Versuch 108

Elastizitätskonstanten, Biegung und Knickung

Lernziele: Bei den meisten in der elementaren Elastizitätstheorie behandelten Fällen sind die beobachtbaren Deformationen proportional zu den Belastungen (Balkenbiegung: Auslenkung $c \propto$ Kraft F; Torsion eines Drahtes: Drehwinkel $\alpha \propto$ Drehmoment M; ideales Gas: Volumenänderung $V \propto$ Druckänderung p). Bei einem axial belasteten Stab jedoch ist die Querauslenkung $c = 0$ bis zum Erreichen der Knicklast, um dann abrupt ($\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}F} = \infty$!) anzuwachsen. Von besonderer Bedeutung ist die Knicklast in Baustatik und Maschinenbau. Hier muss bei der Konstruktion darauf geachtet werden, dass die Belastung nie die Knicklast erreicht, da die nach Überschreiten dieser Last sehr rasch wachsende Deformation leicht zum Bruch führt.

Der zweite Versuchsteil behandelt die harmonische Schwingung des ungedämpften Oszillators. Aus der Veränderung der Schwingungsdauer bei einem veränderbaren Drehschwinger sollen die Begriffe Trägheitsmoment (Θ), Richtkonstante (D), Drehmoment (M) sowie der Inhalt des Steinerschen Satzes verstanden werden. Hier wird eine weitere Materialkonstante – das Schubmodul (G), welches sich aus der Richtkonstanten (D) und den Abmessungen des Torsionsdrahtes bestimmen lässt – eingeführt.

Kenntnisse: Hookesches Gesetz; Elastizitätsmodul, Torsions- oder Schubmodul, neutrale Faser, Flächenträgheitsmoment, Biegemoment, Knicklast; Drehmoment, Trägheitsmoment, Richtkonstante, Eigenfrequenz; Schwerpunkt, Steinerscher Satz

Sicherheitshinweise: Beim Knickversuch besteht die Gefahr von Quetschungen. Beim Bewegen des Auslegers ist mit mit entsprechender Vorsicht vorzugehen.

Nicht verwendete Gewichte sind sicher auf dem Tisch zu lagern.

Verwenden Sie die Drehmomentbegrenzung der Mikrometerschraube, um Beschädigungen zu vermeiden.

Literatur: Elastizitätsphysik: Bergmann-Schäfer, Experimentalphysik I;
Schwingungen: jedes Grundkurs-Lehrbuch der Physik, insbesondere Brandt-Dahmen I, Gerthsen, Berkeley Physik-Kurs I und III, Anhang A2; Westphal, Physikalisches Praktikum; Walcher, Praktikum.

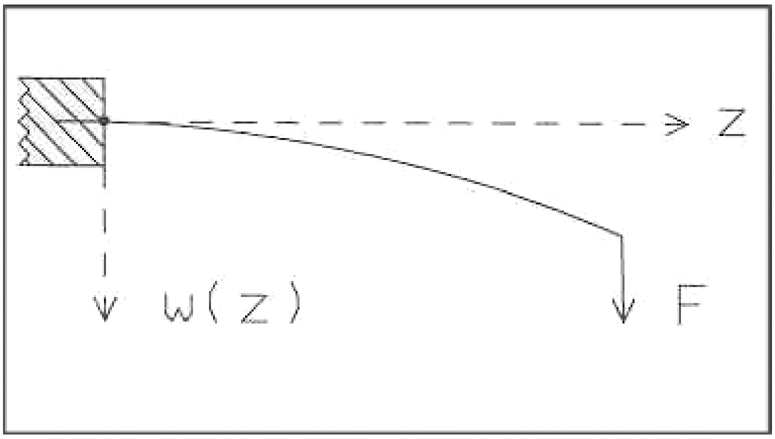

Abbildung 108.1: Einseitig eingespannter Balken mit Kraftangriff am Ende

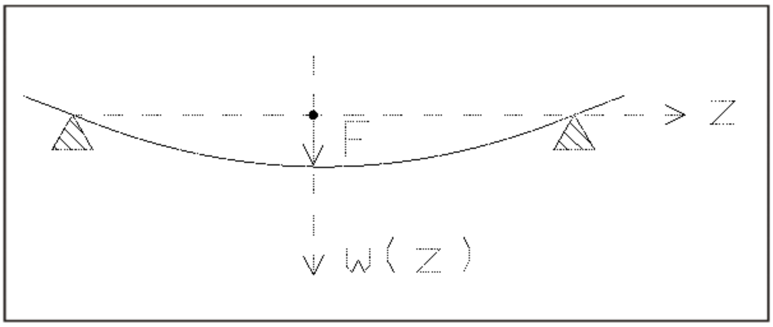

Abbildung 108.2: Biegung eines beidseitig aufgelegten Balken mit Mittellast

108.1 Biegung eines Balkens und Knickung eines Stabes

108.1.1 Einleitung

Ein einseitig eingespannter gerader Balken verbiegt sich unter Einwirkung senkrecht zur Balkenachse angreifender Kräfte (Abb. 108.1). Ein senkrecht stehender gerader Stab kann unter Belastung in Richtung der Stabachse wegknicken (Abb. 108.5).

Wir wollen im Folgenden die Deformation von Balken und Stab untersuchen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass sie aus homogenem isotropen Material bestehen und dass die Träger längs der Achse einen konstanten Querschnitt aufweisen.

Außer den oben angegebenen Fällen sind noch andere Belastungen und Einspannungen von Interesse, z.B. der beidseitig aufgelegte Balken (Abb. 108.2) oder der mehrfach belastete Balken (Abb. 108.3).

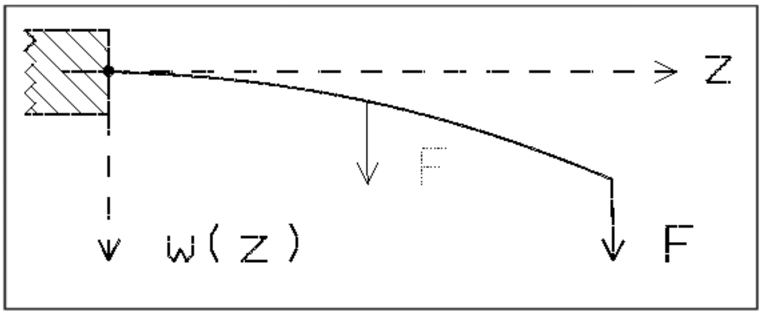

Abbildung 108.3: Einseitig eingespannter Balken mit verteilter Kraft

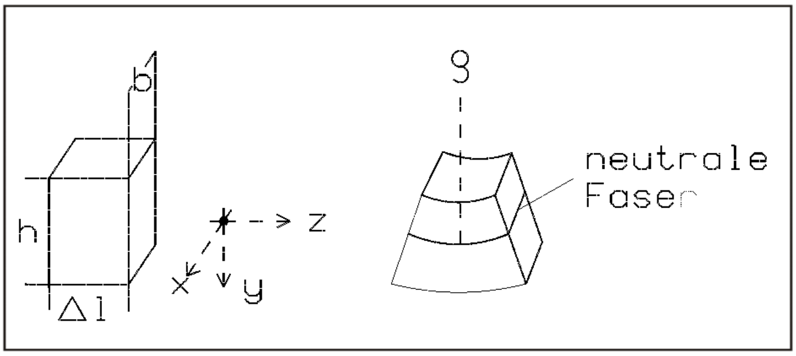

Abbildung 108.4: Biegungsgeometrie

108.1.2 Spannungen und Dehnungen

Die folgende elementare Behandlung wurde von Daniel Bernoulli (1700–1782) angegeben. Sie ist nicht frei von unbewiesenen Hypothesen, liefert aber bei geringen Verbiegungen eine brauchbare Beschreibung.

Ein Längselement $\Delta\ell$ des Balkens wird unter der Belastung so deformiert, dass der obere Teil gestaucht und der untere Teil gedehnt wird (Abb. 108.4). Durch den Schwerpunkt der Fläche geht die sogenannte „neutrale Faser“, die ihre Länge unter Belastung nicht ändert. Die neutrale Faser wird allerdings infolge der Belastung gekrümmt. Als quantitatives Maß hierfür verwendet man ihren Krümmungsradius ρ. Die Querschnittsflächen bleiben unter der Belastung eben.

Für die (dimensionslose) Dehnung ϵ eines Balkenstücks im Abstand y von der neutralen Faser gilt dann

$$\epsilon = \frac{(y + \rho) - \rho}{\rho} = \frac{y}{\rho} \,. \tag{108.1}$$

Über das Hookesche Gesetz $\sigma = E \cdot \epsilon$ (E = Elastizitätsmodul) erhält man die auf die Querschnittsflächen wirkenden Zug- bzw. Druck-Spannungen σ zu

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho} \,. \tag{108.2}$$

Für den Konstrukteur sind natürlich die an den Ober- bzw. Unterflächen auftretenden Maximalwerte von σ bedeutsam. Sie dürfen nicht die für das Material zulässigen Zerreißspannungen überschreiten.

Die vom Balken in seinen Querschnitten zu übertragenden Drehmomente M um den Durchstoßpunkt der neutralen Faser erhält man durch Integration über den Querschnitt:

$$M = \iint \sigma \cdot y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{E}{\rho} \iint y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \equiv \frac{EI}{\rho} \,. \tag{108.3}$$

Das sogenannte Flächenträgheitsmoment I ist durch $I = \iint y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ definiert. Dabei ist der Nullpunkt der y-Achse in die neutrale Faser zu legen, und die y-Richtung muss mit der Belastungsrichtung übereinstimmen. Das Integral ist für einfache Fälle (Rohr, T-Träger etc.) leicht ausführbar.

Aufgabe 108.A: *Welches Flächenträgheitsmoment hat ein rechteckiger Balken der Breite b und Höhe h?*

Aufgabe 108.B: *Welches Flächenträgheitsmoment hat ein runder Stab mit Radius r?*

108.1.3 Differentialgleichung der elastischen Linie

Unter der elastischen Linie versteht man die sich unter Belastung ausbildende Kurve $w(z)$ der neutralen Faser. Für die Krümmung $1/\rho(z)$ einer Kurve $w(z)$ gilt [$w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$, $w'' = \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}$]:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{w''(z)}{\left(1 + w'^2(z)\right)^{\frac{3}{2}}} \,. \tag{108.4}$$

Für kleine Verbiegungen ist $w'^2(z) \ll 1$; damit erhält man aus $M(z) = E \cdot I/\rho(z)$ die Differentialgleichung der elastischen Linie für einen einseitig eingespannten Stab:

$$w''(z) = \frac{M(z)}{E \cdot I} \,. \tag{108.5}$$

Um die elastische Linie zu finden, muss noch das von den Querschnittsflächen zu übertragende Moment $M(z)$ und die Randbedingung angegeben werden. Dies soll hier für den einseitig eingespannten und an seinem Ende durch F punktförmig belasteten Balken (Abb. 108.1) der Länge ℓ geschehen. Um Gleichgewicht für den an der Stelle z aufgetrennten Balken zu erhalten, muss

$$M(z) = F \cdot (\ell - z) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = \frac{F \cdot (\ell - z)}{E \cdot I} \tag{108.6}$$

gelten. Die größte Zugspannung wird am Einspannpunkt des Balkens erreicht, weshalb er bei

Überlast auch dort abbricht. Durch Integration erhält man die Funktion der elastischen Linie:

$$w(z) = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{\ell z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + a_1 \cdot z + a_2. \tag{108.7}$$

Aus den Randbedingungen $w(0) = 0$; $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}(0) = 0$; folgt $a_1 = a_2 = 0$. Für die elastische Linie gilt also in diesem Fall:

$$w(z) = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{\ell z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) . \tag{108.8}$$

Die maximale Strecke der Biegung wird am freien Balkenende erreicht, sie beträgt:

$$c = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{\ell^3}{3} . \tag{108.9}$$

Für den beidseitig aufgelegten, in der Mitte belasteten Balken (Abb. 108.2) erhält man die die Gleichung für die elastische Linie, indem man gedanklich den Balken in der Mitte teilt, F bzw. ℓ durch $F/2$ bzw. $\ell/2$ ersetzt und die Ergebnisse für den einseitig eingespannten Balken entsprechend anwendet. Die maximale Auslenkung in der Balkenmitte ergibt sich zu:

$$c = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{\ell^3}{48}. \tag{108.10}$$

108.1.4 Knicken

Belastet man einen senkrecht stehenden Stab von oben mit einer senkrecht nach unten wirkenden Kraft F, so wird er zunächst gestaucht. Bei einem schlanken Stab wird beim Überschreiten der Knicklast F_0 der Stab seitlich ausweichen (siehe Abb. 108.5). Zur Berechnung der Knicklast wollen wir annehmen, dass der Stab schon durch die Belastung ausgebogen ist, dass er oben und unten gelenkig gelagert ist und dass die Randbedingungen $w(0) = 0$; $w(\ell) = 0$ gelten. Für das Drehmoment M erhalten wir nun $M(z) = -F_0 \cdot w(z)$ und für die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{F_0}{E \cdot I} w(z) = 0 \tag{108.11}$$

Mit den Randbedingungen erhalten wir die Lösung

$$w(z) = c \cdot \sin k_0 z \,, \quad \text{mit } k_0 \cdot \ell = \pi \quad \text{und } k_0^2 = \frac{F_0}{E \cdot I} . \tag{108.12}$$

Die Knicklast F_0 beträgt demnach

$$F_0 = EI(\pi/\ell)^2. \tag{108.13}$$

Diese elementare Beschreibung gestattet nicht die vollständige Behandlung des elastisch ausknickenden Stabes, da wir die Biegungsstrecke c bei Überschreitung der Knicklast F_0 nicht angeben können. Um diese zu erhalten, müssen wir berücksichtigen, dass die Höhe h des Angreifpunktes der Kraft F bei einer endlichen Ausknickung kleiner als die Stablänge ℓ ist. (Die zusätzlich vorhandene

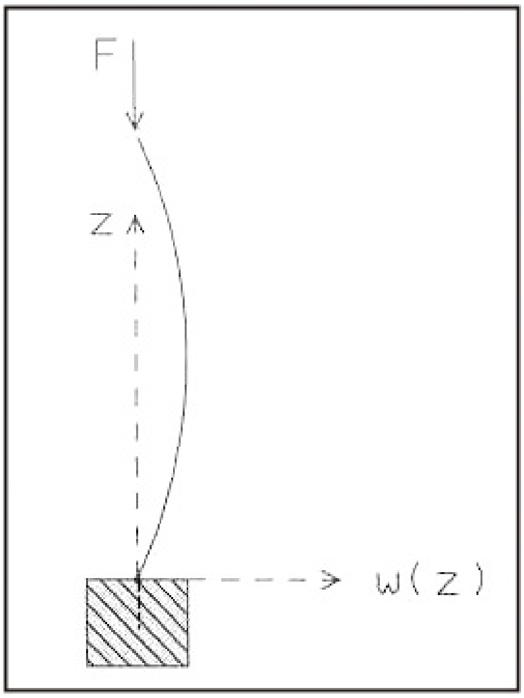

Abbildung 108.5: Knickung eines einseitig eingespannten Balken

elastische Stauchung des Stabes kann dagegen vernachlässigt werden.)

108.1.5 Zusätzliche Bemerkungen

Die genaue Messung zeigt, dass schon vor Erreichen der Knicklast Auslenkungen c messbar sind. Dies hat mehrere Gründe: Zum Einen sind Stäbe nie völlig gerade und zum Anderen können exzentrisch, d.h. nicht genau auf der Stabachse, angreifende Kräfte zu Auslenkungen vor Erreichen der Knicklast führen.

Abb. 108.6 zeigt die in der Mitte eines $\ell = 40\,\text{cm}$ langen Stabes gemessene Deformation c. Oberhalb von $F = 80\,\text{N}$ wächst c mit zunehmender Belastung sehr rasch an. Die Bestimmung der Knicklast aus der Messung von $c = c(F)$ gelingt sehr leicht mit einer vernünftigen Genauigkeit; der Fehler dieser Bestimmung von F_0 liegt deutlich unter 10%. Eine wesentlich genauere Bestimmung der Knicklast ist schwierig und nur selten sinnvoll.

Während der Stab hinreichend unterhalb der Knicklast normale Quersteife besitzt, werden in unmittelbarer Nähe der Knicklast bei einer senkrecht zur Stabachse, z.B. in der Stabmitte, angreifenden Kraft die rücktreibenden elastischen Kräfte außerordentlich klein. Dies ist auch dann richtig, wenn der unbelastete Stab nicht exakt gerade ist, bzw. die senkrecht wirkende Belastung exzentrisch angreift. Diese Tatsache kann man benutzen, um die Knicklast zu bestimmen: Die Knicklast ist dann erreicht, wenn die Empfindlichkeit der zu messenden Biegungsstrecke c gegenüber Erschütterungen am Größten ist.

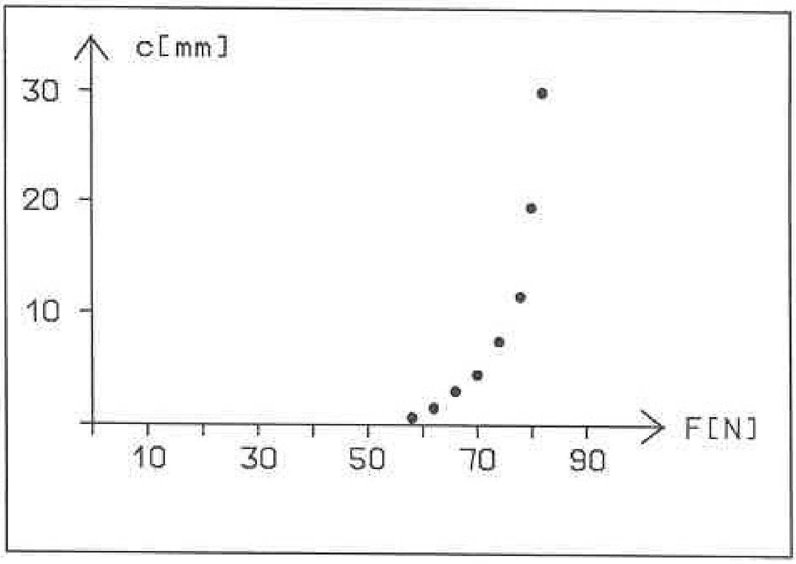

Abbildung 108.6: Messkurve Knicklast

108.1.6 Versuchsdurchführung

Für die Versuche stehen Stäbe aus Aluminium, Kupfer, Stahl und Kunststoffen (PVC und GFK) mit einer Länge von (400,0 ± 0,5) mm zur Verfügung. Messen Sie zuerst die Breite und Dicke der Stäbe mit Hilfe eines Messschiebers.

Aufgabe 108.a: *Der Aluminium-, Kupfer- und Stahlstab wird jeweils auf die* (395,0 ± 0,5) *mm auseinander liegenden Haltepunkte aufgelegt und in der Mitte belastet. Für jeden Stab wird eine Messreihe mit mindestens* 7 *verschiedenen Lasten aufgenommen. Die Biegungsstrecke wird mit Hilfe eines Messkeils* (*Steigung* 1/10) *bestimmt. Tragen Sie die Biegungsstrecke c gegen die Last F auf und passen eine Gerade an Ihre Messdaten an, aus deren Steigung Sie das Elastizitätsmodul E bestimmen.*

Aufgabe 108.b: *Die Stahl-, PVC- und GFK-Stäbe werden senkrecht stehend von oben belastet und die seitliche Auslenkung der Mitte* (*über eine Messschraube*) *als Funktion der Last ermittelt. Aus der graphischen Darstellung von c gegen F lässt sich die sogenannte Knicklast* F_0 *mit guter Genauigkeit ermitteln* (*auf einige Prozent*).

Aufgabe 108.c: *Bestimmen Sie das Elastizitätsmodul für alle verwendeten Materialien. Beim Vergleich der Messungen mit Federstahl ist hinsichtlich der Fehlerabschätzung beachtenswert, dass in beiden Fällen in den Formeln das gleiche Produkt* $E \cdot I/\ell^2$ *auftritt.*

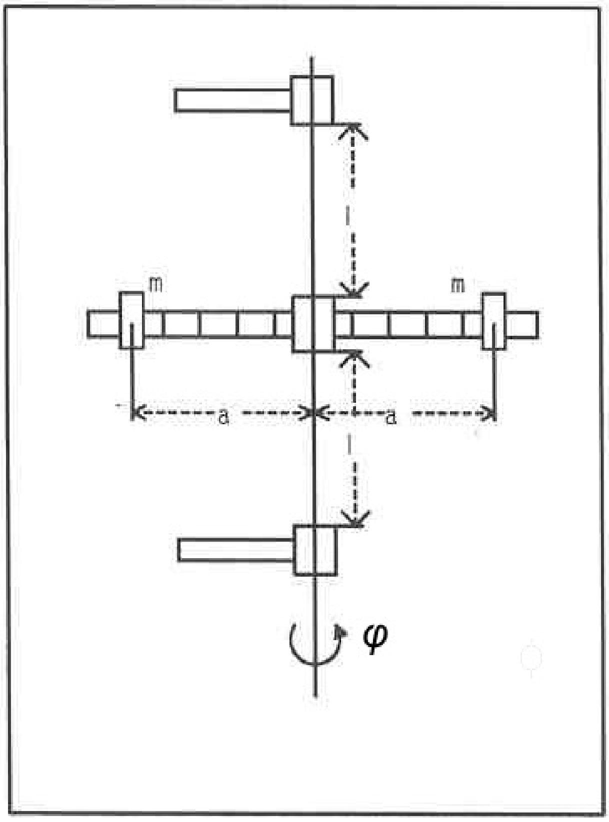

Abbildung 108.7: Torsionsschwinger

108.2 Dynamische Bestimmung eines Schermoduls mit einem Drehschwinger

108.2.1 Versuchsanordnung

Der Drehschwinger besteht aus einem zusammengesetzten, veränderbaren Körper, der auf die Mitte eines senkrecht gespannten Torsionsdrahtes geklemmt ist (siehe Abb. 108.7). Der Körper besitzt zwei kurze Stangen, an die im Abstand a von der Drehachse zwei Zusatzmassen m angebracht werden können. Das Gesamtträgheitsmoment Θ der Anordnung besteht deshalb aus dem Trägheitsmoment der Stangenanordnung Θ_{St} und dem Trägheitsmoment der Zusatzmassen. Dieses setzt sich nach dem Steinerschen Satz aus den Eigenträgheitsmomenten Θ_{Sch} der scheibenförmigen Zusatzmassen und den „Bahnträgheitsmomenten" ma^2 dieser Massen zusammen. Aus der Drehmomentgleichung: $\Theta\ddot{\varphi} + D\varphi = 0$ folgt für die Schwingungsdauer T des Drehschwingers (siehe Anhang A2):

$$T^2 = \frac{4\pi^2\Theta}{D} \tag{108.14}$$

Einsetzen von $\Theta = \Theta_{St} + 2(\Theta_{Sch} + ma^2)$ für das Trägheitsmoment ergibt:

$$T^2 = \frac{4\pi^2(\Theta_{St} + 2\Theta_{Sch})}{D} + \frac{8\pi^2 m}{D} a^2. \tag{108.15}$$

Die grafische Darstellung von T^2 als Funktion von a^2 ergibt eine Gerade. Aus deren Steigung lässt sich die Richtkonstante D und aus dem Ordinatenabschnitt das Trägheitsmoment $\Theta_{St} + 2\Theta_{Sch}$ bestimmen. Das Eigenträgheitsmoment einer Scheibe, Θ_{Sch}, mit der Masse m, dem Radius r und der Dicke d beträgt, wenn die Drehachse radial durch den Schwerpunkt geht:

$$\Theta_{Sch} = \frac{mr^2}{4} + \frac{md^2}{12}. \tag{108.16}$$

Aus der Richtkonstante D lässt sich das Schubmodul G des Drahtes bestimmen.

$$D = 2\left(\frac{\pi}{2}\frac{r^4}{\ell}G\right), \tag{108.17}$$

wobei r der Radius und ℓ die freie Länge eines Aufhängedrahtes sind. Der Faktor 2 in diesem Ausdruck rührt davon her, dass gleichlange obere und untere Aufhängedrähte in gleicher Stärke zur Richtkonstanten beitragen.

Frage: Wie ändert sich Gleichung 108.17, wenn die Drähte verschieden lang sind?

108.2.2 Versuchsdurchführung

Aufgabe 108.d: *Messung des Trägheitsmoments Θ_{St}:*

1. *Stellen Sie die freie Länge des Torsionsdrahtes oben und unten auf den gleichen Wert (z.B. 25 cm) ein. Die Dreharme müssen horizontal stehen.*
2. *Bestimmen Sie für jeden der 4 Werte von a (25 mm, 50 mm, 75 mm und 100 mm) die Schwingungsdauer. Für jeden Abstand werden 5 Messungen durchgeführt, wobei jeweils über unterschiedlich viele (3 – 10) Perioden gestoppt wird. Die Schwingungsamplitude soll etwa eine viertel Umdrehung betragen. Die Zusatzmassen haben 100 g Masse, 15 mm Radius und 16 mm Dicke.*
3. *Führen Sie zum Schluss 10 Messungen ohne Zusatzmassen durch, wobei Sie zwischen 5 – 15 Perioden stoppen. Diese Messungen entsprechen – mit einem geringen Fehler – einer Messung mit $a = 0$, welche aus technischen Gründen nicht möglich ist.*
4. *Tragen Sie T^2 gegen a^2 auf und bestimmen Sie aus dem Geradenfit die Richtkonstante D und das Trägheitsmoment der Stangenanordnung Θ_{St}.*

Aufgabe 108.e: *Berechnen Sie aus der Richtkonstante D das Schubmodul G des Torsionsdrahtes. Dafür benötigen Sie den Durchmesser des Stahldrahtes, den Sie mit Hilfe einer Bügelmessschraube bestimmen.*