Versuch 234

Lernziel

- mit einer Wechselstrombrücke sollen Kapazitäten und Induktivitäten untersucht und gemessen werden
- der Aufbau einer Phasenschieberschaltung soll nachvollzogen werden.
- Die komplexe Schreibweise und Darstellung (Zeigerdiagramme) von Wechselstromgrößen soll verstanden und geübt werden.
- Es soll die Wirkungsweise von Tiefpass-, Hochpass- und Sperrfilter-Schaltungen gelernt werden.
- Am Beispiel der „Resonanz" soll das Übertragen von mathematisch-physikalischen Formalismen von einem Gebiet der Physik auf ein anderes (von der erzwungenen Schwingung am Drehpendel auf den elektrischen Schwingkreis) dargestellt und beobachtet werden.

Erläuterung

- Die Eigenschaften von Serien- und Parallelschaltkreisen mit anliegender Wechselspannung U_0 folgen aus den Kirchhoffschen Regeln. Außerdem gelten weiterhin die Regeln für Reihen- bzw. Parallelschaltungen (allerdings für Impedanzen).
- Grundlage: Schwingungen

1. Freie Schwingung

- idealisierter Fall: keine Dämpfung

a) Normalform: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ mit $\omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}$

b.) BGL: $\Theta \ddot{\varphi} = -D\varphi = -M$ (Θ - Trägheitsmoment, D - Richtkonstante, M - rücktreibendes Drehmoment)

c.) Allgemeine Lösung: $\varphi(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ bei $B = A^* = \text{const.}$

- realistischer Fall: Dämpfung.

a.) BGL.: $\theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = 0$

b.) Normalform: $\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ mit $2\beta = \frac{r}{\theta}$, $\omega_0^2 = \frac{D}{\theta}$

c.) drei Fälle der Lösung:

1.) Kriechfall ($\beta^2 > \omega_0^2$): $\lambda_1 = -\beta + \gamma$ $\lambda_2 = -\beta - \gamma$ mit $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$
beide reell und negativ → Lösung: $\varphi(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
(A und B reell)

2.) Aperiodischer Grenzfall ($\beta^2 = \omega_0^2$): $\lambda + \omega_0 \stackrel{!}{=} 0$ (λ reell und negativ)
→ Lösung: $\varphi(t) = Ae^{-\omega_0 t} + Bte^{-\omega_0 t}$ (A und B reell)

3.) Schwingfall ($\beta^2 < \omega_0^2$): komplexe Werte für λ, insbesondere:
$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\hat{\omega}$

i) Dämpfungsverhältnis (K) - der Faktor um den sich aufeinanderfolgende Maximalausschläge unterscheiden.

ii) ein gedämpftes Schwingsystem wird durch seine Güte (Q) charakterisiert: $Q = \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T}$ → $\varphi(t) = \varphi_0 e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_0 t)$

2. Erzwungene Schwingung (mit Dämpfung)

- BGL: $\theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = M_0\cos(\omega t)$
- Normalform: $\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \mu\cos(\omega t)$, mit $\mu = \frac{M_0}{\theta}$
- Schwingung mit der Frequenz ω und der Phasenverschiebung α gegen das äußere Drehmoment:

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha) \quad \text{mit} \quad \tan(\alpha) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

a.) Amplitude: $\varphi(\omega) = \dfrac{\mu}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}}$

i) Resonanzfall ($\omega = \omega_0$): $\varphi(\omega_0) = \frac{\mu Q}{\omega_0^2}$

ii) Maximalamplitude ($\omega = 0$): $\varphi(\omega) = Q\varphi(0)$

b.) Phase (α) der Amplitude: $\tan(\alpha) = \frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{Q}$

- Das Verhalten eines (harmonischen) Schwingsystems ist durch seine Eigenfrequenz (ω_0) und Güte (Q) beschrieben.

• Zusammenhang von Strom und Spannung bei Wechselstrom

- Ohmscher Widerstand (R)

bei der Wechselspannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ fließt der Strom $I = I_0 \cos(\omega t)$ mit $I_0 = \frac{U_0}{R}$ (U und I haben die gleichen zeitlichen Phasenlagen)

- Kapazität (C)

a.) Der Kondensator trägt die Ladung $q = CU$, mit $U = U_0 \cos(\omega t)$ folgt: $I = -\omega C U_0 \sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ mit $I_0 = \omega C U_0$.

b.) die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode nach.

c.) Wechselstromwiderstand (Impedanz) einer Kapazität:

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

- Induktivität (L)

a.) Magnetischer Fluss in der Windungsfläche einer Spule $\Phi = LI$, damit Spannung zw. den Enden: $U_{ind} = -\dot{\Phi} = -L\frac{dI}{dt}$.

b.) für $U = U_0 \cos(\omega t)$ folgt $I = U_0 / \omega L \sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ mit $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$

c.) die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode vor.

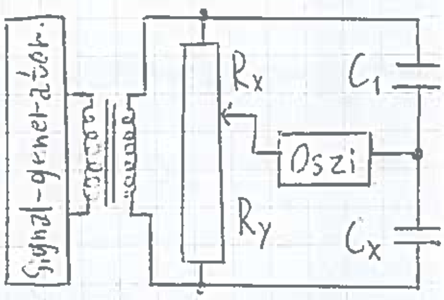
d.) Impedanz einer Induktivität: $Z_L = \omega L$

• Messung von Wechselstromgrößen

- Kapazität:

Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom!

aus $\frac{R_x}{R_y} = \frac{Z_1}{Z_x}$ folgt $\frac{R_x}{R_y} = \frac{C_x}{C_1}$

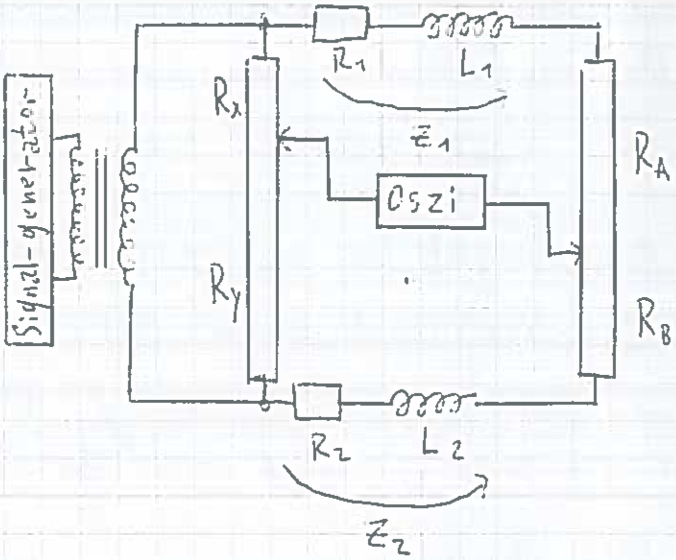


- Induktivität:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{R_1 + i\omega L_1}{R_2 + i\omega L_2} \Rightarrow \frac{R_x}{R_y} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

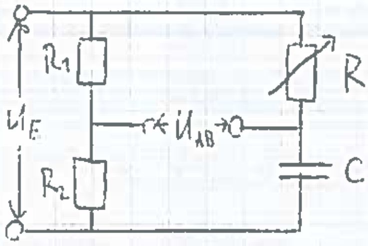
Für beide Bedingungen zugleich wird ein zweites Potentiometer benötigt:

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1+R_A}{R_2+R_B}$$



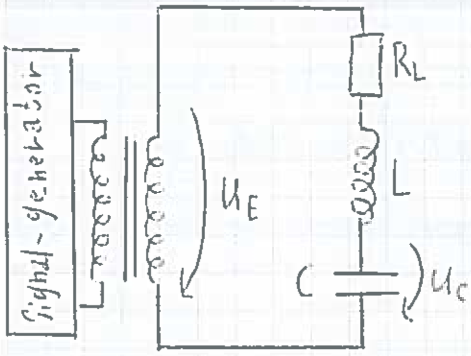
- Impedanz:
  durch Strom-Spannungsmessung.

- RC-Phasenschieber:
  Schaltung, die es möglich macht (bei konstanter Ausgangsspannung) die Phase (φ) einer Ausgangsspannung (U_{AB}) relativ zur Eingangsspannung (U_E) zu variieren.



• Elektrischer Schwingkreis

- Für den Serienschwingkreis gilt: $U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = U_E\cos(\omega t)$



$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int I\,dt = U_E\cos(\omega t)$$

und mit $I(t)=\dot{q}(t)$: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U_E\cos(\omega t)$

→ Lösung: $q(t,\omega) = q_0(\omega)\cos(\omega t - \alpha)$ mit

$$q_0(\omega) = \frac{U_E}{L}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega_0^2\omega^2/Q^2}}, \quad \tan(\alpha) = \frac{\omega_0\omega}{Q(\omega_0^2-\omega^2)}$$

- Eigenfrequenz (ω_0), Güte (Q), Resonanzfrequenz (ω_{max}):

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}, \quad \omega_{max} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

- Ladung (q) bestimmbar aus der Spannung am Kondensator:

$U(t,\omega) = \frac{q(t,\omega)}{C} = U(\omega)\cos(\omega t - \alpha)$ ⇒ Für $\omega=\omega_0$: $U_0 = U(\omega_0) = U_E Q$,

außerdem: $Q \approx \frac{\omega_0}{\dots}$

- Schaltungstypen:

1. Tiefpass
   - Es werden aus einer Signalspannung alle Frequenzen oberhalb einer vorgegebenen Frequenz (ω_{grenz}) unterdrückt
2. Hochpass
   - Es werden alle Frequenzanteile oberhalb eine Grenzfrequenz unterdrückt.
3. Sperrfilter.
   - Es werden alle Frequenzen in unmittelbarer Nähe einer Frequenz unterdrückt.

- Unterdrückungsgüte (Q')

  a.) experementell: $Q'_{exp} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ mit

  $\Delta\nu$ - der Frequenzbereich ~~in~~ in dem gilt: $U_A < U_E / \sqrt{2}$

  b.) theoretisch: $Q'_{theo} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$

- Zeigerdiagramme
- In linearen Netzwerken:

  a.) Proporsionalität zw. cosinusförmigen Wechselspannung und resultierendem Strom

  b.) feste, i.a. von Null verschiedene Phasenverschiebung zw. Spannung und Strom.

- Die Beziehung zw. Beträgen und Phasen der Ströme und Spannungen werden zur Vereifachung in Zeigerdiagrammen dargestellt indem man U und I in der x,y-Ebene durch Zeiger der Länge U_0 bzw. I_0 ausdrückt.
- Zusammenhänge von U und I in Zeigerdiagrammen:

  a.) Ohmscher Widerstand: Strom- und Spannungszeiger verlaufen parallel, Spannungzeiger R-mal so lang wie der für Strom.

b.) Kapazität: rechter Winkel zw. den Zeigern, Spannungszeiger Z_C $\left(= \frac{1}{\omega C}\right)$ mal so lang wie der Stromzeiger (U eilt nach)

c.) Induktivität: rechter Winkel zw. den Zeigern (U eilt vor), Spannungszeiger ist Z_L $(= \omega L)$ mal länger als der Stromzeiger.

- Serienschaltung:
  - a.) es gilt: $|U| = U_0 = Z I_0$ mit Z - Impedanz der gesamten Reihenschaltung
  - b.) Zeigerdiagramme der Wechselstromwiderstände
    - i) es gilt: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ und $\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}$
    - ii) Die Spannung eilt dem Strom um den Winkel φ voraus.
- Parallelschaltung
  Zeigerdiagramm der Wechselstromleitwerte:
  - a.) es ergibt sich: $I_0 = \frac{U_0}{Z}$, $\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$, $\tan(\varphi) = \frac{R}{\omega L}$
  - b.) die Teilströme sind weder untereinander, noch mit dem gesamtstrom in Phase.

• Zusatz:

1. Oszillograph
   - Def. (Funktion): zeigt Spannung als funktion der Zeit an.
2. Dezibel (dB)
   - es gilt (~~[illegible]~~) $Q(P) = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}$ dB
   (mit Q - zu Messende Größe, P_1 und P_2 - Energie- oder Leistungsgr.)
3. Für die Güte (Q) gilt:
   $U_A(\omega_{max}) = Q \cdot U_A(\omega = 0)$, $Q = \omega_0 \frac{L}{R_L}$

Voraufgaben

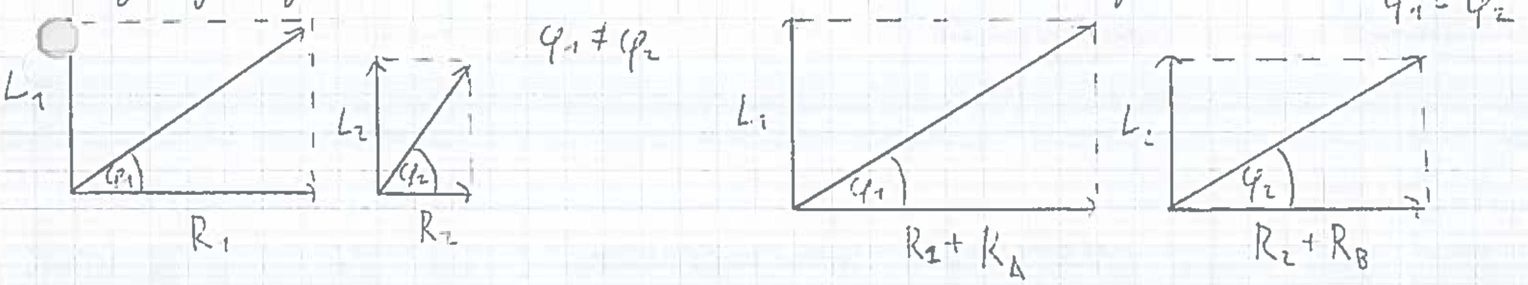
Aufgabe 234 A:

Die Punkte A_1 und A_2 sind die Ein- bzw. Ausgänge des Oszillographen. Um eine Phasendifferenz zu vermeiden (was zur Messung nötig ist) müssen die Widerstände so eingestellt werden, dass

$\frac{L_1}{R_1+R_A} = \frac{L_2}{R_2+R_B}$ gilt. Die Einstellung erfolgt über die Potentiometer

(da L_1 und L_2 konst.)

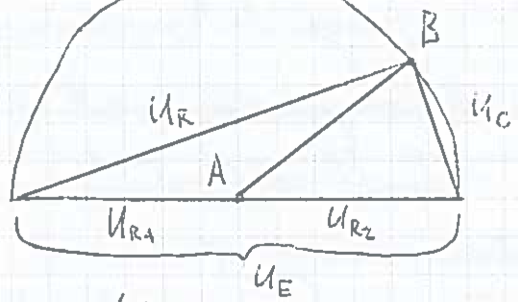
Ausgangslage: Erwünschtes Ergebnis:



Aufgabe 234. B.

- U_L und U_B müssen senkrecht aufeinander stehen und die Summe der beiden ergibt U_E. Damit liegt B immer auf dem Rand eines (Halb-)Kreises mit Radius $\frac{U_E}{2}$ und Mittelpunkt A

$\Rightarrow \varphi \in [0, \pi]$



- Für den Fall $R_1 \neq R_2$ gibt es keine φ-Abhängigkeit von U_{AB}
- Wenn man zwei Kondensatoren oder Spulen einbaut, funktioniert der Aufbau nicht mehr sinnvoll.

- $\varphi = 0 \Rightarrow R \gg \frac{1}{\omega C}$

$\varphi = \pi \Rightarrow R \ll \frac{1}{\omega C}$

- Wenn man nur einen Kondensator verwendet, funktioniert die Schaltung auch. Aber hängt die Ausgangsspannung dann von L oder C ab und limitiert die Verschiebung auf $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 234. C.

Der maximale Strom im RC-Zweig beträgt: $I = \frac{U}{R}$

$$\rightarrow I_{RC} = \frac{U_R + U_C}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

Diesen kann man beobachten, wenn $R = 0\ \Omega$ (was dem Phasenwinkel $\varphi = \pi$ entspricht)

Aufgabe 234 D.

- Die DGL des elektrischen Schwingkreises: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = U_E \cos(\omega t)$
- Diese ist analog zu der, des Drehpendels: $\Theta\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \cos(\omega t)$

Aufgabe 234 E.

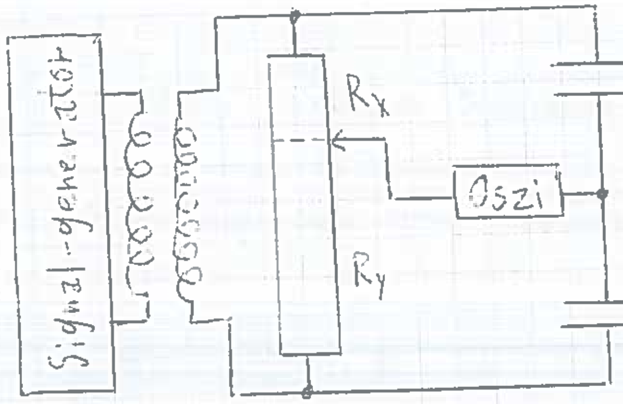
Analogie:

1.) Induktivität (L) → Trägheits~~tenso~~moment (Θ)
2.) Widerstand (R) → Reibungskoeffizient (r)
3.) Kapazität ($\frac{1}{C}$) → Richtkonstante (D)
4.) Ladung (q) → Auslenkung (φ)
5.) Eingangsspannung (U_E) → rückstellendes Drehmoment (M_0)

234.2. Versuchsdurchführung

234.2.1. Messung von Widerständen

Aufgabe 234.a.
Mit der folgenden Schaltung soll man die Kapazität eines Kondensators bestimmen (Kasten Nr. 2) ✓



Geräte:
- Helipot
- $C_1 = 20\,\mu F$

Messfehler:
$\pm \frac{4}{1000}$ der Skal (bei $R_y + R_x = 20$ $\pm 0{,}8\,\Omega$)
- ideal.

Messwerte: $X = \frac{940}{1000}\, l \Rightarrow R_y = 188\,\Omega \pm 0{,}8\,\Omega$

Mit $R_y + R_x = 200\,\Omega \Rightarrow R_x = 12\,\Omega \pm 0{,}8\,\Omega$

aus $\frac{C_x}{C_1} = \frac{R_x}{R_y} \Rightarrow \frac{R_x}{R_y} C_1 = C_x \approx 1{,}28\,\mu F$

Fehlerfortpflanzung nach Gauß ergibt: $\Delta C_x = 0{,}21\,\mu F$ ✓

Dies ergibt: $C_x = (1{,}28 \pm 0{,}21)\,\mu F$

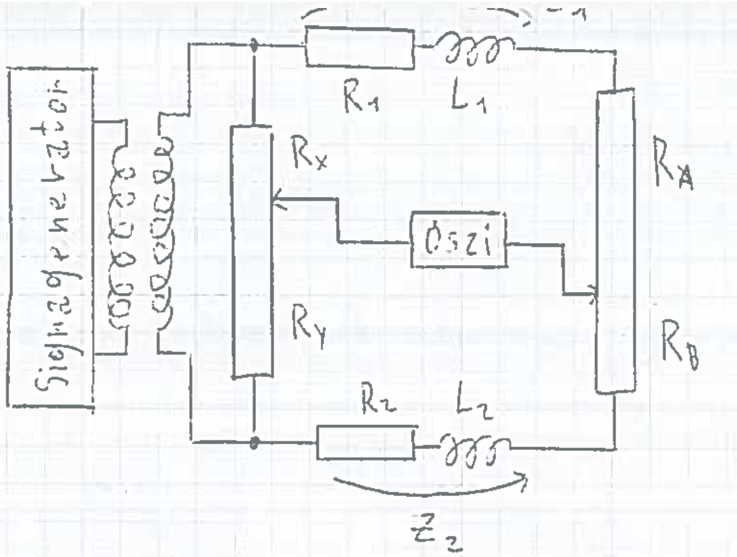
Damit $\frac{C_x}{C_1} = \frac{R_x}{R_y}$ gilt wurde der Helipot so lange eingestellt bis durch diesen kein Strom mehr floss.

Aufgabe 234.b.
Mit der folgenden Schaltung soll der Wert der Induktivität einer Spule bestimmt werden.

~~Helipo~~

Geräte:
- Helipot

Messfehler:
$\pm \frac{4}{1000}$ der Skala.



Umrechnung Messfehler:

$\frac{4}{1000}$ der Skala bei $200\,\Omega$

ergibt $\Delta R_x = \Delta R_y = 0{,}8\,\Omega$

Außerdem: $L_2 = 4{,}84$ mH

Damit $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_x}{R_y}$ gilt muss ~~d~~ beachtet werden, dass kein Strom durch den Oszillographen fließt und die Spannung in phase sein. Dies wurde bei:

Helipot 1 $(200\,\Omega)$: $x = \frac{630}{1000}$ (R_x, R_y) $\Rightarrow$ $R_y = \left(\frac{370}{1000} \cdot 200\right)\Omega$

Helipot 2 $(100\,\Omega)$: $x = \frac{371}{1000}$ $(R_A; R_B)$

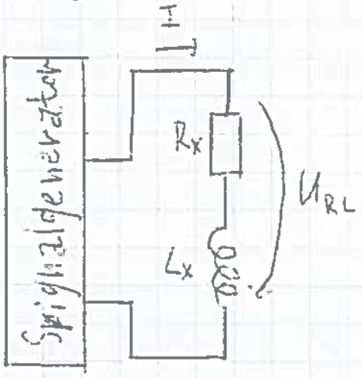
$\Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{R_x}{R_y} \Rightarrow L_1 = L_2 \frac{R_x}{R_y} \approx 2{,}84$ mH

Mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung: $\Delta L_1 = \pm 0{,}09$ mH, damit

$L_1 = (2{,}84 \pm 0{,}09)$ mH

ok

Aufgabe 234. C.



Es soll mit dem DMM die Spule ausgemessen werden. Ergebnisse:

$R_x = 1{,}5\,\Omega$
$U = 3{,}335$ V
$I = 9{,}559$ mA

angelegte Frequenz: 10 kHz

Gerät:
- DMM

Messfehler:
- kleinst anzeige: $\Delta R_x = \pm 0{,}1\,\Omega$
$\Delta U = \pm 0{,}005$ V
$\Delta I = \pm 0{,}005$ mA

ok

Messwerte

Messfehler:

Helipot = $\pm \frac{4}{1000}$ der Skala

$C_1 = 20\,\mu F$ ideal

$C_x = ?$ ideal.

a.) bestes Ergebnis bei $x = l$

neue Messwerte: $x = \frac{940}{1000} l$

$R_Y = 0{,}94 \cdot 200\,\Omega = 188\,\Omega$

b.) $L_2 = 4{,}84$ mH , $R_0 = (2{,}1 \pm 1)\,\Omega$

Helipot 1 (R_x, R_y): 630 / 1000

Helipot 2 (R_A, R_B): 371 / 1000

c.) Bei 10 kHz wurden bei L_2 ~~(16,47 MΩ)~~ gemessen mit ~~DMM (± 0,01 MΩ)~~, ~~U = 3,531 V (± 0,001)~~, ~~I = (49,01 ± 0,1) mA~~
Werte wegen falschem Anschließen des DMMs verworfen.

$I = 9{,}559 \pm (0{,}005)$ mA

$R = 2{,}203 \pm 0{,}1\,k\Omega$ (bei Strom) $R_0 = 1{,}5 \pm (0{,}1)\,\Omega$ (Stromlos)

$U = 3{,}3325 \pm 0{,}005$ V

d.)

R	U_R (V)	U_C (V)
0	0,0175	0,0352
100	0,9475	0,0177
200	1,4073	0,0470
300	1,6877	0,00650
400	1,8764	0,0771
500	2,0104	0,0859
600	2,1098	0,0923
700	2,1885	0,0975
800	2,2513	0,1015
900	2,3025	0,1048
1000	2,3520	0,1077
∞	/	0,1076

In Phase bei $x = l$

Spannung: $\pm 0{,}001$ für U_R

$\pm 0{,}001$ für U_C

Helipot: 200 Ω auf 1000

e.) 10 Vpp – Amplitude

U_E (Hz)	Tiefpass	Hochpass	Sperrfilter
200	4,531	1,4149	4,501 ~~4,991~~
500	3,7686	2,2121	3,1723 ~~4,918~~
1000	2,6659	2,8460	3,4199 ~~4,961~~
1500	1,1717	3,0915	4,434 ~~4,933~~
2000	1,5444	3,2002	4,716
2500	1,2596	3,2500	4,826
3000	1,0626	3,2823	4,893
3500	0,9187	3,3043	4,933
4000	0,8085	3,3192	4,961
4500	0,7214	3,3296	4,976
5000	0,6511	3,3372	4,99

Helipot: $\left(R \pm a \frac{4}{1000} \cdot 200\ \Omega\right)$

DMM $\pm$ 0,001

Sperrfilter Spule:

$L \approx 36$ mH

$R_L \approx 9{,}5\ \Omega$

$C = 1{,}5\ \mu F$

$R = 100\ \Omega \pm 0{,}8\ \Omega$

$U_E = 3{,}535$ V $\pm 0{,}001$ V

i.) Spule: $L \approx 36$ mH

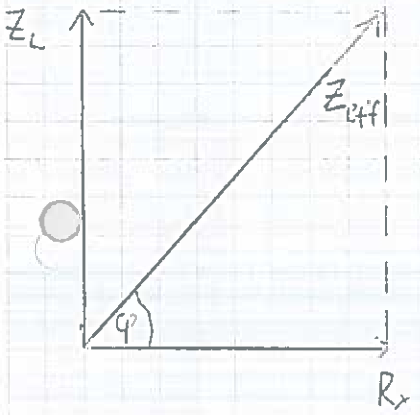
$R \approx 9{,}5\ \Omega$

Aus diesen Werten lässt sich der effektive Widerstand bestimmen:
$$Z_{eff} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U}{I} \approx 348{,}62\,\Omega$$

Mit Fehlerfortpflanzung nach Gauß: $\Delta Z_{eff} = 1{,}897\,\Omega \approx 1{,}9\,\Omega$

$\Rightarrow Z_{eff} = (348{,}62 \pm 1{,}9)\,\Omega$

Zeigerdiagramm (nicht Maßstäblich)



Aus dem Diagramm folgt:

$Z_{eff}^2 = R_x^2 + Z_L^2 \Rightarrow Z_L = \sqrt{Z_{eff}^2 - R_x^2}$

Außerdem gilt: $Z_L = \omega L_x$

$\Rightarrow L_x = \frac{\sqrt{Z_{eff}^2 - R_x^2}}{\omega}$ mit $\omega = 2\pi \cdot \nu$

$\Rightarrow L_x = \frac{\sqrt{Z_{eff}^2 - R_x^2}}{2\pi \nu} \approx 5{,}55\,mH$

Mit der Fehlerfortpflanzung nach Gauß ergibt sich:

$\Delta L_x \approx 0{,}03\,mH$, und damit

$L_x = (5{,}55 \pm 0{,}03)\,mH$

Außerdem soll mittels des Zeigerdiagramms die Phase φ bestimmt werden: $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{Z_{eff}}\right) \approx 89{,}75°$

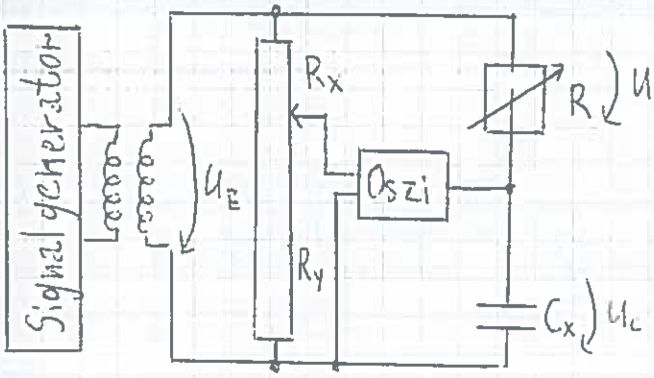
Mit der Fehlerfortpflanzung nach Gauß gilt: $\Delta\varphi = \pm 0{,}00029$

$\Rightarrow \varphi = (89{,}75 \pm 0{,}0003)°$

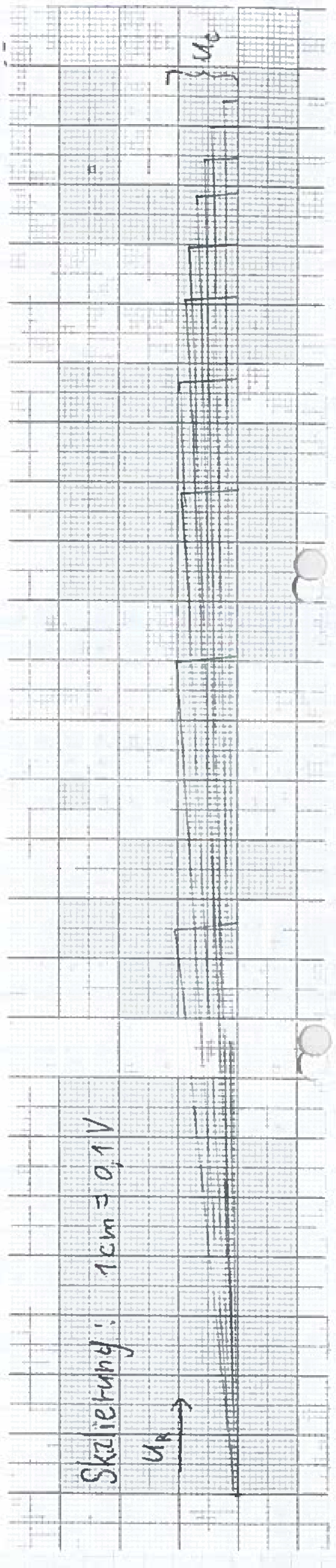
~~Aufgabe~~ 234.2 Phasenschieber

Aufgabe 234. a.

Mit der folgenden Schaltung sollen U_R und U_C bestmmt und im anschluss auf ein Zeigerdiagramm aufgetragen werden



Zeigerdiagramm:



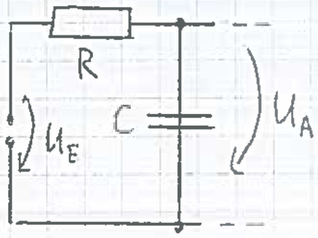
Auf dem Diagramm sind jeweils die Werte von U_C und U_R als Katheten und U_E als Hypotenuse der einzelnen Rechtwinkligen Dreiecke eingezeichnet. Der Wert von U_E (der eigentlich den Durchmesser des Halbkreises darstellen soll) variiert allerdings zu stark, sodass eine Halbkreis-darstellung nicht sinnvoll durchgeführt werden kann. Der ursprung des Problems können anfänglich falsch gemessene Werte von U_R sein (da diese im vergleich mit anderen Quellen eindeutig zu hoch sind), aufgrund von falschem anschließen des Messgeräts oder falscher Schaltung. Ein Abfallender Trend liesst sich dennoch erkennen. Lediglich das Verhältnis der Werte von U_R und U_C machen eine Halbkreisdarstellung nicht sinnvoll durchführbar.

Die Fehler der Messwerte sind zu gering zum einzeichnen.

234.2.3. Frequenzabhängiger Spannungsteiler

Aufgabe 234. e.

1. Tiefpass: Es soll U_A über dem Kondensator gemessen werden (bei wechselnden Frequenzen, aber konstanter Amplitude)



Geräte und Werte:	Messfehler:
- $R = 100\,\Omega$	$\pm 0{,}2\,\Omega$ (des Helipot.
- $C = 1{,}5\,\mu F$	- ideal
- Amplitude = 10 Vpp	- ideal
- $U_E = 3{,}535\,V$	$\pm 0{,}001\,V$ (DMM)
- DMM	$\pm 0{,}001$ (kleinste Skala

Es gilt: $\Omega = \frac{\nu}{\nu_{gr}}$ mit $\nu_{gr} = \frac{1}{2\pi RC}$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow \Omega = \nu 2\pi RC$

(im folgenden $\nu = f$), außerdem $A(DB) = 10 \lg \frac{U_A}{U_E}$; $\Omega(B) = \lg \Omega$.

Alle Messwerte zur Übersicht:

U_A (Tiefpass) (V)	U_A (Hochpass) (V)	U_A (Sperrfilter) (V)	f (Frequenz) (Hz)
4,531	1,4149	4,501	200
3,7686	2,2121	3,1723	500
2,6659	2,846	3,4199	1000
1,1717	3,0915	4,434	1500
1,5444	3,2002	4,716	2000
1,2596	3,25	4,828	2500
1,0626	3,2823	4,893	3000
0,9187	3,3043	4,933	3500
0,8085	3,3192	4,961	4000
0,7214	3,3296	4,978	4500
0,6511	3,3372	4,991	5000

runden

Umrechnung zu A und Ω:

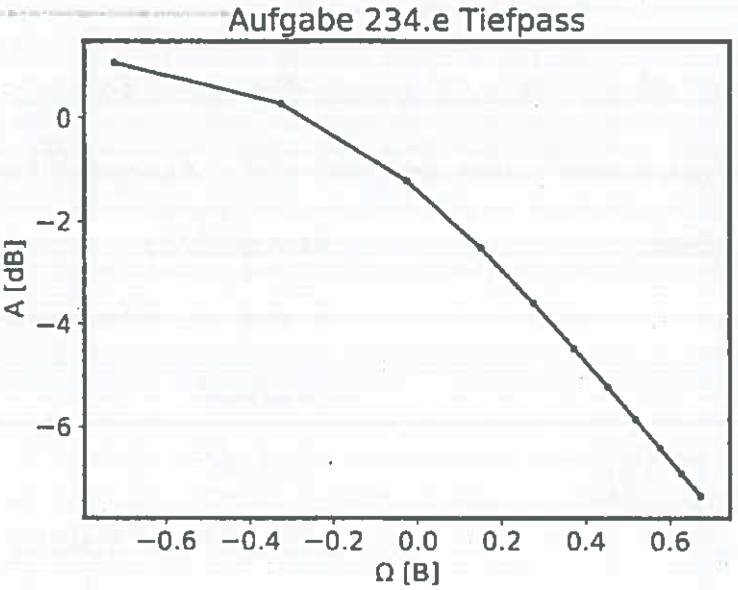
A	10lg(A)	Omega	lg(Omega)
1,2818	1,0780	0,1885	-0,7247
1,0661	0,2779	0,4713	-0,3267
0,7541	-1,2255	0,9425	-0,0257
0,3315	-4,7957	1,4138	0,1504
0,4369	-3,5963	1,8850	0,2753
0,3563	-4,4816	2,3563	0,3722
0,3006	-5,2202	2,8275	0,4514
0,2599	-5,8522	3,2988	0,5184
0,2287	-6,4071	3,7700	0,5763
0,2041	-6,9021	4,2413	0,6275
0,1842	-7,3474	4,7125	0,6733

runden

Messfehler (nur von A, die die von Ω sehr klein und damit vernachlässigbar sind):

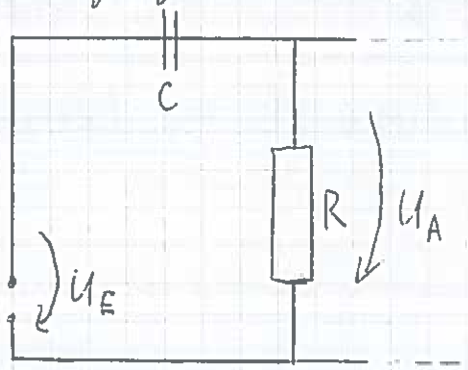
delta A	delta 10lg(A)
0,0005	0,0016
0,0004	0,0017
0,0004	0,0020
0,0003	0,0039
0,0003	0,0031
0,0003	0,0037
0,0003	0,0043
0,0003	0,0049
0,0003	0,0055
0,0003	0,0061
0,0003	0,0068

Nun folgt die doppeltlogarithmische Darstellung der A, Ω-Abhängigkeit.



(Die Fehler sind so gering, dass man sie in dem Diagramm nicht sinnvoll darstellen kann)

2. Hochpass: es soll die Spannung U_A über dem Widerstand $R = 100\ \Omega$ gemessen werden (gleiche Bedingungen wie Tiefpass). Geräte und Werte (sowie deren Messfehler) sind identisch mit dem Tiefpass. Einzig die ~~Sx~~ Schaltung ist anders.



Die Bestimmung von A und Ω ist ebenfalls analog zum Verfahren bei dem Tiefpass.

Umrechnung zu A und Ω:

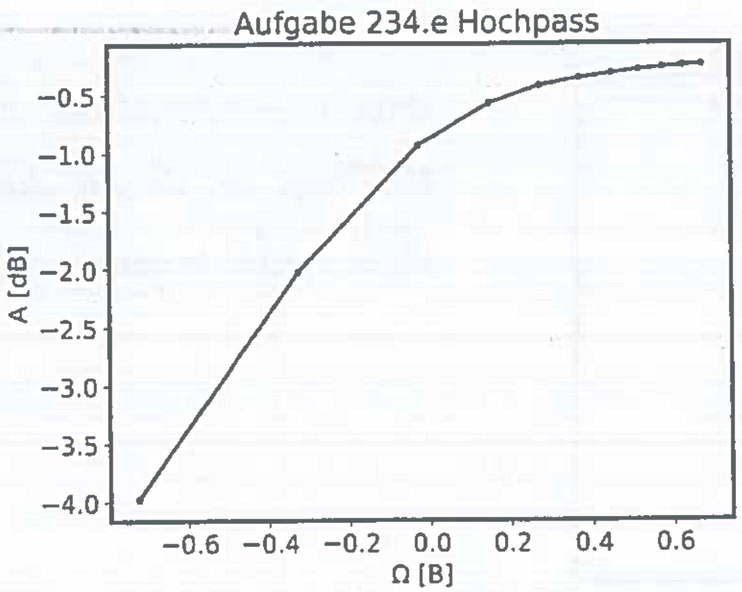
A	10lg(A)	lg(Omega)
0,4003	-3,9766	-0,7247
0,6258	-2,0358	-0,3267
0,8051	-0,9415	-0,0257
0,8745	-0,5822	0,1504
0,9053	-0,4321	0,2753
0,9194	-0,3651	0,3722
0,9285	-0,3221	0,4514
0,9347	-0,2931	0,5184
0,9390	-0,2736	0,5763
0,9419	-0,2600	0,6275
0,9440	-0,2501	0,6733

S.O

Messfehler (nur von A, da die von Ω vernachlässigbar sind):

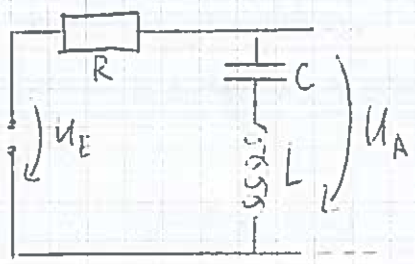
delta A	delta 10lg(A)
0,0003	0,0010
0,0003	0,0014
0,0004	0,0021
0,0004	0,0049
0,0004	0,0038
0,0004	0,0047
0,0004	0,0056
0,0004	0,0065
0,0004	0,0074
0,0004	0,0083
0,0004	0,0092

Es folgt die Doppellogarithmisch Darstellung der A,Ω-Abhängigkeit:



(Die Fehler der Messwerte sind zu gering um sie graphisch sinnvoll darzustellen)

3. Sperrfilter: es soll nun die Spannung U_A über einer Spule (L) und einem Kondensator (C) gemessen werden (verschiedene Frequenzen, konstante Amplitude)



Zusätzlich zu den Geräten aus der Tief- bzw. Hochpassfilter wird eine Spu[le] dazugeschaltet mit $L = 36\,mH$ und $R = 9{,}5$

A wird analog zu Tief- bzw Hochpass bestimmt, Ω wird mit $\Omega = \nu / \nu_{gr}$ bestimmt mit $\nu_{gr} = \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Omega = \nu \cdot 2\pi\sqrt{LC} = f \cdot 2\pi\sqrt{LC}$

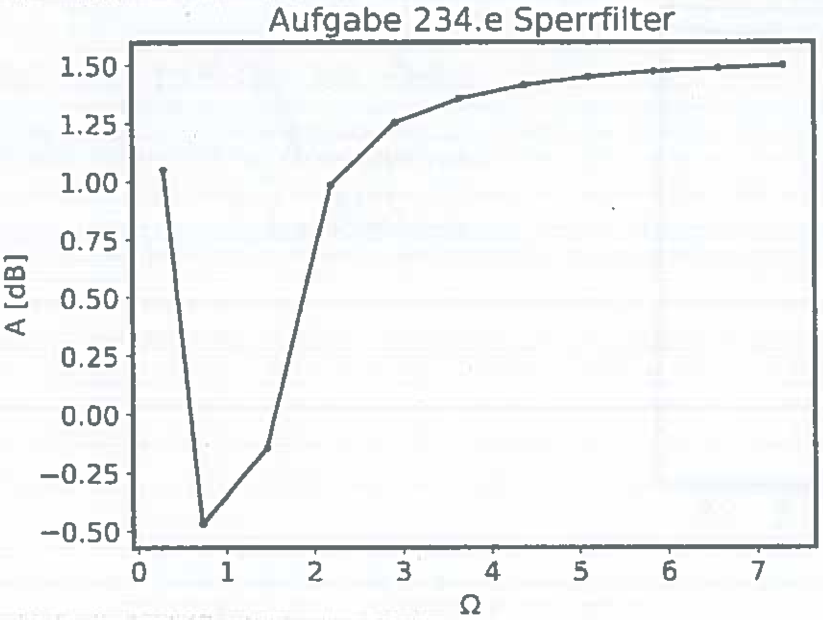
Umrechnung von A und Ω:

Omega	lg(Omega)	A	10lg(A)
0,2920	-5,3459	1,2733	1,0492
0,7300	-1,3665	0,8974	-0,4702
1,4601	1,6438	0,9674	-0,1438
2,1901	3,4047	1,2543	0,9841
2,9202	4,6541	1,3341	1,2518
3,6502	5,6232	1,3658	1,3538
4,3802	6,4150	1,3842	1,4119
5,1103	7,0844	1,3955	1,4472
5,8403	7,6644	1,4034	1,4718
6,5704	8,1759	1,4082	1,4867
7,3004	8,6335	1,4119	1,4980

Messfehler (nur von A, da die von Ω vernachlässigbar klein)

delta A	delta 10lg(A)
0,0005	0,0016
0,0004	0,0018
0,0004	0,0018
0,0005	0,0016
0,0005	0,0015
0,0005	0,0015
0,0005	0,0015
0,0005	0,0015
0,0005	0,0015
0,0005	0,0015
0,0005	0,0015

Die doppellogarithmische Darstellung der A, Ω-Abhängigkeit sieht dann wie folgt aus:



(Die Fehler sind so gering dass eine Graphische Darstellung in diesem Maßstab nicht möglich ist)

Aufgabe f.

Es soll ν_{gr} (Grenzfrequenz) bestimmt werden, bei der gilt $U_A = U_E / \sqrt{2}$. Mit $U_E = 3{,}535\,V \pm 0{,}001\,V$ gilt $U_A \approx \frac{U_E}{\sqrt{2}} \approx 2{,}5\,V$.

Messfehler bestimmen nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta U_A = \sqrt{\left(\frac{\partial U_A}{\partial U_E} \cdot \Delta U_E\right)^2} \approx 7 \cdot 10^{-4}\,V \quad \Rightarrow \quad U_A = (2{,}5 \pm 0{,}0007)\,V$$

Nun lässt sich ν_{gr} aus den durchgeführten Messungen bestimmen (sei dafür U_1 der Wert der aus den Messungen am nächsten zu U_A liegt):

$$U_1 = (2{,}6659 \pm 0{,}001)\,V \quad \text{bei} \quad \nu_1 = 1000\,Hz$$

$$\nu_{gr} = (U_1 - U_A) \cdot 500 + \nu_1 \approx 1083\,Hz$$ Mit Messfehler: $\nu_{gr} = (1083 \pm 0{,}61)\,Hz$

Theoretischer Wert: $\nu_{gr} = \frac{1}{RC\,2\pi} \approx 1061\,Hz$ (da $R = (100 \pm 0{,}8)\,\Omega$ und $C = 1{,}5\,\mu F$)

Messfehler nach Gauß:

$$\Delta\nu_{gr} = \sqrt{\left(\frac{\partial \nu_{gr}}{\partial R}\,\Delta R\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R^2 C \pi \cdot 2} \cdot 0{,}8\,\Omega\right)^2} = 8{,}5\,Hz$$

$\Rightarrow \quad \nu_{gr} = (1061 \pm 8{,}5)\,Hz$

$\Rightarrow$ Relative Abweichung bei Tiefpass: $\varepsilon = +2{,}07\,\%$

Für den Hochpass bleibt U_A unverändert: $U_A = (2,5 \pm 0,0007)\,V$
Das Verfahren zur Bestimmung von ν_{gr} ist auch analog

$$\nu_{gr} = \nu_1 - ((U_1 - U_A) \cdot 500) \approx 827\ Hz$$ (da $U_1 = 2,846\ V \pm 0,001 V$ bei $\nu_1 = 1000\ Hz$ gemessen wurde

Messfehler analog zu Tiefpass $\Rightarrow \nu_{gr} = (827 \pm 0,51)\,Hz$
Der theoretisch Wert ist identisch: $\nu_{gr} = (1061 \pm 8,5)\,Hz$
$\Rightarrow$ Relative Abweichung bei Hochpass: $E = -22,25\,\%$

Aufgabe 234. g.

Es ist die Unterdrückungsgüte Q' zu bestimmen.
1.) Experimentell:
$$Q'_{exp} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Es gilt $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 684,9\ Hz$, sei nun $\Delta\Omega$ der Bereich, in dem auch $U_A < U_E/\sqrt{2}$ gilt mit $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$.

Aus $\Omega = \frac{\nu}{\nu_{gr}}$ und $\nu_{gr} = \nu_0$ (für Sperrfilter) würde dann folgen:
$$Q'_{exp} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{\nu_0}{\frac{\Delta\Omega}{\nu_{gr}}} = \frac{\nu_0}{\nu_{gr}(\Delta\Omega)} = \frac{\nu_0}{\nu_0(\Delta\Omega)} = \frac{1}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Omega_2 - \Omega_1}$$

Ω_2 und Ω_1 wurden abgeschätzt auf $\Omega_1 = 0,6$ und $\Omega_2 = 1,4$

$$\Rightarrow Q'_{exp} = \frac{1}{1,4 - 0,6} = 1,25$$

Dieser Weg wurde gewählt da keine erneute Messung von U_E nach dem Anschließen von der Spule stattgefunden hat. Der resultierende Wert für Q'_{exp} beruht also auf einer Schätzung und könnte damit signifikant von Q'_{theo} abweichen.
2.) Theoretisch:
$$Q'_{theo} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{2\pi\nu_0 RC} \approx 1,55$$

Messfehler (da $R = (100 \pm 0,8)\,\Omega$): $\Delta Q'_{theo} = 0,012 \Rightarrow Q'_{theo} = 1,55 \pm 0,012$

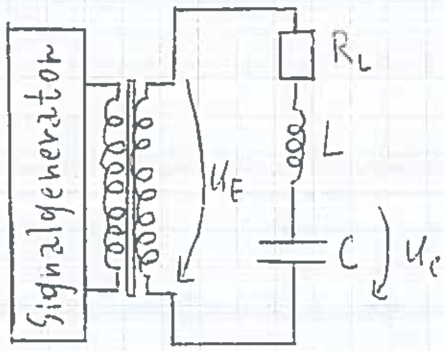
Die Abweichung von Q'_{exp} bezüglich Q'_{theo} ist vermutlich der Schätzung von dem Wert von $\Delta\Omega$ entsprungen. Dennoch liegt der Wert (mit einer Abweichung von -19%) noch in einem vernünftigen Bereich.

Aufgabe 234. h.

Beim Sperrfilter hängt der Abschwächverhältnis von dem Ohmschen Widerstand ab. Bei höherem R steigt dementsprechend die Abschwächung. Daraus folgt, dass die Kreisgüte Q die Breite und die Tiefe des (negativen) Extremums beeinflusst.

234. 2. 4. Elektrischer Schwingkreis

Es soll mit der folgenden Schaltung eine Resonanzkurve bestimmt werden und danach untersucht.



Es sind folgende Daten bekannt!

Luftspule mit folgenden Werten:

N=1000 R= 9.5 Ω
L =36 mH . I_max= 1,25A

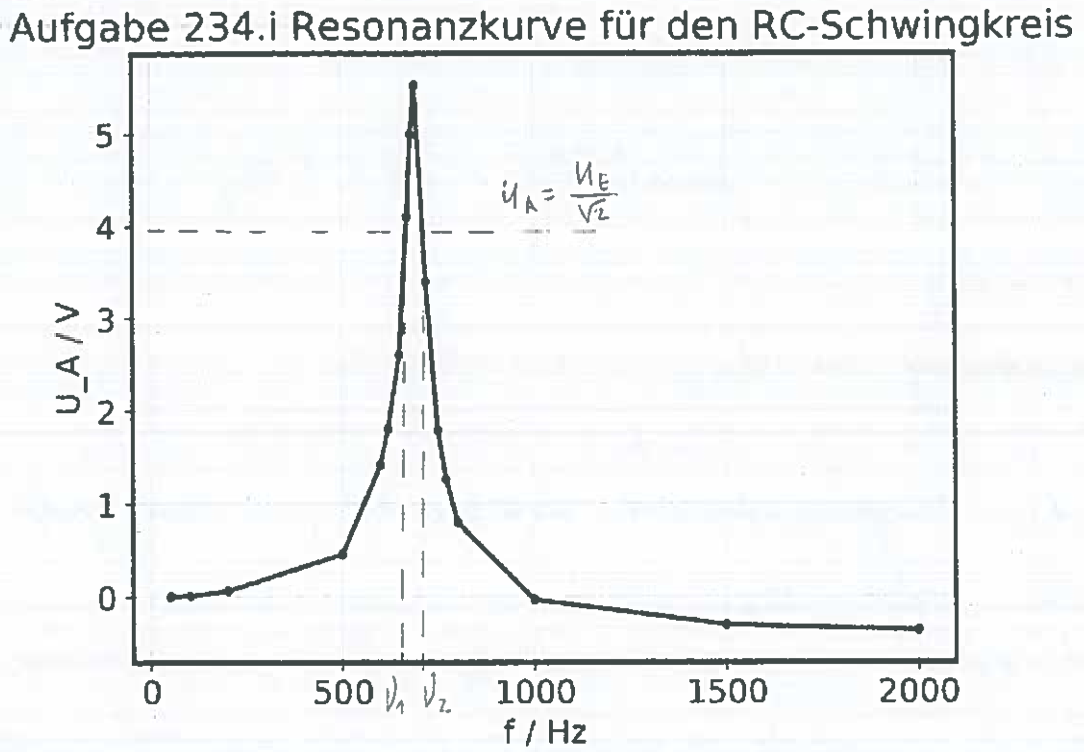
Fehler
ΔU_C= 0,05V

$C = 1{,}5\,\mu F$

f[Hz]	U_C [V]	U_e [V]	U_A
50	0,4174	0,4132	0,0042
100	0,4254	0,415	0,0104
200	0,4798	0,416	0,0638
500	0,87	0,4163	0,4537
600	1,6363	0,2148	1,4215
620	2,0179	0,2135	1,8044
650	3,0875	0,478	2,6095
670	4,492	0,396	4,096
680	5,369	0,3843	4,9847
690	5,895	0,378	5,517
720	3,7897	0,3961	3,3936
750	2,2021	0,4086	1,7935
770	1,6746	0,4113	1,2633
800	1,2125	0,4134	0,7991
1000	0,3833	0,4167	-0,0334
1500	0,1125	0,4172	-0,3047
2000	0,0557	0,4182	-0,3625

/ 5.0

Wenn man nun die U_A-Werte und f-Werte in ein Diagramm aufträgt (also eine U_A, f-Abhängigkeit erstellt) lässt sich die Resonanzkurve visualisieren und bestimmen!



(Die Fehler der einzelnen Werte sind so gering, dass diese nicht sinnvoll auf dem Graphen dargestellt werden können) OL

Nun soll man als erstes ω_0 (Eigenfrequenz) bestimmen:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 4{,}3033 \cdot 10^3 \ \frac{rad}{s} = 4303{,}3 \ \frac{rad}{s}$$

Mit ω_0 kann man Q aus ω_0, R_L und L bestimmen:

$$Q_{theo} = \omega_0 \frac{L}{R_L} = 16{,}31$$

Es wird der Wert von ω_{max} bestimmt mit:

$$\omega_{max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2_{theo}}} \approx 4299{,}26 \ \frac{rad}{s}$$

Q aus Resonanzüberhöhung lässt sich aus dem höchsten gemessenen $U_A = U_{max} = 5{,}517$ V bei $\omega = 2\pi \nu_{max} \approx 4335{,}4 \ \frac{rad}{s}$!

$$Q = \frac{U_{max}}{U_A(\omega=0)}$$ Messfehler: $\Delta U_A = 0{,}05 V \Rightarrow U_{max} = (5{,}517 \pm 0{,}05) V$

$U_A(\omega=0)$ wurde zwar nicht explizit ~~für~~ gemessen, lässt sich aber aus den gemessenen Werten für U_E bestimmen.
Denn wenn $\omega = 0$ gilt $\rightarrow \nu = 0 \rightarrow$ es fließt kein Strom $\rightarrow$
$\rightarrow U_C = 0 V \rightarrow U_A(\omega=0) = U_E$ (das Vorzeichen spielt keine Rolle, da es sich um Wechselstrom handelt)

Damit (und mit dem Durchschnitt von U_E: $\langle U_E \rangle = 0{,}4\,V$) ergibt sich: $U_A(\omega=0) = U_E = 0{,}4\,V \pm 0{,}05\,V$

$$\Rightarrow Q = \frac{U_{max}}{U_A(\omega=0)} \approx 13{,}75 \qquad \text{Messfehler: } \Delta Q = 1{,}73$$

$$\Rightarrow Q = (13{,}75 \pm 1{,}73)$$

Relative Abweichung zu Q_{theo}: $\varepsilon = -15{,}7\,\%$

Zuletzt wird Q über die Resonanzbreite bestimmt.
Dazu wird der Frequenzbereich betrachtet, in dem gilt $U_A > U_{max}/\sqrt{2}$, also $U_A > 3{,}9\,V$.
Diesen Bereich kann man gut am Graphen einschätzen: mit $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ wurde geschätzt $\nu_1 = 665\,Hz$ und $\nu_2 = 705\,Hz$

$$\Rightarrow \Delta\omega = 2\pi\Delta\nu = 2\pi(\nu_2 - \nu_1) = 251{,}33\,\frac{rad}{s}$$, und damit

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx 17{,}12$$

was einer relativen Abweichung von $\varepsilon = 5\%$ bezüglich Q_{theo} entspricht.

Fazit

Bei diesem Versuch sollten Wechselstromgrößen, Methoden ihrer Messung und ihre Eigenschaften untersucht werden. Bei dem Versuchsaufbau 234.2.1 sollten mit verschiedenen Schaltungen Kondensatoren und Spulen ausgemessen werden (Wheatstonesche Brücke für Kapazität (a) und Induktivität (b)). Die Auswertung der gegebenen Messwerte bei ~~[illegible]~~ a und b verlief gut, allerdings sollte bei der c mit einem DMM die zuvor verwendete Spule ausgemessen werden sollen. Dies konnte nicht korrekt umgesetzt werden können, da uns nicht bekannt war, welche Spule in der b (und auch welcher Kasten mit Kapazitäten in der a) verwendet wurde. Das Ergebnis aus der c kann damit nicht mit dem Ergebnis aus der b übereinstimmen. In dem Versuchsteil 234.2.2. sollte mit einem Phasenschieber das erstellen eines Zeigerdiagramms geübt werden. In dem Aufgabenteil d. wurde bereits erklärt, dass es bei der Messung von U_R wohl Probleme gab. Das Vorgehen zum erstellen eines Zeigerdiagramms ist aus diesem Versuch dennoch klargeworden. Der Versuchsteil 234.2.3 sollte zum Verständniss von Tief-, Hochpass und Sperrfilter Schaltungen beitragen. Aus den Graphen, die nach der Auswertung erstellt wurden, lassen sich die Wirkungen der einzelnen Schaltungen gut ablesen: der Tiefpass blockiert höhere (bezogen auf die Grenzfrequenz) Frequenzen ab, der Hochpass die tiefesten und der Sperrfilter diejenigen die nahe an ν_{gr} liegen. Bei dem Sperrfilter wären mehr Werte im Niederfrequenten bereich sinnvoll, dies ist aber erst bei der Auswertung aufgefallen. In dem Versuchsteil 234.2.4 wurde am Beispiel der Resonanzkurve eine Analogie zwischen einem Drehpendel und dem Schwingkreis durchgeführt. Da in der Aufgabenstellung nicht explizit gesagt wurde bei welchen Frequenzwerten gemessen werden sollte musste ein Wert ($U_A(\omega=0)$) über Schätzungen bestimmt werden. Dies hat zwar die Rechnung beeinflus aber das Ergebniss war durchaus nahe dran am erwarteten Wert. Allgemein kann man sagen dass die Versuche (bis auf den Phasenschieber) die gewünschten Ergebnise geliefert haben und zu besser Verständniss von Wechselstromgrößen und deren Messung geführt haben.

1) → achte darauf deine Werte in den Tabellen zu runden!

Bestanden [redacted]