

16.03.2022

## 362 - Linsen und Linsensysteme

1.) Einleitung: Im Versuch 362 lernen wir den Umgang mit Linsen und Linsensystemen. In bestimmen wir im ersten Versuchsteil die Brennweiten und Hauptebenen eines Linsensystems, bevor wir im zweiten Versuchsteil einen Projektionsapparat aufbauen und die Bildfeldausleuchtung sowie verschiedene Linsenfehler untersuchen.

2.) Voraufgaben: 362.A

Die beiden blauen und die beiden grünen Dreiecke sind jeweils kongruent zueinander.

Damit gilt:

$$\frac{f}{B} = \frac{g-f}{G} \quad \text{und} \quad \frac{f}{G} = \frac{b-f}{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{G} = \frac{f}{g-f} \quad \quad \quad \Leftrightarrow \frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}$$

Gleichsetzen ergibt:  $f^2 = (g-f)(b-f)$

$$\Leftrightarrow f^2 = gb - fb - fg + f^2$$

$$\Leftrightarrow f(b+g) = gb \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b+g}{gb} = \frac{1}{f} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \checkmark$$

362.B Es müsste die Linsenschleierformel zur Brennweitenbestimmung in den jeweiligen Medien herangezogen werden:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n}{n} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

wo was gilt f die Brennweite? sind die gleich?

Dabei ist  $n_L$  der Brechungsindex der Linse,  $n$  der Brechungsindex des bild-/gegenständigen Mediums und  $r_1$  und  $r_2$  die beiden Krümmungsradien der Linse.  $\checkmark$

362.C  $y = \frac{B}{G}$ ,  $y > 1$ : vergrößertes Bild  $\Leftrightarrow f < g < 2f$  (reell) und  $g < f$  (virtuell)  
 $y < 1$ : verkleinertes Bild  $\Leftrightarrow g > 2f \quad \checkmark$

362.D sphärische Aberration: andere Brennweiten für achsennahe und achsenferne Strahlen  
 chromatische Aberration: wegen Dispersion ist Brechungsindex von Wellenlänge abhängig  
 also Bildweite und Vergrößerung farbabhängig aber genauer

362. E bikonvexe, sphärische Linse, symmetrisch:  $r_1 = -r_2$

$$n = 1,5, \quad f = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Linsenscheitelformel: } \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (n-1) \frac{2}{r_1}$$

$$\Leftrightarrow r_1 = -r_2 = 2f(n-1) = 10 \text{ cm} \cdot 0,5 = \underline{\underline{5 \text{ cm}}} \quad \checkmark$$

362. G  $f = 5 \text{ cm}, \quad b = 5 \text{ m}, \quad g-f = ?$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{1}{b} = \frac{g-f}{gf} \quad (\Rightarrow) \quad g-f = \frac{f^2}{b-f} = \frac{25 \text{ cm}^2}{495 \text{ cm}} = \frac{5}{99} \text{ cm} \approx 0,5 \text{ mm} \quad \checkmark$$

F ~~fehlt~~

$\alpha$  ~~fehlt~~

für 362. F siehe 362. b

### 3.) Messwerte

362. f Hintergrundmessung  $E_v = (0,5 \pm 0,05) \text{ lx}$

$$\Delta E_v = 0,05$$

					f Einheiten?	
	10,49	10,81	10,18	10,32		616 J 29 T
	11,36	9,58	9,32	10,77		
-	12,04	10,48	+	10,95	11,47	-
	13,06	12,93	11,91	11,79		
	12,85	12,76	12,14	12,96		

362. c

	39,24	29,63	26,48	28,04		
	35,48	29,78	27,75	31,81		
-	35,51	34,19	+	31,22	33,14	-
	35,83	30,54	30,76	31,72		
	45,10	35,58	34,55	40,00		

$$\underline{362. g} \quad y = \frac{(40 \pm 0,5) \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = \frac{B}{G}, \quad \text{für gewölbte Seite zur Wand} \quad b = (209 \pm 1) \text{ cm}$$


$$\text{für plane Seite zur Wand: } b = (206 \pm 1) \text{ cm}$$

mit planer Seite zur Wand deutlich bessere Bildqualität, bei gewölbter Seite zur Wand: Verzeichnung und Bildfeldwölbung deutlich erkennbar (am Rand unscharf und verzerrt)

Bildfeldausleuchtung für plane Seite zur Wand:

	Einheit?					
	8,35	8,24	8,77	9,51		
	9,45	7,58	7,29	7,96		
-	8,99	8,09	+	9,91	9,91	-
	9,67	9,67	9,48	9,66		
	10,85	8,71	9,68	11,08		

362. h Bildfeldwölbung: Bild immer nur in Kreisingen scharf

Verzeichnung: 

chromatische Abberation: bei Testdia 1 erscheinen nie alle Farbverläufe gleichzeitig scharf

sphärische Abberation: Ränder unscharf, weil achsenferne Strahlen anders gebrochen werden

362. a  $f_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $f_2 = -5 \text{ cm}$ , Abstand  $d = 5 \text{ cm}$

$$G = (2,2 \pm 0,1) \text{ cm}$$

Position des Gegenstands:  $(18,0 \pm 0,1) \text{ cm}$

$$\Delta(\text{Position Reiter}) = 0,2 \text{ cm}, \quad \Delta(\text{Position Schirm}) = 0,2 \text{ cm}$$

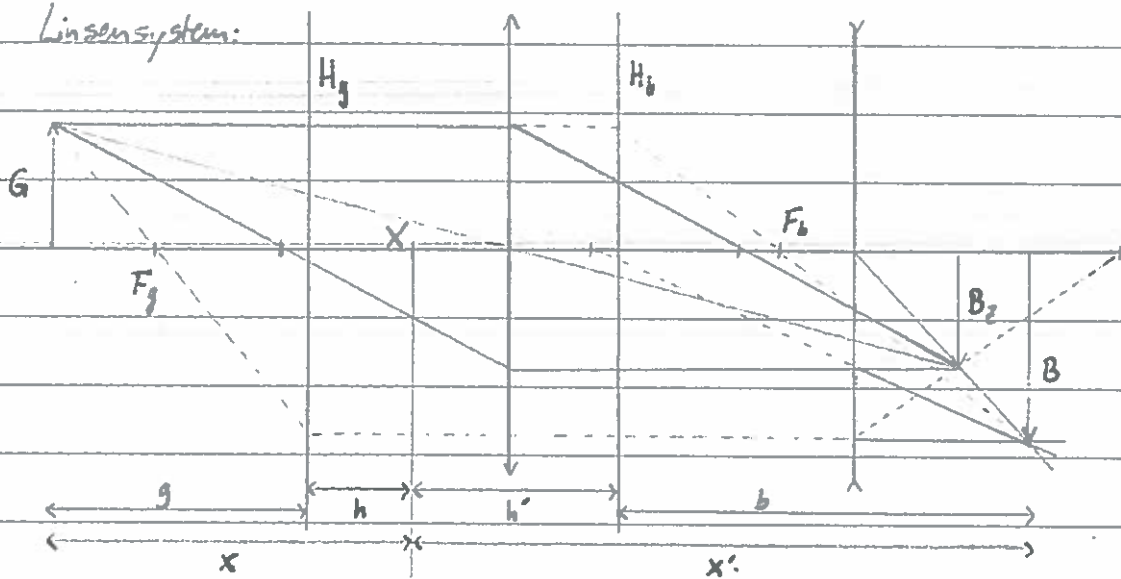
[cm]									
Position Reiter	34,0	36,0	32,5	33,0	38,9	32,4	32,9	32,8	33,6
Position Schirm	47,5	44,4	72,0	56,6	45,7	71,1	63,8	60,1	52,0
Bildgröße B	4,5	2,4	15,3	8,7	1,7	15,0	11,3	10,2	6,3

$$\Delta B = 0,2 \text{ cm}$$

32,7	35,0	37,1
67,0	44,7	45,6

4.) Theorie: Für das Zeichnen von Strahlengängen an Linsen oder Linsensystemen benutzt man Hauptebenen. Dabei handelt es sich um gedankliche Ebenen, an denen spezielle Strahlen auf definierte Art und Weise gebrochen werden: Der Parallelstrahl wird an der bildseitigen Hauptebene zum Brennpunkt hin gebrochen, der Brennpunktstrahl wird an der gegenstandsseitigen Hauptebene so gebrochen, dass er danach parallel verläuft, und der Mittelpunktstrahl erfährt keine Richtungsänderung. Zwischen den beiden Hauptebenen verlaufen die Strahlen parallel zur optischen Achse. Im Fall von dünnen Linsen liegen die beiden Hauptebenen so dicht zusammen, dass näherungsweise nur noch eine brechende Ebene existiert.

Eine Möglichkeit, die Hauptebenen eines Linsensystems experimentell zu bestimmen, bietet das Abbe-Verfahren. Betrachte dazu beispielhaft das folgende Linsensystem:



Hier sind  $H_g$  und  $H_b$  die beiden Hauptebenen und  $X$  ist ein beliebiger, aber fester Bezugspunkt mit den Abständen  $h$  bzw.  $h'$  zu den Hauptebenen. Im Versuch verschiebt man das Linsensystem und den Schirm immer so, dass ein scharfes Bild entsteht und misst dann die Abstände  $x$  und  $x'$  sowie den Abbildungsmaßstab  $y = \frac{B}{G}$ . Weil die Gaußsche Abbildungsgleichung auch für die Bildkonstruktion an zwei Hauptebenen gilt, findet man für Bild- und Gegenstandsweite:

mit  $y = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{g} + \frac{1}{yg} = \frac{y+1}{yg} \quad (\Rightarrow) \quad g = \frac{f(y+1)}{y} = f\left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{y}{f} + \frac{1}{b} = \frac{y+1}{b} \quad (\Rightarrow) \quad b = f(y+1)$$

du brauchst hier keine Herleitungen das reicht

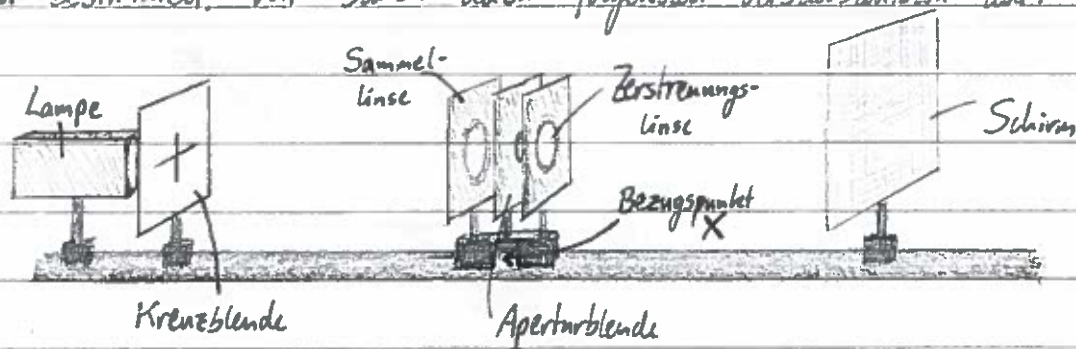
Aus unserer Skizze lesen wir ab:  $x = g + h$  und  $x' = b + h'$ . Daraus folgt:

$$x = f\left(1 + \frac{1}{y}\right) + h \quad \text{und} \quad x' = f \cdot (1 + y) + h'$$

Wenn wir also den Abstand „Gegenstand-Bezugspunkt“ als Funktion von  $(1 + \frac{1}{y}) = (1 + \frac{B}{G})$  und den Abstand „Bezugspunkt-Schirm“ als Funktion von  $(1 + y) = (1 + \frac{G}{B})$  darstellen, so erwarten wir jeweils Geraden, aus deren Steigung wir die Systembrennweite und aus dessen Achsenabschnitt wir die Hauptebenenpositionen ermitteln können. Das, was in der Theorie steht, ist ausgesprochen ausführlich. Erwähnenswert sind aber auch die Näherungen für die Abbildungsgleichungen und die Bildfehler.

### 5.) Durchführung und Auswertung:

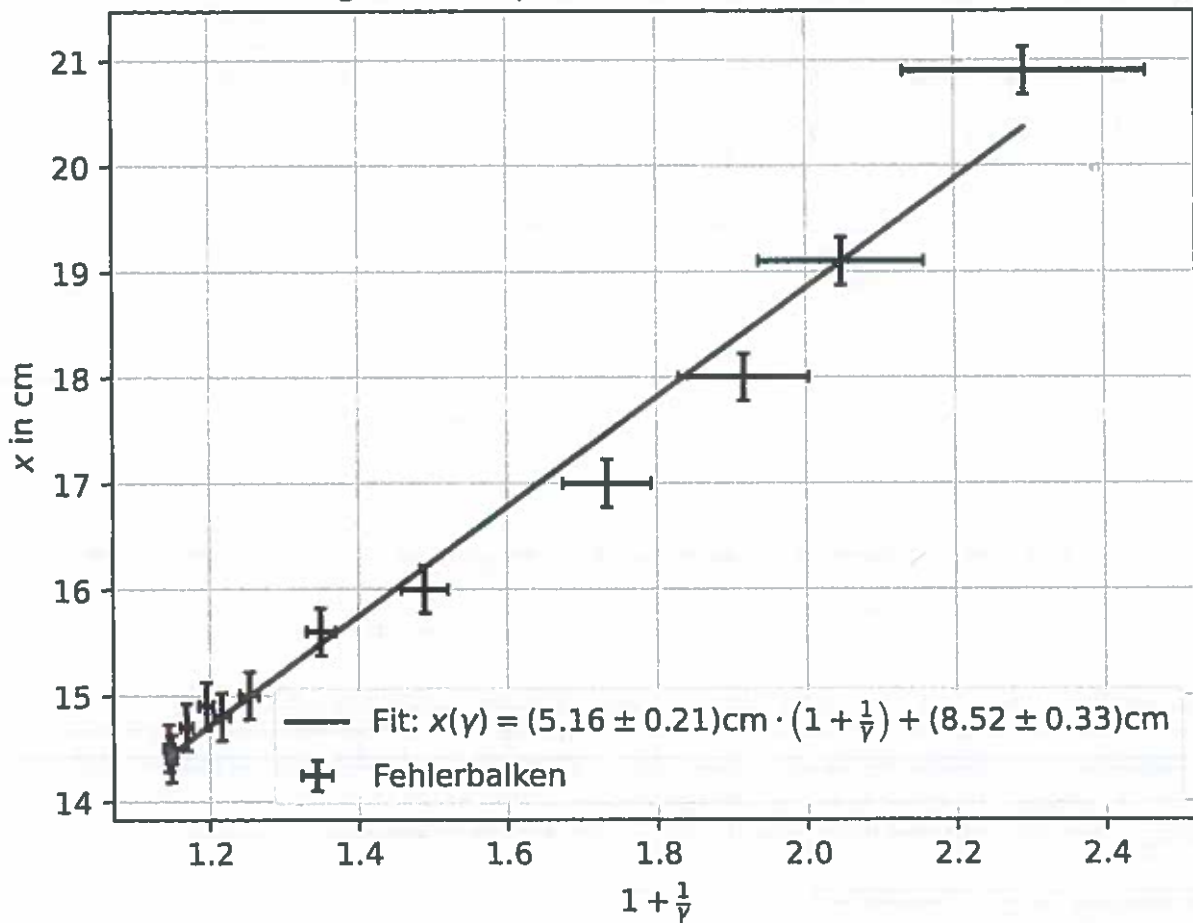
362.a Im ersten Versuchsteil wollen wir das gerade theoretisch beschriebene Abbe-Verfahren nutzen, um die Hauptebenen eines Linsensystems bestehend aus einer Sammellinse der Brennweite  $f_1 = 5 \text{ cm}$  und einer Zerstreuungslinse der Brennweite  $f_2 = -5 \text{ cm}$  zu bestimmen. Wir bauen dazu folgenden Versuchsaufbau auf:



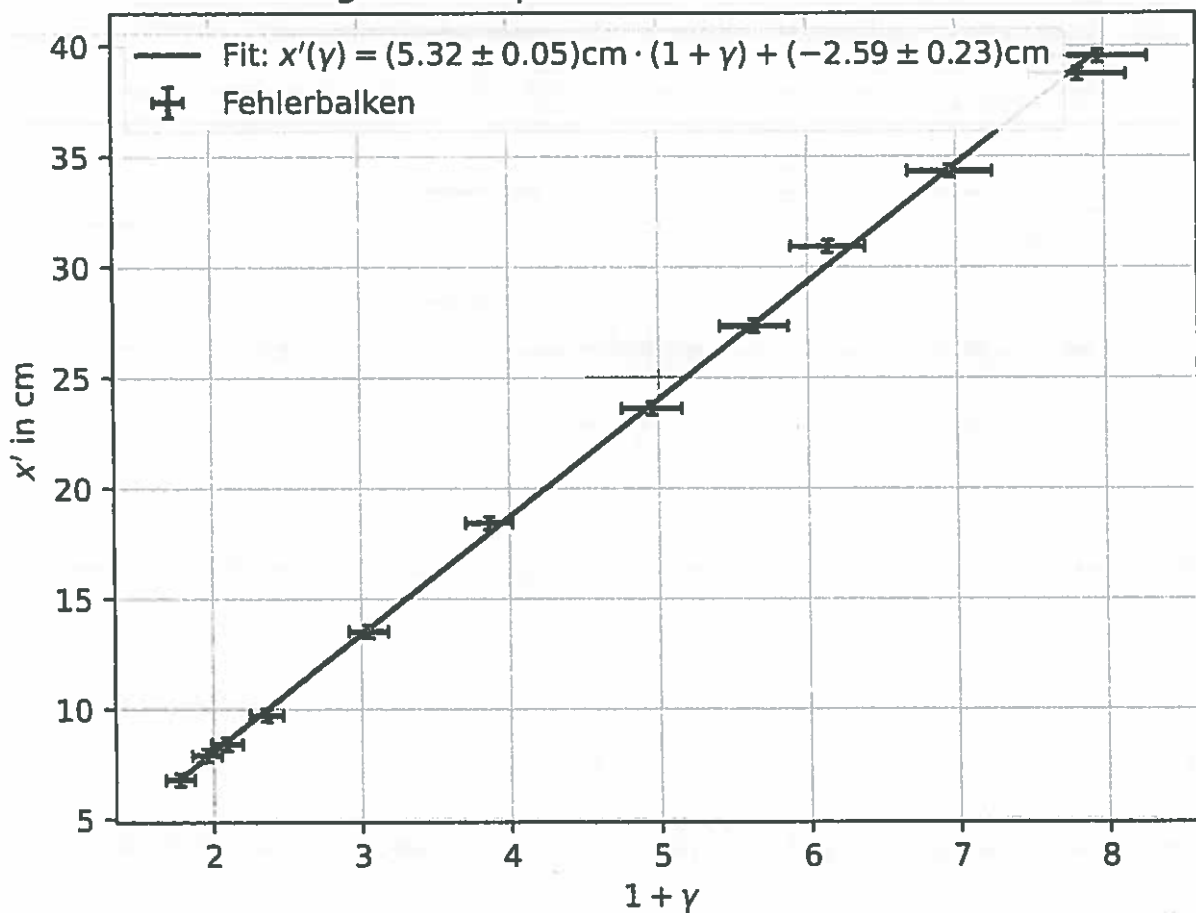
Als Gegenstand benutzen wir eine Kreuzblende, die wir mit einer Lampe ausleuchten. Die Aperturblende zwischen den beiden Linsen dient der Verkleinerung von Bildfehlern. Als Bezugspunkt X wählen wir die Markierung in der Mitte des Optikreiters, an dem das Linsensystem montiert ist. Nun gehen wir wie im Theorie-Teil beschrieben vor und messen  $x$  und  $x'$  sowie  $y$ . Es ergeben sich folgende Werte und Graphen:



### Bestimmung der Hauptebenen nach dem Abbe-Verfahren



### Bestimmung der Hauptebenen nach dem Abbe-Verfahren



x [cm]	$\Delta x$ [cm]	x' [cm]	$\Delta x'$ [cm]	y	$\Delta y$
16.0	0.2	13.5	0.3	2.05	0.13
18.0	0.2	8.4	0.3	1.09	0.10
14.5	0.2	39.5	0.3	6.95	0.33
15.0	0.2	23.6	0.3	3.95	0.20
20.9	0.2	6.8	0.3	0.77	0.10
14.4	0.2	38.7	0.3	6.82	0.32
14.9	0.2	30.9	0.3	5.14	0.25
14.8	0.2	27.3	0.3	4.64	0.23
15.6	0.2	18.4	0.3	2.86	0.16
14.7	0.2	34.3	0.3	5.95	0.29
17.0	0.2	9.7	0.3	1.36	0.11
19.1	0.2	7.9	0.3	0.95	0.10

Wir stellen fest, dass der zweite Geradenfit sich besser an die Daten anfügt, während der erste nicht alle Punkte innerhalb ihrer Fehlerbalken trifft. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass die Bestimmung der Bildgröße auf dem Schirm fehleranfällig war und dieser Fehler beim ersten Plot eine größere Rolle spielt, weil dort durch  $B$  dividiert wird ( $1 + \frac{1}{f} = 1 + \frac{G}{B}$ ), während  $B$  beim zweiten Plot im Zähler steht, etc.

Dennoch sind die Geradenfits insofern miteinander vereinbar, als dass sie innerhalb des Fehlerbereichs dieselben Steigungen aufweisen, wie wir es auch theoretisch erwartet haben. Für die Berechnung der Systembrennweite  $f$  berechnen wir den Mittelwert und erhalten

$$\underline{f_{\text{ges}} = (5,24 \pm 0,11) \text{ cm ok}}$$

362c Als theoretisch berechneter Wert müsste die Gesamtbrennweite lauten:

$$\frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (\Leftrightarrow) \quad f_{\text{ges}} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

$$\text{mit } f_1 = -f_2 = d = 5 \text{ cm} : \quad f_{\text{ges}} = \frac{-25 \text{ cm}^2}{-5 \text{ cm}} = \underline{5 \text{ cm}}$$

Wir liegen mit unserem Wert also in der richtigen Größenordnung, wenn auch knapp außerhalb des Fehlerbereichs. ok



# Formlicht

**Beleuchtungsanlagen GmbH**

## THE DIFFERENT LIGHT

Für Ihre individuellen Wünsche das beste Licht. Eigene Entwicklungen und Patente sind Beweis für unsere innovative Technik.

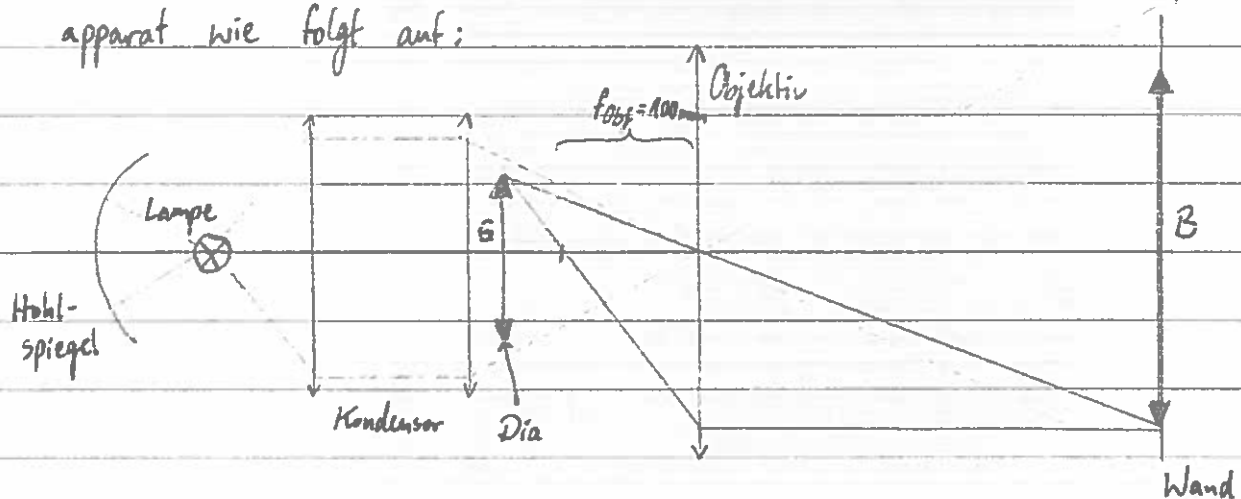




du sagst nicht, wie du die aus dem Graphen bekommst, ruhig auf Theorie verweisen

Beim Einzeichnen der experimentell gefundenen Hauptebenen in Aufgabe 362.F fällt uns auf, dass die bildseitigen Hauptebenen fast genau übereinstimmen (bis auf 1 mm). Die experimentell bestimmte gegenstandsseitige Hauptebene ist hingegen etwa 1 cm zu weit links gelandet. Der Hauptgrund dafür liegt sicherlich darin, dass es im Versuch nicht möglich war, genau die Schirm-Position zu finden, in der das Bild exakt scharf erschien. Gerade bei größeren Abständen lag die Spanne, in der das Bild scharf war, bei mehreren Zentimetern. Durch eine noch größere Anzahl an Messwerten könnte diese Ungenauigkeit weiter verringert werden.

362.d Wir bauen nun aus drei Sammellinsen, einem Diahalter und einer Lampe ein Projektionsapparat wie folgt auf:



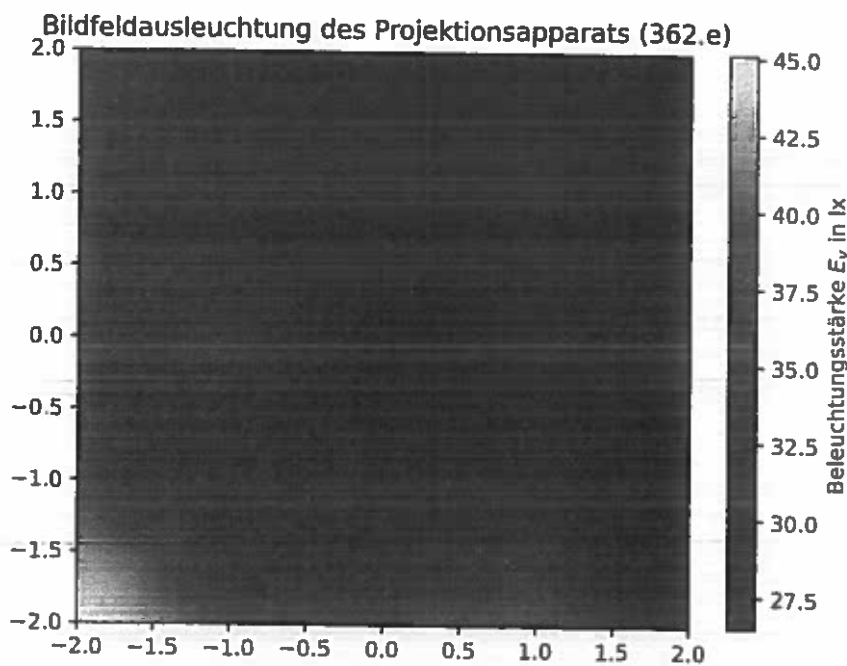
Der Kondensor muss einen möglichst großen Teil des Lampenlichts auf den Gegenstand (in unserem Fall das Dia) bündeln, damit das Bild an der Wand trotz der Vergrößerung hell genug erscheint. Daher verwendet man stark brechende Sammellinsen kurzer Brennweite für den Kondensor. Das Objektiv sollte sich möglichst im Brennpunkt der zweiten Kondensorlinse befinden, damit das Lampenlicht hier nicht nochmal gebrochen wird. Der Diahalter wird so platziert, dass ein scharfes Bild an der Wand entsteht.

362.e Wir wollen nun mit einem Luxmeter die Bildfeldausleuchtung an der Wand messen.

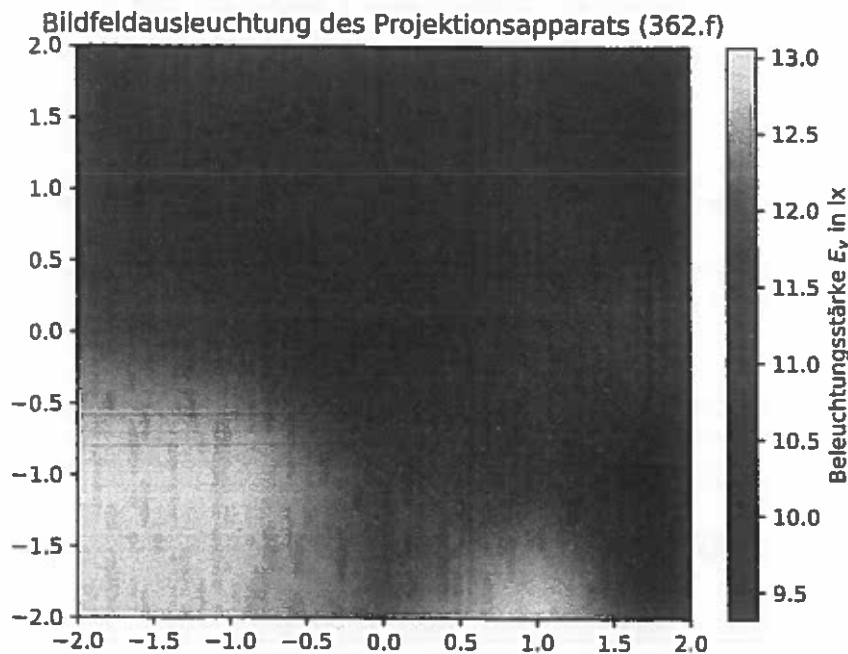
362.f Dazu legen wir das Testdia 2 in den Diahalter ein und messen die Beleuchtungsstärke  $E_v$  in 20 Kästchen des Bildes (siehe Messwerte). Weil der Raum nämlich völlig dunkel war und es Streulicht durch die anderen Versuchsaufbauten gab, füh-

wir zunächst eine Untergrundmessung durch, um die wir unsere Werte nachher bereinigen.

Zunächst messen wir die Bildfeldausleuchtung für den Fall, dass <sup>sich</sup> die konvexen Linsenflächen des Kondensors im Innern gegenüberstehen. Für 362.f drehen wir beide Linsen um  $180^\circ$  und messen erneut. Die folgenden Diagramme zeigen das Ergebnis:



Farbig in  
original

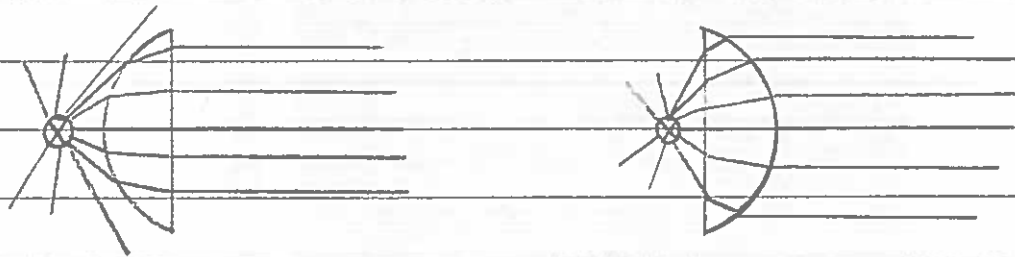


Werte fehlen leider

Die Interpolation sieht  
schön aus, „richtiger“  
wäre aber ein Plot mit  
20 Kästchen mit scharfen  
Rändern

Wenn sagst du nichts zum  
Helligkeitsmaximum, das liegt  
nicht mittig

Es fällt auf, dass die Beleuchtungsstärke im ersten Fall deutlich größer ist, ungefähr um den Faktor 3. Das liegt daran, dass die konvexe Seite der ersten Kondensorlinse weniger Licht auffangen kann als die plane und so viel Licht verloren geht:



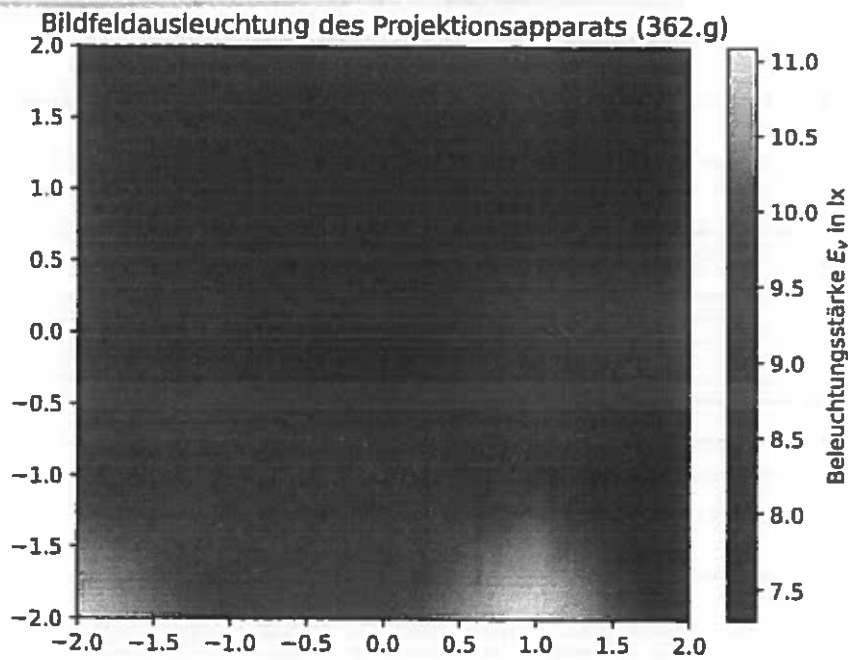
Ein weiterer Grund für die großen Unterschiede liegt wahrscheinlich auch darin, dass die Brennpunkte des Systems durch das Drehen der <sup>Kondensor-</sup> Linse verschoben haben und so das Objektiv nicht mehr im Brennpunkt der zweiten Kondensorlinse lag. Dadurch wird das Licht, das auf die Wand fällt, womöglich noch gestreut.

362.9 Wir tauschen jetzt anstelle der Objektivlinse der Brennweite  $f = 100 \text{ mm}$  eine dicke Kondensorlinse ein ( $f = 53 \text{ mm}$ ). Mit dem Testdia 1 messen wir die Vergrößerung. Die auf dem Dia abgebildete Länge von  $1 \text{ cm}$  beträgt an der Wand etwa  $40 \text{ cm}$ . Der Abbildungsmaßstab ist also

$$\gamma = \frac{(40 \pm 0,5) \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 40 \pm 0,5.$$

plausibel?

Das gesamte Bild erscheint also etwa doppelt so breit <sup>und so lang</sup> wie zuvor. Außerdem erken wir große Unterschiede abhängig davon, wie rum wir die Linse einsetzen: Bei der planen Seite zur Wand erhalten wir ein Bild, das vergleichbar zu dem mit der Objektivlinse erzeugtem ist und nur am Rand etwas unschärfer ist. Mit der gewölbten Seite zur Wand hingegen erscheint der Rand plötzlich völlig unscharf und verzerrt. Die erneute Messung der Bildfeldausleuchtung liefert folgendes Ergebnis:



Man erkennt, dass die Werte ungefähr einem Viertel der in Aufgabe 362.e gemessenen Werte entsprechen. Dies ist insofern sinnvoll, als dass das Bild mit der Kondensorlinse, die in etwa die halbe Brennweite der Objektlinse hat, auch doppelt so breit und so hoch, also insgesamt vier Mal so groß erscheint. <sup>dementsprechend weniger Licht pro Fläche</sup>

Insgesamt (auch bei 362.e und 362.f) fällt auf, dass das Bild am unteren Ende etwas heller ist als am oberen. Das muss daran liegen, dass die optische Achse des Projektionsapparats schräg nach oben gezeigt hat, während die Wand nicht verkippt war.

362.h Wir wollen nun die Abbildungsfelder unseres Projektors noch genauer untersuchen und legen dazu nach und nach die verschiedenen Testdias ein. Bei nahezu allen Dias können wir die Bildfeldwölbung beobachten: Das heißt, wir können das Bild nur in Kreisringen scharf stellen und wenn wir das Objektiv so verschieben, dass der Mitte scharf ist, dann erscheint der Rand unscharf und andersrum. Wollte man alles gleichzeitig scharf sehen, so müsste man einen gewölbten Schirm aufbauen.

Außerdem war auch an allen Dias die Verzeichnung zu beobachten, das

Bild sah also in etwa so aus:



Bei Betrachtung von Testdia 1 konnte man auch gut die chromatische Aberration beobachten. Die Farbstreifen unten in der Mitte waren etwas verschwommen und statt klarer Übergänge an den Kanten konnte man eher einen Farbverlauf beobachten. Der Grund dafür liegt in der Dispersion, d.h. verschiedene Wellenlängen werden unterschiedlich stark gebrochen.

Auch achsenferne Strahlen werden anders gebrochen, was man als sphärische Aberration bezeichnet. Dies konnte gut in Testdia 3 und 4 beobachtet werden, weil hier der Rand unscharf erschien. Was ist mit der Irisblende?

6.) Fazit: Im Versuch 362 haben wir den Umgang mit Linsen und Linsensystemen gelernt. Wir haben die Hauptebenen eines Linsensystems bestehend aus Sammel- und Zerstreuungslinse nach dem Abbe-Verfahren bestimmt und mit unserer theoretischen Bildkonstruktion verglichen. <sup>Ergebnis?</sup> Im zweiten Versuchsteil wurde ein Projektionsapparat aufgebaut. Wir haben gesehen, dass man einen Kondensor so aufbauen sollte, dass die beiden konvexen Linsenseiten nach innen zeigen, um eine möglichst große Bildhelligkeit zu erreichen. Schließlich haben wir noch die verschiedenen Fehler kennengelernt, die bei der Abbildung mit Linsen auftauchen.

Unser Protokoll leider fehlen die Daten, die den Plots zur Bildfeldausleuchtung zugrunde liegen. ~~Bitte nachprüfen~~. Bitte nächstes Mal dran denken

Bestanden 18.03.22 ~~XXXXXXXXXX~~

卷五