

Physikalisches Institut der Universität Bonn

Physikalisches Praktikum

Anhänge

Status Oktober 2024



Inhaltsverzeichnis

A0	Beschreibung periodischer Vorgänge	1
A1	Kurzeinführung in die Statistik	9
A2	Schwingungen	21
A3	Oszillograph und Datenaufnahme mit dem PC	33
A4	Darstellung von Wechselströmen und -spannungen im Zeigerdiagramm	39
A5	Optische Instrumente	49
A6	Spektren der Spektrallampen	57
	Symbolverzeichnis	59

Anhang A0

Beschreibung periodischer Vorgänge

In der Natur gibt es Vorgänge, die sich im Zeit- und/oder im Ortsraum wiederholen. Beispielsweise ist die Schwingung eines (Uhren-)Pendels ein mechanischer, periodischer Vorgang im Zeitraum. Auch die Wechselspannung des Stromnetzes ist so ein Vorgang. Eine periodische Wiederholung im Ortsraum wäre z.B. die Wellplattendeckung auf Gebäuden oder die Rippel im Sand, die durch Wind- oder Meeresströmung erzeugt werden. Wellen sind Vorgänge, die sowohl im Zeit- als auch Ortsraum periodisch sind. Trifft ein Stein auf eine ruhende Wasseroberfläche, geht vom Auftreffpunkt eine kreisförmige Störung der Höhe der Wasseroberfläche aus: Misst man diese Höhe an einem festen Ort, so beobachtet man eine Schwingung in der Zeit; fotografiert man diese Störung, d.h. beobachtet das System zu einem festen Zeitpunkt, so bildet die gestörte Höhe der Wasseroberfläche einen periodischen Vorgang im Raum.

In der Physik werden diese Vorgänge quantitativ mit mathematischen Methoden beschrieben. Im einfachsten Fall nutzt man dazu die trigonometrischen Funktionen Sinus oder Kosinus. Bei diesem elementaren Zugang stellt sich schnell heraus, dass (1) die Phasenbeziehungen zwischen den verschiedenen schwingenden physikalischen Größen (z.B. Wechselstrom und -spannung) nicht „automatisch“ richtig ausgerechnet werden und (2) die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen unübersichtlich und damit fehleranfällig berechenbar sind. Ein Ausweg liegt in der Darstellung periodischer Vorgänge mit Hilfe komplexer Zahlen.

Diese Einführung wendet sich an Praktikanten, die in ihrer bisherigen schulischen und universitären Ausbildung komplexe Zahlen noch nicht kennen gelernt haben. Es gilt – wie für alle Anhänge und Versuchsanleitungen – dass diese Zusammenstellung ein Studium der Literatur¹ nicht ersetzen kann.

A0.1 Trigonometrische Funktionen

Abb. 1 zeigt den Werteverlauf der periodischen Funktionen Sinus und Kosinus als Funktion der **Phase** φ , wie das Argument der trigonometrischen Funktionen genannt wird. Man erkennt unmittelbar, dass mit einer Verschiebung des Arguments um $\pm\pi/2$ Sinus und Kosinus zur Deckung gebracht werden können. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man sich daher auf eine der beiden Funktionen beschränken, hier wählen wir den Kosinus:

$$W(\varphi) = A \cos \varphi. \quad (\text{A0.1})$$

¹ z.B. H. Schulz, Physik mit dem Bleistift, 1999

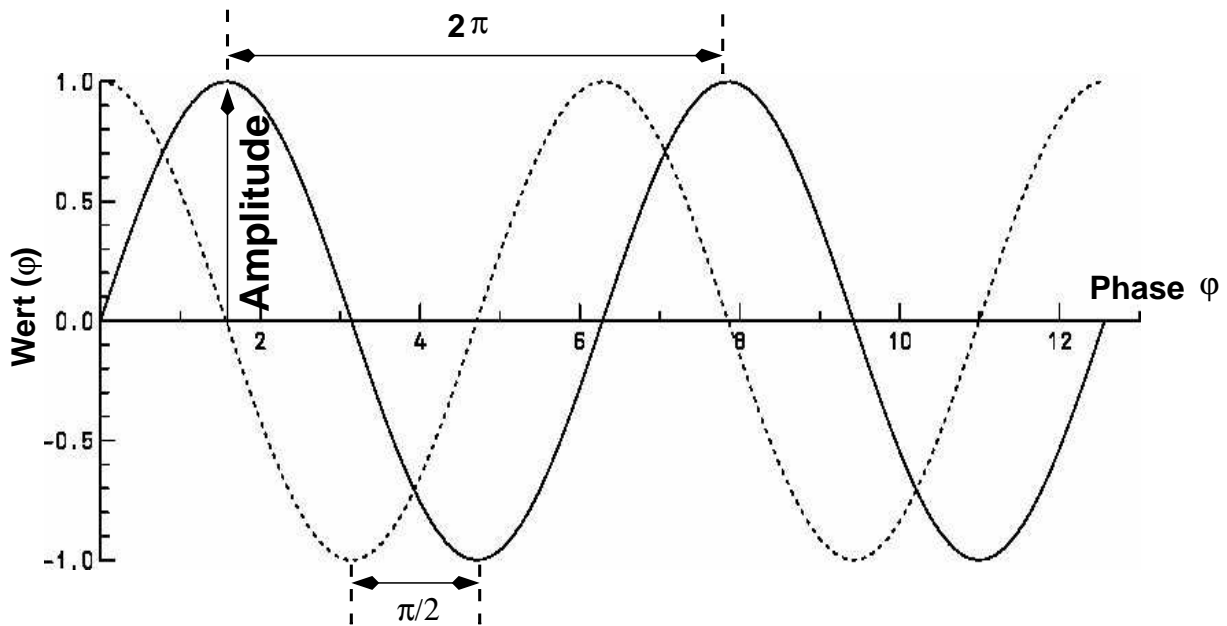


Abbildung 1: Darstellung von Sinus (—) und Kosinus (- -) als Funktion der Phase.

Die **Amplitude** A quantifiziert die extremale Größe des periodischen Vorgangs und sie trägt die zugehörige physikalische Maßeinheit (z.B. Länge, Strom, ...). Die Amplitude kann sich („langsam“) ändern, wenn der periodische Vorgang sich aufschauelt, gedämpft ist oder eine Schwebung ist. Der instantane Wert $W(\varphi)$ des Vorgangs schwankt zwischen $-A$ und $+A$. Die Phase φ hat keine physikalische Maßeinheit. In der Geometrie wird sie als Winkel im Bogenmaß verstanden:

$$\varphi \equiv \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Kreisradius}} = \frac{s}{r}. \quad \text{(A0.2)}$$

Obwohl der Bruch s/r als Verhältnis zweier Längen keine physikalische Maßeinheit trägt, wird als „Gedächtnisstütze“ die Pseudomaßeinheit „Radiant“ (*engl.*: radian), abgekürzt „rad“ angefügt. Andere gebräuchliche Pseudomaßeinheiten für Winkel sind das „Grad“, das auf dem Sexagesimalsystem der sumerischen Kultur beruht und über mehrere tausend Jahre überliefert ist, und das „Gon“ (ursprünglich *franz.*: „grade“; *engl.*: „grad“; *deutsch*: „Neugrad“), eine im Vergleich recht junge Errungenschaft der französischen Revolution².

Aufgabe A0.A: Gegeben sei ein Winkel von 1 rad. Wie groß ist sein Wert in Grad und Gon? Wieviel rad entsprechen 1 Grad bzw. 1 Gon? Geben Sie Ihre Ergebnisse mit einer relativen Genauigkeit von 1% an.

Der Umfang eines Kreises beträgt $U = 2\pi r$. Wenn man als Bogenlänge s den Kreisumfang U einsetzt, so beträgt die Phase $\varphi = 2\pi r/r = 2\pi$, d.h. ein Umlauf um den Kreis entspricht einer Änderung der Phase um 2π und der Vorgang wiederholt sich, wie man es an Abb. 1 erkennen kann.

² Auf Taschenrechnern findet man häufig folgende, englische Terminologie: **rad** bedeutet „radian“ (Radiant), **deg** bedeutet „degree“ (Grad) und **grad** bedeutet „grad“ (Gon).

Vorgänge in der Natur werden in der Physik üblicherweise in einem Koordinatensystem aus Zeit (t) und Raum (x) gemessen. Man braucht also eine Methode, um aus (t, x) die Phase φ zu berechnen. Als „Wiederholungsmaß“ in (t, x) definiert man die **Periodendauer** T bzw. die **Wellenlänge** λ . Die Verhältnisse t/T und x/λ geben an, wo der Vorgang in der Wiederholung steht; um auf die Phase zu kommen, muss noch mit 2π multipliziert werden. Man führt die **Kreisfrequenz** ω und die **Wellenzahl** k ein:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Kreisfrequenz} \quad (\text{A0.3})$$

$$k = 2\pi \tilde{\nu} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Wellenzahl} \quad (\text{A0.4})$$

Dabei heißen $f = \nu = 1/T$ die Frequenz und $\tilde{\nu} = 1/\lambda$ (unglücklicherweise ebenfalls) Wellenzahl (ob k oder $\tilde{\nu}$ gemeint ist, muss man aus dem Zusammenhang erschließen). Um die Koordinatensprünge der Phase φ und der Zeit t bzw. des Ortes x zu entkoppeln, führt man noch die **Phasenlage** φ_0 ein. Damit lauten die Transformationsgleichungen für die Phase:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \quad (\text{A0.5})$$

$$\text{bzw. } \varphi(x) = kx + \varphi_0. \quad (\text{A0.6})$$

Eine Welle ist sowohl in der Zeit als auch im Raum periodisch. Die Phase der Welle ist die Differenz der Zeit- und Raumphasen, wobei eine neue Phasenlage φ_0 entsteht:

$$W(t, x) = W(\varphi(t) - \varphi(x)) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (\text{A0.7})$$

Aufgabe A0.B: Zur Veranschaulichung einer Welle zeichnet man gern die Wellenfronten; das sind Orte gleicher Phase: $\varphi(t, x(t)) = \text{const.}$ Differenzieren Sie diesen Ausdruck nach der Zeit und bestimmen Sie daraus die Phasengeschwindigkeit, d.h. die Geschwindigkeit, mit der sich eine feste Phase (z.B. das Maximum) der Welle im Raum ausbreitet.

Als Beispiel eines periodischen Vorgangs sei ein Kondensator mit der Kapazität C betrachtet, der von einem Wechselstrom $I(t) = I_0 \cos \omega t$ durchflossen wird. Gesucht ist die Spannung, die über dem Kondensator abfällt. Es gilt das OHMSche Gesetz in der Form $U = ZI$, wobei Z für den Wechselstromwiderstand (Impedanz) steht. Für einen Kondensator beträgt $Z = 1/(\omega C)$. Eingesetzt erhält man:

$$U_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t. \quad (\text{A0.8})$$

Die Amplitude $I_0/(\omega C)$ ist richtig berechnet und es stimmt auch, dass die Spannung U_C mit der Kreisfrequenz ω variiert. Aber die Phasenlage der Spannung ist gegenüber dem Strom um $\pi/2$ verschoben, was Gleichung A0.8 nicht wiedergibt. Die Physik der Kondensatoraufladung³ muss „per Hand“ in diese Lösung eingeflickt werden, um das richtige, phasenverzögerte Ergebnis zu erhalten.

³ Die Spannung zwischen den Kondensatorplatten wird von der Ladung auf diesen Platten bestimmt. Der Strom bringt diese Ladung zu den Platten. Damit baut sich die Ladung so lange auf, bis der Strom die Richtung wechselt. Der Richtungswechsel (= Nulldurchgang) findet eine viertel Periode nach den Extrema statt und damit folgen gleiche Phasen der Spannung um $(2\pi)/4 = \pi/2$ zeitverzögert nach denen des Stroms.

A0.2 Komplexe Zahlen

Das Quadrat einer reellen Zahl ist immer positiv. Zieht man die Quadratwurzel aus einer negativen reellen Zahl, so gehört das Ergebnis nicht mehr zu der Menge der reellen Zahlen, sondern zu der Menge der imaginären Zahlen. Man kann eine negative reelle Zahl $-R$ immer schreiben als $(-1) \cdot |R|$. Damit wird die Wurzel $\sqrt{-R} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|R|}$. Die Wurzel aus dem Betrag $|R|$ ist in der Menge der reellen Zahlen berechenbar. Die imaginäre Eigenschaft steckt in $\sqrt{-1}$. Man definiert das Symbol⁴ i als:

$$i \equiv \sqrt{-1}, \quad (\text{A0.9})$$

als Kennzeichnung (Maßeinheit) für imaginäre Zahlen mit der Rechenregel⁵

$$i^2 = -1. \quad (\text{A0.10})$$

Eine **komplexe Zahl** z ist aus einer reellen und einer imaginären Zahl zusammengesetzt (Linearkombination):

$$z \equiv a + bi. \quad (\text{A0.11})$$

Man nennt $a = \text{Re}(z)$ den Realteil und $b = \text{Im}(z)$ den Imaginärteil. Es gelten folgende Rechenregeln:

1. Bei der Addition/Subtraktion werden Real- und Imaginärteil getrennt behandelt:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

2. Für die Multiplikation ergibt sich:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

3. Die zu z konjugiert komplexe Zahl z^* ist definiert als $z^* \equiv a - bi$.
Es ergibt sich für die

$$\text{Addition: } z + z^* = (a + bi) + (a - bi) = +2a.$$

$$\text{Subtraktion: } z - z^* = (a + bi) - (a - bi) = +2bi.$$

$$\text{Multiplikation: } z \cdot z^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Aber man beachte, dass $z^2 = (a + bi) \cdot (a + bi) = a^2 - b^2 + 2abi$ ergibt.

4. Der Betrag $|z|$ oder Modulus ist definiert als

$$|z| \equiv \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Insbesondere ist $|i| = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{1} = 1$.

⁴ Bei Ingenieuren und Elektrotechnikern wird anstatt i häufig der Buchstabe j genutzt.

⁵ Was stimmt hier nicht? $-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$.

5. Bei der Division zweier komplexer Zahlen erweitert man den Bruch mit dem konjugiert-komplexen Wert des Nenners, der damit reell wird. Der Zähler wird multiplikativ berechnet und man erhält

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

A0.2.1 Graphische Veranschaulichung komplexer Zahlen

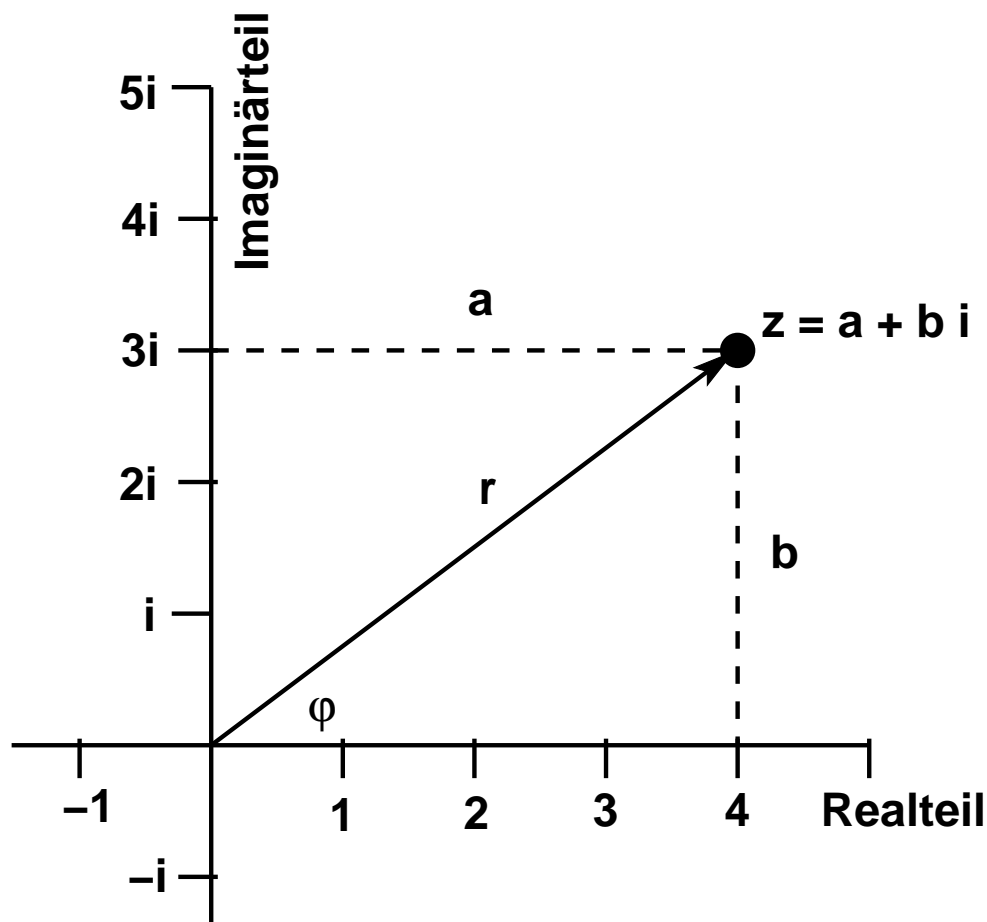


Abbildung 2: Komplexe Zahlenebene (ARGANDSches Diagramm).

Eine komplexe Zahl besteht aus einem Zahlenpaar (a, b) . Die Lage eines Punktes in einer Ebene wird durch ein Koordinatenpaar (x, y) beschrieben. Man nutzt diese Analogie, um sich komplexe Zahlen graphisch zu veranschaulichen (siehe Abb. 2). Man wählt ein kartesisches Koordinatensystem und trägt den Realteil entlang der Abszisse und den Imaginärteil entlang der Ordinate auf. Man spricht von der komplexen Zahlenebene, dem ARGANDSchen Diagramm oder auch dem Zeigerdiagramm. Der Punkt in Abb. 2 stellt die komplexe Zahl $z = a + bi$ dar. Die gerichtete Verbindungslinie (Vektor) vom Ursprung $(0, 0i)$ nach z wird Zeiger genannt.

Neben den kartesischen Koordinaten (x, y) kann man z auch in Polarkoordinaten (r, φ) ausdrücken. Aus Abb. 2 liest man ab:

$$\begin{aligned} |r| &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^*} \\ \operatorname{Re}(z) = a &= r \cos \varphi \\ \operatorname{Im}(z) = b &= r \sin \varphi \\ \text{und damit wird } z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned} \quad (\text{A0.12})$$

A0.2.2 EULERSche Formel

Die EULERSche Formel stellt einen Zusammenhang⁶ zwischen der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument und der Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten her:

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi. \quad (\text{A0.13})$$

Folgende ausgezeichnete Werte von $e^{i\varphi}$ sollte man kennen:

φ	0	$\pi/2$	π	$-\pi/2$
$e^{i\varphi}$	1	i	-1	$-i$

Mit der EULERSchen Formel kann man die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen herleiten, z.B.:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{Re}(e^{i(\alpha+\beta)}) \\ &= \operatorname{Re}(e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}) \\ &= \operatorname{Re}((\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta)) \\ &= \operatorname{Re}(\cos \alpha \cos \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned} \quad (\text{A0.14})$$

A0.3 Beschreibung periodischer Vorgänge mit der komplexen Exponentialfunktion

Da nach Gleichung A0.13 $\operatorname{Re}(e^{i\varphi}) = \cos \varphi$ ist, kann man die komplexe Exponentialfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen nutzen. Die betrachteten physikalischen Größen werden durch komplexe Zahlen beschrieben. Die Rechnung wird im komplexen Zahlenraum durchgeführt. Je nach Fragestellung ist die gesuchte physikalische Information entweder der Realteil oder der Modulus des Ergebnisses.

Als Beispiel sei erneut der Kondensator betrachtet, der von Wechselstrom durchflossen wird. Die Impedanz der Kondensators wird jetzt durch die komplexe Zahl $Z_C = 1/(i\omega C)$ gegeben. Die Phasenverschiebung wird durch das „i“ bestimmt. Mit dem OHMSchen Gesetz ergibt sich dann für

⁶ In Lehrbüchern der Mathematik bzw. über mathematische Methoden in der Physik findet man mehrere unterschiedliche Beweise für die EULERSche Formel.

die Spannung über dem Kondensator:

$$\begin{aligned}
 U_C(t) &= Z_C I(t) && \text{Ohmsches Gesetz} \\
 &= \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} && \text{Einsetzen der phys. Größen } (Z_C, I(t)) \\
 &= \frac{-i}{\omega C} I_0 e^{i\omega t} && \text{Erweitern mit } -i \\
 &= \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega C} I_0 e^{i\omega t} && \text{EULERSche Formel} \\
 &= \frac{I_0}{\omega C} e^{i(\omega t - \pi/2)} && \text{Zusammenfassen der Exponenten} \\
 \operatorname{Re}(U_C(t)) &= \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2). && \text{Reelles Endergebnis}
 \end{aligned} \tag{A0.15}$$

Anders als bei der Rechnung im reellen Zahlenraum in Abschnitt [A0.1](#) (siehe Gleichung [A0.8](#)) erhält man mit dieser Rechnung (Gleichung [A0.15](#)) die richtige Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.

Die Regeln für das Rechnen mit der komplexen Exponentialfunktion sind deutlich einfacher als die Rechenregeln für trigonometrische Funktionen. Als Beispiel sei die Differentiation angeführt:

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t}. \tag{A0.16}$$

Dies wird mehrfach in der Praktikumsanleitung ausgenützt, so z.B. in Anhang [A2](#) (Schwingungen).

In Abb. [2](#) ändert sich der Winkel φ gemäß den Gleichungen [A0.5](#) bis [A0.7](#), d.h. der Zeiger rotiert im Diagramm, wenn Zeit bzw. Ort sich ändern. Wenn man nur an der relativen Phasenlage der physikalischen Größen interessiert ist, kann man die Rotation des Zeigers ignorieren.

Anhang A1

Kurzeinführung in die Statistik

Literatur: Brandt: Datenanalyse; Barlow: Statistics; Cowan: Statistical Data Analysis

A1.1 Messungen aus statistischer Sicht

Beim Messen ermittelt man mittels experimenteller Techniken den Wert physikalischer Größen. Statistisch gesehen sind diese Messgrößen Zufallsvariablen, die durch im Allgemeinen unbekannte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (häufig auch mit PDF für *probability density function* abgekürzt) beschrieben werden. Messwerte stellen eine Stichprobe der durch die PDF beschriebenen Grundgesamtheit (also der Menge aller möglichen Messergebnisse) dar.

Das (Un-)Wissen über die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung variiert von Fall zu Fall. Manchmal kennt man die Form der Verteilung, weiß jedoch nichts über deren charakteristische Parameter, in anderen Fällen ist nicht einmal die Form der PDF bekannt. Ziel einer Messung ist in der Regel die Schätzung der Parameter der zugrunde liegenden PDF anhand der verfügbaren Messwerte. Bei geeignet gewählten Schätzern ist die Präzision der Schätzung nur durch den Stichprobenumfang (also der Anzahl der Messwerte) beschränkt. Ist die Form der PDF unbekannt, werden üblicherweise generische Parameter, wie z. B. der Mittelwert oder die Standardabweichung der Verteilung abgeschätzt.

Eine besondere Stellung unter den PDFs nimmt die Gaußverteilung ein. Ihre Bedeutung liegt im *Zentralen Grenzwertsatz* begründet, der besagt, dass die Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen für $n \rightarrow \infty$ gaußverteilt ist, unabhängig davon, wie die einzelnen x_i verteilt sind. Eine Gaußverteilung wird durch die Funktionsvorschrift

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A1.1})$$

beschrieben und besitzt zwei Parameter, μ und σ .

A1.2 Schätzung von Parametern

Bei der Diskussion von Parameterschätzungen muss man stets darauf achten, dass man einen Parameter und seinen Schätzer nicht verwechselt. Um den Unterschied deutlich zu machen, werden

im Folgenden Schätzer durch ein Hut-Symbol gekennzeichnet, z. B. kennzeichnet $\hat{\mu}$ einen Schätzer des Parameters μ .

Schätzer für Parameter operieren auf dem Stichprobenraum (einer Teilmenge der Grundgesamtheit), wohingegen in die Bestimmung der Parameter selbst die gesamte Grundgesamtheit einfließt.

A1.2.1 Mittelwert

Als (Populations-)Mittelwert μ einer Zufallsvariablen x , die gemäß einer PDF $f(x)$ verteilt ist, bezeichnet man den Erwartungswert

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu. \quad (\text{A1.2})$$

Im Fall einer diskreten Zufallsvariablen geht Gleichung A1.2 über in

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (\text{A1.3})$$

Hier ist N die Populationsgröße und x_i sind die Populationsmitglieder.

Als Schätzer $\hat{\mu}$ für den Mittelwert μ einer Grundgesamtheit wird häufig der arithmetische Mittelwert \bar{x} der Stichprobenelemente verwendet:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (\text{A1.4})$$

Hierbei bezeichnet n den Stichprobenumfang (Anzahl der Messungen, die für die Schätzung zur Verfügung steht) und x_i die Stichprobenelemente. \bar{x} wird auch Stichprobenmittelwert genannt.

A1.2.2 Varianz und Standardabweichung

Die (Populations-)Varianz $V[x]$ einer Zufallsvariablen x mit PDF $f(x)$ ist definiert als der folgende Erwartungswert

$$E[(x - E[x])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = V[x] \quad (\text{A1.5})$$

$$= E[x^2] - \mu^2. \quad (\text{A1.6})$$

Für diskrete Zufallsvariablen lässt sich Gleichung A1.5 als

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (\text{A1.7})$$

schreiben.

Ein Schätzer \hat{V} , der aus einer gegebenen Stichprobe die Varianz V einer Grundgesamtheit abschätzt, ist

$$\hat{V} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} (\overline{x^2} - \bar{x}^2) \quad (\text{A1.8})$$

\hat{V} wird Stichprobenvarianz genannt. Beim Vergleich von Gleichung A1.7 und Gleichung A1.8 fallen einem folgende Unterschiede auf:

- Für den Schätzer wird der Schätzer des Mittelwertes $\hat{\mu} = \bar{x}$ verwendet (der Mittelwert selbst ist in der Regel unbekannt).
- Im Nenner des Schätzers \hat{V} wird durch $n-1$ geteilt. Dies liegt darin begründet, dass dieselben Daten, die zur Varianzschätzung herangezogen werden, vorher schon zur Schätzung des Mittelwertes verwendet wurden. Durch die Mittelwertschätzung geht dem System quasi ein Freiheitsgrad verloren¹.

Die Standardabweichung σ einer Grundgesamtheit ergibt sich durch Wurzelziehen aus der Varianz V :

$$\sigma = \sqrt{V}. \quad (\text{A1.9})$$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Elemente der Grundgesamtheit um ihren Mittelwert μ . Im Zusammenhang mit Messungen wird die Standardabweichung häufig auch als *Unsicherheit* oder *Fehler* der Messung bezeichnet.

Analog gilt für die Schätzer der Zusammenhang²:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{V}}. \quad (\text{A1.10})$$

Neben den Stichprobenelementen x_i ist auch der Mittelwertschätzer $\hat{\mu}$ eine Zufallsvariable. Wiederhole ich eine Messreihe aus n Einzelmessungen m mal, ergeben sich im Allgemeinen m verschiedene Schätzwerte $\hat{\mu}_i$ für den Mittelwert μ , obwohl μ für alle Messreihen identisch ist. Ein Maß für die Streuung der geschätzten Mittelwerte $\hat{\mu}_i$ ist ihre Standardabweichung. Sie ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}} = \sqrt{V[\bar{x}]} = \sqrt{E[\bar{x}^2] - (E[\bar{x}])^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{A1.11})$$

Die Präzision eines Mittelwertschätzers nimmt also mit der Quadratwurzel des Stichprobenumfangs n zu. Vervierfacht man den Stichprobenumfang, verringert sich die Unsicherheit des Mittelwertschätzers um einen Faktor zwei.

Analog lassen sich für andere Schätzer die Varianz (und Standardabweichung) bestimmen. Entsprechende Formeln können der Literatur entnommen werden (siehe z. B. Glen Cowan, Statistical Data Analysis, Kapitel 5.2).

¹ Über diese Plausibilitätsargumentation hinaus lässt sich mathematisch zeigen, dass nur bei Division durch $n-1$ der Schätzer erwartungstreu ist.

² Man beachte, dass $\hat{\sigma}$ wie in Gleichung A1.10 definiert nicht erwartungstreu ist, obwohl dies für \hat{V} der Fall ist.

A1.2.3 Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Die Kovarianz V_{xy} zweier Zufallsvariablen x und y mit der PDF $f(x, y)$ und den Populationsmittelwerten μ_x und μ_y ist definiert als

$$V_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[xy] - \mu_x \mu_y \quad (\text{A1.12})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - \mu_x \mu_y. \quad (\text{A1.13})$$

Diese Größe gibt Auskunft über den statistischen Zusammenhang zwischen x und y (auch Korrelation genannt) und zwar bedeutet

- $V_{xy} > 0$, dass Überfluktuationen von x (also Stichprobenelemente mit $x_i > \mu_x$) bevorzugt einhergehen mit Überfluktuationen von y bzw. Unterfluktuationen von x mit Unterfluktuationen von y , und
- $V_{xy} < 0$, dass Überfluktuationen von x bevorzugt einhergehen mit Unterfluktuationen von y , bzw. Unterfluktuationen von x mit Überfluktuationen von y .

Beim Vergleich der Korrelationsstärke verschiedener Zufallsvariablenpaare ist es von Nachteil, dass die Kovarianz dimensionsbehaftet ist. Dieser Nachteil wird durch die Einführung des Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} wettgemacht:

$$\rho_{xy} = \frac{V_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (\text{A1.14})$$

ρ_{xy} kann Werte im Bereich $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ annehmen.

Aufgrund der Differenzterme ist V_{xy} invariant unter Verschiebungen des Koordinatenursprungs. Ein (erwartungstreuer) Schätzer \hat{V}_{xy} für die Kovarianz V_{xy} zweier Zufallsvariablen x und y ist

$$\hat{V}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{n}{n-1} (\bar{xy} - \bar{x} \bar{y}). \quad (\text{A1.15})$$

Ein (nur asymptotisch³ erwartungstreuer) Schätzer $\hat{\rho}_{xy}$ für den Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} ist

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{V}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)(\bar{y}^2 - \bar{y}^2)}}. \quad (\text{A1.16})$$

A1.3 Fortpflanzung von Unsicherheiten

Häufig ist die Größe g , die man experimentell bestimmen möchte, nicht direkt messbar, sondern ergibt sich aus einer funktionalen Beziehung $g(\vec{x})$ der Messgrößen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. In diesem Fall pflanzen sich die Unsicherheiten der Messgrößen auf die gesuchte Endgröße fort.

³ D. h. für $n \rightarrow \infty$, also für einen großen Stichprobenumfang.

In dem Fall, wo $g(\vec{x})$ in einer Umgebung in der Größenordnung der x_i -Unsicherheiten als ungefähr linear betrachtet werden kann, lässt sich das Fortpflanzungsgesetz für die Unsicherheiten recht einfach herleiten. Eine Tayler-Entwicklung bis zur ersten Ordnung in \vec{x} liefert

$$g(\vec{x}) \approx g(\vec{\mu}) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} (x_i - \mu_i), \quad (\text{A1.17})$$

wobei die μ_i die Mittelwerte für die Zufallsvariablen x_i sind. In dieser Näherung ergibt für die Varianz σ_g^2 von g

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}} V_{ij}, \quad (\text{A1.18})$$

wobei V_{ij} die Kovarianz für die Zufallsvariablen x_i und x_j ist. Im Fall unkorrelierter Zufallsvariablen vereinfacht sich Gleichung A1.18 zu

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}}^2 \sigma_i^2. \quad (\text{A1.19})$$

Hier kennzeichnet $\sigma_i^2 = V_{ii}$ die Varianz für die Zufallsgröße x_i .

A1.4 Geraden-Anpassung („Fit“)

Im Folgenden ist die Einstellvariable x immer als fehlerfrei angenommen. Für die Anwendungen in diesem Praktikum ist diese Voraussetzung gut erfüllt. In der Praxis wird es allerdings vorkommen, dass auch die variierte Größe x einen Fehler σ_x (z.B. die Auflösung eines Gerätes) hat. Dann ist eine entsprechender Algorithmus anzuwenden, z.B. eine zweidimensionale lineare Regression.

Als weitere Warnung sei hier erwähnt, dass im Praktikum gelegentlich Variablentransformationen durchgeführt werden, um Probleme zu linearisieren und anschließend eine Geraden-Anpassung vorzunehmen. So könnte man beispielsweise dank der Beziehung $s = at^2$ die Beschleunigung a aus der Steigung der angepassten Gerade bestimmen, die sich ergibt, wenn man die Strecke s gegen die quadrierte Zeit t^2 aufträgt. Diese Methode liefert zwar auf sehr einfache Art Ergebnisse, diese sind jedoch nur Näherungen, da durch die nichtlineare Transformation aus gaußverteilten Unsicherheiten für t nichtgaußisch verteilte Unsicherheiten für t^2 resultieren. Für Letztere ist jedoch die im Folgenden beschriebene gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate nicht anwendbar.

A1.4.1 Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate (least squares)

Die Aufgabe besteht darin, an die Messpunkte $\{y_i \pm \sigma(y_i), x_i\}$ eine Gerade $y = mx + n$ anzupassen. Es sollen der Achsenabschnitt $n \pm \sigma_n$ und die Steigung $m \pm \sigma_m$ bestimmt werden. Die Gaußsche Methode verlangt, dass die Summe aller varianzgewichteten Abweichungsquadrate der N Messpunkte von

der Geraden minimal ist:

$$\chi^2(m, n) := \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma^2(y_i)} \stackrel{!}{=} \text{Minimum} \quad (\text{A1.20})$$

Die Größe χ^2 im Minimum ist also ein Gütekriterium für die Anpassung.

Dieser Ansatz für χ^2 gewährleistet, dass die Fit-Gerade durch Messpunkte mit großem Fehler wenig und durch solche mit kleinem Fehler stark bestimmt wird. Dafür sorgt die Wichtung mit $1/\sigma^2(y_i)$. Mit der gleichen (in diesem Anhang nur durch die Fehler $\sigma(y_i)$ gegebenen) Wichtung müssen beide Mittelwerte \bar{x} und \bar{y} berechnet werden.

A1.4.2 1. Fall: Alle Messwerte y_i haben den gleichen Fehler $\sigma(y_i) = \sigma_y$

Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt in diesem einfachen Fall für den Fit einer Geraden die Minimierung der Summe

$$\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_y^2}$$

bezüglich beider Geradenparameter m und n . Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach m und nach n führt auf zwei Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial m} \stackrel{!}{=} 0 & \rightarrow \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n)x_i \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial n} \stackrel{!}{=} 0 & \rightarrow \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

2 Mit den Mittelwerten \bar{x} und \bar{y} (die in diesem einfachen Fall den ungewichteten Mittelwerten gleich sind) folgt daraus das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \overline{xy} - m\overline{x^2} - n\bar{x} &= 0 \\ \bar{y} - m\bar{x} - n &= 0. \end{aligned}$$

Daraus erhält man m und n :

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{V_{xy}}{V[x]} \quad (\text{A1.21})$$

$$n = \frac{\overline{x^2\bar{y}} - \bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \bar{y} - m\bar{x} \quad (\text{A1.22})$$

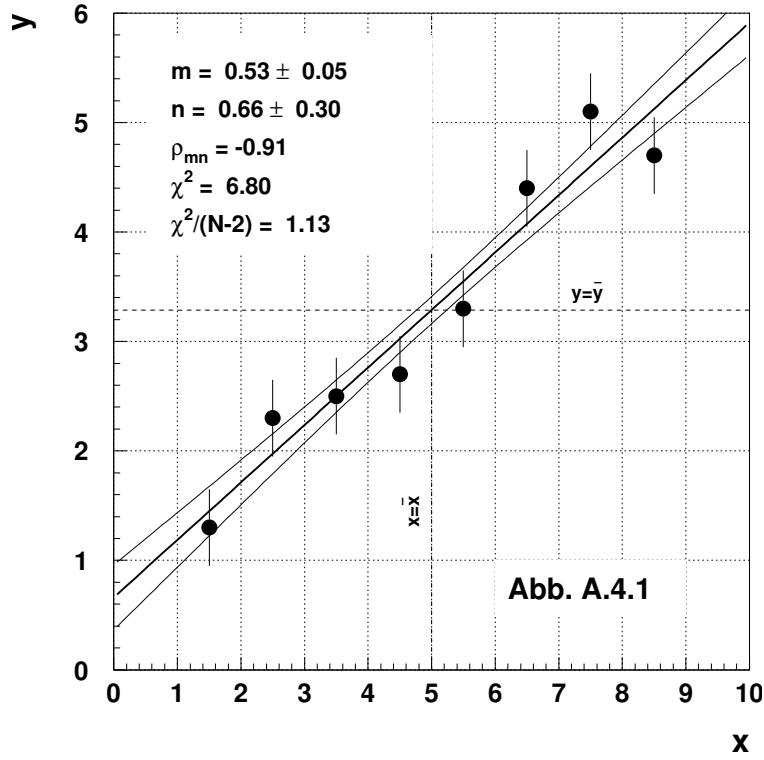


Abbildung A1.1: Datenpunkte und Fit-Ergebnis als Beispiel zum 1. Fall.

Die Fehler der Steigung m und des Achsenabschnitts n ergeben sich, weil die Messpunkte untereinander nicht korreliert sind, mit Fehlerfortpflanzung aus Gleichungen A1.21 und A1.22 zu

$$V[m] = \sigma^2[m] = \sum_i \left(\frac{x_i - \bar{x}}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \right)^2 \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \quad (\text{A1.23})$$

$$V[n] = \sigma^2(n) = \sum_i \left(\frac{\bar{x}^2 - \bar{x}x_i}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \right)^2 \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2 \bar{x}^2}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \quad (\text{A1.24})$$

$$\leadsto V[n] = \bar{x}^2 V[m].$$

Achsenabschnitt n und Steigung m sind im Allgemeinen korreliert. Ihre Kovarianz ist

$$V_{mn} = -\frac{\bar{x}}{N(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \cdot \sigma_y^2 = -V[m] \cdot \bar{x}. \quad (\text{A1.25})$$

Diese Korrelation – und damit die Kovarianz – verschwindet, wenn $\bar{x} = 0$ gilt, oder dies durch Translation $x \rightarrow x' = x - \bar{x}$ erst erreicht und dann der Geraden-Fit durchgeführt wird. Nur in diesem Fall ist „gewöhnliche“ Fehlerfortpflanzung, $\sigma^2(y(x)) = \sigma^2(m)x^2 + \sigma^2(n)$, richtig.

Abb. A1.1 gibt ein Beispiel für diesen 1. Fall. Der Datensatz umfasst 8 Messpunkte mit gleichem Fehler σ_y . Die Fit-Gerade ist eingezeichnet; sie geht immer durch die Mittelwerte \bar{x} und \bar{y} (nützliche Erkenntnis beim Einzeichnen einer Ausgleichsgeraden „von Hand“). Die Fit-Parameter m und n sind angegeben, ebenso der Fit-Wert für das minimale χ^2 . Ebenfalls eingezeichnet sind die 1σ -Konturen um die Gerade (siehe Abschnitt A1.4.6). χ^2 bezieht sich auf die Wertemenge. (Zu $\chi^2/(N-2)$ siehe den letzten Abschnitt dieses Anhangs.)

A1.4.3 2. Fall: Jeder Messwert y_i hat einen eigenen unabhängigen Fehler $\sigma(y_i) := \sigma_i$

Durch diese Fehler $\sigma(y_i)$ bekommt jeder Messpunkt (y_i, x_i) im Fit das Gewicht $1/\sigma_i^2$. Die zu minimierende Summe ist nun

$$\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_i^2} =: \chi^2.$$

Die Formeln für die Steigung (Gleichung A1.21) und den Achsenabschnitt (Gleichung A1.22) und deren Herleitung bleiben formal wie im Fall 1 erhalten, wenn bei der Bildung sämtlicher Mittelwerte $\bar{z} \in \{\bar{x}, \bar{y}, \overline{xy}, \overline{x^2}\}$ die individuellen Gewichte $\sigma(y_i) =: \sigma_i$ hergenommen werden (**varianzgewichtete Mittelwerte**):

$$\bar{z} := \frac{\sum_{i=1}^N \frac{z_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (\text{A1.26})$$

Auch die Varianz-Formeln (Gleichungen A1.23, A1.24) werden modifiziert, indem neben den varianzgewichteten Mittelwerten anstelle von σ_y^2 die **varianzgemittelte Standardabweichung**

$$\overline{\sigma_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (\text{A1.27})$$

eingesetzt wird. Diese Ersetzung muss auch in der Kovarianz-Formel (Gleichung A1.25) erfolgen.

Abb. A1.2 gibt ein Beispiel für diesen 2. Fall. Die 8 Messpunkte haben die gleichen Mittelwerte wie im 1. Beispiel, jetzt aber individuelle Fehler σ_i . Mittelwerte \bar{x} und \bar{y} , Fit-Gerade und Fit-Wert χ^2 sind andere als im 1. Beispiel!

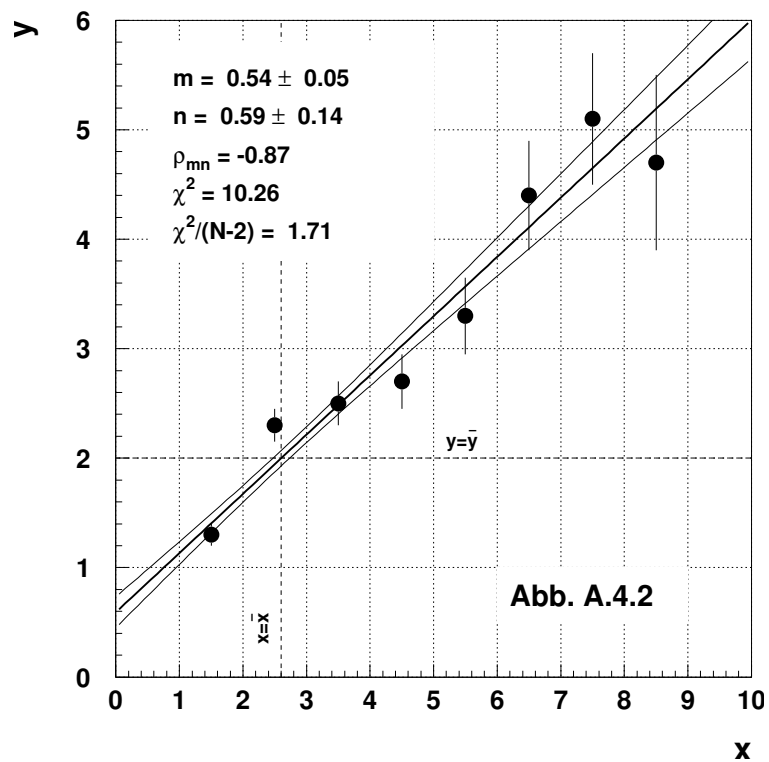


Abbildung A1.2: Datenpunkte und Fit-Ergebnis als Beispiel zum 2. Fall. Auch hier geht die Ausgleichsgerade durch den (varianzgewichteten) Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) .

A1.4.4 3. Fall: Die Messwerte y_i haben sowohl unabhängige Fehler $\sigma(y_i)$ als auch systematische Fehler $s(y_i)$

Dieser allgemeine Fall führt auf nicht-triviale Formeln für Steigung und Achsenabschnitt sowie deren Fehler, auf die hier verzichtet werden.

Ein interessanter Spezialfall liegt vor, wenn alle Messpunkte den gleichen systematischen Fehler $s(y_i) =: s_y$ haben. Steigung und Achsenabschnitt sind auch hier formal durch Gleichungen A1.21 und A1.22, aber mit varianzgewichteten Mittelwerten, gegeben. Die Fehler sind jedoch andere. In diesem Spezialfall gilt für die Varianz der Steigung:

$$V[m] = \sigma^2[m] = \frac{\overline{\sigma_y^2}}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad (\text{A1.28})$$

Der gemeinsame Fehler s_y beeinflusst weder die Steigung noch deren Fehler. Für die Varianz des Achsenabschnitts gilt in diesem Spezialfall:

$$V[n] = \sigma^2[n] = \frac{\overline{\sigma_y^2}}{N(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \bar{x}^2 + s_y^2. \quad (\text{A1.29})$$

Obwohl der gemeinsame Fehler s_y nicht den Fit-Wert für den Achsenabschnitt beeinflusst, vergrößert sich dessen Fehler $\sigma_n = \sqrt{V[n]}$ durch quadratische Addition. V_{mn} ändert sich nicht. Auf ein Beispiel zum 3. Fall wird verzichtet.

A1.4.5 4. Fall: Die Werte y_i haben keine Fehler.

Dieser Fall tritt bei physikalischen Messungen – und insbesondere in diesem Praktikum – nicht auf; alle Messwerte haben Messfehler. Er ist hier aufgeführt, weil die Aufgabe, den Trend der Wertepaare $\{y_i, x_i\}$ durch eine Gerade zu beschreiben, als Spezialfall des 1. Falls durch die gleichen Formeln (d.h. Gleichungen A1.21 und A1.22, natürlich mit ungewichteten Mittelwerten) gelöst wird und diese Formeln bzw. deren Bestandteile unter dem Namen **Lineare Regression** auf manchen Taschenrechnern programmiert sind. Das Ergebnis des ungewichteten Geradenfits ist in Abb. A1.3 dargestellt. Die Fehler von Steigung und Achsenabschnitt werden vom Taschenrechner in der Regel nicht ausgegeben, und χ^2 steht als Qualitätskriterium nicht zur Verfügung. Ähnliches kann für Standardprogramme auf PC-Rechnern gelten.

A1.4.6 Werteberechnung auf der Fit-Geraden

Sind Steigung und Achsenabschnitt samt Fehlern bestimmt, benötigt man oft einen Wert $y(x) \pm \sigma(y(x))$ auf der Fit-Geraden. Es gilt an der Stelle x :

$$y(x) = m \cdot x + n \quad (\text{A1.30})$$

$$\sigma^2[y(x)] = \sigma^2[m] \cdot x^2 + \sigma^2[n] + 2V_{mn} \cdot x \quad (\text{A1.31})$$

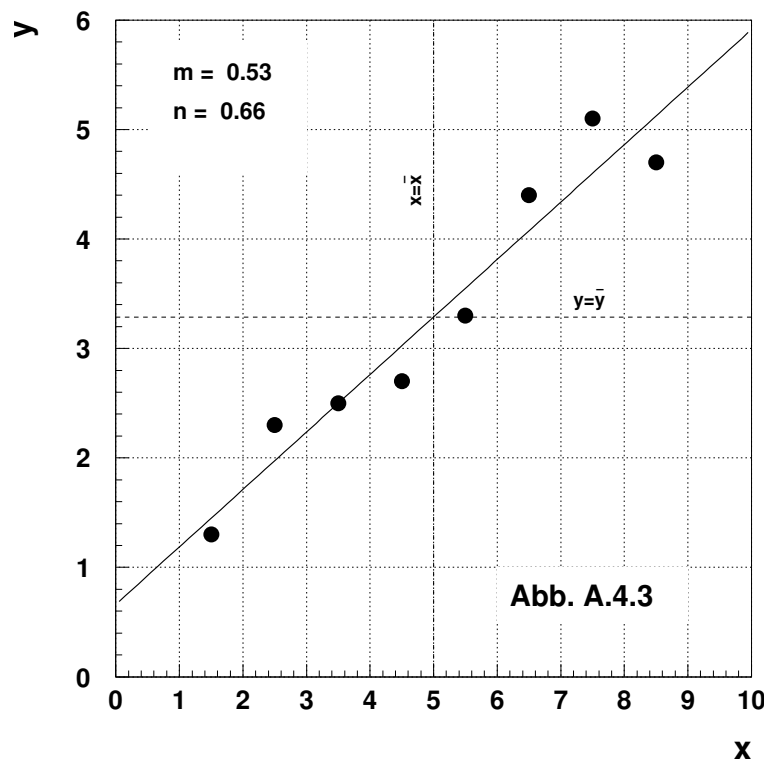


Abbildung A1.3: Punkte und Regressionsgerade als Beispiel zum 4. Fall.

Der letzte Term ist i.A. nicht zu vernachlässigen! Die Kovarianz (aus Gleichung A1.25) verschwindet nur im „Schwerpunktsystem“ der Werte $\{x_i\}$, also wenn $\bar{x} = 0$ gilt. Nur dann sind m und n unabhängig. In diesem System gelangt man zu:

$$y(x) - \bar{y} = m \cdot (x - \bar{x})^2 \quad (\text{A1.32})$$

und es gilt dann:

$$\sigma^2[y(x)] = \sigma^2[m] \cdot (x - \bar{x})^2 + \sigma_n^2 \quad (\text{A1.33})$$

Insbesondere bekommen Extrapolationen aus dem Messpunkte-Bereich heraus schnell große Fehler.

A1.4.7 Güte des Geraden-Fits

Ein geeignetes Gütekriterium für die mittlere quadratische Abweichung zwischen Messdaten und Fit-Gerade erhält man durch richtige Normierung von χ^2 nach Gleichung A1.20. Die Normierung ist allgemein gegeben durch die Anzahl der Fit-Freiheitsgrade f , d.h. durch die Anzahl der verwendeten Messpunkte (N) abzüglich der Anzahl der Fit-Parameter. Letztere sind 2 beim Geraden-Fit, also

braucht man $N > 2$ Messpunkte, um einen Fit durchführen zu können:

$$\frac{\chi^2}{\text{d.o.f.}} := \frac{\chi^2}{N-2} = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - mx_i - n)^2}{\sigma_i^2}. \quad (\text{A1.34})$$

Für eine gute Beschreibung der Messdaten durch den Fit gilt χ^2/f nahe bei 1, d.h. die Ausgleichsgerade weicht im Mittel um nicht mehr als die (Mess-)Fehler von den Messpunkten ab.

A1.4.8 Hinweis zur „Ausgleichsgeraden per Hand“

Die obige mathematische Behandlung zeigt, dass die Ausgleichsgerade durch den varianzgewichteten Schwerpunkt der Datenpaare geht. Transformiert man das anfängliche Koordinatensystem so, dass der Nullpunkt der neuen, verschobenen x -Achse im Datenschwerpunkt der $\{x_i\}$ liegt, so sind Steigung und Achsenabschnitt nicht mehr korreliert; zusätzlich liegt der Achsenabschnitt dann im Schwerpunkt der $\{y_i\}$. Diese Information hilft beim Zeichnen einer Ausgleichsgerade mit Lineal und Augenmaß.

Zunächst schätzt man die Lage des Schwerpunktes ab (z.B. nimmt man die Mittelwerte der x_i und der y_i) und zeichnet ihn in den Graphen mit den Datenpaaren als zusätzlichen Punkt ein. Dann „sticht“ man einen Bleistift in den Schwerpunkt und schiebt das Lineal dagegen. Dann dreht man das Lineal um diese Bleistiftachse, bis die Datenpaare beidseitig der Lineallinie statistisch gleichmäßig verteilt sind, d.h. die Summe der (quadratischen) Abstände der Datenpunkte zur Ausgleichsgeraden minimiert wird, womit die Ausgleichsgerade festgelegt ist.

Eine Fehlerabschätzung der Geradensteigung erhält man durch weiteres Drehen des Lineals bis auf der einen Seite der Drehachse alle Punkte oberhalb und auf der anderen Seite unterhalb des Lineals liegen; bei der zweiten Fehlergeraden vertauscht man „oberhalb“ und „unterhalb“. Da der Schwerpunkt innerhalb des Datenbereichs liegt, kreuzen sich auch Ausgleichs- und Fehlergeraden innerhalb des Datenbereichs. Die beiden Fehlergeraden sind dadurch gekennzeichnet, dass sie die Geraden maximaler bzw. minimaler Steigung sind, die sich gerade noch mit den Messpunkten vereinbaren lassen. Ein alternatives Mittel zur Konstruktion der Fehlergeraden ist ein „Hilfsrechteck“, das möglichst alle Datenpaare einschließt und dessen Seiten im gleichen Abstand zur Ausgleichsgeraden liegen. Die Fehlergeraden sind dann die Diagonalen des Hilfsrechtecks.

Anhang A2

Schwingungen

Am Beispiel eines Drehschwingers werden im Folgenden die allgemeinen Eigenschaften schwingfähiger Systeme zusammengestellt und diskutiert.

A2.1 Freie Schwingung ohne Dämpfung

Idealisierter Fall: Reibungsverluste vernachlässigt.

Bewegungsgleichung (Drehmomentengleichung):

$$\Theta \ddot{\varphi} = -D\varphi = -M, \quad (\text{A2.1})$$

Θ = Trägheitsmoment des Drehkörpers

D = Richtkonstante

M = rücktreibendes Drehmoment

Die zugehörige **Normalform** (für alle Schwingungssysteme) lautet:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{\Theta} \quad (\text{A2.2})$$

Mathematisch handelt es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Die allgemeine Lösung ist die Summe von 2 linear unabhängigen Lösungen. **Lösungsansatz:** $\varphi(t) = Ae^{\lambda t}$ mit A und λ allgemein komplex. Die Lösung muss eine Funktion sein, die sich beim Differenzieren bis auf eine Konstante reproduziert. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 \quad (\text{A2.3})$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad (\text{A2.4})$$

Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}. \quad (\text{A2.5})$$

φ ist eine messbare Variable und daher reell. Gesucht sind also nur solche Lösungen, die ein reelles φ ergeben. Das legt den Konstanten A und B die Bedingung $B = A^*$ auf, d.h. wenn $A = a + ib$ ist, muss $B = a - ib$ sein. $\varphi(t)$ ist dann (Euler-Formel) zweimal der Realteil von

$$(a + ib) \cdot (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)):$$

$$\varphi(t) = 2a \cdot \cos(\omega_0 t) - 2b \cdot \sin(\omega_0 t). \quad (\text{A2.6})$$

Die noch unbestimmten Konstanten a und b werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt, z.B.: $\varphi(t=0) = \varphi_0 = 2a$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0 = -2b$.

Damit folgt aus Gleichung A2.6 $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$, mit der Frequenz $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ und der Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_0$. Das System schwingt harmonisch, d.h. (co-)sinusförmig, mit konstanter Amplitude φ_0 und die Eigenfrequenz ω_0 , welche unabhängig von der Amplitude ist.

Anmerkung: Die allgemeine Lösung in Gleichung A2.6 ist äquivalent zu der Lösungsform

$$\varphi(t) = c \cos(\omega_0 t - \alpha). \quad (\text{A2.7})$$

Die beiden unbestimmten Konstanten a und b können durch die Konstanten $c^2 = 4(a^2 + b^2)$ und α mit $\tan \alpha = -b/a$ (α Phasenwinkel) ausgedrückt werden (Additionstheorem für den Cosinus).

A2.2 Freie Schwingung mit Dämpfung

Realistischer Fall: Reibungsverluste berücksichtigt.

Bewegungsgleichung:

$$\Theta \ddot{\varphi} + r \dot{\varphi} + D \varphi = 0 \quad (\text{A2.8})$$

mit dem Reibungs- (oder Dämpfungs-)Drehmoment $r \dot{\varphi}$, das proportional der Winkelgeschwindigkeit ist. Damit ergibt sich folgende **Normalform**:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \text{mit} \quad 2\beta = \frac{r}{\Theta}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}. \quad (\text{A2.9})$$

Im Allgemeinen führt der Lösungsansatz $\varphi(t) = A e^{\lambda t}$ zu zwei Werten für λ :

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{A2.10})$$

Es sind **drei Fälle** zu unterscheiden:

- a) $\beta^2 > \omega_0^2$ Kriechfall,
- b) $\beta^2 = \omega_0^2$ Grenzfall,
- c) $\beta^2 < \omega_0^2$ Schwingfall,

die drei charakteristisch verschiedene Bewegungsformen (Abb. A2.1) beschreiben.

A2.2.1 Kriechfall ($\beta^2 > \omega_0^2$)

$\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ist reell und positiv. $\lambda_1 = -\beta + \gamma$ und $\lambda_2 = -\beta - \gamma$ sind beide **reell** und **negativ** ($\gamma < \beta$). Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (\text{A2.11})$$

mit den **reellen** Konstanten A und B , die durch gewählte Anfangsbedingungen festgelegt werden können. Das System schwingt nicht, sondern bewegt sich aperiodisch (Abb. A2.1, unten). Ist es einmal aus der Ruhelage ausgelenkt, bewegt es sich asymptotisch kriechend zu ihr zurück (z.B. Fadenpendel in Sirup statt Luft).

A2.2.2 Aperiodischer Grenzfall ($\beta^2 = \omega_0^2$)

Hier fallen die beiden λ -Werte zusammen und es ist somit nur eine partikuläre Lösung gefunden. Zum Aufsuchen der zweiten, linear unabhängigen Lösung macht man den Ansatz:

$$\varphi(t) = f(t) \cdot e^{\lambda t}, \quad (\text{A2.12})$$

und zwar mit der einfachsten Möglichkeit für $f(t)$, nämlich $f(t) = Bt$. Das führt zu der Bestimmungsgleichung für λ :

$$t \cdot (\lambda + \omega_0)^2 = -2(\lambda + \omega_0). \quad (\text{A2.13})$$

Sie ist nur dann für alle Zeiten t erfüllt, wenn $\lambda + \omega_0 = 0$; insbesondere λ **reell** und **negativ** ist. Damit ergibt sich die Allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\omega_0 t} + Bte^{-\omega_0 t}; \quad A \text{ und } B \text{ reell.} \quad (\text{A2.14})$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} \varphi(t=0) &= \varphi_0 = A \\ \dot{\varphi}(t=0) &= 0 = -\omega_0 \cdot A + B. \end{aligned}$$

Damit: $\varphi(t) = \varphi_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}. \quad (\text{A2.15})$

Auch in diesem Fall ist die Bewegung aperiodisch. $\varphi(t)$ geht monoton gegen 0. Das System kommt in besonders kurzen Zeiten der Ruhelage sehr nahe, z.B. wird in der charakteristischen Zeit $T = 2\pi/\omega_0$ bereits der Wert $\varphi(T) = 0,014$ erreicht. Diese Bewegungsform stellt den Grenzfall der aperiodischen Bewegung dar. Das System schwingt gerade eben nicht (Abb. A2.1, Mitte).

Bei analogen Messgeräten mit schwingfähigen Messsystemen (z.B. Drehspulinstrumente) ist man an kurzen Einstellzeiten auf den Messwert (= Ruhelage) interessiert. Ihre Dämpfung wird daher in der Regel so gewählt, dass sie nahe dem aperiodischen Grenzfall arbeiten, und zwar gerade sowenig in Richtung „Schwingfall“ ($\beta^2 \leq \omega_0^2$), dass das Messsystem einmal durchschwingt und sich aperiodisch der Ruhelage nähert.

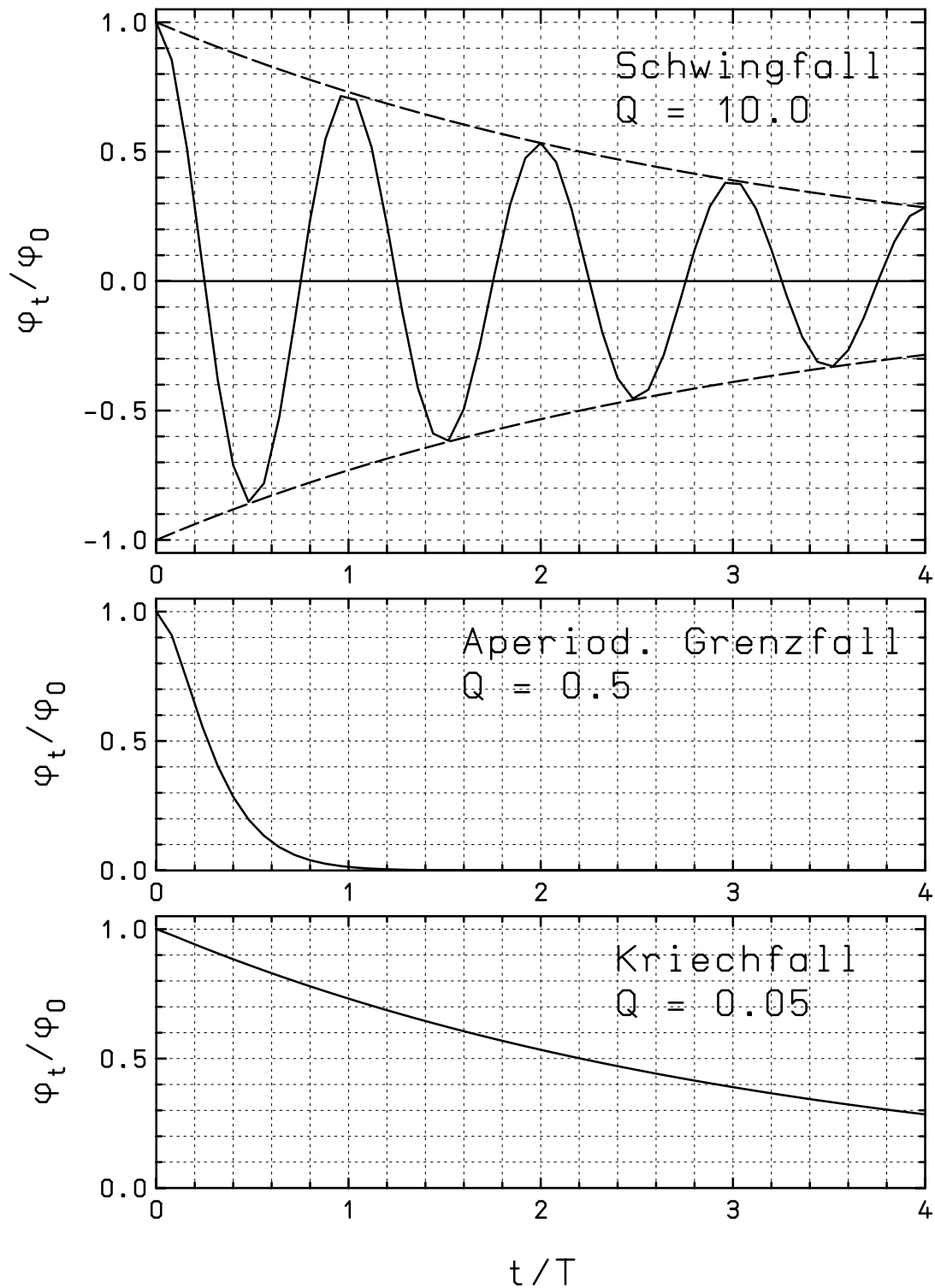


Abbildung A2.1: **Freie Schwingung** für die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ für den Schwingfall (oben), den aperiodischen Grenzfall (mitte) und dem Kriechfall (unten). Die Abszisse ist in Einheiten der Schwingungsdauer T angegeben.

A2.2.3 Schwingfall ($\beta^2 < \omega_0^2$)

Wie im ungedämpften Fall ergeben sich zwei verschiedene **komplexe** Werte für λ :

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\hat{\omega}. \quad (\text{A2.16})$$

Mit denselben Anfangsbedingungen wie im ungedämpften Fall erhält man die Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} \cdot \cos \hat{\omega} t \quad \text{mit} \quad \hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (\text{A2.17})$$

Die Eigenfrequenz $\hat{\omega}$ dieser Schwingung ist kleiner als die der ungedämpften Schwingung (ω_0). Der Unterschied ist aber für fast alle Schwingsysteme sehr klein. Die Amplitude:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\beta t} \quad (\text{A2.18})$$

klings exponentiell ab. Nach n bzw. $n + 1$ Schwingungen beträgt sie:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi(nT) = \varphi_0 e^{-\beta nT} = \varphi_0 \left(e^{-\beta T} \right)^n \\ \varphi_{n+1} &= \varphi((n+1)T) = \varphi_0 e^{-\beta(n+1)T} = \varphi_0 \left(e^{-\beta T} \right)^{n+1}, \end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

wobei $T = 2\pi/\hat{\omega}$ die Schwingungsdauer und n ganzzahlig ist (Abb. A2.1, oben).

Aufeinanderfolgende Maximalausschläge unterscheiden sich um einen konstanten Faktor, nämlich um das „**Dämpfungsverhältnis**“ K :

$$K := \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_n} \right)^{1/n} = e^{\beta T}. \quad (\text{A2.20})$$

Der Einfluss der Dämpfung kann auch durch die Zeit τ charakterisiert werden, nach der die Energie des schwingenden Systems auf $1/e$ abgesunken ist (die Energie ist proportional zu $\varphi^2(t)$):

$$\varphi^2(\tau) = \varphi_0^2 \cdot e^{-2\beta\tau} = \varphi_0^2 \cdot e^{-1}, \quad (\text{A2.21})$$

d.h. $\tau = 1/2\beta$. Ein gedämpftes Schwingsystem wird durch seinen „Gütefaktor“ oder einfach seine „**Güte**“ Q :

$$Q := \omega_0 \tau = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} \quad (\text{A2.22})$$

charakterisiert. Für die weitere Diskussion soll nur noch diese (dimensionslose) Größe verwendet werden.

Drückt man die Eigenfrequenz $\hat{\omega}$ durch die des ungedämpften Systems (ω) und die Güte Q aus, so sieht man, dass diese Frequenzen nur wenig voneinander verschieden sind:

$$\hat{\omega} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (\text{A2.23})$$

Selbst für eine so geringe Güte wie $Q = 5$ ist $\hat{\omega} = 0.995\omega_0$. Daher wird im Folgenden die Näherung $\hat{\omega} \approx \omega_0$ verwendet. Damit ergibt sich:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\omega_0 t/2Q} \cos(\omega_0 t), \quad K = e^{\pi/Q} \quad \text{bzw.} \quad Q = \frac{\pi}{\ln(K)}. \quad (\text{A2.24})$$

Die Größe $\ln(K)$ heißt **logarithmisches Dekrement** der gedämpften Schwingung. Eine Bestimmung der Güte Q kann also in einfacher Weise über eine Messung des Dämpfungsverhältnisses $K = (\varphi_0/\varphi_n)^{1/n}$ erfolgen.

Nach Q Perioden ist die Energie der Schwingung auf den Bruchteil $e^{-2\pi} = 0,0019$ und die Amplitude auf den Bruchteil $e^{-\pi} = 0,043$ abgesunken.

A2.3 Erzwungene Schwingung mit Dämpfung

Wirkt auf ein Drehschwingsystem ein cosinus-förmiges Drehmoment¹ $M_0 \cos(\omega t)$, so gehorcht das System der **Bewegungsgleichung**:

$$\Theta \ddot{\varphi} + r \dot{\varphi} + D \varphi = M_0 \cos(\omega t) \quad (\text{A2.25})$$

mit der **Normalform**:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \mu \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \mu := \frac{M_0}{\Theta}. \quad (\text{A2.26})$$

Die mathematische Behandlung dieses Problems kann in eleganter Weise mit Hilfe der komplexen Darstellung der Funktionen durchgeführt werden.

Wir wollen hier zunächst die physikalischen Aspekte in den Vordergrund stellen und die Rechnung rein reell durchführen. Wird ein schwingfähiges System von außen gestört, so löst die Störung eine gedämpfte Schwingung mit der Frequenz $\hat{\omega}$ aus, die sich der eventuell vorhandenen Bewegung überlagert. Wirkt ein äußeres Drehmoment $M_0 \cos(\omega t)$ auf das System, so regt es eine solche gedämpfte Eigenschwingung an. Andererseits zwingt das äußere Drehmoment dem System auch eine Schwingung mit seiner Frequenz ω auf. Es entsteht eine Überlagerung von Bewegungen mit den beiden Frequenzen. Dieser Vorgang wird „Einschwingen“ genannt.

Nach einer Zeit $t > \tau$ ist der gedämpfte Anteil der Bewegung abgeklungen. Es ist ein Zustand erreicht, in dem die Energiezufuhr durch das äußere Drehmoment genau die Reibungsverluste deckt („Stationärer Zustand“). Das System schwingt mit konstanter Amplitude bei der Frequenz ω .

Genau dieses Verhalten spiegelt auch die mathematische Behandlung wider: Die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen Differentialgleichung (Gleichung A2.25) ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Der erste Anteil ist bereits bekannt (siehe Abschnitt A2.2). Da wir uns auf kleine

¹ Das ist der Spezialfall einer harmonischen Anregung mit einer Frequenz. Die allgemein periodische, nicht cos-förmige Anregung stellt eine Überlagerung solcher Spezialfälle mit verschiedenen Frequenzen dar (Fourier-Zerlegung).

Dämpfungen beschränken, handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung der Gestalt:

$$\varphi_{\text{hom.}}(t) = e^{-\beta t} (a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)). \quad (\text{A2.27})$$

Sie beschreibt zusammen mit dem zweiten Anteil den Einschwingvorgang. Der zweite Anteil ist eine ungedämpfte Schwingung mit der Anregungsfrequenz ω . Wir machen daher den allgemeinen Ansatz:

$$\varphi_{\text{inhom.}}(t) = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t). \quad (\text{A2.28})$$

Diese Gleichung beschreibt den stationären Zustand, für den wir uns im Folgenden ausschließlich interessieren. Wir wollen nun die Konstanten c und d so bestimmen, dass die inhomogene Gleichung erfüllt² ist. Einsetzen ergibt:

$$\left[d (\omega_0^2 - \omega^2) - 2c\beta\omega \right] \tan(\omega t) = \left[\mu - c (\omega_0^2 - \omega^2) - 2d\beta\omega \right]. \quad (\text{A2.29})$$

Diese Bedingung ist nur dann für alle Zeiten erfüllt, wenn beide eckige Klammern für sich verschwinden. Daraus errechnen sich die Konstanten zu:

$$d = \frac{2\beta\omega\mu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}; \quad c = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\mu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \quad (\text{A2.30})$$

Mit der Abkürzung $N := (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ sieht man, dass gilt:

$$\left(d \frac{\sqrt{N}}{\mu} \right)^2 + \left(c \frac{\sqrt{N}}{\mu} \right)^2 = 1. \quad (\text{A2.31})$$

Die beiden Konstanten sind nicht unabhängig voneinander. Sie lassen sich durch eine andere Konstante, den Phasenwinkel α , ausdrücken:

$$d = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \sin(\alpha), \quad c = \frac{\mu}{\sqrt{N}} \cos(\alpha). \quad (\text{A2.32})$$

Damit wird

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{\sqrt{N}} (\cos(\omega t) \cos(\alpha) + \sin(\omega t) \sin(\alpha)) \quad (\text{A2.33})$$

² Die stationäre Schwingung ist unabhängig von den Anfangsbedingungen. Sie wird vom äußeren Drehmoment $M_0 \cos(\omega t)$ erzwungen, womit der Zeitnullpunkt bereits festgelegt ist.

oder (Additionstheorem für den Cosinus):

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \alpha) \quad (\text{A2.34})$$

$$\text{mit } \tan(\alpha) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (\text{A2.35})$$

Das ist eine Schwingung mit der Frequenz ω . Sie hat eine Phasenverschiebung α gegen das äußere Drehmoment. Die Ausdrücke für $\varphi(t)$ und $\tan(\alpha)$ lassen sich mit Hilfe der Güte $Q = \omega_0\tau = \omega_0/2\beta$ folgendermaßen umschreiben:

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}} \cos(\omega t - \alpha) \quad (\text{A2.36})$$

$$\text{und } \tan(\alpha) = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (\text{A2.37})$$

Die Amplitude

$$\varphi(\omega) = \frac{\mu}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2\omega^2}{Q^2}}} \quad (\text{A2.38})$$

hat einen „Resonanz-Nenner“. Sie ist in Abb. A2.2, oben, als Funktion von ω/ω_0 dargestellt. Die Amplitude wird maximal³ für den Resonanzfall $\omega = \omega_0$. Sie nimmt dabei einen Wert an, der proportional zur Güte und zur Amplitude des erregenden Drehmoments ist:

$$\varphi(\omega = \omega_0) = \frac{\mu Q}{\omega_0^2}. \quad (\text{A2.39})$$

Vergleicht man diese Maximalamplitude mit der für $\omega = 0$, so sieht man, dass die Güte auch aus

³ Das stimmt nur näherungsweise für hinreichend hohe Güten. Die Auswertung der Extremumbedingung $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$ ergibt:

Amplitude(ω)	ω_{\max}
Auslenkung: μ/\sqrt{N}	$\omega_0\sqrt{1 - 1/2Q^2}$
Geschwindigkeit: $\mu\omega/\sqrt{N}$	ω_0

Die Frequenz ω_{\max} des Maximums der Auslenkungsamplitude bei der erzwungenen Schwingung ist verschieden von der Eigenfrequenz der freien Schwingung mit Dämpfung! (Vergleichen Sie mit dem Schwingfall der freien Schwingung in Abschnitt A2.2.3).

Dagegen stimmt die Frequenz ω_{\max} für die Geschwindigkeitsamplitude mit der Eigenfrequenz der freien Schwingung mit Dämpfung überein. Der Anreger überträgt kinetische Energie auf das schwingfähige System. Der Energieübertrag ist optimal angepasst, wenn die Geschwindigkeitsamplitude bei der Anregungsfrequenz $\omega = \omega_0$ maximal überhöht ist.

diesen beiden Werten bestimmt werden kann:

$$\varphi(\omega = \omega_0) = Q\varphi(\omega = 0). \quad (\text{A2.40})$$

Für Systeme großer Güte können im Resonanzfall schon kleine periodische Störungen zu sehr großen Amplituden und damit zur Zerstörung des schwingenden Systems führen (Resonanzkatastrophe).

Als Maß für die Breite der Resonanzkurve $\varphi(\omega)$ wählt man üblicherweise den Abstand $\Delta\omega$ der beiden Frequenzen ω_1 , für die die Amplitude auf das $1/\sqrt{2}$ -fache bzw. die gespeicherte Energie auf das 1/2-fache des jeweiligen Wertes bei $\omega = \omega_0$ abgefallen ist:

$$\varphi(\omega_1) = \frac{\mu}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega_1^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{\frac{\omega_0^2}{Q}} = \frac{\varphi(\omega_0)}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A2.41})$$

Für hinreichend hohe Güten liegen ω_1 und ω_0 sehr nahe beieinander. Wir benutzen daher die Näherungen

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 = (\omega_0 + \omega_1)(\omega_0 - \omega_1) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega_1) \quad (\text{A2.42})$$

und

$$\omega_0\omega_1 \approx \omega_0^2. \quad (\text{A2.43})$$

Damit folgt: $2(\omega_0 - \omega_1) = \pm\omega_0/Q$ bzw. $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}$. Die „ $1/\sqrt{2}$ -Wert-Breite“ $\Delta\omega$ der Resonanzkurve ist die volle „Halbwertsbreite“ der Energie-Resonanzkurve:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (\text{A2.44})$$

Breite und Höhe der Resonanzkurve hängen also in umgekehrter Weise von der Güte Q ab. Für hinreichend schwach gedämpfte Systeme kann die Güte aus der Breite $\Delta\omega$ ermittelt werden. Schätzt man mit Hilfe dieses Ergebnisses den Fehler ab, der durch obige Näherung gemacht wird, so erhält man:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \left(1 + \frac{3}{4Q}\right), \quad \text{d.h. ca. 10\% für } Q = 7, 5. \quad (\text{A2.45})$$

Auch die **Phase** der Amplitude zeigt eine charakteristische Abhängigkeit von ω und Q (Abb. A2.2, unten).

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{1}{Q}, \quad (\text{A2.46})$$

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \tan(\alpha) \simeq \omega/\omega_0 \Rightarrow \alpha \approx 0,$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \tan(\alpha) = \infty \Rightarrow \alpha \approx \pi/2, \quad (\text{A2.47})$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \tan(\alpha) \simeq -\omega_0/\omega \Rightarrow \alpha \approx \pi.$$

Der Übergang der Phase von Werten nahe 0 zu fast π vollzieht sich in einem Frequenzbereich um ω_0 herum, der von der Größe $\Delta\omega$ ist. Der Übergang ist umso abrupter, je größer Q ist. Für die

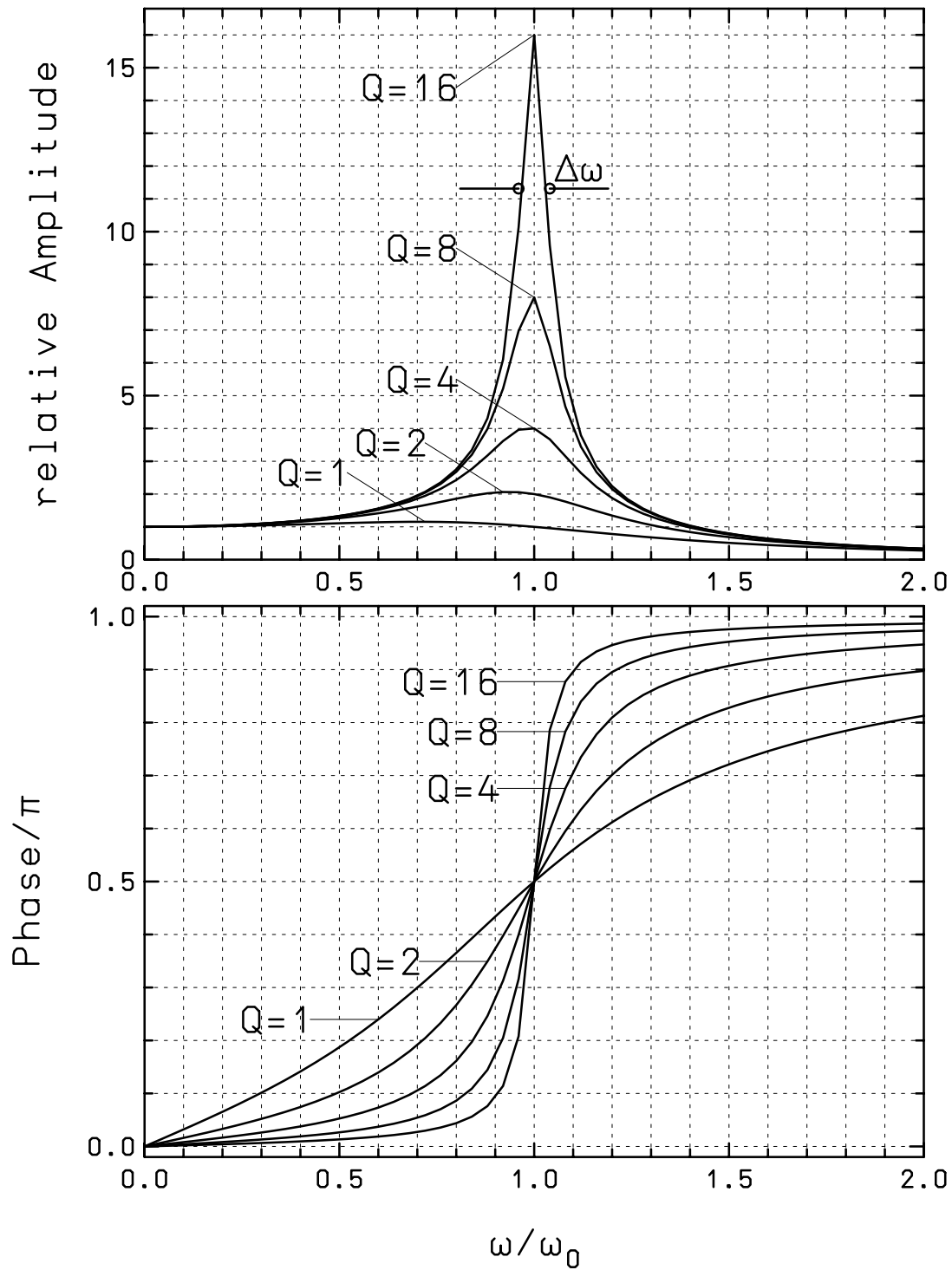


Abbildung A2.2: **Erzwungene Schwingungen:** Amplitude und Phase

beiden Werte ω_1 gilt mit der obigen Näherung:

$$\tan(\alpha) = \frac{\omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \frac{1}{Q} \approx \pm 1. \quad (\text{A2.48})$$

Die Phase α ist dann 45° bzw. 135° .

Das Verhalten eines harmonischen Schwingsystems ist also durch seine Eigenfrequenz ω_0 und seine Güte Q völlig beschrieben.

Anhang A3

Oszillograph und Datenaufnahme mit dem PC

A3.1 Oszillograph

Ein Oszillograph macht Spannungen als Funktion der Zeit sichtbar. Die entsprechenden Graphen werden auf einem Bildschirm dargestellt, wobei die Spannungen in der Regel die Ordinate und die Zeit die Abzisse des Koordinatensystems darstellen. Mehrkanaloszillographen sind dabei in der Lage, den zeitlichen Verlauf mehrerer verschiedener Spannungen gleichzeitig darzustellen. Alternativ zu Spannungs-Zeit-Graphen können auch zwei verschiedene Spannung gegeneinander aufgetragen werden.



Abbildung A3.1: Frontansicht des im Praktikum verwendeten Oszillographen.

Abbildung [A3.1](#) gibt eine Frontansicht des im Praktikum verwendeten Zwei-Kanal-Oszillographen dar. Durch Drücken der gelben bzw. blauen Taste kann die Anzeige von Kanal 1 bzw. 2 an- und

abgestellt werden. Mit den großen Drehknöpfen unterhalb der gelben bzw. blauen Taste kann die Skala für die Ordinate von Kanal 1 bzw. 2 eingestellt werden (Spannung pro Skaleneinheit). Der dritte große Einstellknopf rechts neben dem für Kanal 2 dient zur Wahl der Skala für die Zeit (Zeit pro Skaleneinheit). Die kleinen Drehknöpfe oberhalb der gelben und blauen Tasten dienen zur vertikalen/horizontalen Verschiebung der dargestellten Spannung-vs.-Zeit-Graphen. Eine solche Verschiebung kann nützlich sein, um das Ablesen zu vereinfachen. Der vierte kleine Drehknopf ganz rechts dient zur Wahl der Trigger-Schwelle.

A3.2 Messdatenerfassung mit dem CASSY System

Bei einigen Versuchsaufbauten werden Messreihen automatisiert mit einem Rechner erfasst. Dazu benötigt man einen „Sensor“, der das zu messende Signal in eine Spannung umwandelt, die an den Digitalisierungsbereich des nachgeschalteten Analog/Digitalwandlers (ADC = Analogue to Digital Converter) angepasst ist. Da Ströme vom ADC nicht gewandelt werden, muss ein Strom erst in eine Spannung konvertiert werden (Strom durch Widerstand geleitet ergibt nach dem OHMSchen Gesetz eine Spannung von $U = RI$). Ist die Signalamplitude größer als die erlaubte Eingangsamplitude, muss sie über eine Spannungsteilerschaltung kaskadiert werden. Bei zu geringer Signalamplitude können die Diskretisierungsschritte des ADC stören und es empfiehlt sich, das Signal vor dem ADC analog zu verstärken.

Der ADC erzeugt einen digitalen Datenstrom, der an einen Rechner über Schnittstellen (seriell, USB, . . .) geschickt wird. Auf dem Rechner muss ein Programm laufen, welches den ankommenden Datenstrom dekodiert, in physikalisch relevante Größen (d.h. zunächst Spannungen) umrechnet, gegebenenfalls abgeleitete physikalischen Größen (rechnerisch) ermittelt, diese (online) darstellt und in Dateien zur späteren (offline) Verarbeitung speichert. Diese Software kann auch den Messvorgang steuern, d.h. die angeschlossenen Instrumente im vorgegebenen Zeittakt oder auf Tastendruck „auslesen“. Wenn die Vorschaltgeräte Teil des Gesamtsystems sind, dann kann das Mess- und Steuerprogramm die Auswirkungen der Vorschaltgeräte berücksichtigen.

Im Praktikum wird das kommerzielle System CASSY von Leybold-Didactic eingesetzt. Booten des PCs führt direkt zum CASSY-Menü. Die technischen Daten des CASSY-Grundsensors lauten:

- 5 analoge Eingangsbuchsen in 2 Feldern A und B, die gleichzeitig nutzbar sind.
 - **2 analoge Spannungseingänge** in den Feldern A und B.
Auflösung: 12 bit; Messbereiche: $\pm(0,3 \text{ V}, 1 \text{ V}, 3 \text{ V}, 1 \text{ V}, 30 \text{ V und } 100 \text{ V})$; Messfehler: $\pm 1\%$, zuzüglich 0.5% vom Bereichsendwert; Eingangswiderstand: $1 \text{ M}\Omega$; Abtastrate: bis 100 kHz pro Eingang.
 - **1 analoger Stromeingang** in Feld A;
Messbereiche: $\pm(0,1 \text{ A}, 0,3 \text{ A}, 1 \text{ A und } 3 \text{ A})$; Messfehler: Spannungsmessfehler zuzüglich 1% ; Eingangswiderstand: $<0,5 \Omega$ (außer bei Überlast); weitere Daten siehe Spannungseingänge.
 - 2 analoge Eingänge auf **Sensorbox-Steckplätzen** in den Feldern A und B erlauben Anschluss aller CASSY-Sensorboxen;
Messbereiche: $\pm(0,003 \text{ V}, 0,01 \text{ V}, 0,03 \text{ V}, 0,1 \text{ V}, 0,3 \text{ V und } 1 \text{ V})$; Eingangswiderstand:

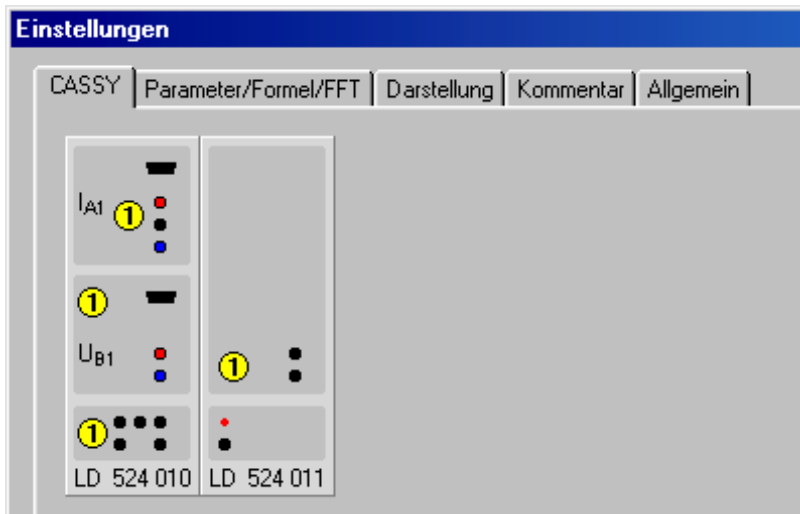
10 k Ω ; Weitere Daten siehe Spannungseingänge; Technische Daten ändern sich entsprechend einer aufgesteckten Sensorbox. Erkennung der dann möglichen Messgrößen und Bereiche automatisch durch CASSY Lab nach Aufstecken einer Sensorbox.

- 1 Umschaltrelais (Schaltanzeige mit LED); Bereich: max. 100 V bzw. 2 A
- 1 analoger Ausgang (PWM-Ausgang), d.h. PulsweitenModuliert zum Schalten von entsprechenden Geräten (z.B. für Haltemagnet oder Experimentversorgung); PWM-Bereich: 0% (aus), (5 – 95) % (1% Auflösung), 100% (an); PWM-Frequenz: 100 Hz
- 1 USB-Port zum Anschluss eines Computers
- 1 CASSY-Bus zum Anschluss weiterer CASSY-Module
- Abmessungen: 115 mm \times 295 mm \times 45 mm
- Masse: 1,0 kg

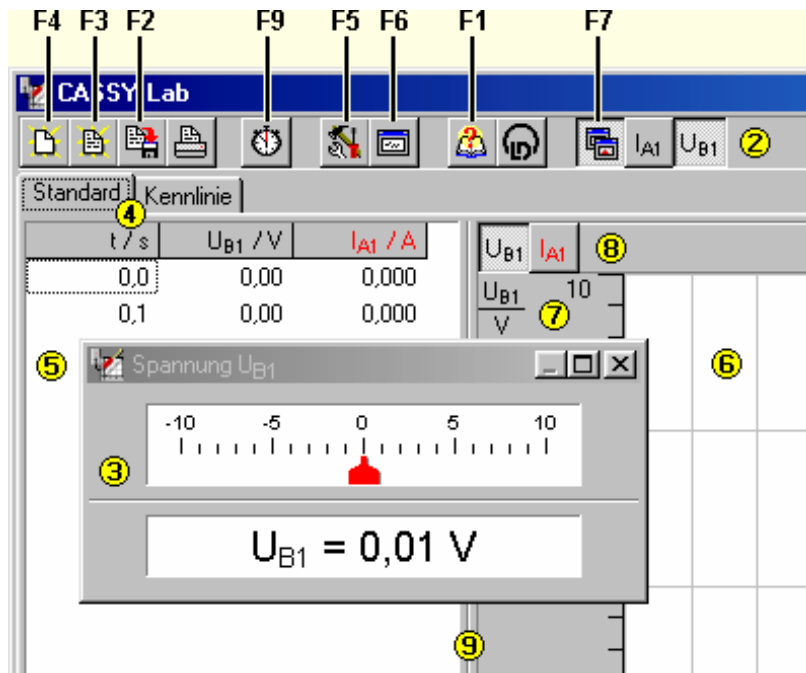
Gegenstück zum ADC sind DAC (Digital to Analogue Converters), die eine rechnergesteuerte Spannungsquelle darstellen. Die entnehmbare Leistung hängt von der Bauweise ab.

Erste Messwerte

Wenn ein oder mehrere CASSYs erkannt worden sind, zeigt die CASSY-Seite des Einstellungsfensters (F5) die aktuelle Konfiguration (mit eventuell aufgesteckten Sensorboxen). Um eine Messung durchzuführen, braucht nur der entsprechende Eingang oder Ausgang ① angeklickt zu werden:



Ein aktiver Ein- oder Ausgang (Kanal) wird danach farbig markiert und als Button rechts oben zu den Speed-Buttons ② des Hauptfensters einsortiert (hier IA1 und UB1). Diese Buttons stellen die einfachste Möglichkeit dar, ein Anzeigeinstrument ③ des Kanals anzuzeigen oder zu schließen (linke Maustaste) oder seine Einstellungen zu verändern (rechte Maustaste). Außerdem erscheint der Kanal anfangs automatisch in der Tabelle ⑤ und im Diagramm ⑥.



Die grundsätzlichen Funktionen lassen sich gezielt mit den Speed-Buttons **2** in der oberen Zeile ausführen. Die wichtigsten Speed-Buttons lassen sich auch mit den Funktionstasten bedienen.

Darunter lässt sich durch Anklicken einer der Darstellungsseiten **4** die Darstellung der Tabelle **5** und des Diagramms **6** umschalten, wenn unterschiedliche Darstellungsarten definiert wurden (hier **Standard** und **Kennlinie**). Tabelle und Diagramm können gegeneinander durch Verschieben der Trennlinie **9** mit der Maus vergrößert oder verkleinert werden.

An vielen Stellen haben **beide** Maustasten (links und rechts) eine entscheidende Funktion:

Bedienelement	Linke Maustaste	Rechte Maustaste
1 CASSY-Anordnung	Anschalten und Ändern eines Kanals	Anschalten und Ändern eines Kanals
2 Kanal-Button	Öffnen und Schließen des Anzeigeinstruments, Drag & Drop nach 2 und 5 bis 8	Einstellungen des Kanals
3 Anzeigeinstrument	Verschieben der Trennlinie Analog- zu Digitalanzeige, Drag & Drop der Werte nach 5	Einstellungen des Kanals
4 Name der Darstellung	Umschalten in eine andere definierte Darstellung	
5 Tabelle	Editieren von Messwerten, Drag & Drop der Werte innerhalb der Tabelle oder der Kanäle nach 2	Darstellung der Tabelle, z. B. Schriftgröße, Löschen von Zeilen und Messreihen
6 Diagramm	Markieren von Auswertungsbereichen	Einstellungen und Auswertungen im Diagramm
7 Skala	Verschieben der Skala	Minimum, Maximum und Umrechnung der Skala festlegen
8 Achsensymbole	Umschalten der y-Skala, Drag & Drop nach 2	Einstellungen des Kanals
9 Trennlinie	Verschieben der Trennlinie Tabelle zu Diagramm	

Auch die Tastenbelegung der Speed-Buttons  erleichtert oft die Arbeit:



F4

Löscht entweder die aktuelle Messung unter Beibehaltung ihrer Einstellungen oder, wenn keine Messung vorhanden ist, die aktuellen Einstellungen.

Eine zweimalige Anwendung löscht eine Messung mit ihren Einstellungen.



F3

Lädt eine Messreihe mit ihren Einstellungen und ihren Auswertungen.

Dabei kann die Messreihe auch an eine vorhandene Messreihe angehängt werden (ohne ihre Einstellungen und Auswertungen mit zu laden). Dies ist möglich, wenn die Messreihen die gleichen Messgrößen besitzen. Alternativ kann eine weitere Messreihe auch nachträglich gemessen und angehängt werden.

Außerdem steht ein ASCII-Import-Filter (Dateityp ***.txt**) zur Verfügung.



F2

Speichert die aktuellen Messreihen mit ihren Einstellungen und ihren Auswertungen ab.

Es lassen sich auch reine Einstellungen (ohne Messdaten) abspeichern, mit denen dann später ein Experiment einfach wiederholt werden kann.

Außerdem steht ein ASCII-Export-Filter (Dateityp ***.txt**) zur Verfügung. Aber auch die CASSY Lab-Dateien (Dateityp ***.lab**) sind mit jedem Texteditor lesbar.



Druckt die aktuelle Tabelle oder das aktuelle Diagramm aus.



F9

Startet und stoppt eine neue Messung.

Alternativ kann die Messung durch die Vorgabe einer Messzeit gestoppt werden.



F5

Ändert die aktuellen Einstellungen (z. B. CASSY, Parameter/Formel/FFT, Darstellung, Kommentar, Serielle Schnittstelle). Für die Messparameter muss diese Funktion **doppelt** betätigt werden.



F6

Stellt den Inhalt der Statuszeile groß dar oder blendet ihn wieder aus.



F1

Ruft diese Hilfe auf.



Gibt Auskunft über die Version der Software und ermöglicht die Eingabe des Freischaltcodes.



F7

Schließt alle geöffneten Anzeigeinstrumente oder öffnet sie wieder.

ASCII-Export und Import


Wählt man im Dateiauswahlfenster als Dateityp ***.txt**, dann ist bequem der Export- und Import von ASCII-Dateien möglich.

Das Datenformat beginnt mit einem Header, in dem alle Zeilen wiederum mit einem Schlüsselwort beginnen. Dadurch werden Messbereiche (MIN, MAX), Skalierungen (SCALE), Anzahl signifikanter Nachkommastellen (DEC) und die eigentliche Definition der Messgrößen (DEF) festgelegt. Bis auf die DEF-Zeile sind alle Zeilen optional. Nach dem Header folgt die eigentliche Messwerttabelle.

Die genaue Syntax ist z. B. der Datei anzusehen, die bei einem Datenexport entsteht.

Statuszeile

In die Statuszeile am unteren Bildschirmrand werden Auswertungsergebnisse eingetragen. Diese

Ergebnisse lassen sich durch Drücken von  oder **F6** auch in einem größeren Fenster darstellen bzw. wieder ausblenden.

Drag & Drop

Die Auswertungsergebnisse der Statuszeile lassen sich mit der Maus in die Tabelle ziehen (Drag & Drop). Auf diese Weise lassen sich Diagramme erstellen, die von Auswertungsergebnissen abhängen.

Anhang A4

Darstellung von Wechselströmen und -spannungen im Zeigerdiagramm

Achtung: Dieser Anhang ist z.T. missverständlich und wird zurzeit überarbeitet. Bitte ziehen Sie zum besseren Verständnis Sekundärliteratur zu Rate.

Für die Darstellung und Berechnung von Wechselstromkreisen sind sogenannte Zeigerdiagramme sehr von Nutzen. Dies sind instruktive grafische Darstellungen der Momentanwerte der zeitabhängigen Größen Spannung und Strom einerseits sowie der linearen Netzwerke aus Ohmschen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten durch zweidimensionale Vektoren („Zeiger“). Diese Zeiger lassen sich als Darstellungen komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene auffassen. Spannungen und Ströme werden durch die zeitabhängigen komplexen Zahlen $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ und $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$ beschrieben. Deren Realteile liefern die beobachtbaren sinusförmigen Verläufe. Impedanzen von linearen Netzwerken sind zeitunabhängige komplexe Zahlen.

A4.1 Zusammenhang von Strom und Spannung in linearen Netzwerken aus Ohmschem Widerstand, Kondensator und Spule

a) Ohmscher Widerstand (Abb. A4.1a)

Legt man an einen Ohmschen Widerstand R eine cosinusförmige Wechselspannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ an, so fließt der Strom $I = I_0 \cos(\omega t)$ mit $I_0 = U_0/R$. Die Scheitelwerte U_0, I_0 von Strom und Spannung sind einander proportional, und **die zeitlichen Phasenlagen beider sind gleich**.

b) Kapazität (Kondensator) (Abb. A4.1b)

Ein Kondensator der Kapazität C trägt die Ladung $q = CU$. Mit $U = U_0 \cos(\omega t)$ und $I = \frac{dq}{dt}$ folgt $I = C \frac{dU}{dt} = -\omega C U_0 \sin(\omega t)$. Dies formen wir um zu $I = I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ mit $I_0 = \omega C U_0$.

Wie beim Ohmschen Widerstand sind die Scheitelwerte von Strom und Spannung einander proportional, aber **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode nach**. Die frequenzabhängige Größe

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

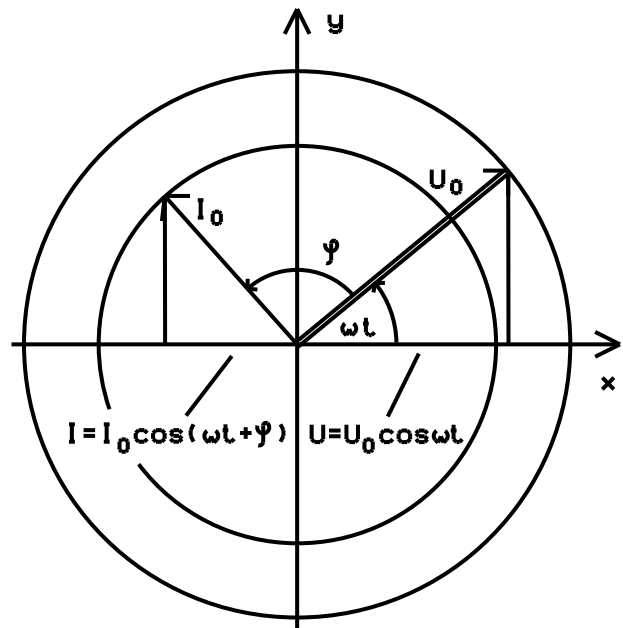
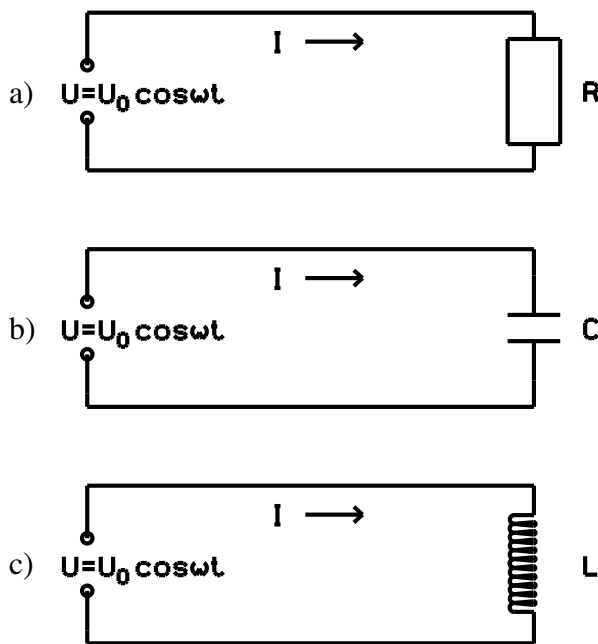


Abbildung A4.1: Netzmaschen für ideale Impedanzen. Abbildung A4.2: Prinzip des Zeigerdiagramms.

spielt die Rolle eines Widerstandes und wird als **Wechselstromwiderstand einer Kapazität** bezeichnet. Ein Kondensator hat also bei niedrigen Frequenzen einen großen, bei hohen einen kleinen Wechselstromwiderstand.

c) Induktivität (widerstandslose Spule) (Abb. A4.1c)

Der durch eine Spule fließende Strom I erzeugt in ihrer Windungsfläche den magnetischen Fluss $\Phi = LI$. Der Faktor L heißt die Induktivität der Spule. Ist I zeitabhängig, so wird zwischen den Enden der Spule eine Spannung $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -L \frac{dI}{dt}$ induziert. Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz gilt für die Summe der Spannungen im Kreis $U + U_{\text{ind}} = RI$, und wenn wir $R = 0$ setzen (ideale widerstandslose Spule), folgt $U = +L \frac{dI}{dt}$. Dies können wir für $U = U_0 \cos(\omega t)$ durch $I = U_0/(\omega L) \sin(\omega t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$ mit $I_0 = U_0/(\omega L)$ erfüllen. Die Scheitelwerte von Strom und Spannung sind einander proportional, **die Spannung eilt dem Strom um eine Viertelperiode vor**. Der **Wechselstromwiderstand einer Induktivität**

$$Z_L = \omega L$$

steigt proportional zur Frequenz an.

A4.2 Zeigerdiagramme

Das Zeigerdiagramm bildet ein bequemes und anschauliches Mittel zur Darstellung und Berechnung der Beziehung zwischen Strom und Spannung in Serien- und Parallelschaltungen (sog. linearen

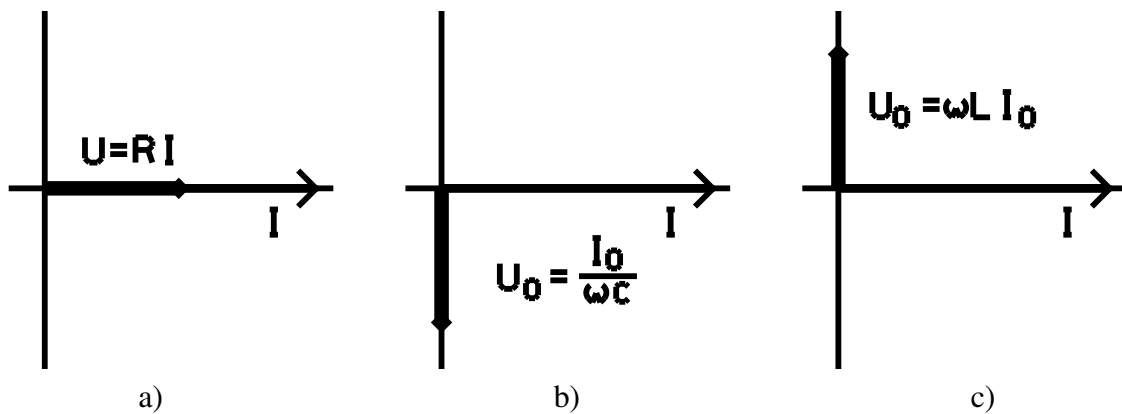


Abbildung A4.3: Zeigerdiagramm a) des Ohmschen Widerstands, b) der Kapazität, c) der Induktivität. Gezeichnet ist jeweils das Zeigerdiagramm für den Zeitpunkt, in dem I seinen Scheitelwert I_0 annimmt.

Netzwerken). In linearen Netzwerken besteht einerseits **Proportionalität** zwischen einer anliegenden cosinusförmigen Wechselspannung und dem resultierenden Strom, andererseits besteht zwischen Spannung und Strom eine feste, i.a. jedoch von Null verschiedene **Phasenverschiebung**.

Man stellt die Beziehungen zwischen Beträgen und Phasen der Ströme und Spannungen im **Zeigerdiagramm** dar (siehe Abb. A4.2), indem man U und I in der xy -Ebene durch Zeiger der Länge U_0 bzw. I_0 repräsentiert. (Da U und I in verschiedenen Einheiten gemessen werden, kann für jede der beiden Größen zeichnerisch zunächst ein beliebiger Maßstab gewählt werden. Die Längen verschiedener Stromzeiger (bzw. verschiedener Spannungszeiger) müssen sich jedoch untereinander verhalten wie die zugehörigen Scheitelwerte (Amplituden).) Diese Zeiger rotieren mit der Frequenz $\nu = \omega/2\pi$ gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn. Der von der positiven x -Achse linksherum (im Bogenmaß) zum Zeiger gemessene Winkel stellt die jeweilige momentane Phase dar. Die Projektion des Zeigers auf die x -Achse gibt dann den zugehörigen Momentanwert von Strom bzw. Spannung an. Haben U und I eine feste Phasenverschiebung relativ zueinander, dann bilden die entsprechenden Zeiger ein in sich starres, gleichmäßig rotierendes Gerüst. Für die Darstellung der **relativen** Phasen- und Amplitudenbeziehungen ist es daher gleichgültig, für welchen Zeitpunkt das Zeigerdiagramm gezeichnet wird.

Die in Abschnitt A4.1 hergeleiteten Zusammenhänge zwischen U und I stellen sich im Zeigerdiagramm (Abb. A4.3) folgendermaßen dar:

a) **Ohmscher Widerstand** (Abb. A4.3a):

Strom- und Spannungszeiger sind parallel. Der Spannungszeiger ist R -mal so lang wie der Stromzeiger (in den jeweiligen, zeichnerisch beliebigen Einheiten).

b) **Kapazität** (Abb. A4.3b):

Beide Zeiger bilden einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **nacheilt**, also z.B. nach unten zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist $Z_C = 1/\omega C$ mal so lang wie der Stromzeiger.

c) **Induktivität** (Abb. A4.3c):

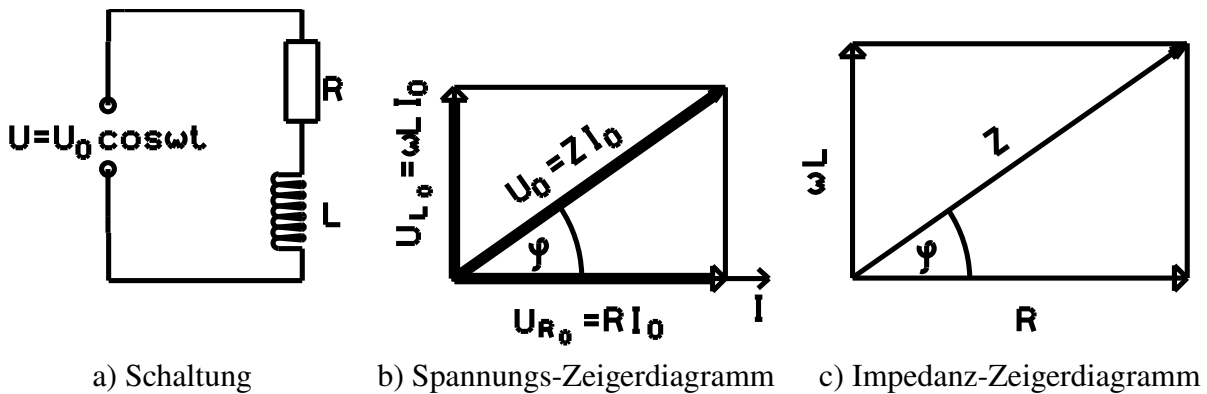


Abbildung A4.4: Beispiel einer Serienschaltung: R und L in Serie (reale Spule).

Beide Zeiger bilden einen rechten Winkel, wobei der Spannungszeiger dem Stromzeiger **voreilt**, also z.B. nach oben zeigt, wenn der Stromzeiger gerade nach rechts weist. Der Spannungszeiger ist $Z_L = \omega L$ mal so lang wie der Stromzeiger.

A4.2.1 Serienschaltung

Durch alle Elemente einer Serienschaltung fließt derselbe Strom nach Betrag und Phase (sonst müßten sich auf den Leitungen Ladungen zeitweise ansammeln oder von dort verschwinden). Wir können also in **ein** Diagramm den gemeinsamen Stromzeiger und die Spannungszeiger der einzelnen Elemente, deren Relation zum Stromzeiger wir kennengelernt haben, eintragen. Die über alle in Reihe liegenden Elemente insgesamt abfallende momentane Spannung ist die Summe der Projektionen der einzelnen Spannungszeiger auf die x-Achse. Selbstverständlich dürfen nur gleichartige Größen summiert werden, z.B. Ströme nur zu Strömen. Da die Summe der Projektionen der Zeiger gleich der Projektion ihrer Vektorsumme ist, und zwar für alle ωt , gibt der Summenzeiger nach Länge und Orientierung den Betrag der gesamten Spannung und ihre Phase relativ zum Stromzeiger an. Mit dem ganzen Zeigergerüst rotiert auch der Zeiger der Gesamtspannung gleichmäßig links-herum. Das Diagramm zeigt jeweils einen beliebig herausgegriffenen Augenblick dieser Bewegung (im Beispiel der Abb. A4.4 den Moment, wenn I seinen Scheitelwert I_0 annimmt).

Da die Zeiger der Teilspannungen dem Betrage nach sämtlich proportional zu I_0 sind, gilt dies auch für den Betrag des Summenvektors:

$$|U| = U_0 = Z I_0.$$

Z ist der Wechselstromwiderstand der gesamten Reihenschaltung. Z und der Phasenwinkel φ zwischen Gesamtspannung und Strom lassen sich aus dem Zeigerdiagramm mit Hilfe einfacher trigonometrischer Beziehungen berechnen.

Teilen wir alle Spannungszeiger durch I_0 , so erhalten wir das dem Spannungszeigerdiagramm geometrisch ähnliche **Zeigerdiagramm der Wechselstromwiderstände**. Wir lesen aus Abb. A4.4 ab: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ und $\tan(\varphi) = \omega L / R$. Die Spannung eilt dem Strom um den Winkel φ voraus. Die Teilspannungen an R und L sind beide weder miteinander noch mit der gesamten Spannung in

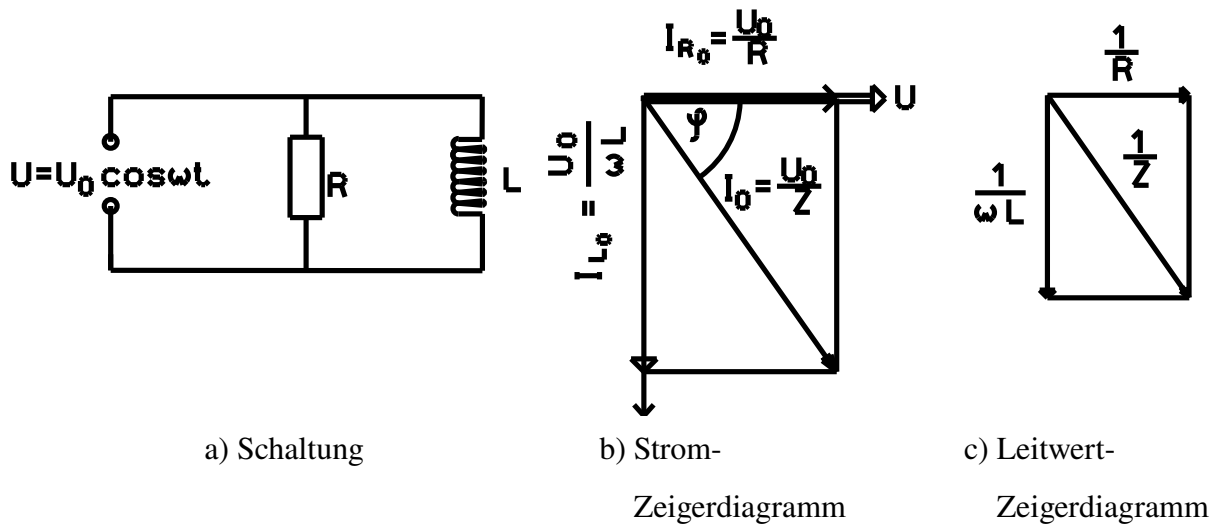


Abbildung A4.5: Beispiel einer Parallelschaltung: Ohmscher Widerstand und Spule.

Phase.

A4.2.2 Parallelschaltung

An allen parallelen Zweigen der Schaltung liegt dieselbe Spannung an. Man kann daher in **ein** Diagramm den gemeinsamen Spannungszeiger und die Stromzeiger der einzelnen Zweige eintragen. Der Zeiger des insgesamt fließenden Stroms ergibt sich durch vektorielle Addition dieser Stromzeiger und liegt damit nach Betrag und Phase relativ zum Spannungszeiger fest.

Dem Stromzeigerdiagramm in Abb. A4.5 geometrisch ähnlich ist das **Zeigerdiagramm der Wechselstromleitwerte**, das aus ihm mittels Division durch U_0 hervorgeht. Aus Abb. A4.5 ergeben sich:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}; \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \tan(\varphi) = \frac{R}{\omega L}.$$

Wiederum sind die Teilströme weder untereinander noch mit dem Gesamtstrom in Phase.

A4.3 Komplizierte Netzwerke

Besteht ein Netzwerk aus Parallel- und/oder Reihenschaltungen von Unterabschnitten, die ihrerseits wieder Parallel- und/oder Reihenschaltung der drei Grund-Schaltelemente sind, so muss man zunächst Zeigerdiagramme solcher Unterabschnitte konstruieren und an ihnen die Beziehungen zwischen den zugehörigen Teilspannungen und -strömen ermitteln. Die hierbei im jeweiligen Diagramm vorzugebenden Größen (bei Reihenschaltung der Strom, bei Parallelschaltung die Spannung) sind vorläufig nach Betrag und Phase relativ zu der die ganze Schaltung treibenden Spannung noch unbekannt. Die Maßstäbe dieser Teildiagramme sind zunächst beliebig und deshalb im Allgemeinen verschieden, und auch die dargestellten Zeitpunkte stimmen i.A. nicht überein. Diese

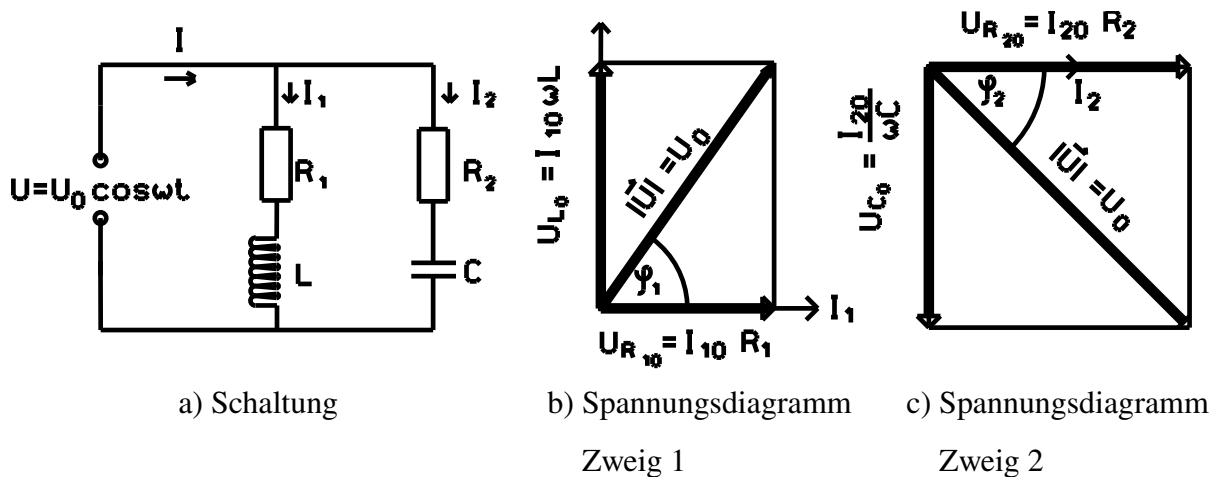


Abbildung A4.6: Schwingkreis mit Spule, Ohmschen Widerstand und Kondensator

Teildiagramme sind nun zum Gesamtdiagramm zusammenzufügen, wobei sie so gedreht (Transformation des Zeitpunkts) und im Maßstab verändert werden müssen, dass durch alle miteinander in Reihe liegenden Teildiagramme derselbe Strom nach Betrag und Phase fließt und an allen parallel liegenden Teilzweigen dieselbe Spannung liegt.

Am Beispiel eines Parallelschwingkreises mit zwei Ohmschen Widerständen soll das verdeutlicht werden: Beide Diagramme in Abb. A4.6 b),c) müssen so gedreht und maßstäblich angepasst werden, dass die Zeiger \vec{U} zur Deckung kommen, da an beiden Zweigen dieselbe Spannung anliegt. Dabei ergibt sich automatisch die relative Lage und Größe von I_1 , I_2 und auch der Zeiger des gesamten Stroms $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$. Wegen der rechten Winkel in den Teildiagrammen liegen die Eckpunkte auf einem Thaleskreis vom Durchmesser U_0 . Mittels trigonometrischer Formeln können I_1 , I_2 und deren Phasenwinkel bestimmt werden (Abb. A4.7).

A4.4 Komplexe Wechselstromgrößen

A4.4.1 Rechnerische Behandlung von Impedanz-Netzwerken

Der grafischen Darstellung im Zeigerdiagramm entspricht rechnerisch die Darstellung von Strömen, Spannungen und Wechselstromwiderständen durch komplexe Zahlen $z = x + iy$ (Punkte in der komplexen Zahlenebene). Hierbei ist das i das Symbol für $\sqrt{-1}$. (In der elektrotechnischen Literatur schreibt man wegen der häufigen Verwendung des kleinen Buchstabens i zur Bezeichnung von Strömen meist $j = \sqrt{-1}$).

Aus der Beziehung $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ folgt $|e^{i\omega t}| = 1$, d.h. der Vektor vom Ursprung der Zahlenebene zum Punkt $e^{i\omega t} = (\cos \omega t, \sin(\omega t))$ hat die Länge 1 und bildet mit der x -Achse (reellen Achse) den Winkel ωt . Mit wachsendem ωt läuft der Punkt $e^{i\omega t}$ im negativen Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis um. Entsprechend läuft $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf dem Kreis vom Radius U_0 um, wobei die Projektion auf die x -Achse (der Realteil $\text{Re} \hat{U}$) gleich $U_0 \cos(\omega t)$ ist.

Betrachten wir nun Strom und Spannung an einer Kapazität (Abb. A4.3b)). Fassen wir die

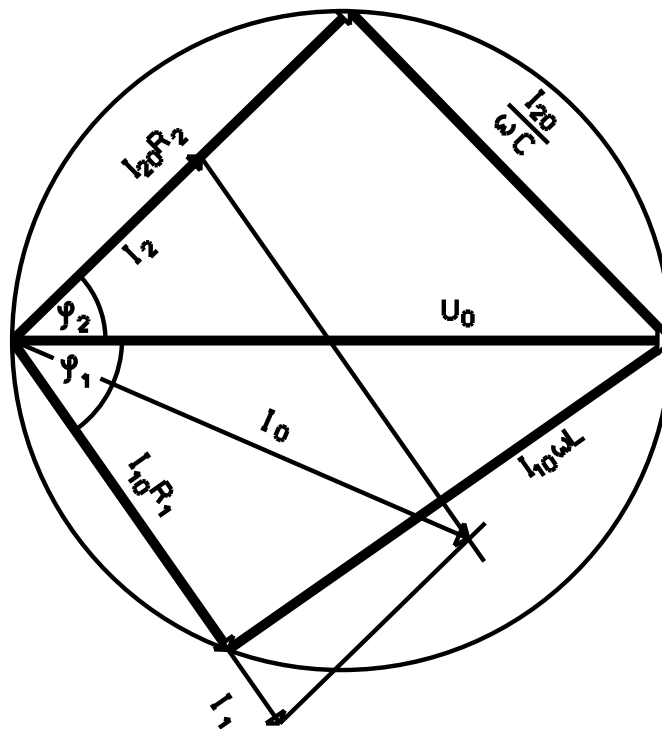


Abbildung A4.7: Zeigerdiagramm für Parallelschwingkreis

Spannung $U = U_0 \cos(\omega t)$ als Realteil von $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$ auf, so ergibt sich I als $I = U_0 \omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$, was wir als Realteil von $\hat{I} = I_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = \omega C e^{i\pi/2} U_0 e^{i\omega t}$ deuten können. Mit $e^{i\pi/2} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}) = i$ wird daraus

$$\hat{I} = i\omega C \hat{U}.$$

Die Beziehung zwischen Strom und Spannung am Kondensator lässt sich also als **Realteil einer Gleichung zwischen komplexen Größen, die völlig analog dem Ohmschen Gesetz $I = (1/R)U$ ist** auffassen, wobei an die Stelle des Ohmschen Widerstandes R der sog. **Scheinwiderstand** (komplexer Widerstand, **Impedanz**) der Kapazität, $\hat{Z} = 1/(i\omega C) = -i/(\omega C)$, tritt. Als komplexe Zahl stellt die Impedanz grundsätzlich ein Paar reeller Zahlen dar und kann die Information über den Proportionalitätsfaktor zwischen den Scheitelwerten von Strom und Spannung (Wechselstromwiderstand) wie auch über die Phasenbeziehung aufnehmen. Der Vorteil der komplexen Rechnung liegt darin, dass die Phasenkonstante in den **multiplikativen** Faktor \hat{Z} eingeschlossen ist und nicht mehr explizit gehandhabt zu werden braucht, was wegen der Additionstheoreme für sin und cos die Berechnung selbst einfacher Schaltkreise im Reellen außerordentlich umständlich machen würde.

Üblicherweise dividiert man beide Seiten der Gleichung $\hat{U} = \hat{Z} \hat{I}$ durch $e^{i\omega t}$, da dieser Faktor lediglich die gleichmäßige Rotation der Vektoren \hat{U} und \hat{I} in der Gaußschen Zahlenebene beschreibt. Wir werden unter \hat{U} und \hat{I} im folgenden also feste Vektoren verstehen, von denen wir einen (z.B. die treibende Spannung einer Schaltung) reell annehmen können.

Ganz analoge Betrachtungen wie bei der Kapazität liefern die Impedanzen der Induktivität und

des Ohmschen Widerstandes. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\hat{Z}_R &= R && \text{für den Ohmschen Widerstand,} \\ \hat{Z}_C &= \frac{1}{i\omega C} && \text{für die Kapazität,} \\ \hat{Z}_L &= i\omega L && \text{für die Induktivität.}\end{aligned}$$

und als komplexe Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes

$$\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}.$$

\hat{Z} wird als Scheinwiderstand oder Impedanz, sein Realteil als **Wirkwiderstand**, sein Imaginärteil als **Blindwiderstand** bezeichnet. Der Betrag $|\hat{Z}| = Z$ heißt Wechselstromwiderstand.

Weil diese Beziehung formal dem Ohmschen Gesetz gleicht und weil die Kirchhoffschen Gesetze auch für Wechselströme und -spannungen gelten, erhalten wir für die Reihen- bzw. Parallelschaltung von Impedanzen dieselben Regeln wie für entsprechende Kombinationen Ohmscher Widerstände:

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{\text{ges}} &= \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 && \text{für Reihenschaltungen,} \\ \frac{1}{\hat{Z}_{\text{ges}}} &= \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} && \text{für Parallelschaltungen.}\end{aligned}$$

Beliebige Netzwerke aus Impedanzen werden daher formal-rechnerisch völlig analog der entsprechenden Schaltung aus Ohmschen Widerständen behandelt. Die Zeigerdiagramme für Strom, Spannung, Impedanz oder reziproke Impedanz sind nichts anderes als grafische Darstellung der hierbei auftretenden Operationen mit komplexen Größen in der Gaußschen Zahlenebene

Natürlich ist dieser Formalismus nur eine zweckmäßige, weil vereinfachende Rechenvorschrift. Ströme und Spannungen sind reelle Funktionen, d.h. zu jedem Zeitpunkt durch Angabe jeweils einer reellen Zahl in geeigneten Einheiten messbare Größen. Wir können diese Funktionen erhalten, indem wir am Schluss der komplexen Rechnung \hat{I} und \hat{U} wieder mit dem Faktor $e^{i\omega t}$ multiplizieren und die Realteile dieser komplexen Zahlen bilden. Wir können stattdessen aber auch die eigentlich interessierenden Kenngrößen, nämlich Amplitude und Phase, direkt aus den komplexen Repräsentanten \hat{I} bzw. \hat{U} gewinnen. Setzen wir etwa in $\hat{I} = \hat{Z}\hat{U}$ die Spannung reell an (womit wir t festgelegt haben), so ist die **Amplitude** I_0 durch den **Betrag** $I_0 = |\hat{I}| = \sqrt{(\text{Re } \hat{I})^2 + (\text{Im } \hat{I})^2}$ und die **Phase** φ durch das **Argument** von \hat{I} , $\tan \varphi = \frac{\text{Im } \hat{I}}{\text{Re } \hat{I}}$, gegeben. (Das so berechnete φ ist der Phasenwinkel bezüglich der reellen Achse und stimmt nur dann mit der Phasenverschiebung gegen U überein, wenn U reell angesetzt wird.)

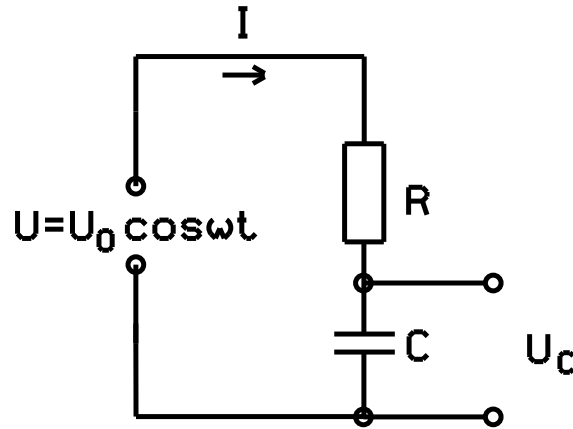


Abbildung A4.8: Frequenzabhängige Spannungsteilung.

Beispiel: Rechnung beim RC-Spannungsteiler (Tiefpass, s. Abb. A4.8)

$$\begin{aligned}\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}} &= \frac{1/i\omega C}{R + 1/i\omega C} = \frac{1}{1 + iR\omega C} = \frac{1 - iR\omega C}{1 + (\omega RC)^2} \\ U_{0,C} &= |\hat{U}_C| = \left| \frac{1}{1 + iR\omega C} \right| \cdot U_0 = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ \tan(\varphi) &= \frac{-R\omega C / (1 + (\omega RC)^2)}{1 / (1 + (\omega RC)^2)} = -\frac{\omega RC}{1} = -\omega RC \\ U_C &\text{ eilt } U \text{ um den Winkel } -\varphi \text{ nach:} \\ U_C &= \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC)).\end{aligned}$$

A4.4.2 Leistung in komplexer Schreibweise

Die komplexe Behandlung führt zu Schwierigkeiten bei der Berechnung der Leistung im Wechselstromkreis, weil hierzu quadratische Größen der Repräsentanten gebildet werden. Man muss deshalb vor der Leistungsberechnung zu reellen Größen übergehen oder aber besondere Festsetzungen treffen.

Bezeichnen wir mit \hat{I}^* den zu $\hat{I} = \hat{U}/(|\hat{Z}|e^{i\varphi}) = I_0 e^{-i\varphi}$ komplex konjugierten Strom $\hat{I}^* = I_0 e^{+i\varphi}$, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I}^* &= \frac{U_0 I_0}{2} e^{i\varphi} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\varphi) + i \frac{U_0 I_0}{2} \sin(\varphi) \\ &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) + i U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Hierin sind $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ und $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ die **Effektivwerte** von Spannung und Strom (diese

Werte werden üblicherweise von Wechselstrom-Messinstrumenten angezeigt). Mithin ist

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{U} \hat{I}^*) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi),$$

d.h. gleich der mittleren Wirkleistung

$$\overline{N_w} = \overline{U_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi).$$

Die mittlere Wirkleistung berechnet man also in komplexer Schreibweise nach der Vorschrift:

$$\overline{N_w} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{U} \hat{I}^*).$$

Anhang A5

Optische Instrumente

A5.1 Auge

Machen Sie sich bei der Vorbereitung für die Optikversuche mit dem Aufbau und der Funktionsweise des menschlichen Auges vertraut. Dazu einige Angaben:

Brechzahl der Linse: $n_L = 1,358$ (Wasser hat $n = 1,33$),

Brechzahl des Glaskörpers: $n_C = 1,3365$.

Sehwinkel: Die Bildgröße B des Gegenstandes G auf der Netzhaut des Auges ist proportional zum „Sehwinkel“ α (siehe Abb. A5.1). Die kleinste deutliche Sehweite des Auges beträgt im Mittel $s_0 := 25$ cm. (Bestimmen Sie Ihre persönliche deutliche Sehweite; sie kann sehr unterschiedlich sein und hängt von Ihrem Alter ab und z.B. davon, ob und wie stark Sie kurzsichtig sind; als Standard wird jedoch immer $s_0 = 25$ cm verwendet.) Der maximale Sehwinkel α_0 des menschlichen Auges, unter dem ein Gegenstand G scharf erscheinen kann, ist daher gegeben durch

$$\tan(\alpha_0) = \frac{G}{s_0}. \quad (\text{A5.1})$$

A5.2 Lupe

Das einfachste optische Instrument zur Vergrößerung des Sehwinkels ist die Lupe. Es ist eine Sammellinse (Brennweite f), die auf eine der beiden folgenden Arten verstanden und verwendet werden kann:

1. Der durch die Lupe betrachtete Gegenstand befindet sich in der Brennebene der Sammellinse. Das Auge ist auf ∞ akkomodiert. In der in Abb. A5.2 gezeigten Anordnung treten alle vom Gegenstand ausgehenden Lichtbündel als Parallellicht aus der Linse aus. Das Auge sieht ein virtuelles Bild des Gegenstandes, welches im ∞ liegt. Der Gegenstand erscheint, wie man aus der Zeichnung einfach ablesen kann, unter dem Sehwinkel gemäß Abb. A5.1.

Die **Vergrößerung** eines optischen Instrumentes ist definiert als ein Tangensverhältnis:

$$V := \frac{\tan(\text{Sehwinkel mit Instrument})}{\tan(\text{maximal möglicher Sehwinkel ohne Instrument})}, \quad (\text{A5.2})$$

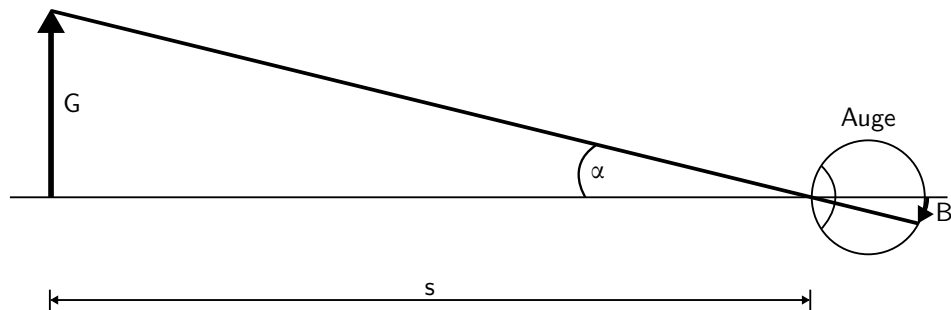


Abbildung A5.1: Zur Definition des Sehwinkels

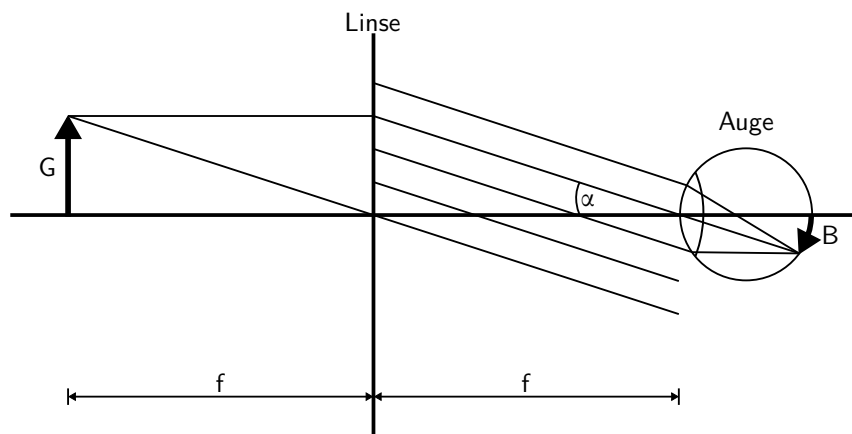


Abbildung A5.2: Strahlengang der Lupe.

wobei maximal möglicher Sehwinkel bei „greifbaren“ Gegenständen bedeutet, dass man sie aus s_0 betrachtet, und bei „nicht greifbaren“ Gegenständen (z.B. Sternen) ihr tatsächlicher Sehwinkel gemeint ist.

Als Vergrößerung einer Lupe definiert man also das Verhältnis:

$$V_L = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha_0)} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}. \quad (\text{A5.3})$$

Diese Anwendung der Lupe wird beim Okular verwendet (s.u.). Der Abstand Lupe – Auge ist unkritisch, da alle Lichtstrahlen vom Objekt idealerweise parallel austreten. Wird der Abstand Lupe – Objekt nicht genau eingehalten, so kann das Auge dafür in gewissem Rahmen durch Akkomodation kompensieren. Man kann deshalb oft von diesem Standardfall ausgehen.

- Die Lupe befindet sich in sehr kleinem Abstand vor der Augenlinse. Der Vorteil dieser Geometrie ist, dass das Gesichtsfeld größer (= man sieht mehr vom betrachteten Gegenstand) ist als im vorherigen Fall (beliebiger Abstand Lupe – Auge). Hier wird die Brennweite des Auges praktisch verkleinert, und Gegenstände können auch in einer Entfernung kleiner als s_0 scharf gesehen werden. Das Bild auf der Netzhaut erscheint so größer, als es ohne Lupe möglich wäre.

Die Vergrößerung beträgt

$$V_L = 1 + \frac{s_0}{f} \quad (\text{Herleitung s. z.B. Otten, Kap. 28.1.}). \quad (\text{A5.4})$$

Man kann diesen Fall natürlich auch so sehen, dass die deutliche Sehweite reduziert wird. Auf jeden Fall gilt: je kleiner die Brennweite der Lupe, desto größer ist die Vergrößerung.

Frage: Warum ist die Definition der Vergrößerung über den Abbildungsmaßstab $\gamma = B/G$ bei Lupe, Fernrohr und Mikroskop nicht sinnvoll?

Frage: Was ist die maximale Vergrößerung, die mit einer Lupe erreicht werden kann, und wodurch ist sie begrenzt?

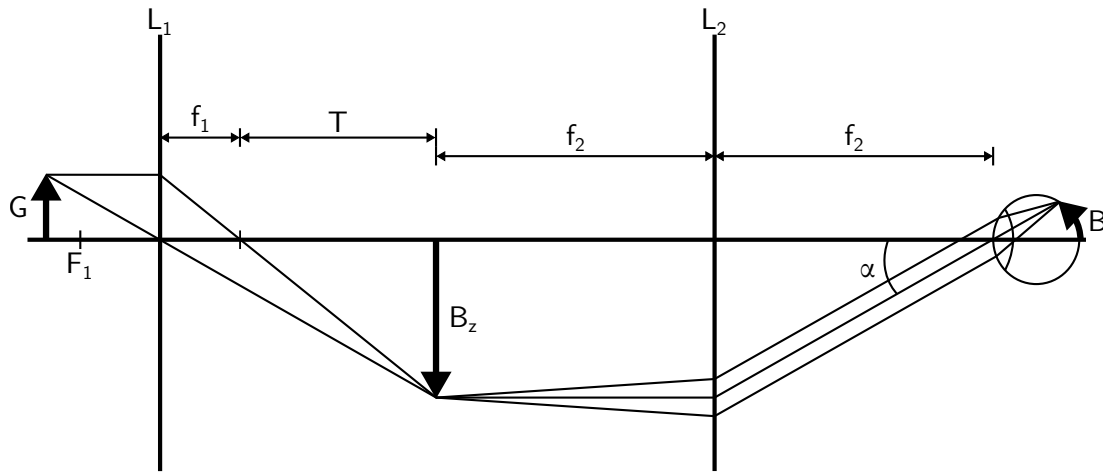
A5.3 Mikroskop

Wesentlich stärkere Vergrößerungen als mit der Lupe erreicht man durch Einsatz einer zweiten, sogenannten Objektivlinse. Beim Mikroskop nimmt man dafür eine Linse mit relativ kleiner Brennweite. Mit ihr erzeugt man ein vergrößertes, reelles Zwischenbild B_z , welches mit dem Okular, das wie eine Lupe funktioniert, weiter vergrößert wird. Die Verhältnisse sind in Abb. A5.3 verdeutlicht. Die wichtige Beziehung

$$\frac{G}{f_1} = \frac{B_z}{T} \quad (\text{A5.5})$$

kann man direkt der Zeichnung entnehmen. Es folgt für den Sehwinkel

$$\tan(\alpha) = \frac{B_z}{f_2} = \frac{T \cdot G}{f_1 \cdot f_2}. \quad (\text{A5.6})$$


Abbildung A5.3: Strahlengang im Mikroskop (T = Tubuslänge)

Die Vergrößerung des Mikroskops ist dann

$$V = \frac{\frac{T \cdot G}{f_1 \cdot f_2}}{\frac{G}{s_0}} = \frac{T}{f_1} \cdot \frac{s_0}{f_2} = V_{\text{obj}} \cdot V_{\text{oku}} \quad (\text{A5.7})$$

das Produkt aus Objektiv- und Okularvergrößerung. Auch hier gilt; je kleiner die Objektivbrennweite, desto größer ist die Vergrößerung.

Frage: Wo ist hier die Grenze?

A5.4 Astronomisches oder Keplersches Fernrohr

Die Verhältnisse beim astronomischen Fernrohr (zuerst beschrieben von J. Kepler 1611; gebaut von C. Schreiner 1615) sind ganz ähnlich wie beim Mikroskop; das Prinzip ist dasselbe. Der Unterschied kommt daher, dass der Gegenstand „ ∞ weit“ entfernt ist und sich deshalb die Tubuslänge T zu Null reduziert. Die Brennpunkte von Objektiv und Okular fallen also zusammen. In dieser Brennebene entsteht das reelle Zwischenbild vom betrachteten Gegenstand.

Die wichtigste Beziehung kann auch hier wieder aus der Zeichnung (Abb. A5.4) abgelesen werden:

$$\tan(\alpha_0) = \frac{B_z}{f_1} \quad \text{und} \quad \tan(\alpha) = \frac{B_z}{f_2}. \quad (\text{A5.8})$$

Die Vergrößerung ist also

$$V = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha_0)} = \frac{f_1}{f_2}. \quad (\text{A5.9})$$

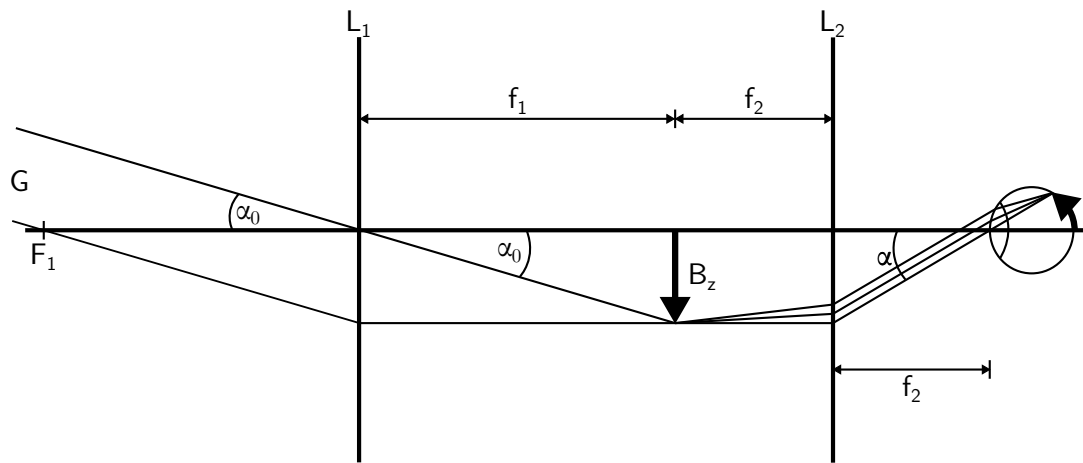


Abbildung A5.4: Strahlengang im astronomischen Fernrohr.

Beim Fernrohr ist es also sinnvoll, eine möglichst lange Objektivbrennweite zu nehmen, um die Vergrößerung möglichst groß zu machen.

Prinzipiell gibt es beim Fernrohr keine maximale Vergrößerung, da die Brennweite des Objektivs (abgesehen von der großen Baulänge) beliebig groß gemacht werden kann. Beschränkungen beim Fernrohr kommen daher von dem endlichen Objektivdurchmesser, welcher die Auflösung begrenzt. Diesen Effekt untersuchen Sie in den Versuchsteilen zum „Auflösungsvermögen von Linsen“.

A5.5 Terrestrisches Fernrohr

Zur Betrachtung eines Gegenstandes auf der Erde eignet sich ein astronomisches Fernrohr schlecht, da es auf dem Kopf stehende Bilder erzeugt. Das terrestrische Fernrohr vermeidet dies dadurch, dass sich zwischen Objektiv und Okular eine Sammellinse befindet, welche das Bild umkehrt. Im Vergleich zum astronomischen Fernrohr erfordert die „Umkehrlinse“ (f_3) eine größere Baulänge ℓ des terrestrischen Fernrohrs:

$$\ell = f_1 + f_2 + 4 \cdot f_3. \quad (\text{A5.10})$$

Diese kann insbesondere für große Vergrößerungen beachtliche Werte erreichen. Der Strahlengang ist in Abb. A5.5 dargestellt.

Frage: Wie kann die Baulänge z.B. für einen Feldstecher reduziert werden?

A5.6 Galileisches Fernrohr (Theaterglas)

Die älteste Fernrohrkonstruktion ist das holländische oder Galileische Fernrohr (H. Lipperhey und G. Galilei). Das Objektiv dieses Fernrohrs ist wie bei allen Fernrohren eine Sammellinse, das

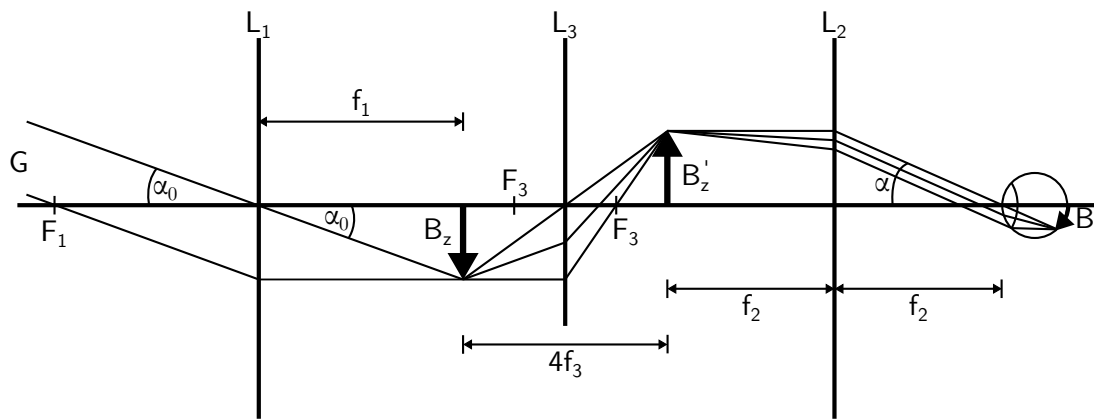


Abbildung A5.5: Strahlengang im terrestrischen Fernrohr.

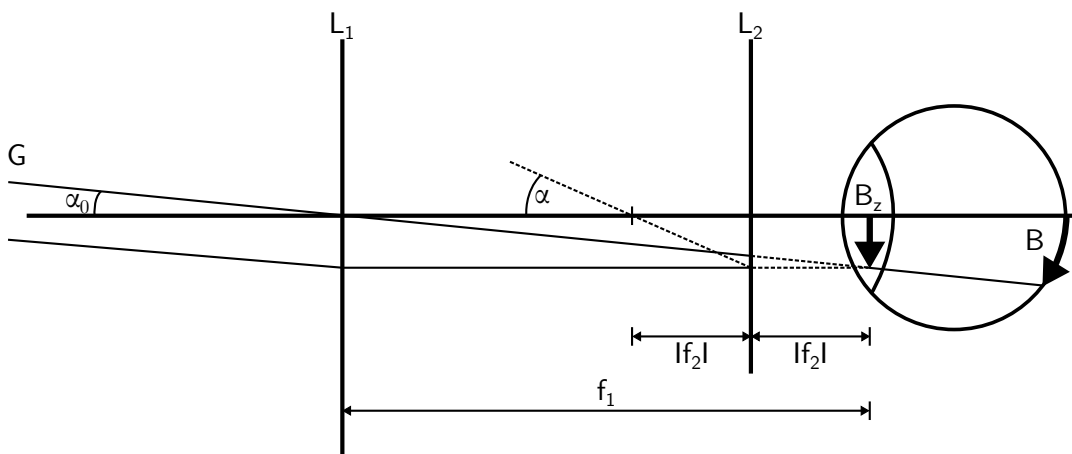


Abbildung A5.6: Strahlengang im Galileischen Fernrohr.

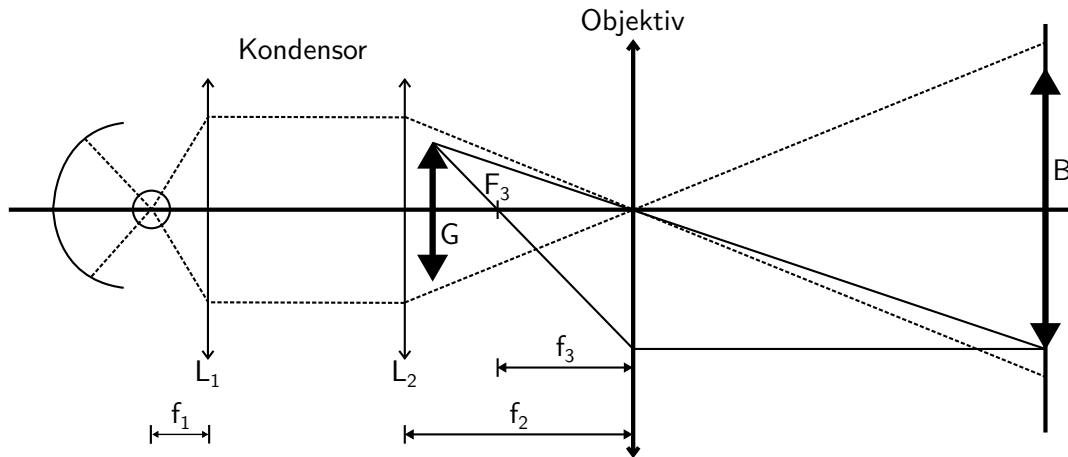


Abbildung A5.7: Strahlengang im Diaprojektor

Okular jedoch eine Zerstreuungslinse. Wie aus dem Strahlengang (Abb. A5.6) hervorgeht, sieht das Auge ein virtuelles, im ∞ liegendes, aufrechtes Bild des weit entfernten Gegenstandes. Für die Länge dieses Fernrohrs gilt $\ell = f_1 - |f_2|$. Anhand des Strahlengangs kann man ableiten, dass auch für die Vergrößerung des Galileischen Fernrohrs gilt:

$$V = \frac{f_1}{|f_2|}. \quad (\text{A5.11})$$

A5.7 Projektionsapparat (Diaprojektor)

Im Projektor bildet das Projektionsobjektiv (Sammellinse mit Brennweite f_3 , typisch bei Kleinbildprojektoren ist $f_3 = 85 \text{ mm}$) die Objektebene (Dia) scharf und stark vergrößert auf die Projektionsebene (Leinwand) ab. Der Beleuchtungsapparat besteht aus einer kleinflächigen Glühwendel und einem Kondensor, der bei nicht eingesetztem Dia für eine gleichförmige Helligkeit auf dem Gesichtsfeld in der Projektionsebene sorgt. Dazu bildet der Kondensor die Lichtquelle auf die Projektionslinse ab (siehe Abb. A5.7). Das Bild des Glühfadens entsteht also in der Projektionslinse und nicht auf der Leinwand.

Um viel Licht einzusammeln, muss der Kondensor von der Glühwendel aus einen großen Raumwinkel ($\Omega = \text{Fläche}/\text{Abstand}^2$) aufspannen. In der Optik redet man von kleinen Öffnungszahlen $f/\varnothing = 1/\sqrt{\Omega}$. Man verwendet deshalb entweder Fresnellinsen (Taglichtprojektoren) oder zweilin-sige Systeme (Diaprojektoren), bestehend aus zwei Plankonvexlinsen, deren plane Flächen nach außen gerichtet sind (Abb. A5.7).

Frage: Warum diese Orientierung der Plankonvexlinsen des Kondensors?

Frage: Warum verwendet man nicht eine Bikonvexlinse?

Die Lichtquelle steht im Brennpunkt der ersten Kondensorlinse (Brennweite f_1). Das Licht der Projektionslampe verlässt also die erste Kondensorlinse als Parallelbündel. Die zweite Kondensorlinse (Brennweite f_2) fokussiert das Bündel am Ort des Projektionsobjektivs, welches

- somit klein im Durchmesser gewählt werden kann, ohne Lichtverluste zu verursachen, und
- einen kleinen Öffnungsfehler hat.

Das Vergrößerungsverhältnis, oder auch der Abbildungsmaßstab γ , des Projektors ist gegeben durch

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (\text{A5.12})$$

Damit ein vergrößertes Bild entsteht, muss gelten: $2f_3 > g > f_3$. Zusammen mit den Bedingungen für die richtige Ausleuchtung muss weiterhin gelten: $2f_3 > f_2 > g > f_3$. Diese Bedingung bewirkt, dass ein Teil des Kondensors (die 2. Linse) auf die Brennweite des Projektionsobjektivs abgestimmt sein muss. Für große Abbildungsmaßstäbe $\gamma \gg 1$ gilt:

$$g \approx f_3 \quad \text{und} \quad b \approx \gamma \cdot f_3. \quad (\text{A5.13})$$

Frage: Wie kann man den in Abb. A5.7 gezeigten Projektionsapparat durch Anbringen eines Hohlspiegels hinter der Projektionslampe verbessern? Worauf muss man achten?

Anhang A6

Spektren der Spektrallampen

A6.1 Tabelle1

Wellenlänge λ	Farbe
380 - 420 nm	violett
420 - 490 nm	blau
490 - 575 nm	grün
575 - 590 nm	gelb
590 - 625 nm	orange
625 - 780 nm	rot

Nützliche Links:

<https://www.silicann.com/blog/beitrag/wellenlaenge-farbe/>
<https://www.magnetkern.de/spektrum.html>

Fett gedruckte Wellenlängen sollten Sie in jedem Fall beobachten können.

Calcium (Ca)	Cadmium (Cd)	Helium (He)	Quecksilber (Hg)	Kalium (K)	Rubidium (Rb)	Zink (Zn)
455,54 nm	441,46 nm	388,86 nm	404,66 nm	404,41 nm	420,18 nm	462,98 nm
459,32 nm	467,81 nm	447,15 nm	407,78 nm	404,72 nm	421,56 nm	468,01 nm
584,47 nm	479,99 nm	471,31 nm	435,83 nm	583,19 nm	543,15 nm	472,22 nm
601,03 nm	508,58 nm	492,19 nm	491,61 nm	693,88 nm	564,78 nm	481,05 nm
621,29 nm	515,47 nm	501,57 nm	546,08 nm	696,47 nm	572,41 nm	518,20 nm
671,77 nm	632,52 nm	587,56 nm	576,96 nm	766,49 nm	589,81 nm	530,87 nm
697,33 nm	643,85 nm	667,81 nm	579,06 nm	769,90 nm	607,08 nm	577,71 nm
		706,52 nm	690,75 nm	779,52 nm	615,96 nm	636,23 nm
		728,13 nm			620,63 nm	
					629,83 nm	
					728,00 nm	
					740,81 nm	
					761,89 nm	
					775,77 nm	
					780,03 nm	

Symbolverzeichnis

Bezeichnung	Formelzeichen	Einheit	Versuch
Abbildungsmaßstab	γ	-	100, 362, 364
Abklingkonstante	β	s^{-1}	236
Adiabatenkoeffizient	κ	-	110
Amplitude / Ausschlag	φ		102, 236, 368
Anzahl	n / N	-	102, 106, 236, 238, 242, 364, 368
Auflösungsvermögen	A	m	366, 368
Beweglichkeit (Ladungsträger)	μ	$m^2 V^{-1} s^{-1}$	232
Biegestrecke	c	m	108
Bildgröße	B	m	100, 362, 364
Bildweite	b	m	100, 362, 364
Boltzmann-Konstante	k	JK^{-1}	372
Brechzahl / Brechungsindex	n	-	362, 364, 366, 370
Breite	$b / B / d / D$	m	108, 240, 366, 368
Brennpunkt	F	-	362
Brennweite	f	m	100, 362, 364, 386, 372
Dämpfungskonstante	ρ	$kg s^{-1}$	236
Dämpfungsverhältnis	K	-	102
Dehnung	ϵ	-	108
Dicke	d	m	106, 108
Drehimpuls	L	$kg m^2 s^{-1}$	106
Drehmoment	M	Nm	104, 106, 108, 236
Druck	p	Pa	110
Durchmesser	D	m	364
Eigenfrequenz	ω_0	Hz	102, 110, 234
Elastizitätsmodul	E	$kg m^{-1} s^{-2}$	108
Elementarladung	e	C	242
Emissionsgrad	ϵ	-	372
Energie	E	J	112, 232, 372
Erdbeschleunigung	g	$m s^{-2}$	104, 110, 242
Feld(-stärke) (elektrisch)	E	$V m^{-1}$	240, 242, 368, 370

Feld(-stärke) (magnetisch)	H	A m^{-1}	240
Fläche	A	m^2	240, 372
Flächenträgheitsmoment	I	m^4	108
Fluss (magnetisch)	Φ	Wb	236, 238, 240, 372
Flussdichte (magnetisch)	B	T	236, 242
Freiheitsgrad	f	-	110
Frequenz	ν / ω	Hz	102, 234, 238, 368, 372
Galvanometerkonstante	G	N m A^{-1}	236
Gegenstandsgröße	G	m	100, 362, 364
Gegenstandsweite	g	m	100, 362, 364
Geschwindigkeit	v	m s^{-1}	240, 242
Gitterkonstante	g	m	368
Güte	Q	-	102, 234
Hallkonstante	A_H	$\text{m}^3 \text{C}^{-1}$	240
Hauptebene	H	-	362
Höhe	h	m	106, 108
Impedanz	Z	Ω	238
Induktivität	L / M	H	234, 238
Intensität	I	kg s^{-3}	368, 370
Kapazität	C	F	234
Knicklast/-kraft	F_0	N	108
Koerzitivfeldstärke	H_K	A m^{-1}	240
Konzentration (einer Substanz)	c	mol L^{-1}	370
Kraft	F	N	108, 242
Krümmungsradius	ρ	rad	108
Ladung	q	C	234, 242
Ladungsmenge	Q	-	236
Ladungsträgerdichte	n	m^{-3}	232, 240
Länge	$l / a / b / \Lambda$	m	108, 112, 236, 240, 268, 270
Längselement	dl	m	108
Leistung	P	W	232, 238, 372
Leitfähigkeit (elektrisch)	σ	$\text{A V}^{-1} \text{m}^{-1}$	232
Lichtgeschwindigkeit	c	m s^{-1}	368, 370, 372
Linse	L	-	362
Lorentzkraft	F	N	240, 242
Magnetisierung	M	A m^{-1}	240
Masse	m	kg	104, 106, 108, 110, 242
Massendichte	ρ	kg m^{-3}	242

Mittelpunktsstrahl	M	-	362
Ordnung	m	-	368
Periodendauer	θ / T	s	110
Permeabilität	μ	H m^{-1}	240, 242
Phasenlage	δ	-	368
Phasenwinkel	φ / α		234, 238
Plancksches Wirkungsquantum	h	J s	372
Polarisationsgrad	PG	-	370
Radius	r / R	m	104, 108, 110, 242, 368
Remanenzflussdichte	B_R	T	240
Richtkonstante	D	N m rad^{-1}	108, 236
Schubmodul	S	Pa	108
Schwerpunkt	S	-	104
Schwingungsdauer	T	s	104, 108, 110
Sehweite	s_0	m	364
Sehwinkel	α		364
Skalenteile	$l/x/y$	m	232
Sondenempfindlichkeit	S_H	V	240
Spannung	U	V	232, 234, 236, 238, 240, 242, 372
Spannung (mechanisch)	σ	Pa	108
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	372
Stoffmenge	n	mol	110
Streukoeffizient	σ	m^{-1}	238
Strom	I	A	232, 234, 236, 238, 240, 242, 372
Stromempfindlichkeit	c_I	rad A^{-1}	236
Temperatur (Celsius)	ϑ	$^{\circ}\text{C}$	232
Temperatur (Kelvin)	T	K	110, 112, 232, 372
Temperaturkoeffizient	α / β	K^{-1}	232, 372
Trägheitsmoment	Θ	kg m^2	104, 108, 236
Umlaufzeit	T	s	102, 106
Vergrößerung / Verstärkung	V	-	364, 372
Vermögen (Absorption)	\mathfrak{A}	-	372
Vermögen (Emission)	\mathfrak{E}	-	372
Vermögen (Reflexion)	\mathfrak{R}	-	372
Vermögen (Transmission)	\mathfrak{T}	-	372
Viskosität	η	Pa s	242
Volumen	V	m^3	110

Wärmeausdehnungskoeffizient	α	K^{-1}	112
Wärmekapazität	C	J K^{-1}	110
Wärmekapazität (molar)	c_m	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	110
Wärmekapazität (spezifisch)	c	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	110
Wärmemenge	Q	J	110
Wellenlänge	λ	m	364, 366, 368, 370, 372
Wellenzahlvektor	k	m^{-1}	368
Wertigkeiten (Ladungsträger)	z		232
Widerstand	R	Ω	232, 234, 236, 240, 372
Widerstand (Imaginärteil)	X	Ω	238
Widerstand (spezifisch)	ρ	$\Omega \text{ m}$	232
Winkel	$\alpha / \beta / \gamma / \delta / \varphi / \Omega / \psi$		236, 366, 368, 370
Wirkungsgrad	η	-	238
Zeit	t / τ	s	102, 236, 368

C = Coulomb, F = Farad, H = Henry, Hz = Hertz, J = Joule, Pa = Pascal, T = Tesla, W = Watt, Wb = Weber