线性常系数微分方程组

- 一般理论
  - 矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)$
    - $\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n}$ a_{ij}连续（可微）$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}(t)$连续（可微）
    - $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}=(a_{ij}{}'(t))_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n}$
    - $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s=(\int_{t_0}^{t}a_{ij}(s)\mathrm{d}s)_{i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n}$
  - 线性常微分方程组
    - 非齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t)$
    - 齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$
    - 常系数线性微分方程组
      - 非齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t)$
      - 齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$
  - 线性常微分方程组解的存在唯一性定理
    - $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{f}(t)\in C(I),t_0\in I$

      $\Rightarrow\forall\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{R}^n,s.t.$

      初值问题$\begin{cases}\frac{\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t),\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\xi}\end{cases}$在区间$I$上有唯一解.
  - 向量值函数的线性相关与线性无关
    - $\boldsymbol{\varphi}_1(t)=(\varphi_{11}(t),\cdots,\varphi_{n1}(t))^T,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)=(\varphi_{1n}(t),\cdots,\varphi_{nn}(t))^T$

      是定义在区间I上的n个向量值函数.

      $\exists c_1,c_2,\cdots,c_n$不全为零$s.t.c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)\equiv\boldsymbol{0},t\in I$

      $\Rightarrow$这n个向量值函数在区间I上线性相关. 否则为线性无关.
    - 朗斯基行列式 $W(t)=W[\boldsymbol{\varphi}_1,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n](t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t)&\cdots&\varphi_{1n}(t)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_{n1}(t)&\cdots&\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$
    - 向量值函数线性相关的必要条件
      - $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_2(t)$在区间$I$上线性相关
      - $\Rightarrow W[\boldsymbol{\varphi}_1,\cdots\boldsymbol{\varphi}_n](t)=0$
- 线性微分方程组解的结构
  - 齐次线性方程组解的结构
    - 齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的解集合是一个线性空间
    - n阶齐次线性方程组的解函数组线性相关的充分条件
      - 若向量值函数$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$都是齐次方程组在区间$I$上的解，

        则$\exists t_0\in I,s.t.W[\boldsymbol{\varphi}_1,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n](t_0)=0\Rightarrow\boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$在$I$上线性相关
    - 齐次方程组的解集合是一个n维线性空间
    - 齐次方程组的基本解组和基本解矩阵
      - 基本解组:齐次方程组的任意n个线性无关解

        $\boldsymbol{\varphi}_i(t)=(\varphi_{1i}(t),\cdots,\varphi_{ni}(t))^T,i=1,\cdots,n$
      - 基本解矩阵:由这n个线性无关解为列向量的矩阵

        $\boldsymbol{\phi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t)&\cdots&\varphi_{1n}(t)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \varphi_{n1}(t)&\cdots&\varphi_{nn}(t)\end{bmatrix}$
    - 齐次方程组的通解
      - $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{c},\ \ \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T\in\mathbb{R}^n$
      - 若基本解组满足初值条件:

        $\boldsymbol{\varphi}_1(t_0)=(1,0,0,\cdots,0)^T,$

        $\boldsymbol{\varphi}_2(t_0)=(0,1,0,\cdots,0)^T,$

        $\cdots$

        $\boldsymbol{\varphi}_n(t_0)=(0,0,0,\cdots,1)^T,$

        则方程组满足初值条件$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$的解为$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\xi}$.
  - 非齐次线性方程组的解
    - 特解$\boldsymbol{\psi}(t)$: 常数变易法
      - $\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$，该特解满足初值条件$\boldsymbol{\psi}(t_0)=\boldsymbol{0}$
      - 满足初值条件$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$的解:

        $\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$
    - 通解: $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\psi}(t)+\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{c}$
  - 常系数微分方程组的解
    - 方法1: 用指数矩阵$\exp(\boldsymbol{A}t)$表示常系数微分方程组的解
      - 指数矩阵$\exp(\boldsymbol{A}t)$是线性常系数微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$满足初值条件$\boldsymbol{\phi}(0)=\boldsymbol{I}$的基本解矩阵
      - 指数矩阵的求法
        - 第一步: 写出系数矩阵$\boldsymbol{A}$
        - 第二步: 写出多项式函数$r(\lambda)=a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}+\cdots+a_1(t)\lambda+a_0(t)$
        - 第三步: 求矩阵$\boldsymbol{A}t$的特征值$\lambda_i,i=1,\cdots,n$
        - 第四步: 利用特征值求解多项式函数的系数$a_i(t),i=0,1,\cdots,n-1$
          - 若λ_i是单重特征值则$\mathrm{e}^{\lambda_i}=r(\lambda_i)$;
          - 若λ_i是k重特征值,则

            $\mathrm{e}^{\lambda_i}=r(\lambda_i),$

            $\mathrm{e}^{\lambda_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}r(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i},$

            $\cdots$

            $\mathrm{e}^{\lambda_i}=\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\lambda^{k-1}}r(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i};$
          - 可得到n个关于$a_i(t),i=0,1,\cdots,n-1$的方程
        - 第五步: $\exp(\boldsymbol{A}t)=a_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}t^{n-1}+\cdots a_1(t)\boldsymbol{A}t+a_0(t)$
    - 方法2: 用系数矩阵的特征值和特征向量表示齐次微分方程组的解
      - 若系数矩阵$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{r}_i\in\mathbb{R}^n(i=1,2,\cdots,n)$,

        且其分别对应于(相同或不同)特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，则函数组

        $\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)=\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{r}_n$

        是齐次线性微分方程组的一个基本解组.
      - 基本解组的求法
        - 第一步: 写出齐次线性方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}$
        - 第二步: 求出系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$
        - 第三步: 求出系数矩阵$\boldsymbol{A}$的n个线性无关的特征向量$\boldsymbol{r}_i$
        - 第四步: 写出基本解组

          $\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)=\mathrm{e}^{\lambda_n t}\boldsymbol{r}_n$
      - 该方法适用于系数矩阵$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量的情况
      - 利用叠加原理可以求出共轭复特征值对应的两个线性无关实解
    - 方法3: 消元法