

多元连续函数

\mathbb{R}^n 中的简单拓扑学

向量的内积

定义

非负性

对称性

线性运算

Cauchy-Schwarz 不等式 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \leq (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b})$

性质

向量的长度

定义

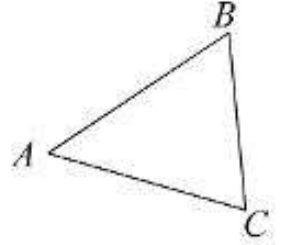
非负性

齐次性

性质

三角不等式 $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$$



点列收敛的定义

点列收敛与其分量数列收敛的关系

极限点的唯一性

收敛点列的性质 收敛点列的有界性

有界点列有收敛子列

\mathbb{R}^n 中点列的收敛性

邻域

内点、外点、边界点

孤立边界点

聚点

开集

闭集

连通集

区域

闭区域

平面点集

自变量、定义域、因变量、值域

二元函数的定义

$y = \sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$ 的定义域是 $\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$

可类似定义三元函数、 n 元函数等多元函数

从一元函数到二元函数会产生很多新问题，从二元函数到二元以上的 n 元函数则可以类推

多元函数的概念

二元函数的图形

平面

上半球面

上半锥面

旋转抛物面

双曲面(马鞍面)

二元函数的等值线

曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = C \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影

常见曲面的等值线

多元函数的极限

定义

可选择特殊路径说明极限不存在

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ 沿直线 $y = kx (k \neq -1)$ 都趋于0，但沿曲线 $y = -x + x^3$ 趋向于无穷大

一元函数极限的运算性质和运算法则仍然成立，可据此计算多元函数的极限

二次极限与累次极限

多元函数的连续性

定义

二元初等函数在其定义域上连续

一致连续性

连续函数的性质

有界闭域上的最大最小值定理

区域上的零点定理

区域上的介值定理

有界闭域上的一致连续性

