{e}^x$;

   (3)$\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x$;　(4)$\sin x, \cos x$;

   (5)$\mathrm{e}^x\cos x, \mathrm{e}^x\sin x$;　(6)$\ln x, x\ln x$.

   解：(1)$W[1, x, x^2, x^3, x^4](x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x & 12x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 6\cdot 24 \not\equiv 0$,

   故$1, x, x^2, x^3, x^4$线性无关.

   (2)$W[\mathrm{e}^{-x}, 1, \mathrm{e}^x](x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-x} & 1 & \mathrm{e}^x \\ -\mathrm{e}^{-x} & 0 & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^{-x} & 0 & \mathrm{e}^x \end{vmatrix} = (-1)^3(-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}) = 2 \not\equiv 0$,

   故$\mathrm{e}^{-x}, 1, \mathrm{e}^x$线性无关.

   (3)$W[\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x](x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x(x+1) \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x}(x+1) - x\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \not\equiv 0$,

   故$\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x$线性无关.

   (4)$W[\sin x, \cos x](x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \not\equiv 0$,

   故$\sin x, \cos x$线性无关.

   (5)$W[\mathrm{e}^x\cos x, \mathrm{e}^x\sin x](x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x\cos x & \mathrm{e}^x\sin x \\ \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) & \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x(\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin x\cos x + \sin^2 x) = \mathrm{e}^x \not\equiv 0$,

   故$\mathrm{e}^x\cos x, \mathrm{e}^x\sin x$线性无关.

   (6)$W[\ln x, x\ln x](x) = \begin{vmatrix} \ln x & x\ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} = (\ln x + 1)\ln x - \ln x = (\ln x)^2 \not\equiv 0$,

   故$\ln x, x\ln x$线性无关.

2. 验证$y_1 = \mathrm{e}^{x^2}$与$y_2 = x\mathrm{e}^{x^2}$都是方程$y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$的解，并写出该方程的通解.

   解：$y_1 = \mathrm{e}^{x^2}, y_1' = \mathrm{e}^{x^2}2x, y_1'' = 2\mathrm{e}^{x^2} + 4x^2\mathrm{e}^{x^2}$,

   $y_1'' - 4xy_1' + (4x^2-2)y_1 = 2\mathrm{e}^{x^2} + 4x^2\mathrm{e}^{x^2} - 4x\mathrm{e}^{x^2}2x + (4x^2-2)\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x^2}(2 + 4x^2 - 8x^2 + 4x^2 - 2) = 0$,

$y_2 = x\mathrm{e}^{x^2}, y_2' = \mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2), y_2'' = \mathrm{e}^{x^2}(4x+2x+4x^3) = \mathrm{e}^{x^2}(6x+4x^3),$

$y_2'' - 4xy_2' + (4x^2-2)y_2 = \mathrm{e}^{x^2}(6x+4x^3) - 4x\mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2) + (4x^2-2)x\mathrm{e}^{x^2}$
$= \mathrm{e}^{x^2}(6x+4x^3-4x-8x^3+4x^3-2x) = 0,$

$\therefore y_1, y_2$都是二阶线性齐次微分方程$y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$的解.

$\because W[y_1,y_2](x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{x^2} & x\mathrm{e}^{x^2} \\ 2x\mathrm{e}^{x^2} & \mathrm{e}^{x^2}(1+2x^2) \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x^2}(1+2x^2) - 2x^2\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x^2} \not\equiv 0,$

$\therefore y_1, y_2$线性无关, 二阶线性齐次微分方程的通解为$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\mathrm{e}^{x^2} + C_2x\mathrm{e}^{x^2}$.

3. 验证$y = \frac{1}{x}(c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$($c_1, c_2$是任意常数)是方程$xy''+2y'-xy=\mathrm{e}^x$的通解.

   解：$y_1 = \frac{1}{x}\mathrm{e}^x, y_1' = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}, y_1'' = \frac{\mathrm{e}^x(x-1+1)x^2 - \mathrm{e}^x(x-1)2x}{x^4} = \frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)}{x^3},$

   $xy_1''+2y_1'-xy_1 = x\frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)}{x^3} + 2\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2} - x\frac{1}{x}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2+2x-2-x^2)}{x^2} = 0,$

   $y_2 = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}, y_2' = \frac{-\mathrm{e}^{-x}x - \mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(x+1)}{x^2}, y_2'' = \frac{\mathrm{e}^{-x}(x+1-1)x^2 + \mathrm{e}^{-x}(x+1)2x}{x^4} = \frac{\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3},$

   $xy_2''+2y_2'-xy_2 = x\frac{\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3} + 2\frac{-\mathrm{e}^{-x}(x+1)}{x^2} - x\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2-2x-2-x^2)}{x^2} = 0,$

   $y_3 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x, y_3' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x, y_3'' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$

   $xy''+2y'-xy = (x+2-x)\frac{1}{2}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x,$

   $\therefore$根据叠加定理$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3 = \frac{1}{x}(c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$是方程$xy''+2y'-xy=\mathrm{e}^x$的通解.

6. 设$y=\varphi(x)$是方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的一个不恒等于零的解，其中$p(x), q(x)$为$[a,b]$上的连续函数. 求证不存在$x_0 \in (a,b)$, 使得$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$.

   证明：假设$\exists x_0 \in (a,b), s.t. \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0,$

   $\because y \equiv 0$也满足$y(x_0) = y'(x_0) = 0,$

   $\therefore$根据存在唯一性定理$\varphi(x) \equiv 0$, 矛盾, 故假设不成立.

   $\therefore$不存在$x_0 \in (a,b)$, 使得$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$.

7. 设$p(x), q(x), r(x)$是区间$I$上的连续函数，$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$是方程

   $$y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$$

   的三个线性无关解，问是否存在$x_0 \in I$,使得$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_3(x_0) = 0$, 并说明理由.

   解：假设存在$x_0 \in I$,使得$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_3(x_0) = 0$,

   则$W[y_1,y_2,y_3](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = 0,$

$\therefore$线性微分方程$y'''(x)+p(x)y''(x)+q(x)y'(x)+r(x)y(x)=0$的三个解$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$线性相关，与题设矛盾，

$\therefore$不存在$x_0\in I$,使得$y_1(x_0)=y_2(x_0)=y_3(x_0)=0$.

8. 设$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$是方程

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x)$$

的三个特解，并且$\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}$不为常数. 求证$y(x)=(1-c_1-c_2)y_1(x)+c_1y_2(x)+c_2y_3(x)$是该方程的通解.

证明：$\because y_1(x),y_2(x),y_3(x)$是方程$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x)$的三个特解,

$\therefore$根据叠加定理$y_2(x)-y_1(x)$, $y_3(x)-y_1(x)$是齐次方程$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)$的两个解,

$\because \frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}$不为常数,

$\therefore y_2(x)-y_1(x)$与$y_3(x)-y_1(x)$线性无关,

$\therefore$非齐次方程$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x)$的通解为

$$\begin{aligned}y(x)&=c_1[y_2(x)-y_1(x)]+c_2[y_3(x)-y_1(x)]+y_1(x)\\&=(1-c_1-c_2)y_1(x)+c_1y_2(x)+c_2y_3(x).\end{aligned}$$

9. 设函数$a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)$与$f(x)$连续，其中$f(x)\not\equiv 0$，求证微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

具有$n+1$个线性无关解，并用其$n+1$个线性无关解给出该方程的通解.

证明：设$\bar{y}_1(x),\bar{y}_2(x),\cdots,\bar{y}_n(x)$是齐次方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$的$n$个线性无关解，$\bar{y}$是非齐次方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$的一个非零特解, 则$W[\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n](x)\not\equiv 0$,

记$y_k(x)=\bar{y}_k(x)+\bar{y}(x),(k=1,2,\cdots,n)$, 则$y_k(x)$是非齐次方程的解,

则$W[y_1,y_2,\cdots,y_n,\bar{y}](x)$
$=W[\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n,\bar{y}](x)$

$$=\begin{vmatrix}\bar{y}_1(x)&\bar{y}_2(x)&\cdots&\bar{y}_n(x)&\bar{y}(x)\\\bar{y}_1'(x)&\bar{y}_2'(x)&\cdots&\bar{y}_n'(x)&\bar{y}'(x)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\\bar{y}_1^{(n-1)}(x)&\bar{y}_2^{(n-1)}(x)&\cdots&y_n^{(n-1)}&\bar{y}^{(n-1)}(x)\\\bar{y}_1^{(n)}(x)&\bar{y}_2^{(n)}(x)&\cdots&y_n^{(n)}&\bar{y}^{(n)}(x)\end{vmatrix},$$

将该行列式的第$n-1$行$\times a_1(x)$,第$n-2$行$\times a_2(x),\cdots$,第1行$\times a_n(x)$加到第$n$行，考虑到$\bar{y}_k, k=1,2,\cdots,n$是齐次方程的解，$\bar{y}$是非齐次方程的解，得到

$$\text{上式}=\begin{vmatrix} \bar{y}_1(x) & \bar{y}_2(x) & \cdots & \bar{y}_n(x) & \bar{y}(x) \\ \bar{y}_1'(x) & \bar{y}_2'(x) & \cdots & \bar{y}_n'(x) & \bar{y}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_1^{(n-1)}(x) & \bar{y}_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)} & \bar{y}^{(n-1)}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(x) \end{vmatrix} = f(x)W[\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n](x) \not\equiv 0,$$

$\therefore y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), \bar{y}(x)$线性无关，

故$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$有$n+1$个线性无关解，

方程的通解为$y=C_1[y_1(x)-\bar{y}(x)]+C_2[y_2(x)-\bar{y}(x)]+\cdots+C_n[y_n(x)-\bar{y}(x)]+\bar{y}(x).$