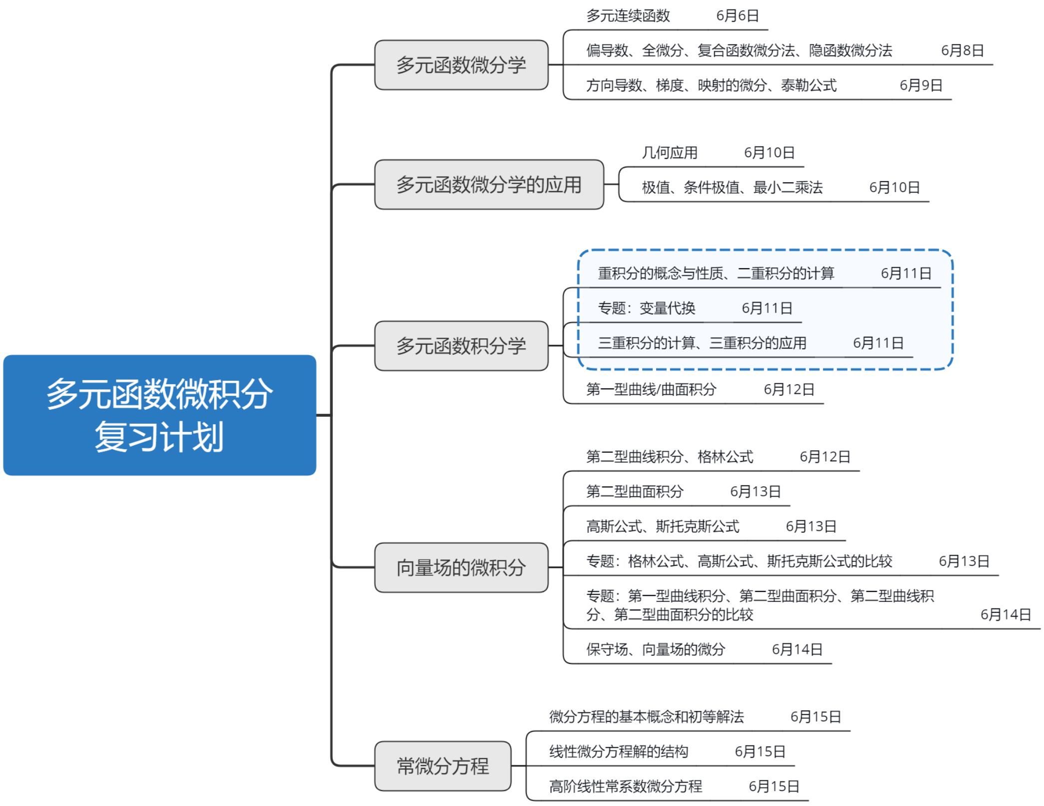
6 重积分的概念与性质、二重积分的计算

6.1 复习计划



6.2 知识结构

- 多元函数积分学
  - 重积分的概念与性质
    - 重积分的概念
      - 几何与物理意义
        - 曲顶柱体的体积
        - 非均匀薄板的质量
        - 划分、取点、求和、取极限
      - 重积分的定义
        - 二重积分的定义
          - 平面区域的划分、划分的子域、子域直径、划分直径
          - 定义 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(x_k,y_k)\Delta\sigma_k$
          - 几何意义
            - $\iint_D \mathrm{d}\sigma$ 为区域D的面积
            - $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为曲顶柱体的体积
        - 三重积分的定义
      - 可积的必要条件 $f(x,y)$ 在有界闭域 D上可积$\Rightarrow f(x,y)$在D上有界，即$\exists M>0, s.t. |f(x,y)|\leqslant M, (x,y)\in D$
      - 可积的充分条件 $f(x,y)$ 在有界闭域D上连续$f(x,y)$在D上可积
    - 重积分的性质
      - 线性性质 $\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$
      - 区域可加性 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
      - 区域对称性、被积函数的奇偶性
        - 积分域D关于x轴对称且$f(x,-y)=-f(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$
        - 积分域D关于y轴对称且$f(-x,y)=-f(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$
        - 积分域Ω关于xOy平面对称且$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\Rightarrow \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = 0$
        - 积分域D关于x轴对称且$f(x,-y)=f(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
        - 积分域D关于y轴对称且$f(-x,y)=f(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
      - 比较定理(保序性) $f(x,y)\leqslant g(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$
      - 估值定理 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M \Rightarrow mA(D)\leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MA(D)$
      - 绝对值函数的可积性 $f(x,y)$在有界闭域D上可积,则函数$|f(x,y)|$在D上可积,且$|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$
      - 积分中值定理 $f(x,y)\in C(D)\Rightarrow \exists(\xi,\eta)\in D, s.t. \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A(D)$
  - 二重积分的计算
    - 二重积分在直角坐标系下的计算
      - 长方形区域 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$
      - 一般区域
        - $D=\{(x,y)|x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y), c\leqslant y\leqslant d\}\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$
        - $D=\{(x,y)|y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}\Rightarrow \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$
    - 二重积分的变量替换
      - 变量替换的Jacobi行列式
        - $\begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases} \Rightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = |\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{|\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
      - 二重积分的变量替换公式 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x(u,v),y(u,v))|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
    - 二重积分的极坐标变换 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$
      - $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$
      - $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$
  - 三重积分的计算与应用
  - 第一型曲线积分
  - 第一型曲面积分

6.3 重要知识

6.4 习题分类与解题思路

1. 重积分的概念和性质

   (a) 考查重积分的几何意义.

   【如习题12.1中的1.(1)/(2).】

   (b) 考查重积分的估值定理.

   【如习题12.1中的2.(1)/(2).】

   (c) 考查重积分的比较定理.

   【如习题12.1中的3.(1)/(2).】

   (d) 考查积分域的可加性.

   【如习题12.1中的4.】

   (e) 考查积分值中值定理.

   【如习题12.1中的5.】

   (f) 考查对称性和奇偶性.

   【如习题12.1中的6.】

2. 二重积分的计算.

   (a) 利用直角坐标系下的计算公式计算.

   【如习题12.2中的1.(1)/(2)/(3)/(4)/(5).】

   (b) 利用极坐标系下的计算公式计算.

   【如习题12.2中的2.(1)/(2)/(3)/(4).】

   (c) 交换积分顺序. 关键是写出不同积分顺序下积分域的集合表示.

   【如习题12.2中的3., 4.】

   (d) 利用对称性计算二重积分的值.

   【如习题12.2中的5. 该题的技巧大家可以做一个积累.】

6.5 习题12.1解答

1. 利用重积分的几何意义求下列积分值：

   (1)$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$;

   (2)$\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1, y-x\leqslant 1, y\geqslant 0\}$.

解：(1)$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$的大小是曲面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$与平面$z=0$围成区域的体积，即等于半径为$a$的半球的体积，故

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

(2)区域D的图形如图 1所示，

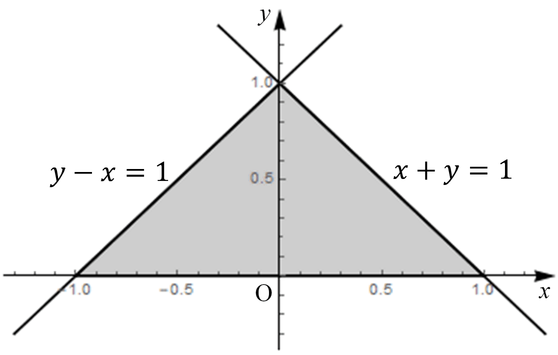


图 1: 习题12.1 1.(2)题图示

积分$\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma$表示以区域$D$为底，高为2的棱柱体的体积，故

$$\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma=2\times(\frac{1}{2}\times1\times2)=2.$$

2. 利用重积分的性质估计下列积分值：

(1)$\iint\limits_D(1+y)x\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1, x\geqslant0, y\geqslant0\}$;

(2)$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant4x\}$.

解：(1)令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1, x\geqslant0, y\geqslant0\}$
$=\big\{(r,\theta)\bigm| 0\leqslant r\leqslant1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\big\}$,

$\because$当$0\leqslant r\leqslant1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$0\leqslant\cos\theta\leqslant1, 0\leqslant\sin2\theta\leqslant1$,

$\therefore (1+y)x=(1+r\sin\theta)r\cos\theta=r\cos\theta+r^2\sin\theta\cos\theta=r\cos\theta+\frac{1}{2}r^2\sin2\theta\in[0,\frac{3}{2}]$,

$\because \iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore 0\leqslant\iint\limits_D(1+y)x\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{3}{2}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{8}\pi$，即$\iint\limits_D(1+y)x\mathrm{d}\sigma\in[0,\frac{3}{8}\pi]$.

(2)方法1：$\because 2x\leqslant x^2+y^2\leqslant4x \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2\geqslant2x,\\ x^2+y^2\leqslant4x,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2\geqslant1,\\ (x-2)^2+y^2\leqslant4,\end{cases}$

$\therefore$区域D如图 2所示，

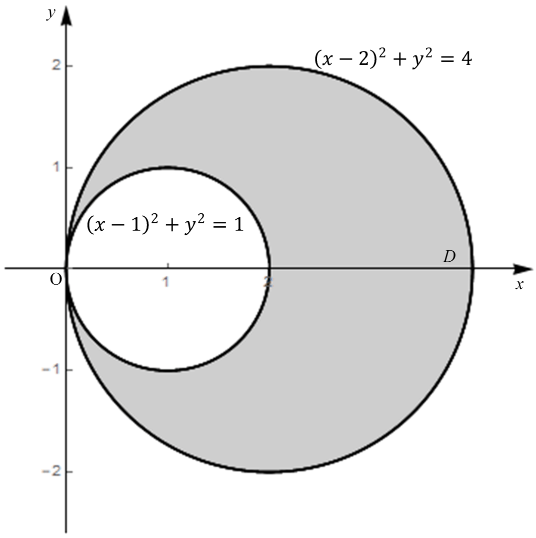


图 2: 习题12.1 2.(2)题图示

由图 2可知$0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4^2+0^2=16$,

$\because \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 2^2\pi - 1^2\pi = 3\pi$,

$\therefore 0 \leqslant \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma \leqslant 16\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 48\pi$.

方法2：令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则$D=\{(x,y) \mid 2x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4x\}$

$=\{(r,\theta) \mid 2r\cos\theta \leqslant r^2 \leqslant 4r\cos\theta\} = \{(r,\theta) \mid 2\cos\theta \leqslant r \leqslant 4\cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$,

$\therefore 0 \leqslant 2\cos^2\theta \leqslant r^2 \leqslant 16\cos^2\theta \leqslant 16$，即$0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4^2+0^2=16$,

$\because \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 2^2\pi - 1^2\pi = 3\pi$,

$\therefore 0 \leqslant \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma \leqslant 16\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = 48\pi$.

3. 比较下列各组积分值的大小：

(1)$\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y) \mid (x-2)^2+(y-2)^2 \leqslant 2\}$;

(2)$\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中$D$由直线$x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}$及$x+y=1$围成.

解：(1)区域D的图形如图 3所示，

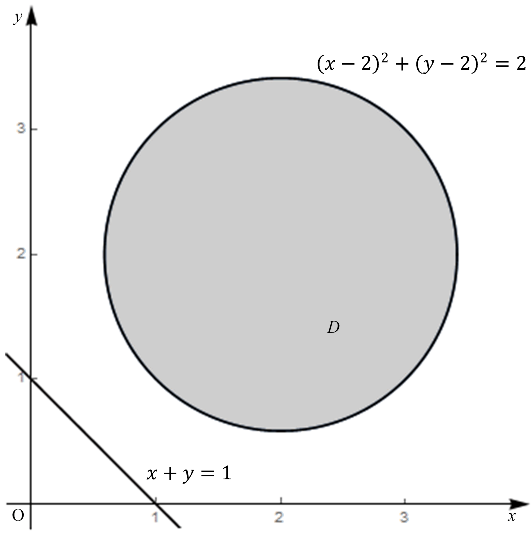


图 3: 习题12.1 3.(1)题图示

由图 3可知在区域D上$x+y>1$，则$(x+y)^2<(x+y)^3$,

$\therefore \iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma < \iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma.$

(2)区域D的图形如图 4所示，

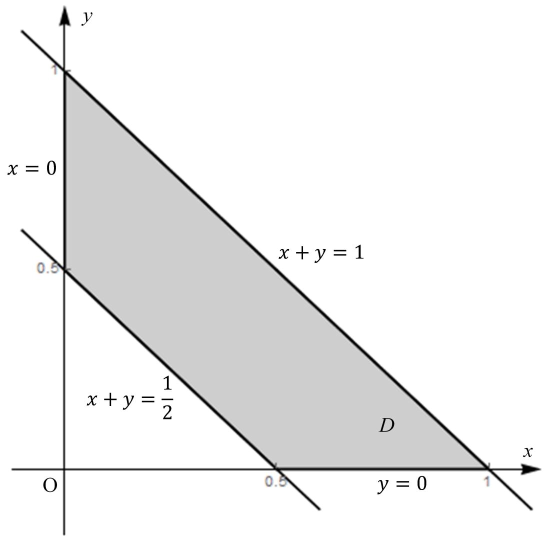


图 4: 习题12.1 3.(2)题图示

由图 3可知在区域D上$0<x+y\leqslant 1$，则$\ln(x+y)\leqslant 0\leqslant xy$,

$\therefore \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma < 0 < \iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma.$

4. 设$D \subset \mathbb{R}^2$是一有界闭域，$f(x,y) \in C(D)$且非负，试证：若$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$，则$f(x,y) \equiv 0, \forall (x,y) \in D.$

证明：假设$f(x,y)$不恒为0，

$\because f(x,y) \in C(D)$且非负，

$\therefore \exists P(x_0,y_0) \in D$满足$f(x_0,y_0) > 0$，且存在$P(x_0,y_0)$的一个邻域$N(P,\delta)$使得$f(x,y) > \frac{1}{2}f(x_0,y_0) > 0$，

$\therefore \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{N(P,\delta)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D\setminus N(P,\delta)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_{N(P,\delta)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + 0 > 0$，这与$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$矛盾，

$\therefore$假设不成立，

$\therefore f(x,y) \equiv 0, \forall (x,y) \in D.$

5. 证明：若$f(x,y) \in C(D), g(x,y) \in R(D)$且不变号，则$\exists (\xi,\eta) \in D$使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

证明：$\because f(x,y) \in C(D)$,

$\therefore \exists P, Q \in D, s.t.\ f(P) = m, f(Q) = M,$且$m \leqslant f(x,y) \leqslant M, \forall (x,y) \in D,$

$\because g(x,y) \in R(D)$且不变号，不妨设$g(x,y) \geqslant 0,$

$\therefore mg(x,y) \leqslant f(x,y)g(x,y) \leqslant Mg(x,y),$

$\therefore m\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma,$

$\therefore$

i)当$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0$时$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0,$故$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$成立；

ii)当$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma \neq 0$时$m \leqslant \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma} \leqslant M$，由连续函数的介值定理知$\exists (\xi,\eta) \in D$满足

$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma},$$

即

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

6. 利用性质7的结论计算下列积分（其中区域D为圆盘$x^2+y^2\leqslant R^2$）：

(1)$\iint\limits_D y\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}\sigma$;　(2)$\iint\limits_D y^3x^2\mathrm{d}\sigma$;

(3)$\iint\limits_D x^5\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$;　(4)$\iint\limits_D x^m y^n\mathrm{d}\sigma$.

解：(1)因为区域D关于x轴对称，被积函数$f(x,y)=y\sqrt{R^2-x^2}=-f(x,-y)$关于$y$是奇函数，故$\iint\limits_D y\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}\sigma=0$.

(2)因为区域D关于x轴对称，被积函数$f(x,y)=y^3x^2=-f(x,-y)$关于y是奇函数，故$\iint\limits_D y^3x^2\mathrm{d}\sigma=0$.

(3)因为区域D关于y轴对称，被积函数$f(x,y)=x^5\sqrt{R^2-y^2}=-f(-x,y)$关于$x$是奇函数，故$\iint\limits_D x^5\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=0$.

(4)区域D关于x轴和y轴均对称，

i)当m与n都是偶数时,$f(x,y)=x^my^n=f(-x,y)=f(x,-y)$关于$x$和$y$均是偶函数,故$\iint\limits_D x^my^n\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}x^my^n\mathrm{d}\sigma$,其中$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$;

ii)当m与n都是奇数时,$f(x,y)=x^my^n=-f(-x,y)$关于x是奇函数,$\iint\limits_D x^my^n\mathrm{d}\sigma=0$;

iii)当m是奇数n是偶数时,$f(x,y)=x^my^n=-f(-x,y)$关于x是奇函数,$\iint\limits_D x^my^n\mathrm{d}\sigma=0$;

iv)当m是偶数n是奇数时,$f(x,y)=x^my^n=-f(x,-y)$关于y是奇函数,$\iint\limits_D x^my^n\mathrm{d}\sigma=0$.

综上所述,当m,n均为偶数时,$\iint\limits_D x^my^n\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}x^my^n\mathrm{d}\sigma$,其中$D_1$为区域$D$落在第一象限的部分;当$m,n$中至少有一个奇数时,$\iint\limits_D x^my^n\mathrm{d}\sigma=0$.

6.6　习题12.2解答

1. 计算下列二重积分：

(1)$\iint\limits_D\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma, D$是由$x=0,y=\pi$和$y=x$围成的区域；

(2)$\iint\limits_D xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma, D$是由$y=x^3,y=1$和$x=-1$围成的区域；

(3)$\iint\limits_D\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$由直线$x=0,y=x,y=\pi$围成；

(4)$\iint\limits_D|x^2-y|\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$；

(5)$\iint\limits_D\frac{x\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$由$y=x,y=x^2$围成.

解：(1)方法1：$\iint\limits_D\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_x^\pi\cos(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^\pi\sin(x+y)\big|_x^\pi\mathrm{d}x$

$=\int_0^\pi[\sin(x+\pi)-\sin 2x]\mathrm{d}x=\int_0^\pi(-\sin x-\sin 2x)\mathrm{d}x=\cos x\big|_0^\pi+\frac{1}{2}\cos 2x\big|_0^\pi$

$=-1-1+\frac{1}{2}(1-1)=-2$.

方法2：$\iint\limits_D \cos(x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \mathrm{d}y \int_0^y \cos(x+y)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(x+y)\big|_0^y \mathrm{d}y$

$= \int_0^\pi (\sin 2y - \sin x)\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\cos 2y\big|_0^\pi + \cos x\big|_0^\pi = -\frac{1}{2}(1-1)+(-1-1) = -2.$

(2)区域D如图 5所示，

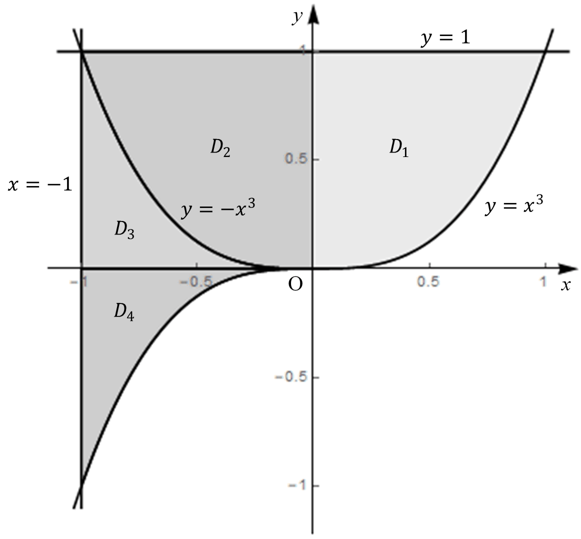


图 5: 习题12.2 1.(2)题图示

可将区域D划分为图中的四个区域，其中D_1与D_2关于y轴对称，D_3与D_4关于x轴对称，被积函数$f(x,y) = xy\ln(1+x^2+y^2)$关于$x$和$y$均为奇函数，

$\therefore \iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}y\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} x\mathrm{d}y\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = 0,$

$\iint\limits_{D_3} xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_4} xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = 0,$

$\therefore \iint\limits_{D} xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$

$= \iint\limits_{D_1} xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_3} xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$

$+ \iint\limits_{D_4} xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = 0.$

(3)方法1：$\iint\limits_D \sin(x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \mathrm{d}y \int_0^y \sin(x+y)\mathrm{d}x = \int_0^\pi -\cos(x+y)\big|_0^y \mathrm{d}y$

$= \int_0^\pi (-\cos y + \cos 2y)\mathrm{d}y = (-\sin y + \frac{1}{2}\sin 2y)\big|_0^\pi = 0.$

方法2：$\iint\limits_D \sin(x+y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_x^\pi \sin(x+y)\mathrm{d}x = \int_0^\pi -\cos(x+y)\big|_x^\pi \mathrm{d}x$

$= \int_0^\pi [-\cos(\pi+x) + \cos 2x]\mathrm{d}x = \int_0^\pi (\cos x + \cos 2x)\mathrm{d}x = (\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x)\big|_0^\pi = 0.$

(4)将积分域D划分为以下两个区域$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

和$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$,

则$\iint\limits_D|x^2-y|\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(y-x^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1(y-x^2)\mathrm{d}y$
$=\int_1^0(x^2y-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1(\frac{1}{2}y^2-x^2y)\Big|_{x^2}^1\mathrm{d}x=\int_1^0(x^4-\frac{1}{2}x^4)\mathrm{d}x+\int_0^1(\frac{1}{2}-x^2-\frac{1}{2}x^4+x^4)\mathrm{d}x$
$=\int_0^1(2x^4-x^4-x^2+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=\int_0^1(x^4-x^2+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x)\Big|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{11}{30}.$

(5)$\iint\limits_D\frac{x\sin y}{y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\frac{1}{2}x^2\Big|_y^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\frac{1}{2}(y-y^2)\mathrm{d}y$
$=\frac{1}{2}\int_0^1(\sin y-y\sin y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(-\cos y\Big|_0^1+y\cos y\Big|_0^1-\int_0^1\cos y\mathrm{d}y)$
$=\frac{1}{2}(1-\cos 1+\cos 1-\sin y\Big|_0^1)=\frac{1}{2}(1-\sin 1).$

注意：该题应先对x积分后对y积分，因$\frac{\sin y}{y}$无初等原函数，故不能先对y积分.

2. 计算下列二重积分：

(1)$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2\};$

(2)$\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\};$

(3)$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geq 0, y\geq 0\};$

(4)$\iint\limits_D|x^2+y^2-4|\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 16\}.$

解：(1)$\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\pi^{2\pi}r\sin r\mathrm{d}r=2\pi(-r\cos r\Big|_\pi^{2\pi}+\int_\pi^{2\pi}\cos r\mathrm{d}r)$
$=2\pi(-2\pi-\pi+\sin r\Big|_\pi^{2\pi})=-6\pi^2.$

(2)$\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\pi\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\pi\ln 2.$

(3)$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\arctan(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta})\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\mathrm{d}r=(\frac{1}{2}\theta^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})(\frac{1}{2}r^2\Big|_1^2)=\frac{3\pi^2}{16}.$

(4)$\iint\limits_D|x^2+y^2-4|\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4|r^2-4|r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta[\int_0^2(4r-r^3)\mathrm{d}r+\int_2^4(r^3-4r)\mathrm{d}r]$
$=2\pi[(2r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^2+(\frac{1}{4}r^4-2r^2)\Big|_2^4]=2\pi(8-4+64-32-4+8)=80\pi.$

3. 改变下列累次积分中的积分顺序，并给出相应重积分的积分域的集合表示：

(1)$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x;$ (2)$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y;$

(3)$\int_0^a\mathrm{d}x\int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y;$ (4)$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y.$

解：(1)积分域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant y\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, x\leqslant y\leqslant 1\},$

则$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$

(2)积分域$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;-1\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$
$=\left\{(x,y)\;\middle|\;-1\leqslant y\leqslant 1,-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}\right\}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\},$

则$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$

(3)积分域$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\leqslant x\leqslant a, a-x\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}\right\}$
$=\left\{(x,y)\;\middle|\;0\leqslant y\leqslant a, a-y\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2}\right\}$
$=\{(x,y)\mid$ 直线$x+y=a$与圆$x^2+y^2=a^2$在第一象限围成的部分$\},$

则$\int_0^a \mathrm{d}x \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(4)积分域$D=\{(x,y) \mid 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}, 0\leqslant y\leqslant \ln x\}=\{(x,y) \mid 0\leqslant y\leqslant 1, \mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\}$,

则$\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

4. 将下列累次积分交换积分顺序：

(1)$\int_0^a \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$; (2)$\int_{-6}^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解：(1)积分域$D=\left\{(x,y) \,\middle|\, 0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant \sqrt{2ax-x^2}\right\}$
$=\left\{(x,y) \,\middle|\, 0\leqslant y\leqslant a, a-\sqrt{a^2-y^2}\leqslant x\leqslant y\right\}$,

则$\int_0^a \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(2)积分域$D=\left\{(x,y) \,\middle|\, -6\leqslant x\leqslant 2, \frac{1}{4}x^2-1\leqslant y\leqslant 2-x\right\}$
$=\left\{(x,y) \,\middle|\, 0\leqslant y\leqslant 8, -2\sqrt{1+y}\leqslant x\leqslant 2-y\right\}\cup\left\{(x,y) \,\middle|\, -1\leqslant y\leqslant 0, -2\sqrt{1+y}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{1+y}\right\}$,

则$\int_{-6}^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^8 \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

5. 已知函数f连续且$f>0$，试求$\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma$的值，其中$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

解：$\because$积分域D关于$y=x$对称，且在关于$y=x$的对称点(x,y)和$(x',y')=(y,x)$处
$\frac{f(x')}{f(x')+f(y')}=\frac{f(y)}{f(y)+f(x)}$,

$\therefore \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{f(x)+f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\pi a^2$,

$\therefore \iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\iint\limits_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + b\iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a+b}{2}\pi a^2$.