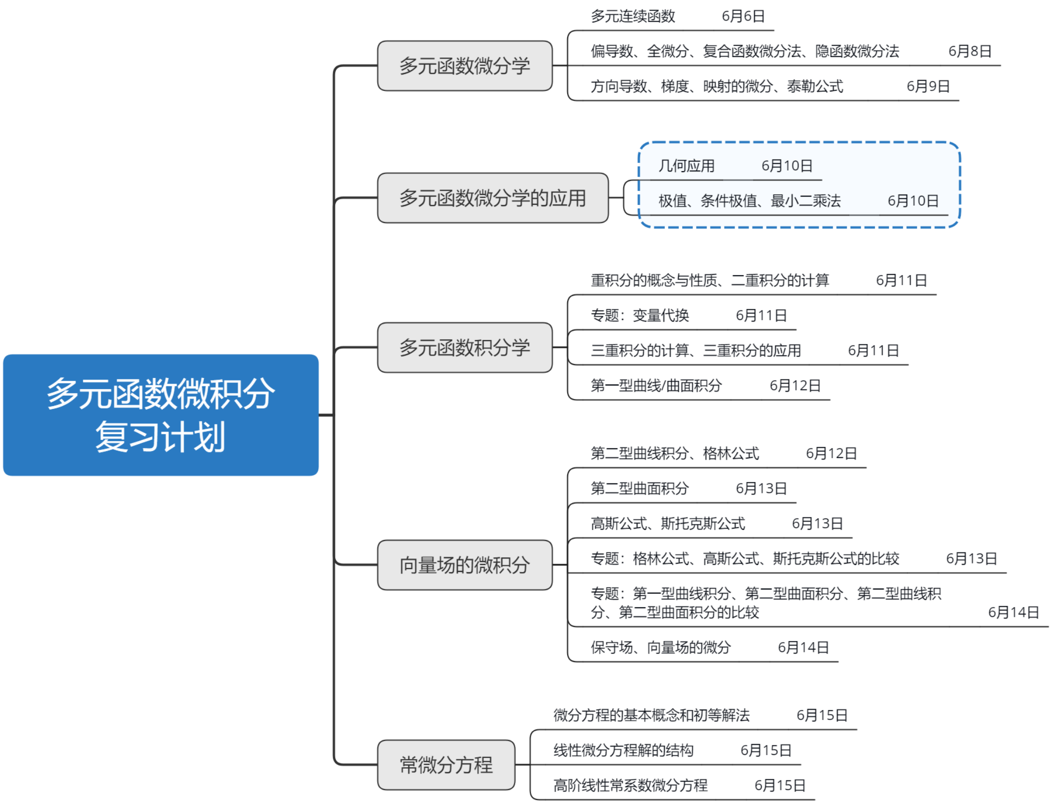
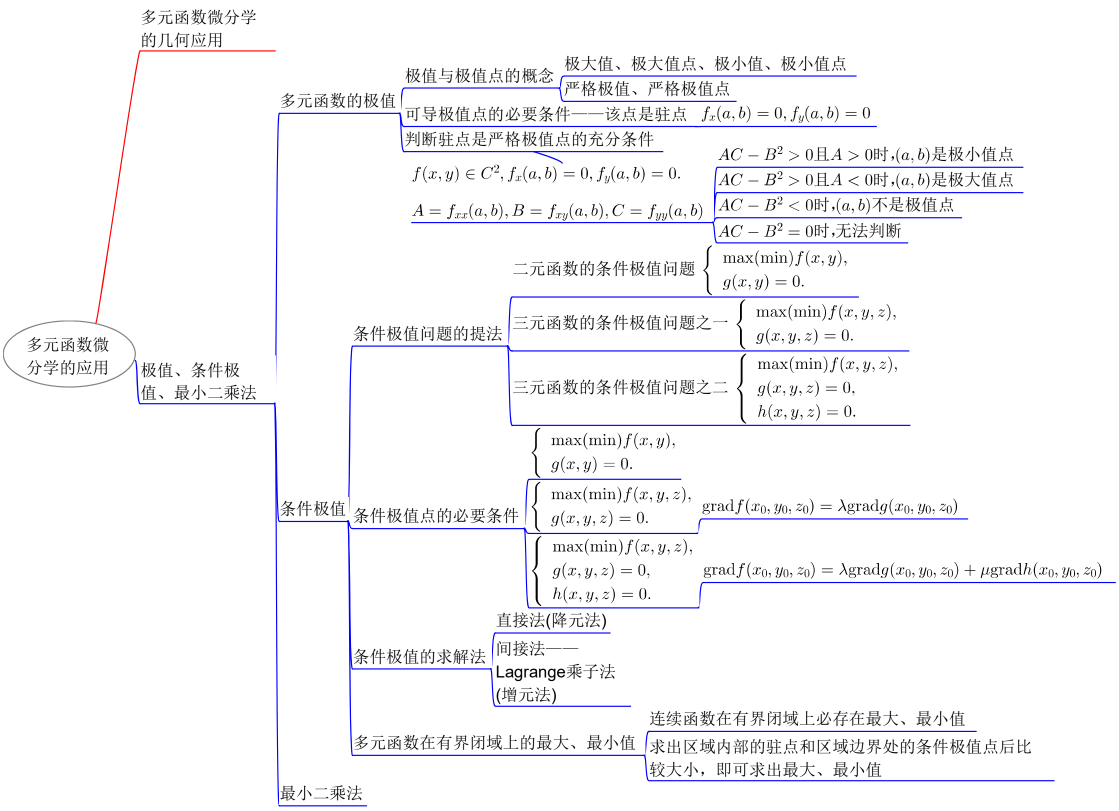
5 极值、条件极值、最小二乘法

5.1 复习计划



5.2 知识结构


多元函数微分学的应用
多元函数微分学的几何应用
极值、条件极值、最小二乘法
多元函数的极值
极值与极值点的概念
极大值、极大值点、极小值、极小值点
严格极值、严格极值点
可导极值点的必要条件——该点是驻点 $f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$
判断驻点是严格极值点的充分条件
$f(x,y)\in C^2, f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0.$
$A=f_{xx}(a,b), B=f_{xy}(a,b), C=f_{yy}(a,b)$
$AC-B^2>0$且$A>0$时,(a,b)是极小值点
$AC-B^2>0$且$A<0$时,(a,b)是极大值点
$AC-B^2<0$时,(a,b)不是极值点
$AC-B^2=0$时,无法判断
条件极值
条件极值问题的提法
二元函数的条件极值问题 $\begin{cases}\max(\min)f(x,y),\\ g(x,y)=0.\end{cases}$
三元函数的条件极值问题之一 $\begin{cases}\max(\min)f(x,y,z),\\ g(x,y,z)=0.\end{cases}$
三元函数的条件极值问题之二 $\begin{cases}\max(\min)f(x,y,z),\\ g(x,y,z)=0,\\ h(x,y,z)=0.\end{cases}$
条件极值点的必要条件
$\begin{cases}\max(\min)f(x,y),\\ g(x,y)=0.\end{cases}$
$\begin{cases}\max(\min)f(x,y,z),\\ g(x,y,z)=0.\end{cases}$ $\mathrm{grad}f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\mathrm{grad}g(x_0,y_0,z_0)$
$\begin{cases}\max(\min)f(x,y,z),\\ g(x,y,z)=0,\\ h(x,y,z)=0.\end{cases}$ $\mathrm{grad}f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\mathrm{grad}g(x_0,y_0,z_0)+\mu\mathrm{grad}h(x_0,y_0,z_0)$
条件极值的求解法
直接法(降元法)
间接法——Lagrange乘子法(增元法)
多元函数在有界闭域上的最大、最小值
连续函数在有界闭域上必存在最大、最小值
求出区域内部的驻点和区域边界处的条件极值点后比较大小，即可求出最大、最小值
最小二乘法

5.3 重要知识

5.4 习题分类与解题思路

1. 极值问题的求解思路：

第一步 令函数的偏导数等于0，求出驻点;

第二步 利用极值的充分条件判断驻点是否是极值，是最大值还是最小值;

【如习题11.3中的1.(1)/(2)/(3), 2., 3.】

第三步 若用充分条件无法判断，则尝试其他办法求解.

2. 条件极值问题. 用Lagrange乘子法求解，须根据具体问题分析是否是极值. 主要有以下几种类型：

   (a) 求解约束条件下的最值;

   【如习题11.4中的1., 2., 3., 6.】

   (b) 利用条件极值证明不等式.

   【如习题11.4中的4., 5.】

   【这部分分析最值的方法大家可以做一个积累.】

3. 有界闭区域上的最值问题. 只需求出驻点，比较大小，即可得到最大值和最小值. 不需用极值的充分条件判断.

   【如习题11.4中的3.】

5.5 习题11.3解答

1. 求下列函数的极值，并判断是极大值还是极小值：

   (1)$z = x^3 + y^3 - 3xy$；

   (2)$z = 2xy - 3x^3 - 2y^2 + 10$；

   (3)$z = xy + \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$.

   解：(1)$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$,

   令$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$得驻点$(0,0)$和$(1,1)$,

   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$.

   i)对于点$(0,0)$, $A = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2} = 0$, $B = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = -3$, $C = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2} = 0$, $AC - B^2 = -9 < 0$，故$(0,0)$不是极值点；

ii)对于点$(1,1)$，$A=\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x^2}=6$，$B=\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x\partial y}=-3$，$C=\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial y^2}=6$，$AC-B^2=27>0$，$A>0$，故$(1,1)$是极小值点，极小值为$z(1,1)=-1$.

(2)$\frac{\partial z}{\partial x}=2y-9x^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x-4y$,

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$得驻点$(0,0)$和$(\frac{1}{9},\frac{1}{18})$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-18x$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4$.

i)对于点$(0,0)$，$A=\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2}=0$，$B=\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x\partial y}=2$，$C=\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2}=-4$，$AC-B^2=-4<0$，故$(0,0)$不是极值点；

ii)对于点$(\frac{1}{9},\frac{1}{18})$，$A=\frac{\partial^2 z(\frac{1}{9},\frac{1}{18})}{\partial x^2}=-2$，$B=\frac{\partial^2 z(\frac{1}{9},\frac{1}{18})}{\partial x\partial y}=2$，$C=\frac{\partial^2 z(\frac{1}{9},\frac{1}{18})}{\partial y^2}=-4$，$AC-B^2=4>0$，$A<0$，故$(\frac{1}{9},\frac{1}{18})$是极大值点，极大值为$z(\frac{1}{9},\frac{1}{18})=10\frac{1}{486}$.

(3)

(a)当$a\neq 0$时，

$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{-a}{x^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{-a}{y^2}$,

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$得驻点$(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2a}{x^3}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2a}{y^3}$.

对于点$(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$，$A=\frac{\partial^2 z(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})}{\partial x^2}=2$，$B=\frac{\partial^2 z(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})}{\partial x\partial y}=1$，$C=\frac{\partial^2 z(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})}{\partial y^2}=2$，$AC-B^2=3>0$，$A>0$，故点$(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$是极小值点，极小值$z(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})=3\sqrt[3]{a^2}$.

(b)当$a=0$时$z(x,y)=xy$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x$,

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$得驻点$(0,0)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

对于点$(0,0)$，$A=\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2}=0$，$B=\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x\partial y}=1$，$C=\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2}=0$，$AC-B^2=-1<0$，故点$(0,0)$不是是极值点.

2. 设函数$z=z(x,y)$由方程$4x^2+2y^2+3z^2-4xy-2yz-8=0$确定，求$z=z(x,y)$的极值点.

解：方程$4x^2+2y^2+3z^2-4xy-2yz-8=0$两边分别对$x,y$求偏导：

$$8x+6z\frac{\partial z}{\partial x}-4y-2y\frac{\partial z}{\partial x}=0, \tag{1a}$$

$$4y+6z\frac{\partial z}{\partial y}-4x-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{1b}$$

在以上两式中令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$得$\begin{cases}8x-4y=0,\\4y-4x-2z=0,\end{cases}$ 与$4x^2+2y^2+3z^2-4xy-2yz-8=0$联立，得驻点$(1,2)$和$(-1,-2)$，且$z(1,2)=2$，$z(-1,-2)=-2$，

方程 (1a)两边分别对x,y求偏导:

$$8+6(\frac{\partial z}{\partial x})^2+6z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \tag{2a}$$

$$6\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+6z\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-4-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0, \tag{2b}$$

方程 (1b)两边分别对y求偏导:

$$4+6(\frac{\partial z}{\partial y})^2+6z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

i)将$x=1,y=2,z=2,\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$代入方程 (2a)、 (2b)和 (3)，令$A=\frac{\partial^2 z(1,2)}{\partial x^2},B=\frac{\partial^2 z(1,2)}{\partial x\partial y},C=\frac{\partial^2 z(1,2)}{\partial y^2}$得

$$\begin{gathered}8+12A-4A=0,\\ 12B-4-4B=0,\\ 4+12C-4C=0,\end{gathered}$$

解得$A=-1,B=\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2}$, $AC-B^2=\frac{1}{2}>0$, $A=-1<0$，故$(1,2)$是函数$z=z(x,y)$的极大值点.

ii)将$x=-1,y=-2,z=-2,\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$代入方程 (2a)、 (2b)和 (3)，令$A=\frac{\partial^2 z(-1,-2)}{\partial x^2},B=\frac{\partial^2 z(-1,-2)}{\partial x\partial y},C=\frac{\partial^2 z(-1,-2)}{\partial y^2}$得

$$\begin{gathered}8-12A+4A=0,\\ -12B-4+4B=0,\\ 4-12C+4C=0,\end{gathered}$$

解得$A=1,B=-\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}$, $AC-B^2=\frac{1}{2}>0$, $A=1>0$，故$(-1,-2)$是函数$z=z(x,y)$的极小值点.

3. 试证函数$z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$有无穷多个极大值而无极小值.

证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+\mathrm{e}^y)\sin x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(\cos x-1-y)\mathrm{e}^y$,

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$得驻点$(k\pi,(-1)^k-1),k\in\mathbb{Z}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+\mathrm{e}^y)\cos x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\mathrm{e}^y\sin x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\cos x-1-y-1)\mathrm{e}^y=(\cos x-y-2)\mathrm{e}^y$.

在驻点$(k\pi,(-1)^k-1),k\in\mathbb{Z}$处，

$A=\frac{\partial^2 z(k\pi,(-1)^k-1)}{\partial x^2}=-[1+\mathrm{e}^{(-1)^k-1}]\cos k\pi=-[1+\mathrm{e}^{(-1)^k-1}](-1)^k$,

$B=\frac{\partial^2 z(k\pi,(-1)^k-1)}{\partial x\partial y}=-\mathrm{e}^{(-1)^k-1}\sin k\pi=0$,

$C=\frac{\partial^2 z(k\pi,(-1)^k-1)}{\partial y^2}=[\cos k\pi-(-1)^k+1-2]\mathrm{e}^{(-1)^k-1}=-\mathrm{e}^{(-1)^k-1}$,

$$AC-B^2=\mathrm{e}^{(-1)^k-1}[1+\mathrm{e}^{(-1)^k-1}](-1)^k=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-2}(1+\mathrm{e}^{-2})<0, & k=2n-1,\\ 2>0, & k=2n,\end{cases}\ n\in\mathbb{Z},$$

故当k为奇数时$(k\pi,(-1)^k-1)$不是极值点；当k为偶数时，$A=-2<0$，故$(k\pi,(-1)^k-1)$是极大值点.

因此函数$z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$有无穷多个极大值而无极小值.

5.6 习题11.4解答

1. 在抛物线$y^2=4x$上求一点，使其到点$(2,8)$的距离最短.

   解：抛物线$y^2=4x$的点与点$(2,8)$的距离的平方

   $$d^2=(x-2)^2+(y-8)^2=(\frac{1}{4}y^2-2)^2+(y-8)^2,$$

   $\therefore$

   $$\frac{\mathrm{d}d^2}{\mathrm{d}y}=2(\frac{1}{4}y^2-2)\frac{1}{2}y+2(y-8)=\frac{1}{4}y^3-2y+2y-16=\frac{1}{4}y^3-16,$$

   令$\frac{\mathrm{d}d^2}{\mathrm{d}y}=0$得$y=4$，此时$x=4$，则抛物线$y^2=4x$上到点$(2,8)$的距离最短的点为$(4,4)$.

   【关于最值的分析：】在抛物线$y^2=4x$上当$y=8$时$x=4>2$，故点$(2,8)$在抛物线开口外部，则以点$(2,8)$为圆心作圆与抛物线相切，这样的圆只有一个，其半径为抛物线上的到点$(2,8)$距离的最小值. 该最小值也是极小值，满足导数为零的条件，现在满足导数为零条件的点只有一个，则该点就是最小值点.

2. 在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$内嵌入一长方体，使其体积最大，并求此最大值.

   解：设该长方体在第一象限内的顶点为$(x,y,z),x>0,y>0,z>0$，问题转化为条件极值问题$\begin{cases}\max\{8xyz\},\\ s.t.\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$

   令$L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$，

   由$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=8yz-2\lambda\frac{x}{a^2}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=8xz-2\lambda\frac{y}{b^2}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial z}=8xy-2\lambda\frac{z}{c^2}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$ 得$(x,y,z)=(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$，

   故当该长方体在第一卦限内的顶点为$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$时，体积最大，最大值为$V_{\max}=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$.

   【关于最值的分析：】在第一象限内椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,x>0,y>0,z>0$的边界上，长方体的体积为0，在第一象限的椭球面内部，$0<V=8xyz<8abc$，V有上界，故有上确界，易知此时的上确界是$V=8xyz$的最大值. 最大值也是极值，满足极值存

在的必要条件，现在根据极值存在的必要条件只求出了一个点，故该点是唯一的最值点，故是最大值点.

3. 求$f(x,y)=x^2+y^2-x-y$在$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$上的最大值与最小值.

解：由$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x-1=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y-1=0,\end{cases}$ 得$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

令$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-x-y+\lambda(x^2+y^2-1)$，由$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x-1+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y-1+2\lambda y=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1=0,\end{cases}$

得$(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\because f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}, f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=1-\sqrt{2}, f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=1+\sqrt{2}$,

$\therefore f(x,y)$在B上的最大值为$1+\sqrt{2}$，最小值为$-\frac{1}{2}$.

4. 求函数$f(x,y,z)=x^2y^2z^2$在约束条件$x^2+y^2+z^2=c^2$下的最大值，并证明不等式

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$$

解：条件极值问题$\begin{cases}\max\{x^2y^2z^2\},\\ s.t.\ x^2+y^2+z^2=c^2,\end{cases}$ 等价为在$u>0,v>0,w>0$时的条件极值问题$\begin{cases}\max\{uvw\},\\ s.t.\ u+v+w=c^2,\end{cases}$

令$L(u,v,w,\lambda)=uvw+\lambda(u+v+w-c^2)$，由$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial u}=vw+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial v}=uw+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial w}=uv+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=u+v+w-c^2=0,\end{cases}$

得$(u,v,w)=(\frac{c^2}{3},\frac{c^2}{3},\frac{c^2}{3})$，则所求最大值为$f(\frac{c}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})=\frac{c^6}{27}$(不妨设$c>0$).

对任意实数x,y,z，取$c^2=x^2+y^2+z^2$，则

$$x^2y^2z^2\le\frac{c^6}{27}=\frac{x^2+y^2+z^2}{27},$$

即

$$\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$$

【关于最值的分析：】在第一象限的平面$u+v+w=c^2,u>0,v>0,w>0$上，$0<uvw<c^6$，uvw有上界，故有上确界，易知该上确界也是最大值. 最大值也是极大值，

满足极值存在的必要条件，现在根据该必要条件只求出了一个点，则该点就是最大值点.

5. 设x,y为任意正数，求证
$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant(\frac{x+y}{2})^n.$$
(提示：在约束条件$x+y=a$下，求$z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$的极值.)

证明：当$n=1$时，$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant(\frac{x+y}{2})^n$显然成立；

当$n\geqslant 2$时，对于任意正数x,y，求解条件极值问题$\begin{cases}\min\{\frac{1}{2}(x^n+y^n)\},\\ s.t.\ x+y=a,\end{cases}$

令$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)+\lambda(x+y-a)$,

由$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{n}{2}x^{n-1}+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{n}{2}y^{n-1}+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-a=0,\end{cases}\quad(*)$得$(x,y)=(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$，

故$z(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)\geqslant z(\frac{a}{2},\frac{a}{2})=(\frac{a}{2})^n$.

对于任意正数x,y，取$a=x+y$，则
$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant(\frac{a}{2})^n=(\frac{x+y}{2})^n.$$

【注意:】(1)这里n的范围应为正整数；(2)当$n=1$时，线段$x+y=1,x>0,y>0$上的任意一点均满足方程组$(*)$，可能的极值点不唯一，故应分成$n=1$和$n\geqslant 2$两种情况考虑. 这也和$n=1$时在线段$x+y=1,x>0,y>0$上$\frac{1}{2}(x^n+y^n)=\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}a$为常数一致.

【关于最值的分析:】当$n=1$时，在线段$x+y=1,x>0,y>0$上$\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}$；

当$n=2$时，$\frac{1}{2}(x^2+y^2)$在线段$x+y=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$的两端点处等于$\frac{1}{2}$，在该线段的内部因$0<x<1,0<y<1$，故$\frac{1}{2}(x^2+y^2)<\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}$；

同理，当$n=3$时，$\frac{1}{2}(x^3+y^3)$在线段$x+y=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$的两端点处等于$\frac{1}{2}$，在该线段的内部因$0<x<1,0<y<1$，故$\frac{1}{2}(x^3+y^3)<\frac{1}{2}(x^2+y^2)<\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}$.

故$\forall(x,y)\in\{(x,y)\mid x+y=1,x>0,y>0\},\frac{1}{2}(x^n+y^n)<\cdots<\frac{1}{2}(x^3+y^3)<\frac{1}{2}(x^2+y^2)<\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}$，因为在线段$x+y=1,x>0,y>0$上$\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}[x^2+(1-x)^2]=x(x-1)+\frac{1}{2}$，为一开口向上的抛物线，最高的两点的值为$\frac{1}{2}$，故当$n\geqslant 2$时$\frac{1}{2}(x^n+y^n)$在线段$x+y=1,x>0,y>0$上均为下凸函数，则$\frac{1}{2}[(\frac{x}{a})^n+(\frac{y}{a})^n]=\frac{1}{2a^n}(x^n+y^n)$在线段$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1,x>0,y>0$上也为下凸函数，则$\frac{1}{2}(x^n+y^n)$在线段$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1,x>0,y>0$即$x+y=a,x>0,y>0$上也为下凸函数，故必有最小值. 最小值也是极小值，满足极值的必要条件，因满足极值必要条件的点只有一个，故该点就是最小值点.

6. 求曲面$S_1: z=x^2+y^2$与$S_2: x+y+z=1$的交线上到原点的距离最大与最小的点.

解：曲面S_1与S_2的交线上的点(x,y,z)到原点的距离$r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，问题是求解条件极值$\begin{cases}\max(\min)\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\},\\ s.t.\quad z=x^2+y^2,\\ \qquad x+y+z=1,\end{cases}$ 可化为条件极值问题$\begin{cases}\max(\min)\{x^2+y^2+z^2\},\\ s.t.\quad z=x^2+y^2,\\ \qquad x+y+z=1,\end{cases}$

令$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$，

由$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x+\mu=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y+\mu=0,\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2z-\lambda+\mu=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-z=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \mu}=x+y+z-1=0,\end{cases}$ 得$(x,y,z)=(\frac{\pm\sqrt{3}-1}{2},\frac{\pm\sqrt{3}-1}{2},2\mp\sqrt{3})$,

由$r(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3})=\sqrt{9-5\sqrt{3}}, f(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3})=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$得曲面$S_1$与$S_2$的交线上到原点距离最大的点为$(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3})$，距离最小的点为$(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3})$.

【关于最值的分析：】旋转抛物面S_1与平面S_2的交线是一条光滑封闭曲线，在该曲线上必有到原点距离最大和最小的点，这两点均是极值点，满足极值的必要条件，现在根据极值的必要条件只求出两个点，故这两个点一个是最大值点，一个是最小值点.

7. 将长为l的线段分成三份，分别围成圆、正方形和正三角形，问如何分割才能使他们的面积之和最小，并求此最小值.

解：设x,y,z分别是围成圆、正方形和正三角形的线段长度，问题是求解条件极值

$$\begin{cases}\min\{f(x,y,z)=\pi(\frac{x}{2\pi})^2+(\frac{y}{4})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{z}{3})^2\},\\ s.t.\quad x+y+z=l,\end{cases}$$

令$L(x,y,z,\lambda)=\pi(\frac{x}{2\pi})^2+(\frac{y}{4})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{z}{3})^2+\lambda(x+y+z-l)$,

由$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{1}{8}y+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y+z-l=0,\end{cases}$ 得$(x,y,z)=(\frac{\pi l}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{4l}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{3\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}})$,

故当围成圆、正方形和三角形的三条线段的长度分别为$\frac{\pi l}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{4l}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{3\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$时，它们的面积和最小，最小值为$f(\frac{\pi l}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{4l}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{3\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}})=\frac{(\pi+4+3\sqrt{3})l^2}{4(\pi+4+3\sqrt{3})^2}$.

【关于最值的分析：】当椭球面$S=\pi(\frac{x}{2\pi})^2+(\frac{y}{4})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{z}{3})^2\}$与第一象限的平面$x+y+z=l$相切时，$S$为最小，切点位于第一象限，故满足条件的最小值点存在，最小值点也是

极小值点，满足极值的必要条件，现在根据极值的必要条件只求出了一个点，故该点就是最小值点.

5.7 第11章补充题解答

1. 确定正数a，使得椭球面$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=a^2$与平面$x-2y+3z=100$相切.

   解：方法1：平面$x-2y+3z=100$的法向量$\boldsymbol{n}_0=(1,-2,3)$,

   设切点为(x_0,y_0,z_0)，椭球面在切点处的法向量$\boldsymbol{n}=(2x,\frac{1}{2}y,\frac{2}{9}z)\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,\frac{1}{2}y_0,\frac{2}{9}z_0)$,

   由$\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{n}_0$知$(2x_0,\frac{1}{2}y_0,\frac{2}{9}z_0)=\lambda(1,-2,3)$，又知切点$(x_0,y_0,z_0)$应满足直线方程$x_0-2y_0+3z_0=100$，可得$\lambda=\frac{100}{49}$,

   故$a^2=x_0^2+\frac{y_0^2}{4}+\frac{z_0^2}{9}=\frac{\lambda^2}{4}+4\lambda^2+\frac{81}{4}\lambda^2=\frac{98}{4}(\frac{100}{49})^2=\frac{5000}{49}$, $a=\frac{50}{7}\sqrt{2}$.

   方法2：如限定椭球面$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=a^2$与平面$x-2y+3z=100$相交或相切，则当相切时$a^2$最小，因此问题等价于条件极值问题$\begin{cases}\min x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9},\\ s.t.\ x-2y+3z=100,\end{cases}$

   令$L(x,y,z,\lambda)=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+\lambda(x-2y+3z-100)$,

   由$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{1}{2}y-2\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial z}=\frac{2}{9}z+3\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x-2y+3z-100=0,\end{cases}$ 得$(x,y,z)=-\frac{100}{49}(-\frac{1}{2},4,-\frac{27}{2})$,

   故所求最小值为$a^2=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=(\frac{1}{4}+4+\frac{81}{4})(\frac{100}{49})^2=\frac{5000}{49}$, $a=\frac{50}{7}\sqrt{2}$.

2. 设$f(x,y)$在全平面内可微，并且当$x^2+y^2\to+\infty$时，满足条件

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to+\infty.$$

   求证：对于任意向量$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$，存在点$M(x_0,y_0)$，使得$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=\boldsymbol{v}$.

   证明：$\because \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to+\infty, x^2+y^2\to+\infty$,

   $\therefore |f(x,y)|=\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty, x^2+y^2\to+\infty$,

   下面证明：当$x^2+y^2\to+\infty$时，或者$f(x,y)\to+\infty$或者$f(x,y)\to-\infty$.

   $\because |f(x,y)|\to+\infty, x^2+y^2\to+\infty$,

   $\therefore \exists R>0, s.t.$当$x^2+y^2>R^2$时，$|f(x,y)|>1$,

   假设当$x^2+y^2\to+\infty$时，既不是$f(x,y)\to+\infty$，也不是$f(x,y)\to-\infty$. 则必存在两点$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$，满足$x_1^2+y_1^2>R^2, x_2^2+y_2^2>R^2$，且$f(x_1,y_1)<0, f(x_2,y_2)>0$.

以点$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$分别为起点和终点做一条完全位于圆域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$之外的连续曲线$L$，在该曲线上$f(x,y)$为一元连续函数，根据零点定理$\exists M(\xi,\eta)\in L, s.t. f(\xi,\eta)=0$. 但在曲线$L$上$x^2+y^2>R^2$，故$\forall(x,y)\in L,|f(x,y)|>1$，与$\exists M(\xi,\eta)\in L, s.t. f(\xi,\eta)=0$矛盾. 故假设不成立.

所以当$x^2+y^2\to+\infty$时，或者$f(x,y)\to+\infty$或者$f(x,y)\to-\infty$.

对于任意向量$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$，

$\because |\frac{v_1x+v_2y}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le\frac{|v_1||x|+|v_2||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{|v_1||x|}{|x|}+\frac{|v_1||y|}{|y|}=|v_1|+|v_2|$,

$\therefore \frac{|f(x,y)-(v_1x+v_2y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\ge\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}-|\frac{v_1x+v_2y}{\sqrt{x^2+y^2}}|\ge\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}-(|v_1|+|v_2|)$,

$\because \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to+\infty, x^2+y^2\to+\infty$,

$\therefore \frac{|f(x,y)-(v_1x+v_2y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to+\infty, x^2+y^2\to+\infty$,

$\therefore$与证明当$x^2+y^2\to+\infty$时，或者$f(x,y)\to+\infty$或者$f(x,y)\to-\infty$同理，当$x^2+y^2\to+\infty$时，或者$f(x,y)-(v_1x+v_2y)\to+\infty$或者$f(x,y)-(v_1x+v_2y)\to-\infty$,

不妨设当$x^2+y^2\to+\infty$时，$f(x,y)-(v_1x+v_2y)\to+\infty$,

根据第10章补充题第1题的结论，$\exists(x_0,y_0), s.t. g(x,y)=f(x,y)-(v_1x+v_2y)\ge g(x_0,y_0)$.

则在点(x_0,y_0)处$\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}-v_1=0, \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}-v_2=0$，即$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})=(v_1,v_2)=\boldsymbol{v}$,

所以对于任意向量$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$，存在点$M(x_0,y_0)$，使得$\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=\boldsymbol{v}$.

3. 设$f(x,y)=3x^4-4x^2y+y^2$. 求证：若限制在过原点的每条直线上，$f(x,y)$在原点达到极小值. 但是原点不是$f(x,y)$的极小值.

证明：(1)$f(0,y)=y^2$在$y=0$处达到极小值，即在直线$x=0$上$f(x,y)$在原点处达到极小值.

(2)记$g(x)=f(x,kx)=3x^4-4kx^3+k^2x^2$,

则$g'(x)=12x^3-12kx^2+2k^2x,\ g''(x)=36x^2-24kx+2k^2$,

i)当$k\ne0$时，$g'(0)=0,\ g''(0)=2k^2>0$，$g(x)$在点$x=0$处取得极小值;

ii)当$k=0$时，$g(x)=3x^4$，$g(x)$在点$x=0$处取得极小值.

故在直线$y=kx$上$f(x,y)$在原点处达到极小值.

所以在过原点的每条直线上，$f(x,y)$在原点达到极小值.

$\because \frac{\partial f}{\partial x}=12x^3-8xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-4x^2+2y$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=36x^2-8y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-8x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$,

$\therefore$在原点$(0,0)$处$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$，

且$A=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=0$，$B=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=0$，$C=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=2$，$AC-B^2=0$，

又$\because$ $f(x,2x^2)=3x^4-8x^4+4x^4=-x^4$在$x=0$处取得极大值，即在抛物线$y=2x^2$上$f(x,y)$在原点处取得极大值，故原点不是$f(x,y)$的极小值.