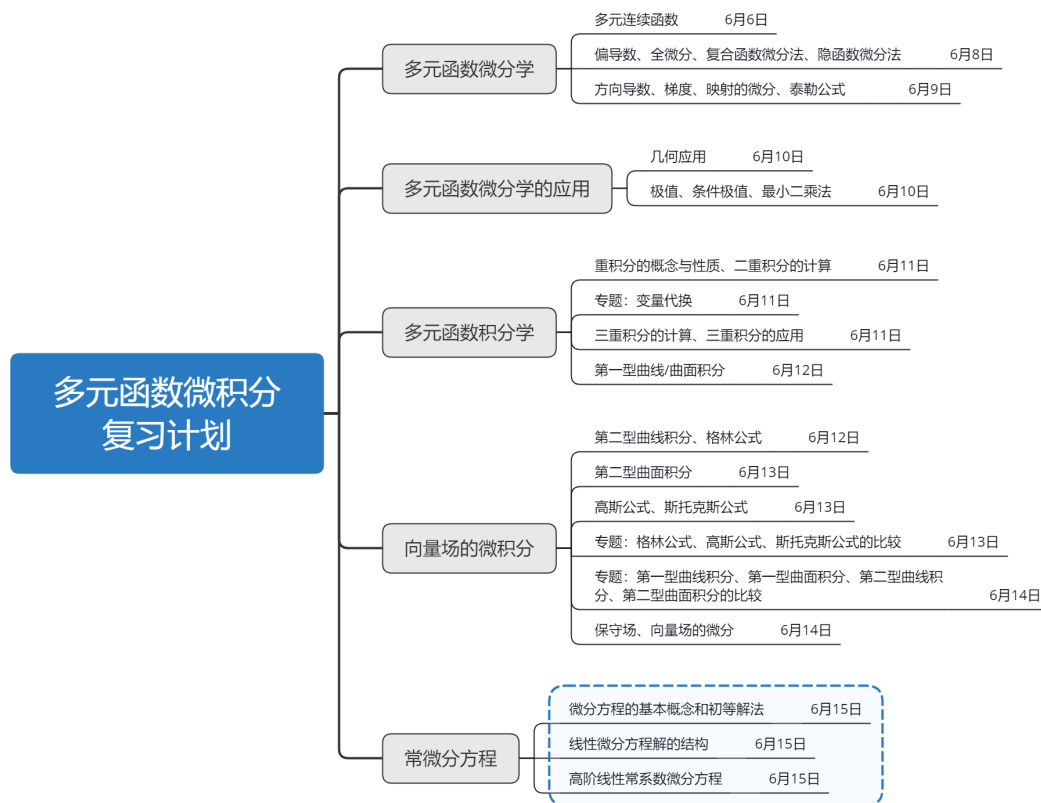
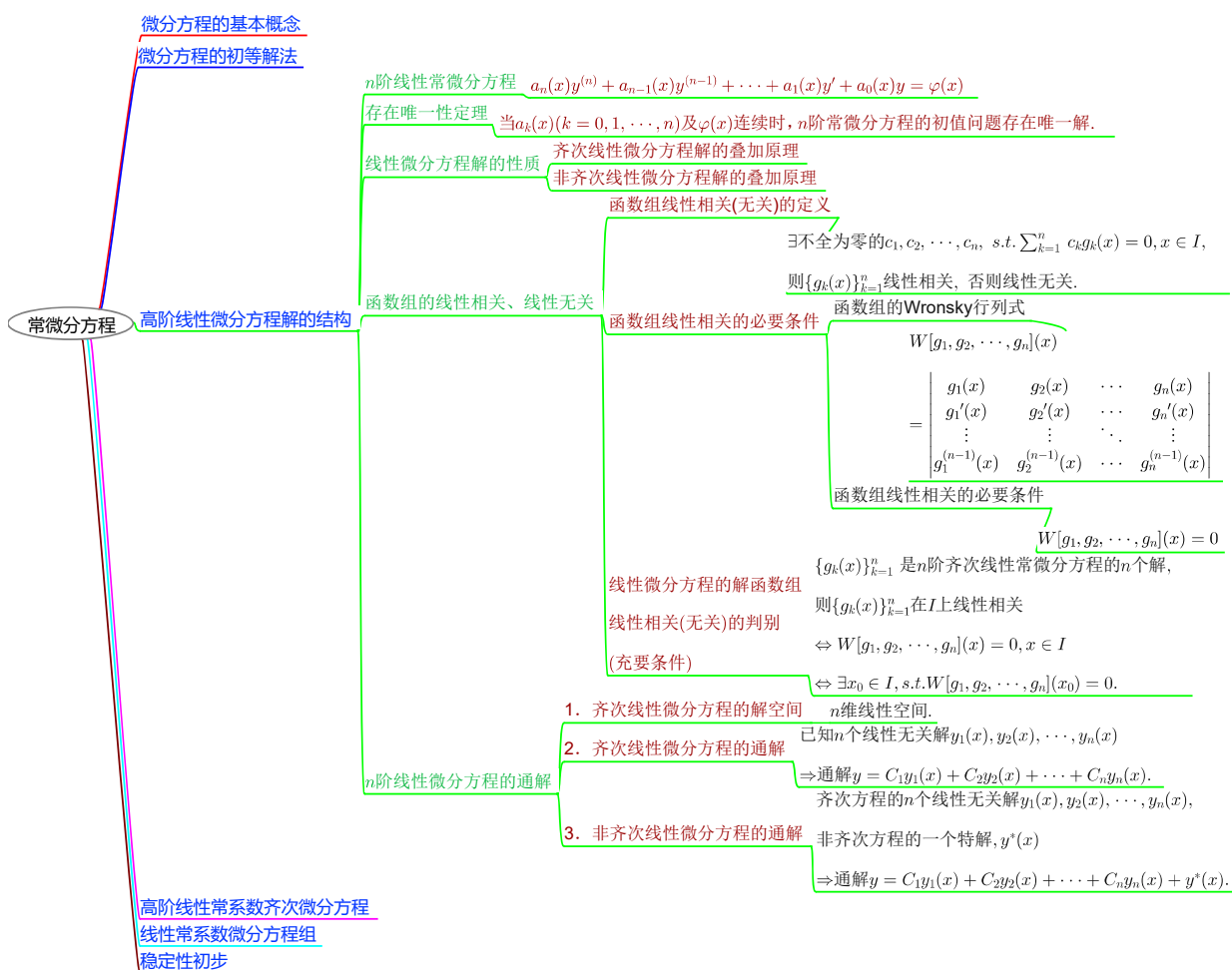


17 高阶线性微分方程解的结构

17.1 复习计划



17.2 知识结构



17.3 习题分类与解题思路

1. 判断函数组在定义区间内是否线性相关. 可参考以下思路:

第一步 计算Wronsky行列式. 若Wronsky行列式不恒等于零, 则函数组线性无关.

【如习题14.3中的1.(1)/(2)/(3)/(4)/(5)/(6).】

第二步 若Wronsky行列式恒等于零, 则可按照线性相关的定义, 判断是否存在不全为零的 $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\sum_{i=1}^n c_i g_i(x) = 0$, 若存在则线性相关, 若不存在则线性无关.

若已知函数组是 n 阶线性微分方程的解函数组, 则由Wronsky行列式恒等于零, 可直接得到该函数组线性相关.

2. 考查齐次和非齐次线性方程解的叠加原理.

【如习题14.3中的3.】

3. 考查线性微分方程解的存在唯一性定理.

【如习题14.3中的6.】

4. 考查 n 阶线性微分方程的解函数组线性相关(无关)判别的充要条件.

【如习题14.3中的7.】

5. 考查 n 阶齐次线性微分方程解的结构. n 阶齐次线性微分方程的解空间是 n 维线性空间, 找到该齐次线性微分方程的 n 个线性无关的解, 就可写出该齐次线性微分方程的通解.

【如习题14.3中的2.】

6. 考查 n 阶非齐次线性微分方程解的结构. 先确定该非齐次方程对应的齐次方程的 n 个线性无关的解, 从而求出齐次方程的通解, 加上该非齐次方程的一个特解即可得到该非齐次方程的通解.

【如习题14.3中的8.】

7. 其他类型的题目. 利用Wronsky行列式证明 n 阶非齐次线性微分方程有 $n+1$ 个线性无关的解.

【如习题14.3中的9.】

17.4 习题14.3解答

1. 判断下列函数组在其定义区间内是否线性相关:

- (1) $1, x, x^2, x^3, x^4$; (2) $e^{-x}, 1, e^x$;
 (3) e^x, xe^x ; (4) $\sin x, \cos x$;
 (5) $e^x \cos x, e^x \sin x$; (6) $\ln x, x \ln x$.

$$\text{解: (1)} W[1, x, x^2, x^3, x^4](x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6x & 12x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 24 \neq 0,$$

故 $1, x, x^2, x^3, x^4$ 线性无关.

$$(2) W[e^{-x}, 1, e^x](x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & 1 & e^x \\ -e^{-x} & 0 & e^x \\ e^{-x} & 0 & e^x \end{vmatrix} = (-1)^3(-e^{-x}e^x - e^xe^{-x}) = 2 \neq 0,$$

故 $e^{-x}, 1, e^x$ 线性无关.

$$(3) W[e^x, xe^x](x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{vmatrix} = e^{2x}(x+1) - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0,$$

故 e^x, xe^x 线性无关.

$$(4) W[\sin x, \cos x](x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

故 $\sin x, \cos x$ 线性无关.

$$(5) W[e^x \cos x, e^x \sin x](x) = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^x(\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x) = e^x \neq 0,$$

故 $e^x \cos x, e^x \sin x$ 线性无关.

$$(6) W[\ln x, x \ln x](x) = \begin{vmatrix} \ln x & x \ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} = (\ln x + 1) \ln x - \ln x = (\ln x)^2 \neq 0,$$

故 $\ln x, x \ln x$ 线性无关.

2. 验证 $y_1 = e^{x^2}$ 与 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解, 并写出该方程的通解.

$$\text{解: } y_1 = e^{x^2}, y_1' = e^{x^2} 2x, y_1'' = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2},$$

$$y_1'' - 4xy_1' + (4x^2 - 2)y_1 = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} - 4xe^{x^2} 2x + (4x^2 - 2)e^{x^2} = e^{x^2}(2 + 4x^2 - 8x^2 + 4x^2 - 2) = 0,$$

$$y_2 = xe^{x^2}, y_2' = e^{x^2}(1 + 2x^2), y_2'' = e^{x^2}(4x + 2x + 4x^3) = e^{x^2}(6x + 4x^3),$$

$$y_2'' - 4xy_2' + (4x^2 - 2)y_2 = e^{x^2}(6x + 4x^3) - 4xe^{x^2}(1 + 2x^2) + (4x^2 - 2)xe^{x^2} \\ = e^{x^2}(6x + 4x^3 - 4x - 8x^3 + 4x^3 - 2x) = 0,$$

$\therefore y_1, y_2$ 都是二阶线性齐次微分方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解.

$$\therefore W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{x^2} & xe^{x^2} \\ 2xe^{x^2} & e^{x^2}(1 + 2x^2) \end{vmatrix} = e^{2x^2}(1 + 2x^2) - 2x^2e^{x^2} = e^{x^2} \neq 0,$$

$\therefore y_1, y_2$ 线性无关, 二阶线性齐次微分方程的通解为 $y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{x^2} + C_2xe^{x^2}$.

3. 验证 $y = \frac{1}{x}(c_1e^x + c_2e^{-x}) + \frac{1}{2}e^x$ (c_1, c_2 是任意常数) 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解.

$$\text{解: } y_1 = \frac{1}{x}e^x, y_1' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, y_1'' = \frac{e^x(x-1+1)x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3},$$

$$xy_1'' + 2y_1' - xy_1 = x \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} + 2 \frac{e^x(x-1)}{x^2} - x \frac{1}{x}e^x = \frac{e^x(x^2-2x+2+2x-2-x^2)}{x^2} = 0,$$

$$y_2 = \frac{e^{-x}}{x}, y_2' = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}, y_2'' = \frac{e^{-x}(x+1-1)x^2 + e^{-x}(x+1)2x}{x^4} = \frac{e^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3},$$

$$xy_2'' + 2y_2' - xy_2 = x \frac{e^{-x}(x^2+2x+2)}{x^3} + 2 \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} - x \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}(x^2+2x+2-2x-2-x^2)}{x^2} = 0,$$

$$y_3 = \frac{1}{2}e^x, y_3' = \frac{1}{2}e^x, y_3'' = \frac{1}{2}e^x,$$

$$xy_3'' + 2y_3' - xy_3 = (x+2-x)\frac{1}{2}e^x = e^x,$$

\therefore 根据叠加定理 $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3 = \frac{1}{x}(c_1e^x + c_2e^{-x}) + \frac{1}{2}e^x$ 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解.

6. 设 $y = \varphi(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个不恒等于零的解, 其中 $p(x), q(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数. 求证不存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$.

证明: 假设 $\exists x_0 \in (a, b), s.t. \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$,

$\therefore y \equiv 0$ 也满足 $y(x_0) = y'(x_0) = 0$,

\therefore 根据存在唯一性定理 $\varphi(x) \equiv 0$, 矛盾, 故假设不成立.

\therefore 不存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$.

7. 设 $p(x), q(x), r(x)$ 是区间 I 上的连续函数, $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是方程

$$y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$$

的三个线性无关解, 问是否存在 $x_0 \in I$, 使得 $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_3(x_0) = 0$, 并说明理由.

解: 假设存在 $x_0 \in I$, 使得 $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_3(x_0) = 0$,

$$\text{则 } W[y_1, y_2, y_3](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & y_3'(x_0) \\ y_1''(x_0) & y_2''(x_0) & y_3''(x_0) \end{vmatrix} = 0,$$

\therefore 线性微分方程 $y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$ 的三个解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 线性相关, 与题设矛盾,

\therefore 不存在 $x_0 \in I$, 使得 $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_3(x_0) = 0$.

8. 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是方程

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

的三个特解, 并且 $\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}$ 不为常数. 求证 $y(x) = (1-c_1-c_2)y_1(x) + c_1y_2(x) + c_2y_3(x)$ 是该方程的通解.

证明: $\because y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ 的三个特解,

\therefore 根据叠加定理 $y_2(x) - y_1(x), y_3(x) - y_1(x)$ 是齐次方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ 的两个解,

$\therefore \frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}$ 不为常数,

$\therefore y_2(x) - y_1(x)$ 与 $y_3(x) - y_1(x)$ 线性无关,

\therefore 非齐次方程 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ 的通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1[y_2(x) - y_1(x)] + c_2[y_3(x) - y_1(x)] + y_1(x) \\ &= (1 - c_1 - c_2)y_1(x) + c_1y_2(x) + c_2y_3(x). \end{aligned}$$

9. 设函数 $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ 与 $f(x)$ 连续, 其中 $f(x) \neq 0$, 求证微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

具有 $n+1$ 个线性无关解, 并用其 $n+1$ 个线性无关解给出该方程的通解.

证明: 设 $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ 是齐次方程 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ 的 n 个线性无关解, \bar{y} 是非齐次方程 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ 的一个非零特解, 则 $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x) \neq 0$,

记 $y_k(x) = \bar{y}_k(x) + \bar{y}(x), (k = 1, 2, \dots, n)$, 则 $y_k(x)$ 是非齐次方程的解,

则 $W[y_1, y_2, \dots, y_n, \bar{y}](x)$

$$= W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}](x)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{y}_1(x) & \bar{y}_2(x) & \dots & \bar{y}_n(x) & \bar{y}(x) \\ \bar{y}'_1(x) & \bar{y}'_2(x) & \dots & \bar{y}'_n(x) & \bar{y}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_1^{(n-1)}(x) & \bar{y}_2^{(n-1)}(x) & \dots & \bar{y}_n^{(n-1)}(x) & \bar{y}^{(n-1)}(x) \\ \bar{y}_1^{(n)}(x) & \bar{y}_2^{(n)}(x) & \dots & \bar{y}_n^{(n)}(x) & \bar{y}^{(n)}(x) \end{vmatrix},$$

将该行列式的第 $n-1$ 行 $\times a_1(x)$,第 $n-2$ 行 $\times a_2(x), \dots$,第1行 $\times a_n(x)$ 加到第 n 行, 考虑到 $\bar{y}_k, k=1, 2, \dots, n$ 是齐次方程的解, \bar{y} 是非齐次方程的解, 得到

$$\text{上式} = \begin{vmatrix} \bar{y}_1(x) & \bar{y}_2(x) & \cdots & \bar{y}_n(x) & \bar{y}(x) \\ \bar{y}'_1(x) & \bar{y}'_2(x) & \cdots & \bar{y}'_n(x) & \bar{y}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_1^{(n-1)}(x) & \bar{y}_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \bar{y}_n^{(n-1)}(x) & \bar{y}^{(n-1)}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(x) \end{vmatrix} = f(x)W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x) \neq 0,$$

$\therefore y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \bar{y}(x)$ 线性无关,

故 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ 有 $n+1$ 个线性无关解,

方程的通解为 $y = C_1[y_1(x) - \bar{y}(x)] + C_2[y_2(x) - \bar{y}(x)] + \cdots + C_n[y_n(x) - \bar{y}(x)] + \bar{y}(x)$.