稳定性初步

- 稳定性的基本概念
  - 一阶微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$,
    - 平衡点(奇点) $\boldsymbol{x}^*, s.t.\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$
    - 平衡解 $\boldsymbol{x}^*, s.t.\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^*)$
  - 稳定性的定义
    - 设$\boldsymbol{\varphi}(t)$是一阶微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$的一个解，
    - 若$\forall t_0, \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(t_0,\varepsilon), s.t$当$\|\boldsymbol{x}(t_0),\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\delta$时，
    - $\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|<\varepsilon$对任意的$t\geqslant t_0$成立，
    - 则称$\boldsymbol{\varphi}(t)$在李雅普诺夫意义下稳定．否则称$\boldsymbol{\varphi}(t)$不稳定.
  - 渐进稳定性
    - 设$\boldsymbol{\varphi}(t)$是一阶微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$的一个解，
    - 若$\forall t_0, \exists\eta>0, s.t.$当$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\eta$时，
    - $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|=0$，则$\boldsymbol{\varphi}(t)$渐进稳定.
    - 当$\eta=+\infty$时，即方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$的任意解$\boldsymbol{x}(t)$均满足
    - $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|=0$，则$\boldsymbol{\varphi}(t)$全局渐进稳定.
  - 例:$\varphi(t)\equiv0$是微分方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=cx$的平衡解, $x(t)=x_0\mathrm{e}^{c(t-t_0)}$是该方程的任意解,则
    - (1)当$c>0$时,$\forall\delta>0$当$\|x(t_0)-0\|=|x_0|<\delta$时 总存在$t_1>t_0, s.t.\|x(t_1)-0\|=|x_0|\mathrm{e}^{c(t_1-t_0)}>1=\varepsilon_0$，故平衡解$\varphi(t)\equiv0$不稳定；
    - (2)当$c=0$时,$x(t)=x_0$，$\forall t_0,\forall\epsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$,
      - 则当$\|x(t_0)-0\|=|x_0|<\delta$时,$\|x(t)-0\|=|x_0|<\varepsilon$对于任意的$t>t_0$都成立，
      - 故平衡解$\varphi(t)\equiv0$稳定；
      - 但$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x_0\neq0$故平衡解$\varphi(t)\equiv0$不渐进稳定.
    - (3)当$c<0$时,$x(t)=x_0\mathrm{e}^{c(t-t_0)}$，$\forall t_0,\forall\epsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$,
      - 则当$\|x(t_0)-0\|=|x_0|<\delta$时,$\|x(t)-0\|=|x_0|\mathrm{e}^{c(t-t_0)}<\varepsilon$对于任意的$t>t_0$都成立，
      - 故平衡解$\varphi(t)\equiv0$稳定；
      - 因$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}x_0\mathrm{e}^{c(t-t_0)}=0$故平衡解$\varphi(t)\equiv0$全局渐进稳定.
- 线性微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$解的稳定性
  - 可将非齐次方程组的任意解$\boldsymbol{\varphi}(t)$的稳定性问题转化为齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}$零解的稳定性问题
    - 线性微分方程组的所有解具有相同的稳定性，与该方程组对应的齐次方程组零解的稳定性相同，故线性微分方程组解的稳定性也是该线性方程组的稳定性
  - 线性常系数非齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$的任意解$\boldsymbol{\varphi}(t)$的稳定性判定
    - 常数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，则
      - (1)若$\boldsymbol{A}$存在正实部的特征值,则该线性方程组不稳定
      - (2)若$\mathrm{Re}(\lambda_i)\leqslant0(i=1,2,\cdots,k)$，且当有零特征值时，零特征值不是重特征值，则该线性方程组稳定
      - (3)若$\mathrm{Re}(\lambda_i)<0(i=1,2,\cdots,k)$，则该线性方程组渐进稳定
  - 线性常系数非齐次方程组的稳定性判定步骤
    - 第一步：求系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$;
    - 第二步：根据上述判定定理判定该线性方程组的稳定性.
- 非线性微分方程组解的稳定性的判定
  - 自治系统：$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}$为其一个平衡解
  - 自治系统在平衡解$\boldsymbol{\xi}$处的线性近似方程：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$
    - $\boldsymbol{A}=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{\xi}}$为平衡解$\boldsymbol{\xi}$处的雅可比矩阵
  - 自治系统平衡解$\boldsymbol{\xi}$稳定性的判定定理
    - (1)当$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部都是负数时,平衡解$\boldsymbol{\xi}$渐进稳定
    - (2)当$\boldsymbol{A}$的特征值中至少有一个具有正实部时,平衡解$\boldsymbol{\xi}$不稳定
    - (3)当$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部都非正但有零实部特征值时，平衡解$\boldsymbol{\xi}$的稳定性不能由其线性近似方程组判定
  - 自治系统平衡解$\boldsymbol{\xi}$稳定性的判定步骤
    - 第一步:令$\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{0}$，求出该自治系统的所有平衡解$\boldsymbol{\xi}_i$;
    - 第二步:求出平衡解$\boldsymbol{\xi}_i$处的雅可比矩阵$\boldsymbol{A}$;
    - 第三步:求出平衡解$\boldsymbol{\xi}_i$处的雅可比矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$;
    - 第四步:根据上述判定定理判定该自治系统的稳定性.