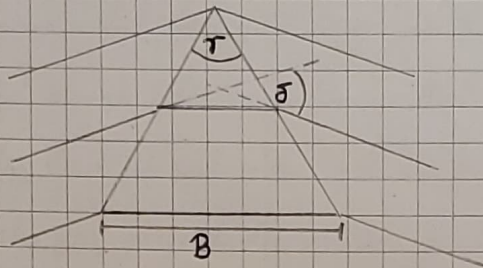


# Versuch 366

## Prismen-Spektrolapparat

Dieser Versuch beschäftigt sich mit der Aufspaltung von Licht, in diesem Fall das Spektrum einer Hg/Cd-Lampe, unter Ausnutzung von Dispersion an einem Prisma:



Bei der Durchführung ist darauf zu achten, dass für die grüne Hg-Linie das Minimum der Ablenkung eingestellt wird. In diesem Fall gilt für den betrachteten Bereich näherungsweise:

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}}$$

Der Ablenkwinkel  $\delta$  wird gemessen und der Winkel  $\tau$  der brechenden Kante wird über  $\tau = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$  bestimmt, wobei  $\alpha_i$  die Winkel der Reflexionsbilder sind, wenn das Licht auf die brechende Kante gerichtet wird.

Mithilfe einer weiteren Formel für  $n$  ( $n = k_0 + \frac{k_1}{\lambda^2} + \dots$ , Cauchy-Formel), den bekannten Wellenlängen der Hg/Cd-Lampe und den entsprechend gemessenen Winkeln lässt sich eine Kalibrationskurve erstellen, mithilfe der man dann die entsprechenden Wellenlängen von beliebigen Ablenkwinkel zuordnen kann.

Auf diese Weise lässt sich, allein über die Messung des Ablenkwinkel eines unbekannten Spektrums, die Wellenlängen und somit das unbekannte Element bestimmen.

Zuletzt werden noch Auflösungsvermögen und Dispersion  $\frac{dn}{d\lambda}$  behandelt.

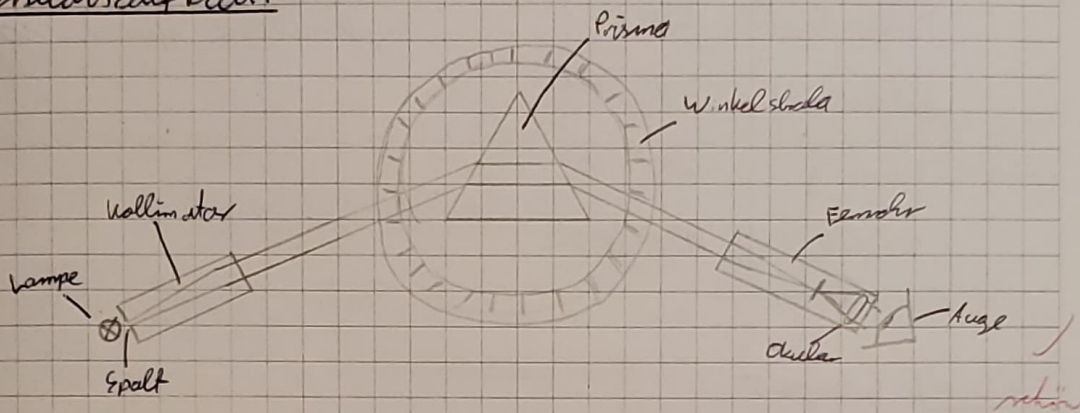
Das Auflösungsvermögen hängt von der Basisbreite  $B$  des ausgerichteten Teils des Prismas und der Dispersion  $\frac{dn}{d\lambda}$  ab:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \cdot B$$

wobei für  $n$  wieder eben erwähnte Formel verwendet werden

kann:  $n(\lambda) = n_0 + \frac{A_1}{\lambda^2} + \dots$  ✓

### Versuchsaufbau:





# Messung

366. b)

$$\alpha_1 = 123^\circ 40' \pm 10'$$

$$\alpha_2 = 243^\circ 33' \pm 10'$$

366. c) Farbe

$\delta$

Minimum der  
Ablenkung  $\rightarrow$

rot	$46^\circ 40'$
orange	$47^\circ 03'$
grün	$47^\circ 26'$
türkis	$47^\circ 54'$
hellblau 1	$48^\circ 21'$
blau 2	$48^\circ 35'$
(dunkel) blau 3	$49^\circ 15'$
violett	$50^\circ 03'$

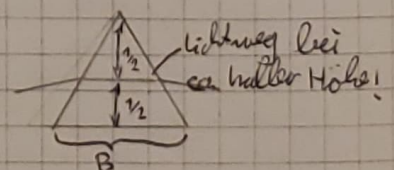
Fehler auf jegliche  
gemessene Winkel:  $10'$

366. d) Lampe 5

Farbe	Intensität	$\delta$
rot	stark	$46^\circ 40'$
orange	/	/
grün	/	/
türkis	stark	$47^\circ 55'$
blau 1	stark	$48^\circ 20'$
blau 2	mittel	$48^\circ 34'$
blau 3	schwach	$49^\circ 02'$
violett	/	/

$$\text{Basenbreite } B = (3,3 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$\text{Nullposition} = 358^\circ 50'$$



# Auswertung

366.b)

Es wird der brechende Winkel  $\gamma$  bestimmt (vom Prisma):

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \quad \Delta\gamma = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\Delta\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta\alpha_2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = (59,34 \pm 0,11)^\circ$$

366.c)

In 366.d soll anhand des Ablenkwinkel eines unbekannten Elements die Wellenlängen und somit das Element bestimmt werden.

Zunächst wird dafür eine Validationskurve angefertigt mithilfe des Spektrums einer Hg/Cd-Spektallampe.

$$\text{Es gilt } n(\lambda) = k_0 + \frac{k_1}{\lambda} + \dots \text{ sowie } n = \frac{\sin \frac{\delta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}. \text{ Es folgt:}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_1}{\frac{\sin(\frac{\delta + \gamma}{2})}{\sin(\gamma/2)} - k_0}}$$

Diese Funktion (Wellenlänge gegen Ablenkwinkel  $\delta$ ) wurde aufgetragen und gefittet. Neben gemessenen Ablenkwinkeln wird dafür noch das bekannte Spektrum der Hg/Cd-Lampe benötigt:

Tabelle 1: Kalibration

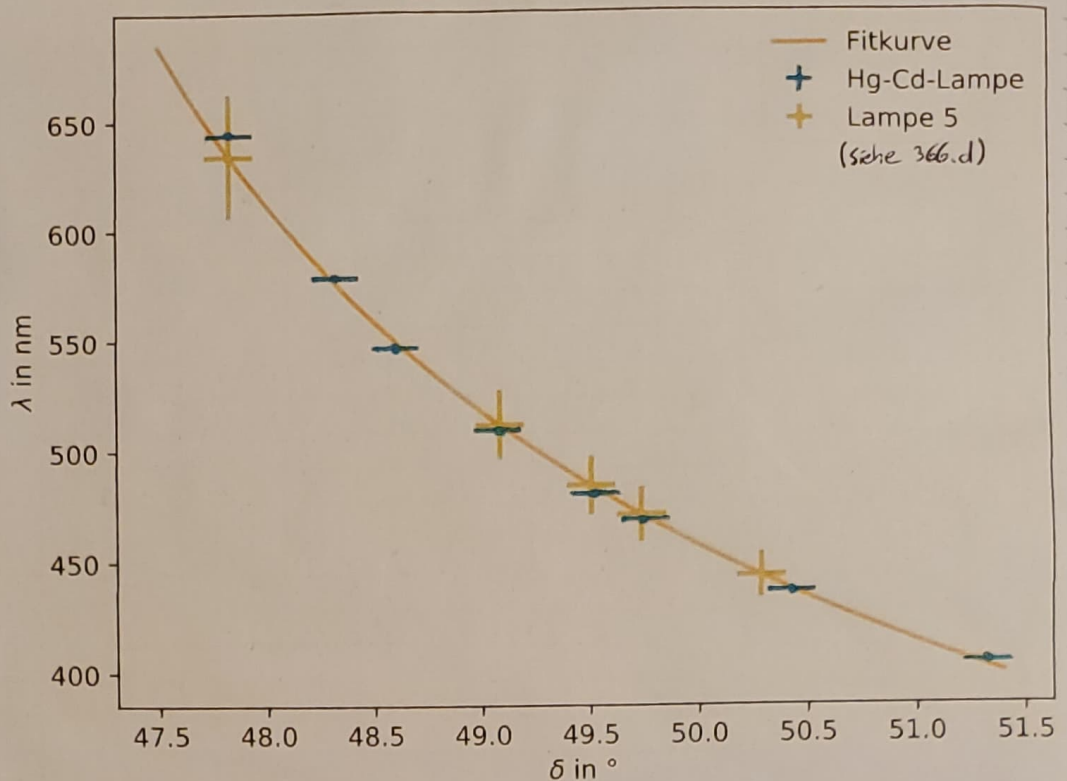
$\delta/^\circ$	$\lambda/\text{nm}$
47,83	643,85
48,32	578,01
48,6	546,08
49,07	508,58
49,52	479,99
49,75	467,81
50,42	435,83
51,32	404,66

Da  $\delta$  sich aus der Differenz von gemessenem Ablenkwinkel und der Nullstellung ergibt, ergibt sich der Fehler analog zu 366.b zu:  $\Delta\delta = 0,11^\circ$ .



Diese Werte ergeben folgende Kalibrationskurve:

Abb. 1 Kalibrationskurve



Der Kurvenfit liefert Werte für  $k_0$  und  $k_1$ :

$$k_0 = (-1,59 \pm 0,0007)$$

$$k_1 = (3523,3 \pm 164,9)$$

*schon! ✓*  
Bitte gleiche Anzahl an Nachkommastellen

*Einheit! ~~nm~~ nm<sup>2</sup>*

366.d

Mithilfe dieser Kalibrationskurve kann man nun die Wellenlängen des unbekannten Spektrums von Lampe 5 ermitteln und somit auf das Element schließen.

Dabei gilt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_1}{\frac{\sin\left(\frac{\delta+\delta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} - k_0}}$$

Der Fehler auf  $\lambda$  ergibt sich durch die Fehler auf  $\delta, \tau, k_0$  und  $k_1$ .

Mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung kommt man auf:

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left( \frac{k_1 \cdot \cos\left(\frac{\delta+\tau}{2}\right) \cdot (\Delta\delta)}{4 \cdot \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{\delta+\tau}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} - k_0\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{k_1}{\frac{\sin\left(\frac{\delta+\tau}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} - k_0}} \right)^2 + \dots}$$

$$\left( \frac{k_1 \cdot \left( \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right) \right) \cdot (\Delta\tau)}{4 \cdot \left( \sin\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right) - k_0 \cdot \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{k_1}{\frac{\sin\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} - k_0}} \right)^2 + \dots}$$

$$\left( \frac{k_1 \cdot (\Delta k_0)}{2 \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} - k_0 \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{k_1}{\frac{\sin\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} - k_0}} \right)^2 + \dots}$$

$$\left( \frac{(\Delta k_1)}{2 \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} - k_0 \right) \cdot \sqrt{\frac{k_1}{\frac{\sin\left(\frac{\tau+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} - k_0}} \right)^2$$

geil ☺

Beachte Fehlerrechnung...

Das in python einzutippen war auch sehr angenehm ☺



Das ergibt:

Tabelle 2: Lampe 5

$\delta/^\circ$	$\lambda/\text{nm}$	$\Delta\lambda/\text{nm}$
47,83	633,93	28,69
49,08	510,99	15,53
49,5	483,60	13,34
49,73	470,40	12,37
50,28	442,88	10,51

Tabelle 2.1:

Cadmium (Cd)

441,46 nm

467,81 nm

479,99 nm

508,58 nm

515,47 nm

632,52 nm

643,85 nm

Ein Vergleich mit dem Literaturwert (Tabelle 2.1; Auszug aus Tabelle 366.1 im Skript, S.25) zeigt, dass dies nahezu perfekt mit dem Spektrum von Cadmium übereinstimmt! *stimmt*

Wie gut dies übereinstimmt sieht man auch anhand Abb. 1 „Kalibrationskurve“, wo die Ergebnisse aus Tabelle 2 eingetragen wurden. Man sieht gut, dass sich diese Werte mit Werten des bekannten Spektrums decken, was daran liegt, dass dies eine Hg/Cd-Lampe war! Lampe 5 war also eine Cd-Lampe. *Gut!*

366.e)

Zuletzt soll der Brechungsindex des Prismas und anhand dessen das Auflösungsvermögen bestimmt werden.

Für den Brechungsindex gilt:

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}}$$

Mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung erhält man den Fehler:

$$\Delta n = \sqrt{\left( \frac{\cos\left(\frac{\delta + \tau}{2}\right) \cdot \Delta \delta}{2 \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} \right)^2 + \left( \frac{\cos\left(\frac{\tau + \delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) - \sin\left(\frac{\delta + \tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\tau}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right)} \cdot \Delta \tau \right)^2}$$

Für den Brechungsindex gilt ebenfalls:

$$n(\lambda) = k_0 + \frac{k_1}{\lambda} + \dots$$

Trägt man also den zuvor berechneten Brechungsindex gegen  $1/\lambda^2$  des entsprechenden Spektrums auf, so ergeben Steigung und Achsenabschnitt der Fitgerade Werte für  $k_1$  und  $k_0$ .

Logischerweise wurden dafür die gemessenen Ablenkwinkel und gegebenen Wellenlängen des bekannten Hg/Cd-Spektrums verwendet. (Tabelle 2.1+2.2)

Es ergibt sich:

*Einheit?  $\frac{1}{nm^2}$ ?*

Tabelle 3: Brechungsindex

$\lambda/nm$	$\delta/^\circ$	$1/\lambda^2$	$n$	$\Delta n$
643,85	47,83	2,41E-06	1,617	0,002
578,01	48,32	2,99E-06	1,622	0,002
546,08	48,6	3,35E-06	1,625	0,002
508,58	49,07	3,87E-06	1,630	0,002
479,99	49,52	4,34E-06	1,634	0,002
467,81	49,75	4,57E-06	1,637	0,002
435,83	50,42	5,26E-06	1,643	0,002
404,66	51,32	6,11E-06	1,652	0,002

(Plot: siehe Abb. 2, Cauchyformel, nächste Seite)

Die Fitgerade ergibt:

$$m = k_1 = (-1,59 \pm 0,0007) \text{ Einheit?}$$

$$n = k_0 = (9529,9 \pm 165,5)$$

Diese Werte für  $k_0$  und  $k_1$  stimmen sehr gut mit denen aus 366.c überein!

Tabelle 2.2

**Quecksilber (Hg)**

404,66 nm

407,78 nm

435,83 nm

491,61 nm

546,08 nm

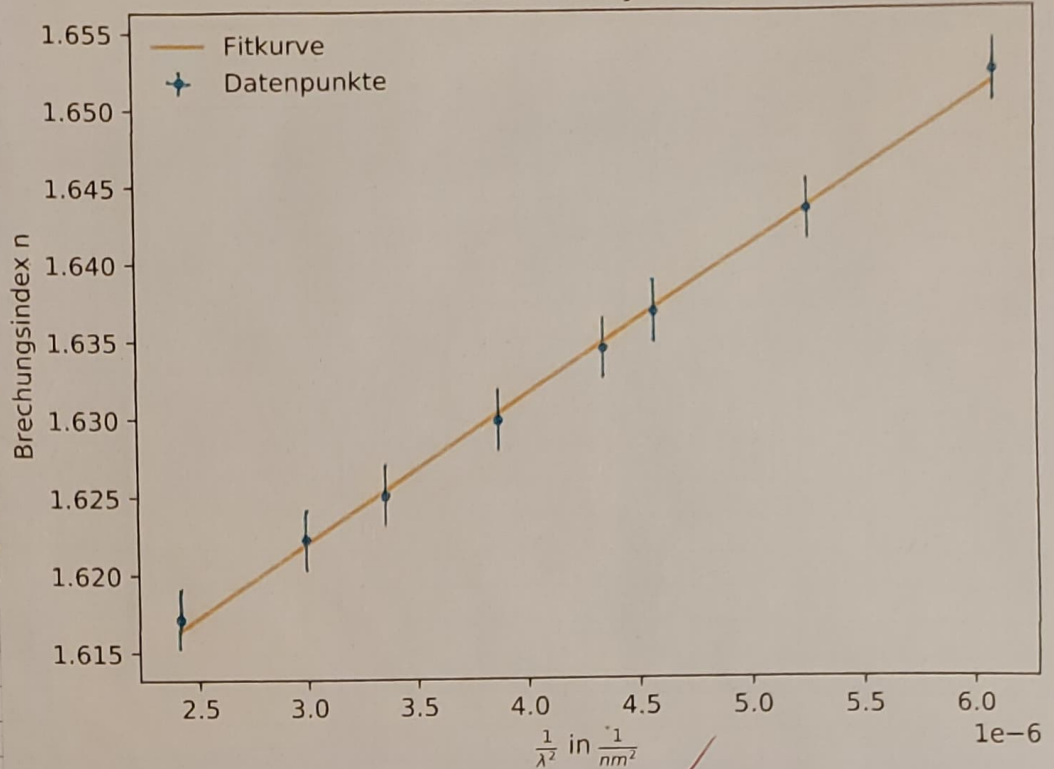
576,96 nm

579,06 nm

690,75 nm



Abb. 2 Cauchyformel



Das Auflösungsvermögen  $A$  hängt von der Dispersion  $\frac{dn}{d\lambda}$  und der Basisbreite des ausgeleuchteten Teils ab.

Der Strahlengang verlief ungefähr durch die Mitte des Prismas weshalb die relevante Breite  $B/2$  beträgt.

$$A = \frac{B}{2} \cdot \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| = \frac{B}{2} \cdot \frac{2k_1}{\lambda^3} = \frac{B \cdot k_1}{\lambda^3}$$

$$\Delta A = \sqrt{\left( \frac{k_1 \cdot \Delta B}{\lambda^3} \right)^2 + \left( \frac{B \cdot \Delta k_1}{\lambda^3} \right)^2}$$

Das Auflösungsvermögen ist zugleich  $A = \frac{\lambda}{\Delta \lambda}$ . Somit kann daraus die Differenz  $\Delta \lambda$  der Wellenlänge zweier Linien, die gerade noch getrennt beobachtet werden können, berechnet werden:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda}{A} \quad \text{sonst} \quad \Delta(\Delta \lambda) = \frac{\lambda}{A^2} \cdot \Delta A$$

Für 400, 500 und 600 nm ergibt sich:

Tabelle 4: Auflösungsvermögen

$\lambda/\text{nm}$	A	$\Delta A$	$\Delta\lambda/\text{nm}$	$\Delta(\Delta\lambda)/\text{nm}$
400	4914	310	0,08	0,01
500	2516	159	0,20	0,01
600	1456	92	0,41	0,03

Das gelbe Dublett im Hg-Spektrum (s. Tabelle 22) liegt bei ca. 600 nm.

Die Wellenlängendifferenz beträgt  $579,06 \text{ nm} - 576,96 \text{ nm} = 2,1 \text{ nm}$

und ist folglich auflösbar gewesen. ✓ *Anrechen? Welches Auflösungsvermögen ist nötig, um das gelbe Dublett aufzulösen?*

Dies stimmt auch mit den gemachten Beobachtungen überein.

### Fazit:

Dieser letzte Versuch lief nahezu perfekt. Die Versuchsdurchführung war einfach und ging schnell, die Auswertung lieferte sehr gute Ergebnisse.

Für alle Werte, die man vergleichen konnte, lag nichts außerhalb des Fehlerintervalls. So lag der Winkel der brechenden Kante bei den erwarteten  $60^\circ$ , so stimmten die Werte für  $n_{\text{Luft}}$  aus 366.c und 366.e überein und das Spektrum konnte eindeutig als das von Cadmium identifiziert werden. Auch das Ergebnis des Auflösungsvermögens stimmt mit den im Experiment gemachten Beobachtungen überein.

Ich bedanke mich für deine Freundlichkeit und Hilfsbereitschaft, das Optikpraktikum hat unter deiner Leitung richtig Spaß gemacht! Da freuen sich mich :-

*Bin auf ein paar (altbekannte) Ungenauigkeiten, gutes Protokoll!*

*Vermut vorhanden.*