29 稳定性初步

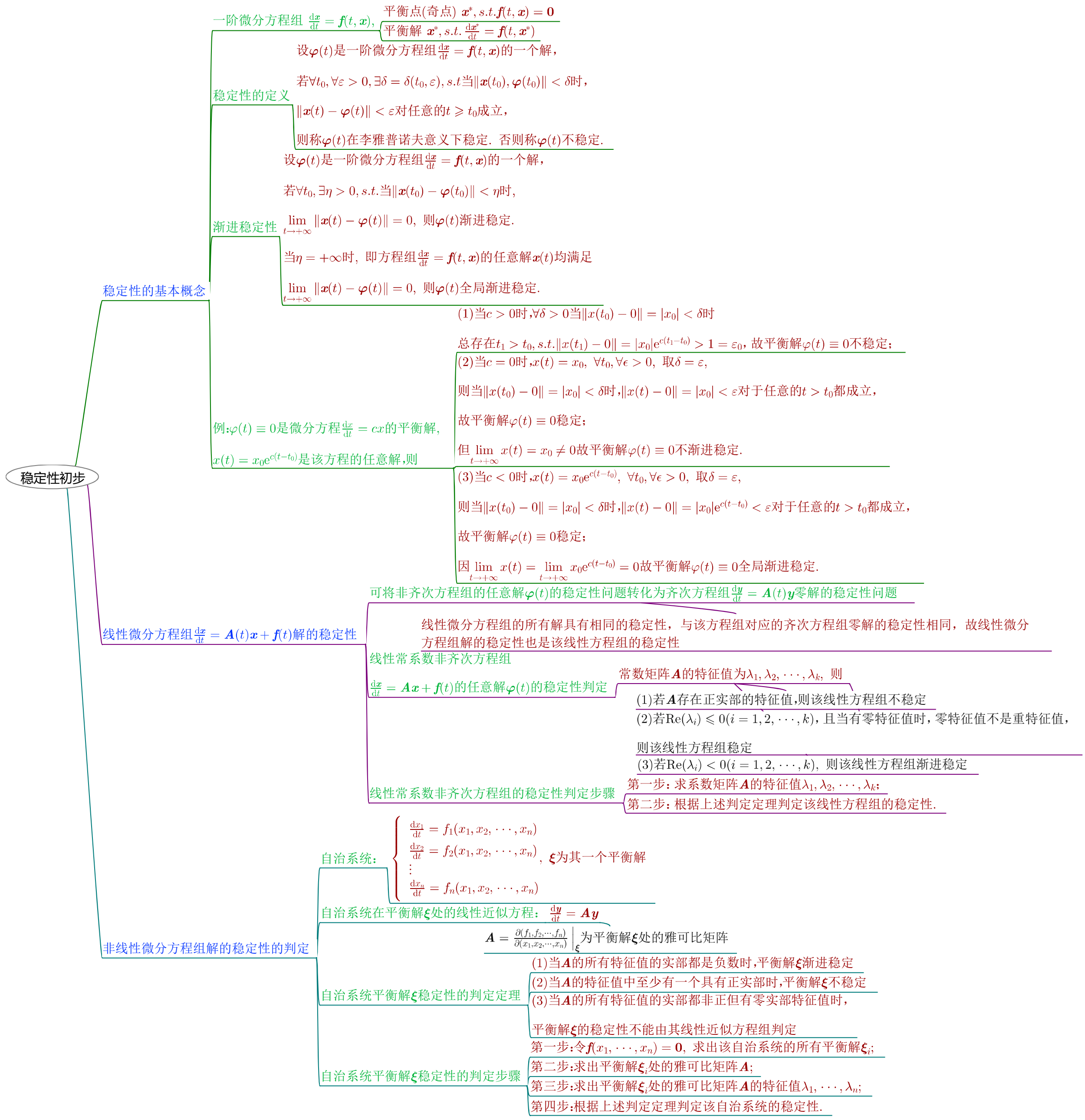
29.1 知识结构

第14章常微分方程

14.6 稳定性初步

- 14.6.1 稳定性的基本概念
- 14.6.2 线性微分方程(组)解的稳定性
- 14.6.3 非线性微分方程组解的稳定性判定

29.2 思维导图


稳定性初步
稳定性的基本概念
一阶微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$,
平衡点(奇点) $\boldsymbol{x}^*, s.t.\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$
平衡解 $\boldsymbol{x}^*, s.t.\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^*)$
稳定性的定义
设$\boldsymbol{\varphi}(t)$是一阶微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$的一个解，
若$\forall t_0,\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(t_0,\varepsilon),s.t$当$\|\boldsymbol{x}(t_0),\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\delta$时，
$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|<\varepsilon$对任意的$t\geqslant t_0$成立，
则称$\boldsymbol{\varphi}(t)$在李雅普诺夫意义下稳定．否则称$\boldsymbol{\varphi}(t)$不稳定.
渐进稳定性
设$\boldsymbol{\varphi}(t)$是一阶微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$的一个解，
若$\forall t_0,\exists\eta>0,s.t.$当$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\varphi}(t_0)\|<\eta$时,
$\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|=0$，则$\boldsymbol{\varphi}(t)$渐进稳定.
当$\eta=+\infty$时，即方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$的任意解$\boldsymbol{x}(t)$均满足
$\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|=0$，则$\boldsymbol{\varphi}(t)$全局渐进稳定.
例:$\varphi(t)\equiv0$是微分方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=cx$的平衡解,
$x(t)=x_0\mathrm{e}^{c(t-t_0)}$是该方程的任意解,则
(1)当$c>0$时,$\forall\delta>0$当$\|x(t_0)-0\|=|x_0|<\delta$时
总存在$t_1>t_0,s.t.\|x(t_1)-0\|=|x_0|\mathrm{e}^{c(t_1-t_0)}>1=\varepsilon_0$，故平衡解$\varphi(t)\equiv0$不稳定；
(2)当$c=0$时,$x(t)=x_0$，$\forall t_0,\forall\epsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$,
则当$\|x(t_0)-0\|=|x_0|<\delta$时,$\|x(t)-0\|=|x_0|<\varepsilon$对于任意的$t>t_0$都成立，
故平衡解$\varphi(t)\equiv0$稳定；
但$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x_0\neq0$故平衡解$\varphi(t)\equiv0$不渐进稳定.
(3)当$c<0$时,$x(t)=x_0\mathrm{e}^{c(t-t_0)}$，$\forall t_0,\forall\epsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$,
则当$\|x(t_0)-0\|=|x_0|<\delta$时,$\|x(t)-0\|=|x_0|\mathrm{e}^{c(t-t_0)}<\varepsilon$对于任意的$t>t_0$都成立，
故平衡解$\varphi(t)\equiv0$稳定；
因$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}x_0\mathrm{e}^{c(t-t_0)}=0$故平衡解$\varphi(t)\equiv0$全局渐进稳定.
线性微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$解的稳定性
可将非齐次方程组的任意解$\boldsymbol{\varphi}(t)$的稳定性问题转化为齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}$零解的稳定性问题
线性微分方程组的所有解具有相同的稳定性，与该方程组对应的齐次方程组零解的稳定性相同，故线性微分方程组解的稳定性也是该线性方程组的稳定性
线性常系数非齐次方程组
$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$的任意解$\boldsymbol{\varphi}(t)$的稳定性判定
常数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，则
(1)若$\boldsymbol{A}$存在正实部的特征值,则该线性方程组不稳定
(2)若$\mathrm{Re}(\lambda_i)\leqslant0(i=1,2,\cdots,k)$，且当有零特征值时，零特征值不是重特征值，
则该线性方程组稳定
(3)若$\mathrm{Re}(\lambda_i)<0(i=1,2,\cdots,k)$，则该线性方程组渐进稳定
线性常系数非齐次方程组的稳定性判定步骤
第一步：求系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$;
第二步：根据上述判定定理判定该线性方程组的稳定性.
非线性微分方程组解的稳定性的判定
自治系统：
$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\\vdots\\\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}$为其一个平衡解
自治系统在平衡解$\boldsymbol{\xi}$处的线性近似方程：$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{A}=\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{\xi}}$为平衡解$\boldsymbol{\xi}$处的雅可比矩阵
自治系统平衡解$\boldsymbol{\xi}$稳定性的判定定理
(1)当$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部都是负数时,平衡解$\boldsymbol{\xi}$渐进稳定
(2)当$\boldsymbol{A}$的特征值中至少有一个具有正实部时,平衡解$\boldsymbol{\xi}$不稳定
(3)当$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部都非正但有零实部特征值时，
平衡解$\boldsymbol{\xi}$的稳定性不能由其线性近似方程组判定
自治系统平衡解$\boldsymbol{\xi}$稳定性的判定步骤
第一步:令$\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{0}$，求出该自治系统的所有平衡解$\boldsymbol{\xi}_i$;
第二步:求出平衡解$\boldsymbol{\xi}_i$处的雅可比矩阵$\boldsymbol{A}$;
第三步:求出平衡解$\boldsymbol{\xi}_i$处的雅可比矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$;
第四步:根据上述判定定理判定该自治系统的稳定性.

29.3 习题分类

1. 利用定义判定方程组平衡解$\boldsymbol{\xi}$的稳定性. 可参考以下步骤：

第一步 求出$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\xi}\|$和$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}\|$的具体形式；

第二步 利用题目条件，将$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\xi}\|$和$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}\|$适当放大；

第三步 判断$\forall t_0, \forall \varepsilon>0$, 是否存在$\delta>0$使得当$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}\|<\delta$时$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\xi}\|<\varepsilon$成立，若存在则该平衡解稳定，若不存在进入第四步；

【如习题14.6中的1.(1)/(2), 2.】

当平衡解稳定时，若$\exists \eta>0$使得当$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}\|<\eta$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\xi}$成立，则平衡解渐进稳定【如习题14.6中的1.(2), 3.】，否则该平衡解不渐进稳定【如习题14.6中的1.(1).】. 当$\eta=+\infty$即方程组的所有解都满足$\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\xi}$时，该平衡解全局渐进稳定【如习题14.6中的1.(2), 3.】.

第四步 说明对于$\varepsilon_0>0, \forall\delta>0$, 存在满足$\|\boldsymbol{x}(t_0)-\boldsymbol{\xi}\|<\delta$的解$\boldsymbol{x}(t_1)$，使得$\|\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{\xi}\|>\varepsilon_0$.

【如习题14.6中的1.(3).】

2. 判定常系数非齐次线性方程组的稳定性. 实际是判定常系数齐次线性方程组零解的稳定性，因非齐次线性方程组任意解的稳定性均可转化为对应的齐次线性方程组零解的稳定性. 可参考以下步骤：

第一步 求出系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值；

第二步 利用常系数线性微分方程组的稳定性判据判定零解的稳定性.

i. 若$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部均为负，则该方程组渐进稳定；
ii. 若$\boldsymbol{A}$含有实部为正的特征值，则该方程组不稳定；
iii. 若$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部均非正，且有零实部的特征值，但零实部的特征值不是重特征值，即有零特征值，但零特征值不是重特征值，则该方程组稳定.

【习题14.6中的5.(1).】

3. 判定自治系统平衡解的稳定性. 可参考以下步骤：

第一步 令$\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{0}$求出方程组的平衡解$\boldsymbol{\xi}_j$；

第二步 求出方程组的雅可比矩阵$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$;

第三步 将平衡解$\boldsymbol{\xi}_j$代入雅可比矩阵，求出线性近似方程的系数矩阵$\boldsymbol{A}=\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_j}$;

第四步 求出系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，利用自治系统稳定性判据判定平衡解$\boldsymbol{\xi}_j$的稳定性.

i. 若$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部均为负，则平衡解$\boldsymbol{\xi}_j$渐进稳定；

ii. 若$\boldsymbol{A}$含有实部为正的特征值，则平衡解$\boldsymbol{\xi}_j$不稳定；

iii. 若$\boldsymbol{A}$的所有特征值的实部均非正，且有零实部的特征值，则不能用线性近似方程组判定平衡解ξ_j的稳定性.

【如习题14.6中的4.(1)/(2).】

若题目只要求判定零解的稳定性，则省略第一步.

【如习题14.6中的5.(3)/(4)/(5).】

若可直接观察得到方程组的线性近似方程组，写出线性近似方程组的系数矩阵，则可直接进入第四步.

【如习题14.6中的5.(2)/(6).】

29.4 习题14.6解答

1. 设某个方程组具有下列形式的通解，试讨论该方程组零解的稳定性：
(1)$x = c_1\cos^2 t - c_2\mathrm{e}^{-t}, y = c_1t^4\mathrm{e}^{-t} + 2c_2$;
(2)$x = \frac{c_1-c_2t}{1+t^2}, y = (c_1t^3 + c_2)\mathrm{e}^{-t}$;
(3)$x = (c_1 - c_2)\mathrm{e}^{-t}, y = \frac{c_1\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)} + c_2$.

解：(1)

$$\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{0}\| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = \sqrt{(c_1\cos^2 t - c_2\mathrm{e}^{-t})^2 + (c_1t^4\mathrm{e}^{-t} + 2c_2)^2},$$

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\| = \sqrt{(c_1\cos^2 t_0 - c_2\mathrm{e}^{-t_0})^2 + (c_1t_0^4\mathrm{e}^{-t_0} + 2c_2)^2},$$

$\because \cos^2 t, \mathrm{e}^{-t}, t^4\mathrm{e}^{-t}$在$t \in [t_0, +\infty)$上均有界，
即$\exists M_1(t_0) > 0, M_2(t_0) > 0, s.t.\ 0 \leqslant \cos^2 t \leqslant 1, 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant M_1(t_0), 0 \leqslant t^4\mathrm{e}^{-t} \leqslant M_2(t_0)$,

$\therefore$

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant \sqrt{[|c_1| + M_1(t_0)|c_2|]^2 + [M_2(t_0)|c_1| + 2|c_2|]^2}, t \in [t_0, +\infty),$$

$\therefore \forall t_0, \forall\varepsilon > 0$, 取$\delta = \varepsilon$, 则当$\|\boldsymbol{x}(t_0)\| \leqslant \sqrt{[|c_1| + M_1(t_0)|c_2|]^2 + [M_2(t_0)|c_1| + 2|c_2|]^2} < \delta$时

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon,$$

$\therefore$该方程组的零解稳定.

$\because$当$c_1 = 0, c_2 \neq 0$时$\lim\limits_{t\to+\infty}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c_2 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$, 当$c_1 \neq 0$时$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$不存在，故$\lim\limits_{t\to+\infty}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$,

$\therefore$该方程组的零解不渐进稳定.

(2)

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{0}\|=\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}=\sqrt{(\frac{c_1-c_2t}{1+t^2})^2+[(c_1t^3+c_2)\mathrm{e}^{-t}]^2},$$

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\|=\sqrt{(\frac{c_1-c_2t_0}{1+t_0^2})^2+[(c_1t_0^3+c_2)\mathrm{e}^{-t_0}]^2},$$

$\because \frac{1}{1+t^2},\frac{t}{1+t^2},t^3\mathrm{e}^{-t},\mathrm{e}^{-t}$在$[t_0,+\infty)$上有界，即$\exists M_1(t_0),M_2(t_0),M_3(t_0),M_4(t_0),s.t.\ |\frac{1}{1+t^2}|<M_1(t_0),|\frac{t}{1+t^2}|<M_2(t_0),|t^3\mathrm{e}^{-t}|<M_3(t_0),|\mathrm{e}^{-t}|<M_4(t_0)$,

$\therefore$

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\sqrt{[M_1(t_0)|c_1|+M_2(t_0)|c_2|]^2+[M_3(t_0)|c_3|+M_4(t_0)|c_4|]^2},t\in[t_0,+\infty),$$

$\therefore \forall t_0,\forall\varepsilon>0,$ 取$\delta=\varepsilon,$ 当$\|\boldsymbol{x}(t_0)\|<\sqrt{[M_1(t_0)|c_1|+M_2(t_0)|c_2|]^2+[M_3(t_0)|c_3|+M_4(t_0)|c_4|]^2}<\delta$时

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,$$

$\therefore$该方程组的零解稳定.

$\because \lim\limits_{t\to+\infty}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\lim\limits_{t\to+\infty}\begin{pmatrix}\frac{c_1-c_2t}{1+t^2}\\(c_1t^3+c_2)\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$

$\therefore$该方程组的零解全局渐进稳定.

(3)$\because \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2t}{t^2+2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2+2}{6t^{\frac{5}{3}}}=+\infty,$

$\therefore \forall\delta>0,$ 可取$c_2=0$和$c_1=c_1(\delta,t_0)$满足

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\|=\sqrt{(c_1\mathrm{e}^{-t_0})^2+[c_1\frac{\sqrt[3]{t_0}}{\ln(t_0^2+2)}]^2}=|c_1|\sqrt{\mathrm{e}^{-2t_0}+[\frac{\sqrt[3]{t_0}}{\ln(t_0^2+2)}]^2}<\delta,$$

对于该$|c_1|>0,\exists t>t_0,s.t.$

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|=|c_1|\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+[\frac{\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)}]^2}>|c_1|\frac{1}{|c_1|}=1=\varepsilon_0,$$

$\therefore$该方程组的零解不稳定.

2. 证明：若线性齐次方程组的每个解是有界的($t>0$),则其零解是稳定的.

证明：若线性齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$的每个解$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^n c_i\boldsymbol{\varphi}_i(t)$都是有界的，其中$\boldsymbol{\varphi}_i(t),i=1,\cdots,n$是该方程组的一个基本解组，

则$\exists M_i>0,i=1,\cdots,n,s.t.\ |\boldsymbol{\varphi}_i(t)|<M_i,\|\boldsymbol{x}(t)\|<\sum_{i=1}^n|c_i|\|\boldsymbol{\varphi}_i(t)\|<\sum_{i=1}^n|c_i|M_i,$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, t_0 > 0$, 取$\delta = \varepsilon$, 若$c_i, i = 1, \cdots, n, s.t.$

$$\|\boldsymbol{x}(t_0) - 0\| = \|\boldsymbol{x}(t_0)\| < \sum_{i=1}^{n} |c_i||\varphi_i(t_0)| < \sum_{i=1}^{n} |c_i| M_i < \delta,$$

则

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \sum_{i=1}^{n} |c_i| M_i < \delta = \varepsilon,$$

$\therefore$该线性齐次方程组的零解是稳定的.

3. 证明：若线性齐次方程组的每个解$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$都满足

$$\lim_{t \to +\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = 0,$$

则其零解是渐进稳定的.

证明：$\because$线性齐次方程组的每个解$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$都满足

$$\lim_{t \to +\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = 0,$$

$\therefore$该线性齐次方程组的每个解是有界的，

$\therefore$该线性齐次方程组的零解是稳定的，

又$\because \lim\limits_{t \to +\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{0}$,

$\therefore$该线性齐次方程组的零解是渐进稳定的.

4. 指出下列方程组的所有平衡解，并用线性近似方程组讨论这些平衡解的稳定性.

$$(1)\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1 - x - y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4} y(2 - 3x - y); \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + k(y - x^2), \end{cases} \quad k > 0.$$

解：(1)由$\begin{cases} x(1 - x - y) = 0, \\ \frac{1}{4} y(2 - 3x - y) = 0, \end{cases}$ 得方程组的三个平衡解为

$$\boldsymbol{x}_1 = (0, 0)^T, \boldsymbol{x}_2 = (0, 2)^T, \boldsymbol{x}_3 = (1, 0)^T,$$

原方程组可表示为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(x, y), \boldsymbol{f}(x, y) = (f_1, f_2)^T = (x(1 - x - y), \frac{1}{4} y(2 - 3x - y))^T$, $\boldsymbol{f}(x, y)$在零解处的雅可比矩阵

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -\frac{3}{4} y & \frac{1}{2} - \frac{3}{4} x - \frac{1}{2} y \end{bmatrix},$$

(i)对于平衡解$\boldsymbol{x}_1 = (0, 0)^T$, 线性近似方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}\right|_{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

特征值$\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = \frac{1}{2} > 0$, 故平衡解$\boldsymbol{x}_1 = (0,0)^T$不稳定.

(ii)对于平衡解$\boldsymbol{x}_2 = (0,2)^T$, 线性近似方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

由$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+\frac{1}{2}) = 0$得特征值$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$, 故平衡解$\boldsymbol{x}_2 = (0,2)^T$渐进稳定.

(iii)对于平衡解$\boldsymbol{x}_3 = (1,0)^T$, 线性近似方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_3} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$,

由$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda+\frac{1}{4} \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+\frac{1}{4}) = 0$得特征值$\lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = -\frac{1}{4} < 0$, 故平衡解$\boldsymbol{x}_3 = (1,0)^T$渐进稳定.

(2)由$\begin{cases} y = 0, \\ -x + k(y - x^2) = 0, \end{cases}$ 得方程组的平衡解为

$$\boldsymbol{x}_1 = (0,0)^T, \boldsymbol{x}_2 = (-\frac{1}{k}, 0)^T,$$

原方程组可表示为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(x,y), \boldsymbol{f}(x,y) = (f_1, f_2)^T = (y, -x + k(y - x^2))^T$, $\boldsymbol{f}(x,y)$在零解处的雅可比矩阵

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2kx & k \end{bmatrix},$$

(i)对于平衡解$\boldsymbol{x}_1 = (0,0)^T$, 线性近似方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix}$,

由$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda-k \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-k)+1 = \lambda^2 - k\lambda + 1 = 0$得特征值$\lambda_1 = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}, \lambda_2 = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$,

a)当$0 < k \leqslant 2$时，$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, 故平衡解$\boldsymbol{x}_1 = (0,0)^T$不稳定;

b)当$k > 2$时，$\lambda_1 = \frac{k-\mathrm{i}\sqrt{4-k^2}}{2}$和$\lambda_2 = \frac{k+\mathrm{i}\sqrt{4-k^2}}{2}$实部均为正, 故平衡解$\boldsymbol{x}_1 = (0,0)^T$不稳定.

(ii)对于平衡解$\boldsymbol{x}_2 = (-\frac{1}{k}, 0)^T$, 线性近似方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$,

由$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda-k \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-k)-1 = \lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$得特征值$\lambda_1 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} < 0, \lambda_2 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} > 0$, 故平衡解$\boldsymbol{x}_2 = (-\frac{1}{k}, 0)^T$不稳定.

5. 判定下列方程组零解的稳定性：

(1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx-y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky-z, \quad k>0;\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=kz-x,\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2xy-x+y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=5x^4+y^3+2x-3y,\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x+2y}-\cos 3x,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sqrt{4+8x}-2\mathrm{e}^y;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-3x},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4z-3\sin(x+y),\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\ln(1-3x+z);\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-z-2\sin x,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-2y+(\sin y+z^2)\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x+y-\frac{z}{1-z};\end{cases}$ (6) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+xy^2-x^3,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+ky-x^2y-y^3,\end{cases} \quad k\neq 0.$

解：(1)该线性常系数齐次方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k&-1&0\\0&k&-1\\-1&0&k\end{bmatrix}$,

由$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-k&1&0\\0&\lambda-k&1\\1&0&\lambda-k\end{vmatrix}=(\lambda-k)^3-1=\lambda^3-3k\lambda^2+3k^2\lambda-k^3-1$ $=(\lambda-k-1)[(\lambda-k)^2+(\lambda-k)+1]=(\lambda-k-1)[\lambda^2+(1-2k)\lambda+1-k+k^2]=0$得特征值$\lambda_1=k+1>0,\lambda_2=\frac{(2k-1)-\sqrt{(2k-1)^2-4(1-k+k^2)}}{2},\lambda_2=\frac{(2k-1)+\sqrt{(2k-1)^2-4(1-k+k^2)}}{2}$,

故该方程组的零解不稳定.

(2)该方程组可表示为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(x,y),\boldsymbol{f}(x,y)=(f_1,f_2)^T=(2xy-x+y,5x^4+y^3+2x-3y)^T$, $\boldsymbol{f}(x,y)$在零解处的雅可比矩阵，即零解处线性近似方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial y}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}2y-1&2x+1\\20x^3+2&3y^2-3\end{bmatrix}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-3\end{bmatrix},$$

由$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+3)-2=\lambda^2+4\lambda+1=0$的特征值$\lambda_1=\frac{-4-\sqrt{16-4}}{2}<0,\lambda_2=\frac{-4+\sqrt{16-4}}{2}<0$,

故该方程组的零解稳定且渐进稳定.

(3)该方程组可表示为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(x,y)=(f_1,f_2)^T=(\mathrm{e}^{x+2y}-\cos 3x,\sqrt{4+8x}-2\mathrm{e}^y)^T$, $\boldsymbol{f}(x,y)$在零解处的雅可比矩阵，即零解处线性近似方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial y}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{x+2y}+3\sin 3x&2\mathrm{e}^{x+2y}\\\frac{4}{\sqrt{4+8x}}&-2\mathrm{e}^y\end{bmatrix}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix},$$

由$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)-4=\lambda^2+\lambda-6=(\lambda+3)(\lambda-2)=0$得特征值$\lambda_1=-3,\lambda_2=2>0$,

故该方程组的零解不稳定.

(4)该方程组可表示为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(x,y,z)=(f_1,f_2,f_3)^T=(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-3x},4z-3\sin(x+y),\ln(1-3x+z))^T$，$\boldsymbol{f}(x,y,z)$在零解处的雅可比矩阵，即零解处线性近似方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{bmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-3x} & 0 & 0\\ -3\cos(x+y) & -3\cos(x+y) & 4\\ \frac{-3}{1-3x+z} & 0 & \frac{1}{1-3x+z}\end{bmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ -3 & -3 & 4\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

由$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & 0\\ 3 & \lambda+3 & -4\\ 3 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+3)(\lambda-1)=0$得特征值$\lambda_1=1>0,\lambda_2=4>0,\lambda_3=-3$,

故该方程组的零解不稳定.

(5)该方程组可表示为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(x,y,z)=(f_1,f_2,f_3)^T=(y-z-2\sin x,x-2y+(\sin y+z^2)\mathrm{e}^x,x+y-\frac{z}{1-z})^T$，$\boldsymbol{f}(x,y,z)$在零解处的雅可比矩阵，即零解处线性近似方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{bmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}$$
$$=\begin{bmatrix}-2\cos x & 1 & -1\\ 1+(\sin y+z^2)\mathrm{e}^x & -2+\mathrm{e}^x\cos y & 2z\mathrm{e}^x\\ 1 & 1 & \frac{-1}{(1-z)^2}\end{bmatrix}\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix},$$

由$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+1 & 0\\ -1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+1)^2+1+(\lambda+1)-(\lambda+1)$

$=(\lambda+2)(\lambda+1)^2+1=0$,

令$f(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+1)^2+1=\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3$,

则$f'(\lambda)=3\lambda^2+8\lambda+5$，$f''(\lambda)=6\lambda+8$,

由$f'(\lambda)=3\lambda^2+8\lambda+5=(3\lambda+5)(\lambda+1)=0, f''(-1)=2>0, f''(-\frac{5}{3})=-2<0$可知函数$f(\lambda)$的极大值为$f(-\frac{5}{3})=\frac{31}{27}>0$极小值为$f(-1)=1>0$, 故该一元三次函数只有一个负实根$\lambda_1<-2$,

$\because f(-3)=-27+36-15+3=-3<0$,

$\therefore -3<\lambda_1<-2$,

由$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3=0$得三个特征值满足$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-4$,

$\therefore -2<\lambda_2+\lambda_3<-1$,

$\therefore$两个共轭复根λ_2,λ_3的实部为负数，

$\therefore$该方程组的零解稳定.

(6)该方程组在零解处的线性近似方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{bmatrix}$,

由$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda-k\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-k)+1=\lambda^2-k\lambda+1=0$得特征值$\lambda_1=\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2},\lambda_2=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$,

当$k>0$时λ_1,λ_2的实部均为正，故该方程组在零解处不稳定.