多元函数微分学

2019年9月4日 9:53

10多元函数微分学

10.4复合函数微分法

1. **复合函数求导法则**
   a. **链式法则**
      i. $z = f(x(t), y(t))$**的情况**
         - **习题：** 习题10.4中的1.（6）

      ii. $y = f(u_1, u_2, \cdots, u_m), u_i(t), i = 1, 2, \cdots, m$**的情况**
      iii. $z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$**的情况**
         - **思考题：设**$z = yf\left(x^2 y, \frac{y}{x}\right)$**，其中**$f$**为具有连续的二阶偏导数，求**$z''_{xy}$**.**
         - **习题：** 习题10.4中的3.

      iv. $y = f(u_1, u_2, \cdots, u_m), u_i = u_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), i = 1, 2, \cdots, m$**的情况**
         - **思考题：**$z = xy + xf(u), u = \frac{x}{y}$**，其中**$f$**为**$C^1$**类函数，求**$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$**.**
         - **习题：** 习题10.4中的1.（5），4.

2. **函数的方向导数和梯度**
   a. **方向导数**
      i. $$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)}{t}$$
   b. **梯度（向量）与方向导数的计算**
      i. **梯度向量**
      $$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)$$
      ii. **方向导数的计算**
      $$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \boldsymbol{v}} = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$
         - **思考题：** 求$z = \ln\left(e^{-x} + \frac{x^2}{y}\right)$，在点(1,1)处沿$\boldsymbol{v} = (a, b)^T (a \neq 0)$的方向导数.
         - **习题：** 习题10.4中的5.

      iii. **梯度方向是函数值增加最快的方向，梯度向量的长度等于方向导数的最大值**
         - **思考题：** 已知$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.当v分别为何向量时，方向导数$\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}$会取到最大值、最小值和零值.
         - **习题：** 习题10.4中的6.

3. **雅可比矩阵**
   a. **雅可比矩阵**
   $$J(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

b. **微分与雅可比矩阵的关系**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x_0}))\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x_0}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

c. **复合映射的微分法则**

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{J}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})),\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_0}))\boldsymbol{J}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

思考题： 已知$\begin{cases}y_1=u_1u_2-u_1u_3,\\ y_2=u_1u_3-u_2^2,\end{cases}$ $\begin{cases}u_1=x_1\cos x_2+(x_1+x_2)^2,\\ u_2=x_1\sin x_2+x_1x_2,\\ u_3=x_1-x_1x_2+x_2^2,\end{cases}$ 计算$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}$

d. **逆映射的微分法则**

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1},\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y_0})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y_0}))\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}))^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

10.5隐函数微分法

1. **一个方程**$F(x,y,z)=0$**确定的隐函数**$z=z(x,y)$

a. **方法1：** 对$F(x,y,z)=0$两边全微分

$$F_x'(x,y,z)\,\mathrm{d}x+F_y'(x,y,z)\,\mathrm{d}y+F_z'(x,y,z)\,\mathrm{d}z=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}z=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\mathrm{d}x-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}$$

b. **方法2：** 对$F(x,y,z)=0$两边求关于x,y的偏导数

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}}$$

c. **高阶偏导：**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\right]$$

$$=-\frac{[F_{xx}''(x,y,z)+F_{xz}''(x,y,z)z_x']F_z'(x,y,z)-F_x'(x,y,z)[F_{zx}''(x,y,z)+F_{zz}''(x,y,z)z_x']}{[F_z'(x,y,z)]^2}$$

$$=-\frac{[F_{xx}''+F_{xz}''z_x']F_z'-F_x'[F_{zx}''+F_{zz}''z_x']}{[F_z']^2}$$

思考题： 已知方程$\mathrm{F}(x+z,y+z)=0$确定了隐函数$\mathrm{z}=\mathrm{z}(x,y)$，其中F具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. **方程组**$F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$**确定的隐函数**$y=y(x),z=z(x)$**：**

a. **方法1：两个方程两边分别对**x**求导数：**

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,y,z)=\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}-F_x & F_z\\ -G_x & G_z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}F_y & -F_x\\ G_y & -G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}.$$

b. **方法2：两个方程两边分别求全微分：**

$$\begin{cases} \mathrm{d}F(x,y,z) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z = 0, \\ \mathrm{d}G(x,y,z) = \dfrac{\partial G}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial G}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial G}{\partial z}\mathrm{d}z = 0, \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{两边除以}\mathrm{d}x} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y,z) = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,y,z) = \dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial G}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{克拉默法则}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\begin{vmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}.$$

思考题： 设方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3x, \\ 2x-3y+5z=4, \end{cases}$确定$y$与$z$是$x$的函数，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

习题： 习题10.5中的1.，2.，3.，4.，5.，6.

10.6二元函数的泰勒公式

1. **二元函数的微分中值定理**

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left.\left(\Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}, 0<\theta<1$$

2. **二元函数的泰勒公式**

$$\begin{aligned} &f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\ &= f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0) + R_n \end{aligned}$$

- **佩亚诺余项**

$$R_n = o\left[\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)^n\right]$$

- **拉格朗日余项**

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), 0<\theta<1$$

思考题： 写出$f(x,y) = \sqrt{1+y^2}\cos x$在点$(0,1)$的一阶泰勒多项式及拉格朗日余项.

多元函数微分学的应用

2019年9月4日 10:13

11多元函数微分学的应用

11.1向量值函数的导数和积分

1. **向量值函数**
2. **向量值函数的导数**
   a. **求导法则**
      i. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\boldsymbol{u}(t))=c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}(t))$
      ii. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t)$
      iii. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda(t)\boldsymbol{u}(t))=\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t)+\lambda(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t)$
      iv. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t))=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t)\right)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t)\right)$
      v. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t))=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}(t)\right)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(t)\right)$

      思考题：证明等式：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}'(t))=\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$.
   b. **空间曲线的切线与法平面**
      i. **切向量**
         $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$
      ii. **切线方程**
         $\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$
      iii. **法平面方程**
         $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

      思考题：求曲线$\boldsymbol{r}(t)=\sin(\pi t)\,\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\boldsymbol{j}+\cos(\pi t)\,\boldsymbol{k}$在点$M(0,1,-1)$的切线方程.
3. **向量值函数的积分**
   a. **定义**

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t=\left(\int_\alpha^\beta x(t)\,\mathrm{d}t,\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}t,\int_\alpha^\beta z(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

11.2空间曲线的切平面与法线

1. **一般方程$F(x,y,z)=C$下曲面的法向量、切平面与法线**
   a. **法向量**
      $\boldsymbol{n}=\left(F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\right)=\mathrm{grad}F(x_0,y_0,z_0)$
   b. **切平面方程**
      $F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$
   c. **法线方程**
      $\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$

   思考题：设曲面S_1和S_2的方程分别为$F_1(x,y,z)=0,F_2(x,y,z)=0$，其中$F_1,F_2$是可微函数，试证$S_1$与$S_2$垂直的充分必要条件是对交线上的任一点$(x,y,z)$，均有$\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_2}{\partial z}=0$

2. **曲面$z=z(x,y)$的法向量**

   a. **法向量**

   $$\boldsymbol{n}=\left(z_x'(x_0,y_0),z_y'(x_0,y_0),-1\right)$$

3. **一般方程$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$下空间曲线的切向量**

   a. **切向量**

   $$\mathbf{v}=\mathrm{grad}F(x_0,y_0,z_0)\times\mathrm{grad}G(x_0,y_0,z_0)$$

4. **参数方程$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$下曲面的法向量**

   a. **法向量**

   $$\boldsymbol{n}=\left(x_u'(u_0,v_0),y_u'(u_0,v_0),z_u'(u_0,v_0)\right)\times\left(x_v'(u_0,v_0),y_v'(u_0,v_0),z_v'(u_0,v_0)\right)$$

   思考题： 求双曲抛物面$\boldsymbol{r}=(u+v,u-v,uv)$在$u=1,v=-1$处的切平面方程.

11.3多元函数的极值

1. **极值的概念与必要条件**

   a. **二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)取得极值点的必要条件**

   $$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$$

   b. **多元函数$f(\boldsymbol{u})$在点$M_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$取得极值点的必要条件**

   $$\frac{\partial f(M_0)}{\partial u_i}=0,i=1,2,\cdots,n$$

   $$\overset{\text{可微}}{\Longrightarrow}\mathrm{grad}f(M_0)=0$$

2. **函数极值的充分条件**

   a. **二元函数$f(x,y)$在驻点(x_0,y_0)取得极值点的充分条件**

   $$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y},C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

      i. $A>0,AC-B^2>0\Rightarrow$极小值点

      ii. $A<0,AC-B^2>0\Rightarrow$极大值点

      iii. $AC-B^2<0\Rightarrow$不是极值点

      iv. $AC-B^2=0\Rightarrow$无法判断

   思考题： 求下列函数的极值，并判断是极大值还是极小值：

   $z=x^3+y^3-3xy.$

   思考题： 试证函数$\mathrm{z}=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$有无穷多个极大值而无极小值.

3. ***n*元函数极值的充分条件**

   a. **n元函数$f(x,y)$在驻点$M_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$取得极值点的充分条件**

   Hessian矩阵：

   $$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{f}}(M_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}_{M_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)}$$

      i. $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{f}}(M_0)$正定$\Rightarrow$极小值点

      ii. $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{f}}(M_0)$负定$\Rightarrow$极大值点

      iii. $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{f}}(M_0)$不定$\Rightarrow$不是极值点

iv. $\boldsymbol{H}_f(M_0)$半定⟹无法判断

4. **最小二乘法**

   a. **问题描述：**

   已知$y_k=f(x_k),k=1,2,\cdots,m$，已知函数组$g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$，

   求函数$s(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i g_i(x)$, s.t. $R(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{k=1}^{m}[y_k-s(x_k)]^2$最小.

   b. **问题求解：**

$$\frac{\partial R}{\partial a_j}=-2\sum_{k=1}^{m}\left[y_k-\sum_{i=1}^{n}a_i g_i(x_k)\right]\cdot g_j(x_k)=0,j=1,2,\cdots,n$$

$$\xRightarrow{(g_i,g_j)=\sum_{k=1}^{m}g_i(x_k)g_j(x_k),\quad (f,g_j)=\sum_{k=1}^{m}y_k g_j(x_k)}$$

   法方程：

$$\begin{bmatrix}(g_1,g_1) & (g_1,g_2) & \cdots & (g_1,g_n)\\ (g_2,g_1) & (g_2,g_2) & \cdots & (g_2,g_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (g_n,g_1) & (g_n,g_2) & \cdots & (g_n,g_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,g_1)\\ (f,g_2)\\ \vdots\\ (f,g_n)\end{bmatrix}$$

   c. **直线$y=a+bx$拟合问题的法方程：**

$$\begin{cases}a\sum_{k=1}^{n}1+b\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}y_k,\\ a\sum_{k=1}^{n}x_k+b\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k.\end{cases}$$

   思考题：设变量y与x之间的关系是$y=ax+b$，其中a,b是待定常数. 现在通过实验测定了y与x的一组数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，问如何由这一组数据得到最佳的待定常数$a,b$.

11.4条件极值

1. **直接法**

$$\begin{cases}\max(\min)\quad f(x,y)\\ \text{s.t.}\quad g(x,y)=0\end{cases}\xRightarrow{g(x,y)=0\Rightarrow y=y(x)}\max(\min)\quad F(x)=f\big(x,y(x)\big)$$

   思考题：在抛物线$y^2=4x$上求一点，使其到点(2,8)的距离最短.

2. **拉格朗日乘子法**

   a. **二元函数的条件极值问题**

$$\begin{cases}\max(\min)\quad f(x,y)\\ \text{s.t.}\quad g(x,y)=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)\Longrightarrow\begin{cases}L_x=0\\ L_y=0\\ L_\lambda=0\end{cases}$$

   ⟹ (可能的)条件极值点(x_0,y_0)

   b. **一个约束条件的三元函数条件极值问题**

$$\begin{cases}\max(\min)\quad f(x,y,z)\\ \text{s.t.}\quad g(x,y,z)=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)\Longrightarrow\begin{cases}L_x=0\\ L_y=0\\ L_z=0\\ L_\lambda=0\end{cases}$$

   ⟹ (可能的)条件极值点(x_0,y_0,z_0)

思考题： 将长为l的线段分成三份，分别围成圆、正方形和正三角形，问如何分割才能使它们的面积之和最小，并求出此最小值.

c. **二个约束条件的三元函数条件极值问题**

$$\begin{cases} \max(\min) & f(x,y,z) \\ \text{s.t.} & g(x,y,z)=0 \\ & h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z) \Longrightarrow \begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ L_z=0 \\ L_\lambda=0 \\ L_\mu=0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (可能的)条件极值点(x_0,y_0,z_0)

思考题： 求曲面$S_1: z=x^2+y^2$与$S_2: x+y+z=1$的交线上到原点的距离最大与最小的点。

d. ***n*元函数的条件极值问题**

$$\begin{cases} \max(\min) & f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \text{s.t.} & g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ & g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\,,1\le m\le n-1 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(x,y,z)+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\cdots+\lambda_m g_m \Longrightarrow \begin{cases} L_{x_1}=0 \\ L_{x_2}=0 \\ \vdots \\ L_{x_n}=0 \\ L_{\lambda_1}=0 \\ \vdots \\ L_{\lambda_m}=0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (可能的)条件极值点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$

多元函数在有界闭域上的最大、最小值

对于有界闭区域D上的可微函数$f(x,y)$：

a. **在D的内部，令偏导数为零，求驻点；**
b. **在D的边界，直接法或拉格朗日乘子法，求可能的极值点；**
c. **比较大小，确定最大、最小值，不需判断是极大还是极小。**

思考题： 求$f(x,y)=x^2+y^2-x-y$在$B=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上的最大值与最小值.

重积分

2019年9月4日　　10:14

12重积分

12.1重积分的概念和性质

1. **重积分的概念**
   a. **几何意义**
      i. **曲顶柱体的体积**
      思考题： 利用重积分的几何意义求下列积分值：$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$.
      ii. **平面薄板的质量**
   b. **二重积分的定义**
      i. **平面区域的划分、划分的子域、子域直径、划分直径**
      ii. **二重积分的定义**
2. **三重积分的定义**
3. **可积的必要与充分条件**
   a. **必要条件：若$f(x,y)$在有界闭域D上可积，则$f(x,y)$在D上有界.**
   b. **充分条件：若$f(x,y)$在有界闭域D上连续，则$f(x,y)$在D上可积.**
4. **重积分的性质**
   已知$f(x,y),g(x,y)\in R(D)$.
   a. **线性性质：**
   $$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$
   b. **区域可加性：**
   $D=D_1\cup D_2$且$D_1\cap D_2=\partial D_1\cap\partial D_2$
   $$\Rightarrow\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$
   思考题： 设D是一有界闭域，$f(x,y)\in C(D)$且非负，试证：若$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$，则$f(x,y)\equiv 0,\forall(x,y)\in D$.
   c. **区域对称性，被积函数的奇偶性：**
      i. D关于x轴对称，且$f(x,-y)=-f(x,y)$
      $\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$;
      ii. D关于x轴对称，且$f(x,-y)=f(x,y)$
      $\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，$D_1$为$D$位于$x$轴上方部分;
      iii. D关于y轴对称，且$f(-x,y)=-f(x,y)$
      $\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$.
      iv. D关于y轴对称，且$f(-x,y)=f(x,y)$
      $\Rightarrow\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，$D_1$为$D$位于$y$轴右侧部分;
   思考题： 计算积分：$\iint_D y^3x^2\mathrm{d}\sigma, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$.
   d. **比较定理（保序性）：**

$$f(x,y) \le g(x,y) \Longrightarrow \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

思考题： 比较下列积分值的大小$\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$与$\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)|(x-2)^2+(y-2)^2\le 2\}$.

e. **估值定理：**

$$m \le f(x,y) \le M \Longrightarrow mA(D) \le \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le MA(D).$$

f. **绝对值函数的可积性：**

$$f(x,y)\in R(D) \Longrightarrow |f(x,y)|\in R(D), \left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

g. **积分中值定理：**

$$f(x,y)\in C(D) \Longrightarrow \exists(\xi,\eta)\in D, s.t. \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A(D).$$

思考题： 证明：若$f(x,y)\in C(D), g(x,y)\in R(D)$且不变号，则$\exists(\xi,\eta)\in D$使得$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D\subset\mathbb{R}^2$是一有界闭域.

12.2二重积分的计算

1. **用直角坐标计算二重积分**

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

2. **用极坐标计算二重积分**

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

思考题： 计算二重积分$\iint_D xy\ln(1+x^2+y^2)\,d\sigma$，$D$是由$y=x^3, y=1$和$x=-1$围成的区域.（提示：对称性）

思考题： 已知函数f连续且$f>0$，试求$\iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$.（提示：对称性）

12.3二重积分的变量代换

1. **二重积分的变量代换公式**

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

思考题： 计算$I=\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}\sigma$，$D$由$x+y=1, x=0, y=0$围成.

12.4三重积分的计算

1. **三重积分在直角坐标系下的计算**

a. $$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

b. $$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_c^d \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

思考题： 计算三重积分$\iiint_D (3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}V, \Omega\text{: } x^2+y^2+z^2\le R^2$.

2. 三重积分的变量代换

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

思考题： 求由平面$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1, a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2, a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$围成的平行六面体的体积.

3. 用柱坐标计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

思考题： 求由抛物面$z=x^2+y^2$与球面$z=\sqrt{6-x^2-y^2}$所围空间图形的体积.

4. 用球坐标计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

思考题： 利用三重积分计算曲面所围成的空间区域的体积： $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2, x^2+y^2=z^2, z\ge 0, 0<a<b$.

• 重积分的物理应用

1. 质心（重心）

二维:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

三维:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}, \bar{y} = \frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}, \bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

2. 对单位质量质点的引力

$$F_x = \iiint_\Omega G\frac{\rho(x,y,z)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\cdot\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_y = \iiint_\Omega G\frac{\rho(x,y,z)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\cdot\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_z = \iiint_\Omega G\frac{\rho(x,y,z)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\cdot\frac{z-z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. 转动惯量

二维:

$$J_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, J_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, J_z = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = J_x + J_y.$$

三维:

$$J_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_y = \iiint_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

思考题： 设Ω由$z=x^2+y^2$及$z=2x$围成，密度$\rho=y^2$，求它对z轴的转动惯量.

12.5第一型曲线积分

1. **几何意义**
   a. **空间曲线的质量**
   b. **柱面的面积**
2. **定义**
3. **第一型曲线积分的性质**
   a. **第一型曲线积分与积分路径的方向无关**

$$\int_{L(A)}^{B} f(x,y,z)\mathrm{d}l=\int_{L(B)}^{A} f(x,y,z)\mathrm{d}l$$

   b. **积分路径的可加性**

$$\int_{L} f(x,y,z)\mathrm{d}l=\int_{L_1} f(x,y,z)\mathrm{d}l+\int_{L_2} f(x,y,z)\mathrm{d}l$$

   c. **对称性**

L关于xOy坐标面对称，且$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$

$\Rightarrow \int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l=0.$

4. **第一型曲线积分的计算**

$$\mathrm{L:}\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]\text{光滑，}\ f(x,y,z)\in C(L)\\ z=z(t),\end{cases}$$

$\Rightarrow \int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$

思考题： 设L为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，周长为$a$，求$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}l$.（提示：对称性）

思考题： 设曲线为$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\cos t\,,\\ \mathrm{y}=\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\sin t\,,\\ \mathrm{z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{t}},\end{cases}$ $0<t<+\infty$，求曲线的弧长.

12.6第一型曲面积分

1. **几何意义**
   a. **曲面面积**
2. **定义**
3. **第一型曲面积分的性质**
   a. **与方向无关**

$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$的值与曲面方向无关.

   b. **区域可加性**

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S\,,\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

   c. **对称性**

Σ关于xOy坐标面对称，且$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$

$\Rightarrow \iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=0.$

4. **第一型曲面积分的计算**

曲面Σ: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in D光滑，\ f(x,y,z) \in C(\Sigma) \\ z = z(u,v), \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,,$$

其中$E = |\boldsymbol{r}_u|^2$，$F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v$，$G = |\boldsymbol{r}_v|^2$，$\boldsymbol{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$，$\boldsymbol{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$.

思考题： 计算下列第一型曲面积分$\iint_S (\mathrm{a}x + by + cz + d)^2 \mathrm{d}S$，$S$是球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.（提示：对称性）

思考题： 求锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$在柱面$z^2 = 2x$内的部分面积.

思考题： 计算下列第一型曲面积分$\iint_S (x + z)\mathrm{d}S$，$S$是半球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0$.（提示：对称性）

12.7含参变量积分

1. **含参变量积分的概念**

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\,, (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$$

2. **含参变量积分函数的连续性**

$$f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d]) \Rightarrow I(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \in C([a,b])$$

3. **含参变量积分函数的可导性与求导公式**

   a. **一元函数，非变限积分**

$$f(x,y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \in C([a,b] \times [c,d]) \Rightarrow I(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \in C^1([a,b]), I'(x) = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y$$

   b. **二元函数，变限积分**

$$f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d]), I(x,u) = \int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y\,, (x,u) \in [a,b] \times [c,d]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ I(x,u) \in C([a,b] \times [c,d]); \\ (2) \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \in C([a,b] \times [c,d]) \\ \qquad \Rightarrow\ I(x,u) \in C^1([a,b] \times [c,d]), \dfrac{\partial I(x,u)}{\partial x} = \displaystyle\int_c^u \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y\,, \frac{\partial I(x,u)}{\partial u} = f(x,u) \end{cases}$$

   c. **一元函数，变限积分**

$f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d]), c(x), d(x) \in C[a,b], c \leq c(x) \leq d, c \leq d(x) \leq d, x \in [a,b]$.

$$I(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\,, x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ I(x) \in C[a,b]; \\ (2) \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \in C([a,b] \times [c,d]), c'(x), d'(x)存在 \\ \qquad \Rightarrow\ I'(x) = d'(x)f\big(x, d(x)\big) - c'(x)f\big(x, c(x)\big) + \displaystyle\int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y\,. \end{cases}$$

   思考题： 求下列含参变量积分的导数：$f(x) = \int_0^x \sin(xy)\mathrm{d}y$.

4. **含参变量函数的积分（积分公式）**

$$f(x,y) \in C([a,b] \times [c,d]), I(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\Longrightarrow \int_a^b I(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

向量场的微积分

2019年9月4日 10:15

13向量场的微积分

13.1向量场的微分运算

1. **直角坐标系中的向量场**
   $\boldsymbol{v}(x,y,z)=X(x,y,z)\boldsymbol{i}+Y(x,y,z)\boldsymbol{j}+Z(x,y,z)\boldsymbol{k}$
2. **（数量场的）梯度算子$\boldsymbol{\nabla}$**
   $$\boldsymbol{\nabla}f(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$
   性质：α,β为任意常数，$f(x,y,z),g(x,y,z)$为任意可微函数
   - **a.** $\boldsymbol{\nabla}(\alpha f+\beta g)=\alpha\boldsymbol{\nabla}f+\beta\boldsymbol{\nabla}g$
   - **b.** $\boldsymbol{\nabla}(fg)=g\nabla f+f\nabla g$
   - **c.** $\boldsymbol{\nabla}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\boldsymbol{\nabla}f-f\boldsymbol{\nabla}g}{g^2}$

   思考题：验证梯度算子的上述三个性质.
3. **（向量场的）散度算子$\boldsymbol{\nabla}\cdot$**
   $$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(X(x,y,z)\boldsymbol{i}+Y(x,y,z)\boldsymbol{j}+Z(x,y,z)\boldsymbol{k})$$
   $$=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$
   性质：
   - **a.** $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$
   - **b.** $\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{v})=f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{v}$

   思考题：验证散度算子的上述两个性质.

   思考题：求下列向量场的散度$\boldsymbol{v}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{c}$.
4. **（向量场的）旋度算子$\boldsymbol{\nabla}\times$**
   $$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(X(x,y,z)\boldsymbol{i}+Y(x,y,z)\boldsymbol{j}+Z(x,y,z)\boldsymbol{k})$$
   $$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\X&Y&Z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$
   性质：
   - **a.** $\boldsymbol{\nabla}\times(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$
   - **b.** $\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{v})=f\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{v}$
   - **c.** $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$

   思考题：验证旋度算子的上述三个性质.
5. **对于二元函数$f(x,y)$和平面向量场$\boldsymbol{v}(x,y)=X(x,y)\boldsymbol{i}+Y(x,y)\boldsymbol{j}$**
   - **a.** $\boldsymbol{\nabla}=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$
   - **b.** $\boldsymbol{\nabla}f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$
   - **c.** $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(x,y)=\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$
   - **d.** $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}(x,y)=\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$

   思考题：利用旋度算子的三维形式导出上述**d.**式.

13.2向量场在有向曲线上的积分

1. **有向曲线**

   a. $M\big(x(t),y(t),z(t)\big)$点处的单位切向量（小参数指向大参数）

   $$\boldsymbol{\tau}(M)=\frac{\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}}$$

   b. $M\big(x(t),y(t),z(t)\big)$点处的有向弧微元（小参数指向大参数）

   $$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\boldsymbol{\tau}(M)\mathrm{d}l\\&=\frac{\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}}\mathrm{d}l\\&=\frac{\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t\\&=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)\mathrm{d}t\\&=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\end{aligned}$$

2. **向量场$\boldsymbol{v}(x,y,z)=X(x,y,z)\boldsymbol{i}+Y(x,y,z)\boldsymbol{j}+Z(x,y,z)\boldsymbol{k}$在有向曲线$L$上的积分**

   $$\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l=\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$$
   $$=\int_{L(A)}^{B}X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3. **第二型曲线积分的性质**

   a. 有向性

   $$\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{L(B)}^{A}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

   b. 积分路径的可加性

   $$\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L_1(A)}^{C}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{L_2(C)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

   c. 第二型曲线积分与第一型曲线积分的关系

   $$\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l$$

4. **第二型曲线积分的计算**

   a. 空间曲线的情形

   $L(A\to B)$: $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta],A{:}\,t=\alpha,B{:}\,t=\beta$光滑，$\boldsymbol{v}(x,y,z)=X(x,y,z)\boldsymbol{i}+Y(x,y,z)\boldsymbol{j}+Z(x,y,z)\boldsymbol{k}\in C(L)$

   $$\Rightarrow\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{B}X(x,y,z)\mathrm{d}x+Y(x,y,z)\mathrm{d}y+Z(x,y,z)\mathrm{d}z$$
   $$=\int_{\alpha}^{\beta}\Big[X\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Y\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+Z\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big]\mathrm{d}t$$

   思考题： 计算$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中$L$是螺旋线$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt(0\le t\le 2\pi)$，正向为$t$增加的方向.

   b. 平面曲线的情形

      i. 参数方程

      $$\int_{L(A)}^{B}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L(A)}^{B}X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[X\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right] \mathrm{d}t$$

ii. 显示方程

$$\int_{L(A)}^{B} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L(A)}^{B} X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{a}^{b} \left[X\big(x,y(x)\big) + Y\big(x,y(x)\big)y'(x)\right] \mathrm{d}x$$

思考题： 计算$\int_L \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中$L$为$|x|+|y|=1$，逆时针方向为正.

iii. 极坐标方程

$$\int_{L(A)}^{B} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L(A)}^{B} X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [X(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)(r(\theta)\cos\theta)'$$

$$+ Y(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)(r(\theta)\sin\theta)'] \,\mathrm{d}\theta$$

13.3格林公式

1. **形式1**

有界闭域$D\subset \mathbb{R}^2, \partial D$分段光滑$, \boldsymbol{v}(x,y) = X(x,y)\boldsymbol{i} + Y(x,y)\boldsymbol{j} \in C^1(D)$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D_+} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{\partial D_+} \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l = \oint_{\partial D_+} X(x,y)\mathrm{d}x + Y(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left[\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

思考题： 设D为平面区域，∂D为逐段光滑曲线，$(\bar{x},\bar{y})$是D的形心，D的面积等于$\sigma(D)$. 试证：(1)$\oint_{\partial D_+} x^2\mathrm{d}y = 2\sigma(D)\bar{x}$；(2)$\oint_{\partial D_+} xy\mathrm{d}y = 2\sigma(D)\bar{y}$.

思考题： 计算$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$:

1) $\mathrm{D} = \{(x,y)|r^2 \le x^2+y^2 \le R^2\}(0<r<R)$的正向边界；
2) $\mathrm{D} = \left\{(x,y)\middle| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$的正向边界.

2. **形式2**

有界闭域$D\subset \mathbb{R}^2, \partial D$分段光滑$, \boldsymbol{v}(x,y) = X(x,y)\boldsymbol{i} + Y(x,y)\boldsymbol{j} \in C^1(D)$, 外向单位法向量$\boldsymbol{n}(x,y)$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D_+} \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}l = \oint_{\partial D_+} -Y(x,y)\mathrm{d}x + X(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left[\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

思考题： 设D为平面区域，∂D为逐段光滑曲线，$f\in C^2(D)$，求证：$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}l = \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

13.4向量值函数在有向曲面上的积分——第二型曲面积分

1. **有向曲面**

a. 双侧曲面和有向曲面

b. 有向曲面正向单位法向量的求法

i. 曲面方程是显示方程

1) $\Sigma: z = f(x,y), f\in C^1 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$.

当上侧为正时，取"+"；下侧为正时，取"−".（上正下负）

2) $\Sigma: y=g(z,x), g\in C^1 \Rightarrow \boldsymbol{n}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2+1+\left(\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^2}}\left(-\dfrac{\partial g}{\partial x},1,-\dfrac{\partial g}{\partial z}\right).$

当右侧为正时，取"+"；左侧为正时，取"−"．（右正左负）

3) $\Sigma: x=h(y,z), g\in C^1 \Rightarrow \boldsymbol{n}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)^2}}\left(1,-\dfrac{\partial h}{\partial y},-\dfrac{\partial h}{\partial z}\right).$

当前侧为正时，取"+"；后侧为正时，取"−"．（前正后负）

ii. 曲面方程是参数方程

$\Sigma:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases} x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^1, A=\dfrac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}, B=\dfrac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}, C=\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}$

$\Rightarrow \boldsymbol{n}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C).$

当曲面上正下负时，选取"±"使得"$\pm C>0$"；当曲面右正左负时，选取"±"使得"$\pm B>0$"；当曲面前正后负时，选取"±"使得"$\pm A>0$"．

2. 第二型曲面积分的概念

a. 第二型曲面积分的定义

$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma), \boldsymbol{F}(x,y,z)=X(x,y,z)\boldsymbol{i}+Y(x,y,z)\boldsymbol{j}+Z(x,y,z)\boldsymbol{k},$

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot(\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\cos\beta\,\mathrm{d}S,\cos\gamma\,\mathrm{d}S)$$

$$=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

$$=\iint_\Sigma X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\,.$$

b. 第二型曲面积分的性质

i. 有向性

$$\iint_{\Sigma^-} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

ii. 区域可加性

$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$且定向不变

$$\Rightarrow \iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,.$$

c. 第二型曲面积分的计算

i. 曲面方程是显示方程

1) 曲面$\Sigma: z=f(x,y),(x,y)\in D$光滑，$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\big)\in C(\Sigma)$

$$\Rightarrow \iint_\Sigma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_{\Sigma} X(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Y(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + Z(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \pm \iint_{D} \left[-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} X\big(x,y,f(x,y)\big) - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} Y\big(x,y,f(x,y)\big) + Z\big(x,y,f(x,y)\big) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上正下负.

思考题： 计算下列第二型曲面积分：$\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，$S$为$x^2+y^2 \le 1, z=0$的下侧.

思考题： 计算下列第二型曲面积分：$\iint_S z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，$S$为$x^2+y^2+z^2=R^2$上半部分的下侧.

2) 曲面$\Sigma: y=g(z,x), (z,x) \in D$光滑，$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\big) \in C(\Sigma)$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_{\Sigma} X(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Y(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + Z(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \pm \iint_{D} \left[-\frac{\partial g(z,x)}{\partial x} X\big(x,g(z,x),z\big) + Y\big(x,g(z,x),z\big) - \frac{\partial g(z,x)}{\partial z} Z\big(x,g(z,x),z\big) \right] \mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

右正左负.

思考题： 计算下列第二型曲面积分：$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，$S$为$y=\sqrt{x^2+y^2}, y=h(h>0)$所围区域的表面外侧.

3) 曲面$\Sigma: x=h(y,z), (y,z) \in D$光滑，$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\big) \in C(\Sigma)$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_{\Sigma} X(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Y(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + Z(x,y,z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \pm \iint_{D} \left[X\big(h(y,z),y,z\big) - \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} Y\big(h(y,z),y,z\big) - \frac{\partial h(y,z)}{\partial z} Z\big(h(y,z),y,z\big) \right] \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

前正后负.

思考题： 计算下列第二型曲面积分：$\oiint_S yz\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$，$S$为区域$\begin{cases} x+y+z \le a, a>0, \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \end{cases}$表面的外侧.

ii. 曲面方程是参数方程

曲面Σ: $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), (u,v) \in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$光滑正则，$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\big) \in C(\Sigma)$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$= \iint_{\Sigma} X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Y(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + Z(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$= \pm \iint_{D} [XA+YB+ZC]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$
$$X = X\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big), Y = Y\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big), Z = Z\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),$$
$$A = \frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)}, B = \frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)}, C = \frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}.$$

当曲面上正下负时，选取"±"使得"$\pm C>0$"；当曲面右正左负时，选取"±"使得"$\pm B>0$"；当曲面前正后负时，选取"±"使得"$\pm A>0$".

思考题：计算下列第二型曲面积分：$\oiint_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$S$为$x^2+y^2=a^2$在第一卦限中介于$z=0$和$z=h$之间的部分，外侧为正.

13.5高斯公式、斯托克斯公式

1. **空间单连通域、曲面单连通域**
2. **高斯公式**

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界闭域，$\partial\Omega$逐片光滑，$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\big)\in C^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \oiint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$= \oiint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$
$$= \oiint_{\partial\Omega} X(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Y(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + Z(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$= \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial Z(x,y,z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

思考题：用高斯公式计算下列曲面积分：$\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$S$为$x^2+y^2+z^2=R^2$的内侧.

思考题：用高斯公式计算下列曲面积分：$\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (z^2-2z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$S$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=0$和$z=1$所截部分的外侧.

思考题：用高斯公式计算下列曲面积分：$\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$S$为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$外侧.

3. **斯托克斯公式**

Σ:逐片光滑的有向曲面，$\partial\Sigma$逐段光滑，$\partial\Sigma$与Σ的方向满足右手法则，$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\big)\in C^1$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \int_{\partial\Sigma} X(x,y,z)\mathrm{d}x + Y(x,y,z)\mathrm{d}y + Z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

思考题： 用斯托克斯公式计算下列曲线积分：$\oint_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，其中$L$是圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2, \\ x+y+z = 0. \end{cases}$从$x$轴正向看去为逆时针方向.

思考题： 计算$\mathrm{I} = \oint_L \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + z\mathrm{d}z$，其中$L$是：

(1) 任意一条既不环绕z轴，也不与z轴相交的简单闭曲线；

(2) 任意一条环绕z轴且不与z轴相交的简单闭曲线，从z轴正向看去为逆时针方向.

思考题： 证明：$\oint_L \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2S$，其中$L$是$\mathbb{R}^3$中某个平面上的一条简单光滑闭曲线，$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$是该平面的单位法向量，$L$的方向与$\boldsymbol{n}$的方向服从右手法则，$S$是$L$所围的面积.

13.6保守场

1. **平面保守场**
2. **势函数的计算**
3. **空间保守场**
4. **无旋场** $\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$，**无源场** $\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$

思考题： 证明下列向量场为无源场：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$，其中$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$是无旋场.

(提示利用公式：$\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}$)

思考题： 求电场$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$穿过包围原点的任意简单光滑闭曲面的电通量，其中$\mathrm{r} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

思考题： 证明下列向量场为无旋场：$\boldsymbol{v} = (x-x_0)\boldsymbol{i} + (y-y_0)\boldsymbol{j} + (z-z_0)\boldsymbol{k}$.

常微分方程（部分）

2019年9月4日 10:15

13常微分方程

13.1微分方程的基本概念

1. **某些实际问题的数学模型**
2. **微分方程的基本概念**
3. **微分方程的解与定解问题的提法**
4. **积分曲线**
5. **微分方程的存在唯一性定理**

   思考题： 检验下列函数是否为所给的微分方程的解，若是，请给出$t = 0$时满足的初始条件：$y = \sin kt$与$y = \cos kt, y'' + k^2 y = 0.$

- 微分方程其余部分的思考题改为了思维导图的形式