# 第一型曲线积分与第二型曲线积分的比较

|  |  |
| --- | --- |
| 第一型曲线积分 | 第二型曲线积分 |
| **物理背景** | |
| 非均匀(密度为)曲线的质量 | 力在有向曲线上做功的计算 |
| **图示** | |
|  |  |
| **数学抽象** | |
| 数量场在曲线上的积分 | 向量场在有向曲线上的积分 |
| **定义** | |
| 数量场与弧长元素相乘；  时表示求曲线长度. | 向量场与有向弧段点乘，可用来表示力做功 |
| **弧长和有向弧段** | |
| 弧长元素是长度： | 有向弧段是向量： |
| **表示形式** | |
| 只有一种： | 分量形式： |
| **空间曲线的计算**  (空间第一型曲线积分：目前只能计算参数方程一种形式，遇到空间曲线，需先化成参数方程.  空间第二型曲线积分：除了将曲线方程写成参数方程形式进行计算外，还可用斯托克斯公式计算.) | |
| 已知曲线的参数方程 | 已知曲线的参数方程 |
| **平面曲线的计算** | |
| 已知曲线的参数方程 | 已知曲线的参数方程 |
| 已知曲线的显示方程： | 已知曲线的显示方程： |
| 已知曲线的极坐标方程： | 已知曲线的极坐标方程： |

# 第一型曲面积分与第二型曲面积分的比较

|  |  |
| --- | --- |
| 第一型曲面积分 | 第二型曲面积分 |
| **物理背景** | |
| 非均匀(密度为)曲面的质量 | 速度场穿过有向曲面的通量 |
| **图示** | |
|  |  |
| **数学抽象** | |
| 数量场在曲面上的积分 | 向量场在有向曲面上的积分，  有向曲面规定了正方向，也就是规定了一侧的法向量为正，另一侧的法向量为负 |
| **定义** | |
| 数量场与曲面面积元素相乘  时表示求曲面面积. | * 为的正向单位法向量 * 向量场与有向面积元素点乘，表示为底为高的柱体体积，这就是通量的定义，记住即可 * 表示在曲面的正向积分，如只写默认为在曲面正向积分 * 记作 * 实质是点积的第一型曲面积分 |
| **面积元素和有向面积元素** | |
| 曲面的面积元素用切平面的面积代替： | * 曲面的正向单位法向量：   若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号   * 曲面的有向面积元素： |
| **表示形式** | |
| 只有一种： | * 记 * 分量形式： * 法向量可用方向余弦表示：   其中为该法向量与三个坐标轴正向的夹角，可以证明  故是一个单位向量,   * 化成第一型曲面积分： * 分别是在三个坐标面上的投影 * 同样的中分别是有向面积元素在三个坐标面上的投影 |
| **计算** | |
| 已知曲面的显式方程 | 已知曲面的显式方程  若规定曲面上侧为正，也就是上侧的法向量为正，取正号，若规定曲面下侧为正，也就是下侧的法向量为正，则上侧的法向量为负，故取负号  表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的上侧为正，则取正号，就表示在曲面的上侧做积分，表示在曲面下侧做积分  若只写则表示在曲面的正侧做积分. |
| 已知曲面的显式方程 | 已知曲面的显式方程  若规定曲面侧为正，也就是侧的法向量为正，取正号；若规定曲面侧为正，也就是侧的法向量为正，则侧的法向量为负，故取负号  表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的侧为正，则取正号；就表示在曲面的侧做积分，表示在曲面侧做积分  若只写则表示在曲面的正侧做积分. |
| 已知曲面的显式方程 | 已知曲面的显式方程  若规定曲面侧为正，也就是侧的法向量为正，取正号；若规定曲面侧为正，也就是侧的法向量为正，则侧的法向量为负，故取负号  表示在曲面的正侧做积分. 例如选择曲面的侧为正，则取正号，就表示在曲面的x侧做积分，表示在曲面侧做积分  若只写则表示在曲面的正侧做积分. |
| 已知曲面的参数方程：   * 记 * 记,   , | 已知曲面的参数方程：  记  若规定曲面z侧为正，也就是侧的法向量为正，选取正负号使得；若规定曲面侧为正，也就是侧的法向量为正，则侧的法向量为负，故应选取正负号使得.  方向的情况类似.  当规定内侧和外侧时，例如对于一个球面，选取球坐标极角和圆周角作为参数，则表示指向外侧的单位法向量，若规定外侧为正，则取正号；若规定内侧为正，则取负号.  表示在曲面的正侧做积分. 例如对于上述球面，选择球面的外侧为正，则取正号，就表示在球面的外侧做积分，表示在球面内侧做积分  若只写则表示在曲面的正侧做积分. |