# 向量场的微积分

- 向量场在曲线上的积分、格林公式
- 向量场在曲面上的积分
- 高斯公式与斯托克斯公式
- 保守场
  - 平面保守场
    - 保守场的几个概念
      - 保守场 $\boldsymbol{F}(x,y)$
        - 曲线积分$\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与路径无关
      - 有势场 $\boldsymbol{F}(x,y)$
        - $\exists\varphi(x,y), s.t.\mathrm{grad}\varphi(x,y)=\boldsymbol{F}(x,y),(x,y)\in D$
        - $\varphi(x,y)$为势函数
        - 可微的有势场是无旋场
          - 即$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$
      - 全微分式 $X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$
        - $\exists\varphi(x,y), s.t.\mathrm{d}\varphi(x,y)=X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$
        - $\varphi(x,y)$为原函数
        - $\boldsymbol{F}(x,y)=(X,Y)$有势与$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$是全微分式等价
          - 势函数也是原函数
            - 求原函数的方法
    - 一般区域上保守场的充要条件
      - $\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与路径无关
      - $\oint_L\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$
      - $\boldsymbol{F}(x,y)=(X,Y)$有势
      - $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$是全微分式
      - 四个条件等价
    - 单连通区域$D$上保守场的充要条件
      - $\boldsymbol{F}(x,y)=(X,Y)\in C^1(D)$且$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$
        - 即$\boldsymbol{F}(x,y)$是$D$上的无旋场
      - 注意该充要条件只能应用于单连通域
  - 空间保守场
    - 保守场的几个概念
      - 保守场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$
        - 曲线积分$\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与路径无关
      - 有势场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$
        - $\exists\varphi(x,y,z), s.t.\mathrm{grad}\varphi(x,y,z)=\boldsymbol{F}(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega$
        - $\varphi(x,y,z)$为势函数
        - 可微的有势场是无旋场
          - 即$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\X&Y&z\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$
      - 全微分式 $X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$
        - $\exists\varphi(x,y,z), s.t.\mathrm{d}\varphi(x,y,z)=X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$
        - $\varphi(x,y,z)$为原函数
        - $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(X,Y)$有势与$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$是全微分式等价
          - 势函数也是原函数
            - 求原函数的方法
              - 曲线积分法
              - 不定积分法
    - 一般区域上保守场的充要条件
      - $\int_{L(A)}^{(B)}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与路径无关
      - $\oint_L\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$
      - $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(X,Y,Z)$有势
      - $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$是全微分式
      - 四个条件等价
    - 曲面单连通区域上保守场的充要条件
      - $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(X,Y,Z)\in C^1(\Omega)$且$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\X&Y&Z\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$
        - 即$\boldsymbol{F}(x,y)$是$\Omega$上的无旋场
      - 注意该充要条件只能应用与曲面单连通区域
  - 调和场
    - 调和场的概念
      - 既是有势场又是无源场
      - $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\boldsymbol{\nabla}\varphi(x,y,z),\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z)=0$
    - 调合场势函数的性质
      - $\varphi(x,y,z)\in C^2\Rightarrow\Delta\varphi(x,y,z)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$
        - $\Delta\varphi(x,y,z)=0$调和方程，其解为调和函数
      - $\varphi(x,y,z)\in C^2(\Omega)$是调和函数，且在$\partial\Omega$上的函数值等于0 $\Rightarrow\varphi(x,y,z)=0,(x,y,z)\in\Omega$
- 向量场的微分运算
  - 数量场$f$梯度
    - 二维 $\mathrm{grad}f(x,y)=\boldsymbol{\nabla}f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$
    - 三维 $\mathrm{grad}f(x,y,z)=\boldsymbol{\nabla}f(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$
  - 向量场$\boldsymbol{F}$的散度
    - 二维 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$
    - 三维 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$
    - $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$的场为无源场
  - 向量场$\boldsymbol{F}$的旋度
    - 二维 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\mathrm{curl}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}=(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\boldsymbol{k}$
    - 三维 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\mathrm{curl}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\X&Y&Z\end{vmatrix}$
    - $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$的场为无旋场
  - 散度和旋度的积分定义可参看扈老师的讲课提纲