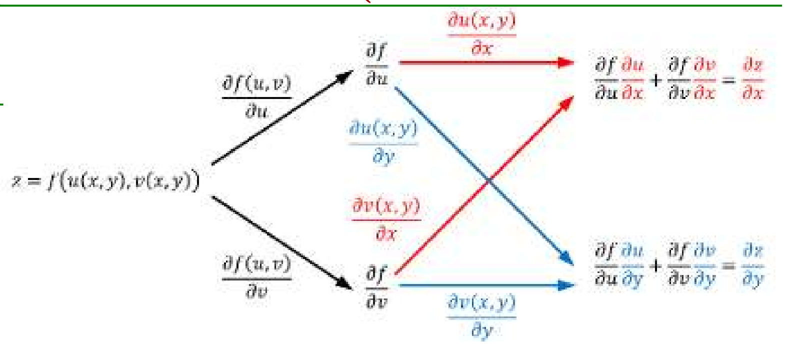
多元函数微分学

- 多元连续函数
- 偏导数
  - 偏导数的概念
    - 偏导数的定义
      - 实质是一元函数的导数：$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f(x,b)}{\mathrm{d}x}\big|_{x=a}$
      - 偏导数存在与函数在该点连续没有必然的联系
    - 二元函数偏导数的几何意义
  - 高阶偏导数
    - 概念
    - 混合偏导数与求导顺序无关的充分条件
- 全微分
  - 全微分的概念
    - 定义：$\exists$ 常数 $A,B,s.t.\Delta f(a,b)=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{x^2+y^2})$
    - 可微$\Rightarrow$连续
    - 几何意义——以平面代替曲面 $f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)$
  - 可微的必要条件与充分条件
    - 可微的必要条件
      - 可微$\Rightarrow$可偏导，且$\mathrm{d}f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$
    - 可微的一个充分条件
      - 充分条件定理
      - $f(x,y)$在区域D上一阶偏导数连续
      - (即$f(x,y)\in C^1(D)$) $\Rightarrow$ $f(x,y)$在D上可微
    - 可微的充分必要条件
      - 理论意义
    - 多元微分形式的原函数
      - 不定积分法求原函数
- 复合函数微分法
  - 复合函数的全微分与偏导数
    - $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 的偏导数 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$



- 隐函数微分法
  - 隐函数的概念
  - 隐函数的存在性与可导性
    - $F(x,y,z)=0$ 两边微分 $F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=0\Rightarrow$
      $\mathrm{d}z=-\frac{F_x}{F_z}\,\mathrm{d}x-\frac{F_y}{F_z}\,\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$
    - $F(x,y,z)=0$ 两边求关于x,y的偏导数 $\begin{cases}F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 解出$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$
  - 隐函数组的微分法
    - $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 分别对两边微分 $\begin{cases}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=0,\\ G_x\mathrm{d}x+G_y\mathrm{d}y+G_z\mathrm{d}z=0,\end{cases}$
      $\Rightarrow\begin{cases}F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ G_x+G_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$ 解该线性方程组得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$
    - $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 分别对两边求关于x的导数
      $\begin{cases}F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ G_x+G_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+G_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$ 解该线性方程组得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$
- 方向导数与梯度
- 多元函数的泰勒公式