

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1 Физика переменности . . . . .	5
1.1 Форма полости Роша . . . . .	5
1.2 Гравитационное потемнение . . . . .	7
1.3 Потемнение к краю . . . . .	13
2 Вычисление синтетических кривых блеска . . . . .	14
2.1 Полигональная сетка . . . . .	14
3 Байесовский подход для обратной задачи . . . . .	17
3.1 Вероятностная модель . . . . .	17
3.2 Семплирование . . . . .	19
4 Данные . . . . .	21
4.1 Блеск . . . . .	21
4.2 Лучевые скорости . . . . .	22
4.3 Период . . . . .	24
4.4 Температура . . . . .	26
5 Результаты . . . . .	30
5.1 Сравнение с другими работами . . . . .	31
5.2 Runs Test . . . . .	34
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	35

## ВВЕДЕНИЕ

Симбиотические двойные — это системы, в спектре которых можно выделить линии поглощения, характерные для холодных звёзд, и эмиссионные линии, характерные для горячих туманностей.

Предполагается, что они состоят из близко расположенных красного гиганта и белого карлика, которые традиционно называются холодным и горячим компонентами. Из-за гравитации белого карлика красный гигант перестаёт быть сферически симметричным и приобретает каплевидную форму. Кроме того, может происходить перенос массы с красного гиганта на белый карлик, за счёт чего образуется аккреционный диск. Вещество может перетекать с помощью звёздного ветра — или напрямую с поверхности, если холодный компонент полностью заполняет свою полость Роша.

Поскольку красный гигант не является сферически симметричным, при движении по орбите его блеск меняется. Такая переменность называется эллипсоидальной. Помимо чисто геометрического эффекта, на переменность также влияет гравитационное потемнение — зависимость температуры от ускорения силы тяжести в конкретной точке поверхности звезды. Из-за него полюса красного гиганта будут наиболее горячими и яркими, а «носик», расположенный на экваторе и направленный в сторону точки Лагранжа — наиболее холодным.

В данной работе анализируются кривые блеска Т Северной Короны, измеренные в Крымской обсерватории ГАИШ МГУ в 1996–2003 и 2008–2021. На их основе мы определяем соотношение масс компонентов и наклонение орбиты — то есть решаем обратную задачу.

Т Северной Короны — повторная новая. Она вспыхивала в 1866, 1946 и, предполагается, должна вспыхнуть в 2024 [1]. Повторные новые возникают, когда на поверхности белого карлика скапливается достаточно много водорода, перетекшего с красного гиганта, и начинается термоядерная реакция. Светимость в результате повышается на  $\sim 10$  звёздных величин и медленно снижается в течение десятков дней.

Цель работы — получить распределение вероятностей наклона и соотношения масс компонентов двойной звезды Т Северной Короны.

Методами исследования являются компьютерное моделирование кривых

блеска и статистический вывод. Мы применили байесовский подход, воспользовавшись библиотекой для вероятностного программирования Turing.jl [2].

Вероятностное программирование — парадигма программирования, предназначенная для работы с вероятностными моделями, которая позволяет автоматизировать статистический вывод и проверку гипотез. Главными идеями вероятностного программирования является автоматизированное применение теоремы Байеса, которое позволяет получить апостериорное распределение вероятностей для параметров задачи, и семплирование из него с помощью марковских цепей. Байесовский подход позволяет легко комбинировать данные от разнородных наблюдений.

Задачами работы являются:

- 1) Численное моделирование физики переменности, получение модельных кривых блеска.
- 2) Построение вероятностной модели, учитывающей статистические свойства экспериментальных данных.
- 3) Получение апостериорного распределения вероятностей для параметров модели (наклонение, соотношение масс) и семплирование из него.
- 4) Анализ распределения, получение оценок параметров и их доверительных интервалов.

Настоящая работа была представлена на конференции МФТИ в 2024.

Новизна исследования заключается в применении байесовского подхода к обратной задаче астрофизики.

Значимость работы заключается в получении оценок параметров двойной звезды Т Северной Короны, создании вероятностной модели переменности, в которую можно добавлять реалистичные модели звёздных атмосфер, и которая может быть использована для анализа других симбиотических двойных.

## 1 Физика переменности

Существует несколько типов переменных звёзд: затменные, пульсирующие и так далее. Считается, что Т Северной Короны имеет *эллипсоидальный* тип.

В рамках эллипсоидальной модели светимость в каждый момент времени определяется тремя эффектами: формой красного гиганта (мы предполагаем, что он заполняет свою полость Роша), гравитационным потемнением и потемнением к краю. В этой главе мы рассмотрим подробно каждый из трёх эффектов.

Белый карлик горячий и в основном излучает в ультрафиолете. Ультрафиолетовые наблюдения показывают, что затмения отсутствуют. Мы исследуем данные в инфракрасном канале, поэтому вклад белого карлика можно пренебречь.

### 1.1 Форма полости Роша

На вещество массой  $dm$ , находящееся в двойной звёздной системе, действуют три силы: гравитация красного гиганта, гравитация белого карлика и центробежная сила. Область, в которой преобладает гравитация какого-либо из компонентов, называется его полостью Роша. Если вещество оказывается за пределами полости Роша, то оно перетекает на другую звезду или в космическое пространство.

Суммарный потенциал трёх сил равен

$$\Omega = -\frac{Gm_{\text{giant}}}{r_1} - \frac{Gm_{\text{dwarf}}}{r_2} - \frac{1}{2}(\omega \times r_3)^2 \quad (1.1)$$

где  $m_{\text{giant}}$  и  $m_{\text{dwarf}}$  — массы двух звёзд,  $r_1$  — расстояние до центра гиганта,  $r_2$  — расстояние до центра карлика,  $r_3$  — расстояние до центра масс,  $\omega$  — угловая скорость вращения звёзд по орбите.

Вещество красного гиганта, находясь под действием потенциала  $\Omega$ , заполняет некоторую эквипотенциальную поверхность, на которой  $\Omega = \text{const}$ . Одной из эквипотенциальных поверхностей является полость Роша. Она проходит через точку Лагранжа  $L_1$ , где все силы уравниваются и  $\nabla\Omega = 0$ .

В уравнении (1.1) неявно предполагается, что гравитационный потенциал можно заменить потенциалом точечного тела. Это приближение оправданно,

поскольку внешняя оболочка красных гигантов имеет очень низкую плотность, и масса в основном сосредоточена в практически сферическом ядре.

Найдём форму полости Роша численно. Для этого введём систему координат с центром в ядре красного гиганта, и направим ось  $x$  в сторону карлика. Обозначим расстояние между центрами звёзд как  $a$ . Тогда (1.1) примет вид

$$\Omega = -\frac{Gm_{\text{giant}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{Gm_{\text{dwarf}}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2}\omega^2 \left( \left( x - a \frac{m_{\text{dwarf}}}{m_{\text{giant}} + m_{\text{dwarf}}} \right)^2 + y^2 \right)$$

Если обезразмерить координаты ( $r \rightarrow r/a$ ), обозначить соотношение масс  $m_{\text{giant}}/m_{\text{dwarf}} = q$  и заметить, что в силу третьего закона Кеплера  $\omega^2 = \frac{G}{a^3}(m_{\text{giant}} + m_{\text{dwarf}})$ , то получится

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{Gm_{\text{giant}}}{a} \left[ \frac{1}{r} + \frac{q^{-1}}{\sqrt{1+r^2-2x}} + \frac{1+q^{-1}}{2} \left( \left( x - \frac{1}{1+q} \right)^2 + y^2 \right) \right] \\ &= -\frac{Gm_{\text{giant}}}{a} \left[ \frac{1}{r} + q^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2x}} - x \right) + \frac{1+q^{-1}}{2} (x^2 + y^2) + \frac{q^{-1}}{1+q} \right] \end{aligned}$$

Последний член является константой и может быть отброшен. Таким образом, безразмерный потенциал равен

$$\Omega = \frac{1}{r} + q^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2x}} - x \right) + \frac{1+q^{-1}}{2} (x^2 + y^2) \quad (1.2)$$

Или, в сферических координатах,

$$\Omega = \frac{1}{r} + q^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rn_x}} - rn_x \right) + \frac{1+q^{-1}}{2} r^2 (1 - n_z^2) \quad (1.3)$$

где введены направляющие косинусы  $n_x = x/r$ ,  $n_z = z/r$ .

Уравнение (1.3) позволяет численно определить форму полости Роша. Для этого достаточно для всех направлений  $(n_x, n_y, n_z)$  решить уравнение  $\Omega(r) = \Omega_0$ .

В качестве  $\Omega_0$  необходимо взять значение потенциала в точке Лагранжа  $L_1$ . Её положение мы находим, решив уравнение  $\frac{\partial \Omega(x, 0, 0)}{\partial x} = 0$ .

## 1.2 Гравитационное потемнение

Гравитационное потемнение — явление, при котором температура поверхности звезды зависит от ускорения силы тяжести в данной точке. Обычно его описывают формулой

$$T_{\text{eff}} \sim g^{\beta} \quad (1.4)$$

Величина  $\beta$  зависит от типа внешней оболочки звезды. У голубых гигантов непосредственно под фотосферой находится зона лучистого переноса, и  $\beta = 0.25$ . У других звёзд, в том числе красных гигантов, внешней является зона конвекции, и  $\beta$  принято считать равным 0.08.

За счёт гравитационного потемнения звезда в симбиотической двойной системе излучает неравномерно (рис. 1.1). Эффект также проявляется и у одиночных звёзд, если они вращаются быстро.

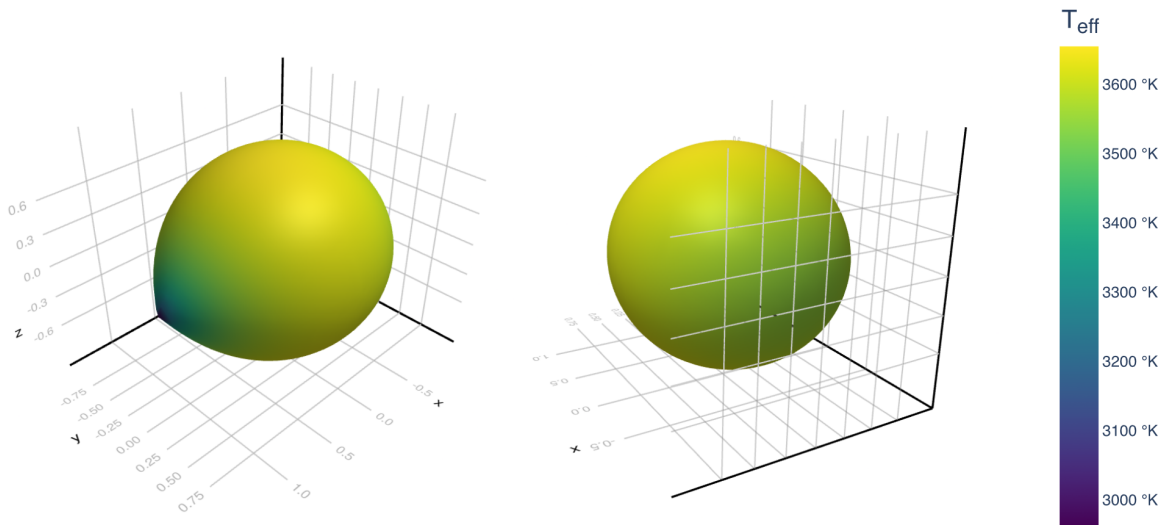


Рисунок 1.1 — Пример распределения температур по поверхности холодного компаньона при  $\beta = 0.08$  и  $m_{\text{giant}}/m_{\text{dwarf}} = 1$ .

Отметим, что «носик» звезды лежит в точке Лагранжа, где  $g = 0$ . В соответствии с (1.4), эффективная температура в этой точке должна быть равна абсолютному нулю.

Мы закроем глаза на эту проблему и будем слепо применять (1.4), поскольку проблемная область не очень большая.

### 1.2.1 Закон фон Зейпеля

Проще всего вывести (1.4) для зоны лучистого переноса.

Давление внутри звезды складывается из давления газа и давления излучения:  $P = P_g + \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4$ . Градиент давления должен уравновешивать силу тяжести:

$$\nabla P = \rho \vec{g} = -\rho \nabla \Omega$$

Если рассмотреть смещение вдоль некоторого вектора  $e$ , то  $d\Omega = (e \cdot \nabla \Omega)$ ,

$$dP = -\rho d\Omega$$

В частности, при  $d\Omega = 0$  также  $dP = 0$ . Следовательно,  $P$  постоянно на эквипотенциальных поверхностях и является функцией  $\Omega$ . Более того,  $\rho = -\frac{dP(\Omega)}{d\Omega}$  тоже является функцией  $\Omega$ .

Вещество звезды должно подчиняться некоторому уравнению состояния:

$$f(P, \rho, T) = 0$$

Каким бы оно ни было, если  $P = P(\Omega)$  и  $\rho = \rho(\Omega)$ , то и  $T = T(\Omega)$ . Поэтому эквипотенциальные поверхности также являются изобарическими, изопикническими и изотермическими.

Для лучистого переноса верно диффузное приближение: световой поток равен

$$F = -D \nabla U \quad (1.5)$$

где  $U = \frac{4}{3} \sigma T^4$  — плотность энергии,  $D = \frac{1}{3} l c$  — коэффициент диффузии,  $l$  — длина свободного пробега фотонов.

$U$  зависит только от температуры, которая является функцией  $\Omega$ . Следовательно,

$$F = -D U'(T) T'(\Omega) \nabla \Omega$$

$l$  и  $D$  зависят от  $\rho$ , которая тоже является функцией  $\Omega$ . Поэтому на эквипотенциальных поверхностях

$$F = \text{const} \cdot \nabla \Omega = \text{const} \cdot g$$

В астрономии часто вводят эффективную температуру  $T_{\text{eff}}$ . По определению, это такая температура, что выполняется закон Стефана-Больцмана:

$$F = \sigma T_{\text{eff}}^4$$

Обратите внимание на расхождение с формулой лучистого переноса (1.5). Если обычная температура на эквипотенциальных поверхностях является константой, то эффективная подчиняется

$$T_{\text{eff}} \sim g^{1/4}$$

Таким образом, в зоне лучистого переноса выполняется уравнение (1.4) с  $\beta = 1/4$ . Впервые этот результат был получен фон Зейпелем ровно 100 лет назад [3].

### 1.2.2 Закон Люси

В зоне конвекции, в отличие от зоны лучистого переноса, всё не так однозначно. Наиболее цитируемый результат был получен Львом Люси в 1967 году [4]:

$$T_{\text{eff}} \sim g^{0.08}$$

Люси рассмотрел случай, когда в зоне конвекции, начиная с некоторой небольшой глубины, удельная энтропия постоянна. Тогда температуру и плотность связывает уравнение адиабаты:

$$T\rho^{1-\gamma} = K$$

где  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты,  $K$  — некоторая константа (константа адиабаты), характеризующая конкретную звезду.

Уравнение адиабаты можно переписать в виде

$$\log K = \log T + (1 - \gamma) \log \rho \quad (1.6)$$

Люси предположил, что константа адиабаты зависит только от эффектив-



ной температуры и гравитации на поверхности:

$$K(\log g, \log T_{\text{eff}}) = K_0$$

Предположив  $T \sim g^\beta$ , можно получить

$$\frac{\partial \log K}{\partial \log g} + \frac{\partial \log K}{\partial \log T_{\text{eff}}} \underbrace{\frac{d \log T_{\text{eff}}}{d \log g}}_{\beta} = 0$$

и выразить  $\beta$  через частные производные:

$$\beta = -\frac{\partial \log K / \partial \log g}{\partial \log K / \partial \log T_{\text{eff}}}$$

Частные производные можно вычислить из (1.6). Люси использовал для этого таблицы конвективных моделей звёзд из книги Бейкера (1963). Он получил, что  $\beta$  слабо зависит как от соотношения между водородом и гелием, так и от соотношения между длиной смешивания и высотой однородной атмосферы. Для практических применений Люси предлагает использовать

$$\beta \approx 0.08$$

Именно это значение используется в настоящей работе.

### 1.2.3 Коэффициент Кларета

Полученные выше законы  $T_{\text{eff}} \sim g^{1/4}$  и  $T_{\text{eff}} \sim g^{0.08}$  относятся к болометрической светимости. Но наблюдения, как правило, производятся в некоторой узкой полосе длин волн, причем спектр реальных звёзд далек от чернотельного.

Поэтому Антоний Кларет предлагает [5] ввести коэффициент  $y(\lambda)$ , по определению равный

$$y(\lambda) := \left( \frac{\partial \ln I(\lambda)}{\partial \ln g} \right)_{T_{\text{eff}}} + \left( \frac{\partial \ln I(\lambda)}{\partial \ln T_{\text{eff}}} \right)_g \underbrace{\left( \frac{d \ln T_{\text{eff}}}{d \ln g} \right)}_{\beta} \quad (1.7)$$

где  $I(\lambda)$  — интенсивность излучения в полосе  $\lambda$ .

Кларет вычислил  $y(\lambda)$  численно, используя модели ATLAS и PHOENIX.

Оказалось, что  $y(\lambda)$  зависит от эффективной температуры, гравитации и скорости микротурбулентности.

На рис. 1.2 показаны примеры полученных им зависимостей для инфракрасных фильтров  $J$  и  $K$ .

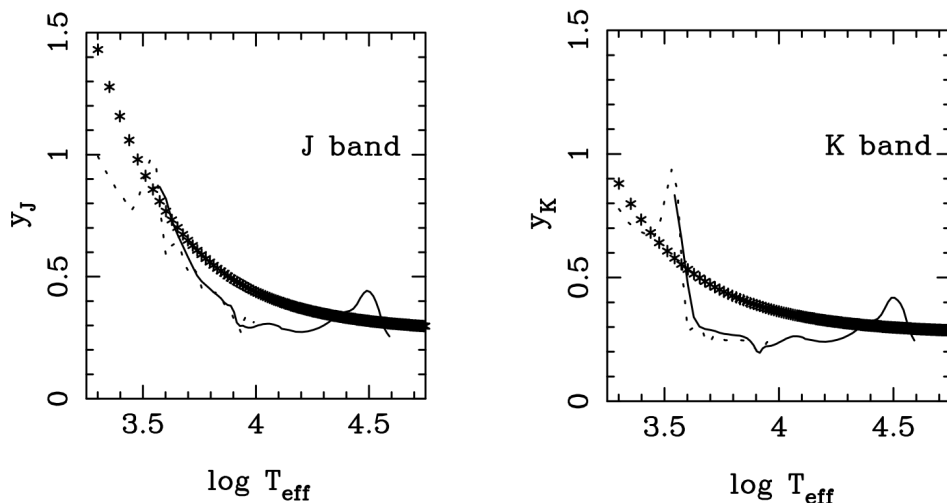


Рисунок 1.2 — Коэффициент гравитационного потемнения (1.7) для фильтров  $J$  и  $K$  в зависимости от эффективной температуры. Звёздочками обозначена модель абсолютно черного тела, сплошной линией — модель ATLAS, пунктирной — PHOENIX. Параметры моделей:  $\log g = 4 \text{ см/с}+2$ ,  $v_{\text{mic}} = 2 \text{ км/с}$ , металличность  $\log[M/H] = 0$ . Изображения взяты из [5].

Данный подход, хоть и является более правильным, не очень полезен для настоящей работы. Он позволяет вычислить производную интенсивности по гравитации при определенной температуре, но не позволяет напрямую получить распределение температур по поверхности звезды. Поэтому мы будем использовать простой закон  $T_{\text{eff}} \sim g^{0.08}$ .

#### 1.2.4 Модель Лары-Рьётора

Самую новую модель на сегодняшний день предложили в 2012 году Франческо Лара и Мишель Рьёттор [6]. Они приняли приближение, что поток излучения всегда антипараллелен гравитации:

$$\vec{F} = -f(r, \theta, \varphi)\vec{g}$$

где  $f$  — некоторая положительная функция, которую нужно найти.

В установившемся режиме всюду, кроме центра звезды, поток энергии

должен сохраняться:

$$\operatorname{div} F = 0$$

Следовательно,

$$\vec{g} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \vec{g} = 0$$

Если ввести  $\vec{n} = -\vec{g}/g$ , то

$$\vec{n} \cdot \nabla \log f = \frac{\nabla \cdot \vec{g}}{g}$$

Решение можно получить, проинтегрировав это уравнение вдоль *линии поля* — кривой, которая в каждой точке касается вектора  $\vec{n}$ . Рассмотрим линию поля, которая начинается в точке  $O$  (гравитационном центре звезды) и заканчивается в некоторой точке  $A$ . Тогда

$$f(A) = f_0 \exp \left( \int_O^A \frac{\nabla \cdot \vec{g}}{g} ds \right)$$

где  $f_0$  — нормировочная константа, определяющаяся полной светимостью звезды.

Интеграл можно вычислить численно, выразив  $g = \nabla \Omega$  с помощью формулы для потенциала Роша (1.3).

Как показали Лара и Рьёттор, в результате снова приблизительно получится степенной закон  $T_{\text{eff}} \sim g^\beta$ .

Величина  $\beta$  зависит от соотношения масс компаньонов и процента заполнения полости Роша, авторы приводят соответствующие таблицы. Для большинства случаев  $\beta$  лежит в интервале 0.20–0.25.

В пределе нулевого заполнения полости Роша, когда приливной деформацией можно пренебречь,  $\beta \rightarrow 0.25$ , что соответствует закону фон Зейпеля.

Несмотря на красоту модели Лары-Рьёттора, в данной работе мы используем общепринятый закон Люси с  $\beta = 0.08$ , чтобы иметь возможность сравнивать наши результаты с другими работами по Т Северной Короны.

### 1.3 Потемнение к краю

Звёзды не являются ламбертовскими источниками. Они имеют атмосферу ненулевой толщины, и, когда мы смотрим на поверхность под углом, свет проходит в атмосфере больший путь. Поэтому края звёзд кажутся более красными и тёмными, чем их центр.

Потемнение к краю определяется численно, с использованием моделей ATLAS и PHOENIX. Антоний Кларет показал, что его можно профитировать формулой

$$I = I_0 \cdot \left( 1 - a_1(1 - c^{1/2}) - a_2(1 - c) - a_3(1 - c^{3/2}) - a_4(1 - c^2) \right) \quad (1.8)$$

где  $c = \cos \theta$ ,  $\theta$  — угол между лучом зрения и нормалью к поверхности. Коэффициенты  $a_i$  зависят от температуры, металличности и ускорения силы тяжести, Кларет приводит соответствующие таблицы [7].

Температура и ускорение силы тяжести варьируются по поверхности звезды. Чтобы это учесть, мы интерполируем коэффициенты из таблиц.

В данной работе интерполяция осуществляется только по температуре. Зависимость от силы тяжести более слабая, и мы приняли, что на всей поверхности звезды  $\log g = 4 \text{ см/с}^2$ .

## 2 Вычисление синтетических кривых блеска

Вычисление синтетической кривой блеска происходит следующим образом:

1) Вычисление формы звезды (полости Роша). Для этого мы сначала создаём сферическую сетку, а затем деформируем её так, чтобы результирующая поверхность оказалась эквипотенциальной для потенциала (1.3).

2) Вычисление ускорения силы тяжести и температуры в каждой точке. Ускорение силы тяжести мы получаем, вычисляя  $\nabla\Omega$  автоматическим дифференцированием с помощью дуальных чисел. Температуру мы вычисляем, используя закон Люси  $T_{\text{eff}} = T_0 \left( \frac{g}{g_0} \right)^{0.08}$ . В качестве  $g_0$  и  $T_0$  мы берем значения на экваторе звезды в точке, наиболее удаленной от «носика».

3) Вычисление светимости в каждой точке. Мы используем спектры из модели звёздных атмосфер PHOENIX и сворачиваем их с полосой пропускания фильтра.

4) Усреднение светимости в каждой грани и вычисление нормалей к граням.

5) Вычисление коэффициентов потемнения к краю  $a_i(T)$  для каждой грани.

6) Вычисление суммарной светимости для разных фаз. Для этого при фиксированном направлении на наблюдателя мы вычисляем косинус угла между нормалью к грани и направлением на наблюдателя; определяем, какие грани видны, а какие нет; вычисляем потемнение к краю по формуле (1.8); суммируем светимость по видимым граням.

7) Преобразование к звёздной величине по формуле  $m = -2.5 \log_{10} L$ .

Остановимся подробнее на некоторых пунктах и применённых оптимизациях.

### 2.1 Полигональная сетка

Чтобы проинтегрировать поток излучения по поверхности звезды, требуется разбить её на треугольники. Желательно расположить точки более-менее равномерно по поверхности звезды, тогда треугольников понадобится меньше.

Для этого мы используем алгоритм Катмулла-Кларка из библиотеки Meshes.jl, который итеративно разбивает грани на более маленькие (рис.

2.1). Он часто применяется в компьютерной графике для создания гладких поверхностей.

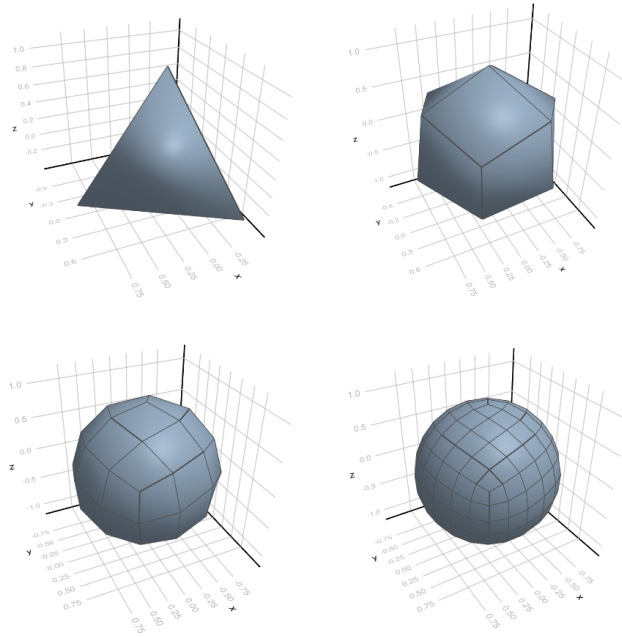


Рисунок 2.1 — Алгоритм Катмулла-Кларка, итерации с нулевой по третью. Мы используем 4 итерации, что даёт хороший баланс между точностью и количеством вершин.

Этот алгоритм создаёт сетку из четырёхугольников, близкую к сферической. У четырёхугольников не всегда можно определить нормаль, поэтому мы дополнительно разбиваем каждый четырёхугольник на два треугольника.

Затем мы деформируем сферическую сетку, домножая радиус-вектор  $\vec{n}$  каждой вершины на число  $r$  такое, что  $\Omega(r\vec{n}) = \text{const}$ , где  $\Omega$  — потенциал Роша (1.3).

Форма звезды определяется соотношением масс звёзд  $q$  и коэффициентом заполнения полости Роша  $\rho$ . Мы предполагаем, что  $\rho = 1$ , потому что это упрощает задачу и потому что при  $\rho < 1$  амплитуда переменности быстро уменьшается.

Впоследствии нам понадобится дифференцировать блеск по  $q$ . Но создание сетки включает в себя численное решение уравнения. Это итеративный процесс, который сложно дифференцировать. Поэтому мы заранее вычисляем сетку для набора значений  $q$ , сохраняем для каждой вершины интерполяционный полином  $r(q)$  и дифференцируем уже его.

С изменением  $q$  сильно меняется размер полости Роша (если зафиксировано расстояние между компаньонами) и соответственно общая яркость звезды. Это нежелательно для семплирования, поскольку делает параметры  $q$  и offset (см. таблицу 3.1) сильно скоррелированными. Поэтому мы дополнительно нормируем радиус-векторы вершин сетки на радиус-вектор вершины, наиболее удалённой от «носика» звезды.

Примеры синтетических сеток для разных соотношений масс приведены на рис. 2.2.

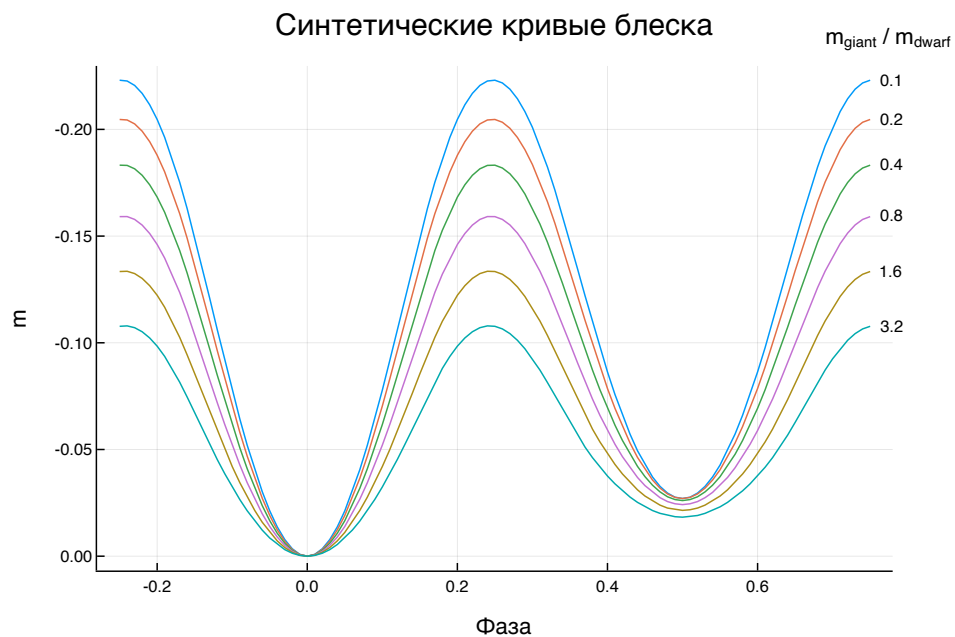


Рисунок 2.2 — Примеры синтетических кривых блеска для разного соотношения масс. Первому (глубокому) минимуму соответствует наблюдение со стороны «носика» — наиболее холодной части звезды. Второму минимуму соответствует наблюдение с противоположной «носику» стороны. Максимумам соответствует наблюдение с боковых сторон, тогда достигается наибольшая видимая площадь.

### 3 Байесовский подход для обратной задачи

Наша цель — определить параметры двойной звезды (наклонение, соотношение масс). Для этого мы используем парадигму вероятностного программирования, в основе которой лежит байесовский подход.

Пусть  $\theta$  — параметры модели (наклонение, соотношение масс),  $Y$  — экспериментальные данные. Тогда по теореме Байеса апостериорное распределение параметров с учетом данных равно

$$P(\theta|Y) = \frac{P(Y|\theta)P(\theta)}{P(Y)} \quad (3.1)$$

В этой формуле:

- $P(\theta)$  — априорное распределение, которое часто можно взять равномерным,
- $P(Y|\theta)$  — правдоподобие, которое можно вычислить, если сопоставить с погрешностью разность между измерениями и модельной кривой,
- $P(Y)$  — полная вероятность получить набор данных — не зависящая от  $\theta$  нормировочная константа.

Апостериорное распределение по сути является ответом на задачу. Оно отражает все имеющиеся данные, с его помощью можно оценить параметры модели и их доверительные интервалы.

#### 3.1 Вероятностная модель

Параметры, от которых зависит форма кривой блеска, приведены в таблице 3.1. Некоторые из них известны и для них приведены числовые значения, некоторые являются случайными переменными, для них приведены априорные распределения.

Эти параметры полностью задают кривую блеска:

$$\tilde{m}_t^{K,J} = \text{model}(t, i, q, \varphi_0, T, P) + \text{offset}^{K,J}$$

где  $\text{model}$  — функция, вычисляющая синтетическую кривую блеска.

Когда кривая блеска вычислена, можно вычислить правдоподобие, исходя из предположения, что экспериментальные значения распределены нор-



Таблица 3.1 — Параметры модели

**Параметры интереса:**

$i \sim \text{Uniform}(0, \pi/2)$	наклонение орбиты
$q^{-1} \sim \text{Uniform}(0.01, 10)$	отношение массы карлика к массе гиганта

**Скрытые переменные:**

$\varphi_0 \sim \text{Uniform}(-\pi, \pi)$	фаза в первый день наблюдений
$\text{offset}^{K,J} \sim \text{Uniform}(-\infty, +\infty)$	смещение звёздной величины в фильтрах $K$ и $J$ , отражающее расстояние до звезды и её реальные размеры
$\sigma_{\text{common}}^{K,J} \sim \text{Uniform}(0, +\infty)$	добавочная погрешность

**Внешние данные:**

$t$	даты наблюдений
$m_t^{K,J}$	звёздная величина в фильтрах $K$ и $J$
$\sigma_t^{K,J}$	фотометрическая погрешность звёздной величины
$T_0 \approx 3500 \text{ }^\circ\text{K}$	температура красного гиганта, известная из спектрометрических наблюдений. Подробнее в разделе 4.4
$P \approx 227.5 \text{ суток}$	период, полученный с помощью периодограммы Ломба-Скаргла

мально около предсказанных:

$$m_t^{K,J} \sim \mathcal{N}(\tilde{m}_t^{K,J}, \sigma_{\text{common}}^2 + \sigma_t^2) \quad (3.2)$$

Таким образом, каждому набору параметров соответствует некоторая (ненормированная) апостериорная вероятность, складывающаяся из априорной вероятности и правдоподобия. Мы автоматизируем её вычисление с помощью библиотеки `Turing.jl` [2].

В формуле (3.2) мы приняли, что погрешность складывается из двух величин: погрешности измерений в конкретный день  $\sigma_t$  и некоторой общей для всех точек погрешности  $\sigma_{\text{common}}$ . Мы ввели дополнительную погрешность, поскольку разброс точек на графике был больше, чем можно было бы ожидать от фотометрической погрешности. Вероятно, это связано с собственной

быстрой переменностью звезды — например, вызванной темными пятнами.

### 3.2 Семплирование

В то время как вычислить значение апостериорной вероятности в точке возможно, чтобы извлечь из неё полезную информацию (такую как маргинальное распределение), потребуется интегрировать её по многомерному пространству параметров.

Альтернативный подход — семплирование, то есть генерация случайных наборов параметров, подчиняющихся интересующему нас распределению. Анализировать дискретные наборы точек гораздо проще. Очень просто вычислить медиану, среднее, доверительные интервалы и т.д.

Для нас удобны алгоритмы семплирования, которые могут работать с ненормированными распределениями. Это позволяет не вычислять нормировочную константу  $P(Y)$  в формуле Байеса (3.1), для чего потребовалось бы интегрирование по пространству параметров.

Такая возможность есть у алгоритмов семплирования на марковских цепях (Markov Chain Monte Carlo, MCMC). В них каждая точка генерируется на основе предыдущей, затем она принимается или отбрасывается.

Часто используется правило принятия Метрополиса-Гастингса:

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta' & \text{с вероятностью } \min\left(\frac{\rho(\theta')}{\rho(\theta_t)}, 1\right) \\ \theta_t & \text{иначе} \end{cases}$$

где  $\rho(\theta)$  — целевая плотность вероятности,  $\theta_t$  — текущая точка,  $\theta'$  — точка-кандидат.

Можно показать, что если алгоритм генерации точек-кандидатов удовлетворяет детальному балансу

$$P(\theta_1 \rightarrow \theta_2) = P(\theta_2 \rightarrow \theta_1) \quad (3.3)$$

то распределение принятых точек будет стремиться к искомому.

Алгоритмы генерации точек-кандидатов могут быть разными. Можно, например, просто добавлять к текущей точке случайное смещение.

Мы используем алгоритм семплирования NUTS (No U-Turn Sampler) [8].

Он был предложен в 2011 году как вариация НМС (Hamiltonian Monte Carlo), не требующая ручного задания гиперпараметров.

В этих алгоритмах величина  $\log \rho$  играет роль гамильтониана, под воздействием которого точка движется по пространству параметров. Поскольку уравнения гамильтоновой механики обратимы во времени и обладают свойством сохранения фазового объёма, условие детального равновесия (3.3) выполнено.

NUTS — state-of-the-art алгоритм семплирования, который позволяет относительно эффективно исследовать пространство параметров. Однако ему требуется возможность вычислять производные  $\log \rho$ , поскольку они входят в уравнения движения точки. Мы используем для этого автоматическое дифференцирование с помощью дуальных чисел.

## 4 Данные

### 4.1 Блеск

Мы используем данные о блеске Т Северной Короны, полученные в Крымской обсерватории ГАИШ МГУ.

Измерения проводились в 152 дня, разбросанных по интервалам суммарной продолжительностью 20 лет (1996–2003 и 2008–2021 годы). Данные охватывают порядка тридцати 227-суточных периодов, но с малым количеством точек на период.

В некоторые дни измерения проводились повторно (естественно, с разными результатами). Мы оставили эти измерения такими, какие они есть, поскольку это не препятствует применению нашей вероятностной модели.

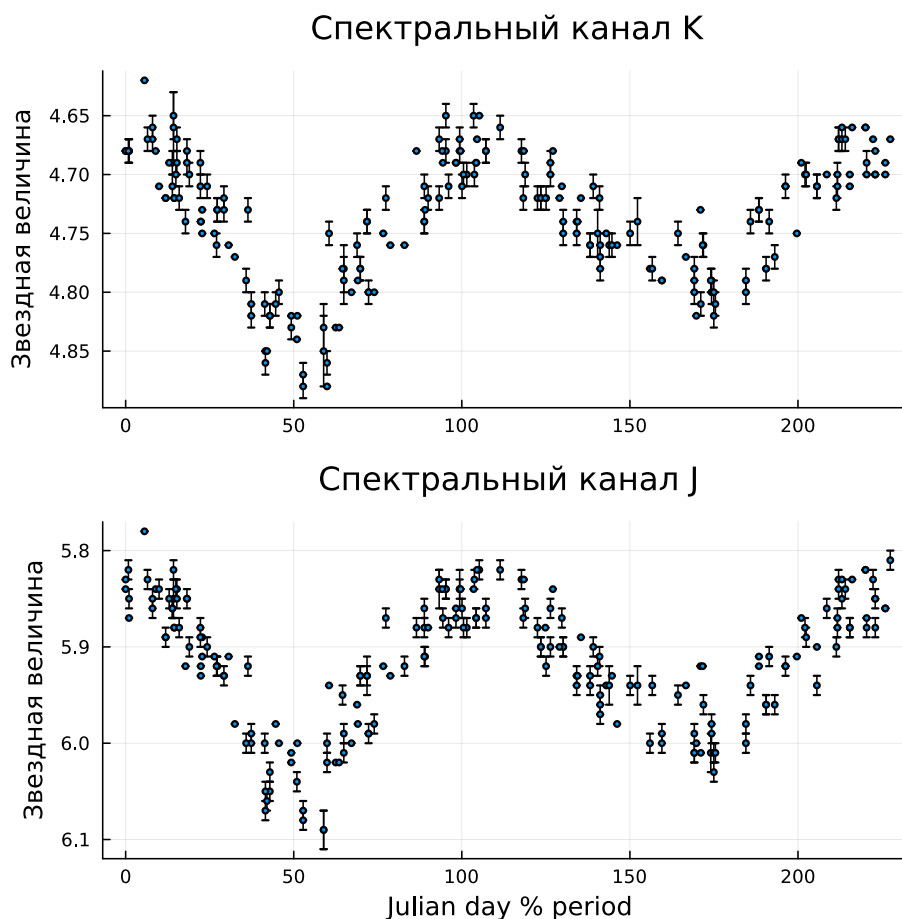


Рисунок 4.1 — Измерения блеска Т Северной Короны

Чтобы определить погрешность, наблюдатели одновременно с Т Северной Короны измеряли некую референсную звезду, чья звёздная величина предполагалась постоянной. Полученная таким способом погрешность иногда

оказывалась нулевой, поскольку звёздная величина измерялась с точностью до двух знаков после запятой и иногда наблюдалось полное совпадение.

Чтобы исправить нулевые погрешности, мы добавили ко всем измерениям некоторую общую погрешность:

$$\tilde{\sigma}_t = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_{\text{common}}^2}$$

Добавочная погрешность символизирует все источники ошибок, не являющиеся погрешностью прибора. Это могут быть, например, быстрые изменения блеска звезды, вызванные тёмными пятнами.

Мы сделали  $\sigma_{\text{common}}$  случайным параметром, который подбирается в процессе семплирования. Это избавляет от необходимости анализировать физику быстрой переменности и других источников ошибок.

Ценой такого подхода является то, что мы не можем оценить согласие модели с данными через статистические критерии, такие как  $\chi^2$ . Семплер подберёт достаточно большую величину погрешности, чтобы правдоподобие было высоким, тогда  $\chi^2$  автоматически будет близко к 1. Но это не будет означать, что модель хорошо описывает данные.

## 4.2 Лучевые скорости

Лучевой скоростью называется проекция скорости на луч зрения. Её можно измерить, наблюдая за смещением спектральных линий, вызванным эффектом Доплера.

В течение периода лучевая скорость меняется, и соответственно меняется смещение спектральных линий. Можно нанести смещения на график и вычислить амплитуду лучевой скорости.

Если проводить измерения в инфракрасном диапазоне, то полученная скорость будет относиться к холодному красному гиганту.

Важно также учитывать годовое и суточное вращение Земли. Поскольку период  $T$  Северной короны  $P \approx 227$  суток не равен одному году, эффекты от вращения Земли и от вращения звезды можно разделить.

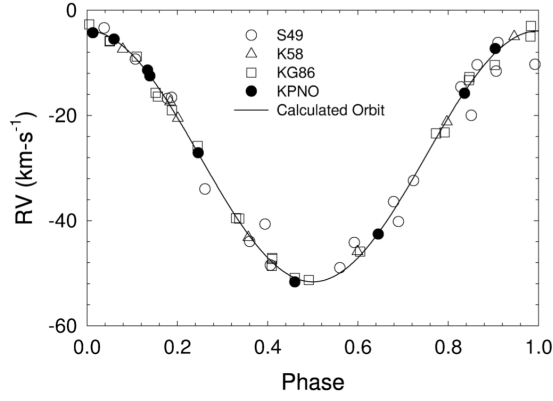


Рисунок 4.2 — Лучевые скорости Т Северной Короны, измеренные в разных обсерваториях. Изображение взято из [9].

#### 4.2.1 Ограничение, вытекающее из предела Чандрасекара

В работе Fekel et al. (2000) проанализированы измерения лучевых скоростей Т Северной Короны, выполненные в разных обсерваториях. Авторы показали, что орбиты приблизительно являются круговыми, а проекция радиуса орбиты холодного компонента на луч зрения равна:

$$a_{\parallel} := a_{\text{giant}} \cdot \sin i = (74.77 \pm 0.53) \cdot 10^6 \text{ км}$$

Радиусы орбит компонентов обратно пропорциональны их массам. Обозначим

$$\frac{a_{\text{dwarf}}}{a_{\text{giant}}} = \frac{m_{\text{giant}}}{m_{\text{dwarf}}} = q$$

Запишем третий закон Кеплера:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 (a_{\text{dwarf}} + a_{\text{giant}})^3}{G (m_{\text{dwarf}} + m_{\text{giant}})} = \frac{4\pi^2 a_{\text{giant}}^3 (1 + q)^3}{G m_{\text{dwarf}} (1 + q)} = \frac{4\pi^2 a_{\parallel}^3 (1 + q)^2}{G m_{\text{dwarf}} \sin^3 i}$$

Получается следующая зависимость между  $q$  и наклонением орбиты  $i$ :

$$\sin^3 i = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a_{\parallel}^3}{P^2 m_{\text{dwarf}}} (1 + q)^2$$

Масса белого карлика не может быть больше предела Чандрасекара. Если подставить числовые значения для Т Северной Короны, то это даёт

следующее ограничение на  $i$  и  $q$ :

$$\sin^3 i > 0.224 \cdot (1 + q)^2$$

Разрешённая область изображена на рис. 4.3:

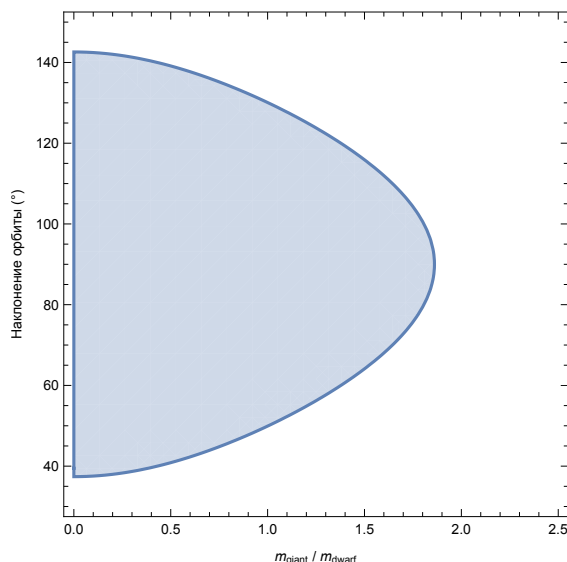


Рисунок 4.3 — Допустимые значения наклона орбиты и соотношения масс компонентов в соответствии с пределом Чандрасекара и наблюдениями лучевых скоростей.

### 4.3 Период

Определение периода — нетривиальная задача.

Первое, что приходит в голову, — это применить дискретное преобразование Фурье. Но, поскольку промежутки между измерениями не одинаковые, это невозможно.

Чаще всего в астрономии строят периодограмму Ломба-Скаргла. Для этого для большого количества различных частот производится фитирование формулой

$$f(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) + c$$

и вычисляется «мощность», которая показывает, насколько хорошим получилось фитирование. Поскольку для метода наименьших квадратов существуют готовые формулы, большое число частот можно обработать за разумное время.

Недостатком является то, что периодограмма Ломба-Скаргла предполагает синусоидальную зависимость, в то время как из рис. 2.2 видно, что

## Периодограмма Ломба-Скаргла

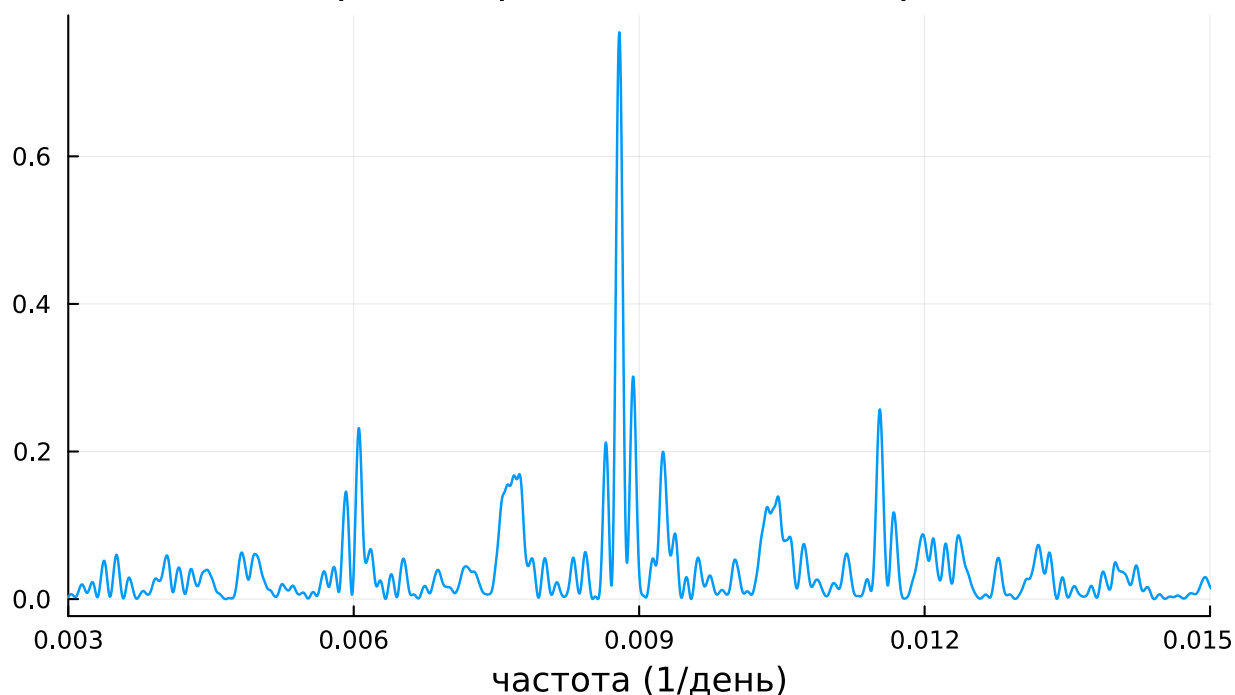


Рисунок 4.4 — Периодограмма Ломба-Скаргла для измерений блеска Т Северной Короны в спектральном канале К. Максимум мощности соответствует периоду 113.75 суток.

модельные кривые блеска не являются синусоидами, поскольку минимумы имеют разную глубину.

В результате, если слепо применить периодограмму Ломба-Скаргла (рис. 4.4), то получится неверный период 113.75 суток.

Чтобы получить правильную картинку с двумя минимумами (рис. 4.1), мы домножили период на 2 и получили 227.5 суток. Это согласуется с работой [9], в которой на основе измерений лучевых скоростей период был оценен как  $227.5687 \pm 0.0099$  суток.

Следует отметить, что период может меняться со временем. Момент импульса двойной системы должен сохраняться, но, поскольку звёзды обмениваются массой, может изменяться суммарный момент инерции и соответственно угловая скорость. Поэтому бессмысленно пытаться вычислить период с высокой точностью.



## 4.4 Температура

*A picture may be worth a thousand words, but a spectrum is worth a thousand pictures.*

У звёзд, как правило, нет определённой температуры, поскольку она, как минимум, варьируется с глубиной. Обычно говорят об эффективной температуре, которая по определению равна

$$T_{\text{eff}} = \left( \frac{L}{\sigma S} \right)^{1/4} \quad (4.1)$$

где  $L$  — светимость звезды,  $S$  — её площадь,  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана.

Эффективная температура — это одно число. Именно ей параметризуют модели звёздных атмосфер ATLAS и PHOENIX.

Введём также локальную эффективную температуру, равную

$$T_{\text{local eff}} = \left( \frac{F}{\sigma} \right)^{1/4} \quad (4.2)$$

где  $F$  — поток излучения в данной точке поверхности.

Локальную эффективную температуру можно воспринимать как физическую температуру, некоторым образом усреднённую по глубине, но не по поверхности фотосферы.

Если звезда сферически симметричная, то  $T_{\text{eff}} = T_{\text{local eff}}$ .

В нашем случае это не так; локальная эффективная температура зависит от координаты и предположительно определяется законом Люси:

$$T_{\text{local eff}} = T_0 \left( \frac{g}{g_0} \right)^{0.08} \quad (4.3)$$

где  $T_0$  и  $g_0$  — локальная эффективная температура и ускорение силы тяжести в какой-то выбранной точке.

Хотелось бы найти константу  $T_0$ : это позволит строить карты температур и получать синтетические кривые блеска.

В качестве данных у нас есть две оценки эффективной температуры (3400 °K и 3600 °K), сделанные разными способами на основе спектра, снятого 6 июня 2004 года [10].

Эти оценки представляют собой локальную эффективную температуру (4.3), некоторым образом усреднённую по части поверхности звезды, видимой в тот день.

Разброс оценок (200 °K) сопоставим с разбросом локальных эффективных температур по поверхности звезды (рис. 1.1).

Мы выбрали в качестве  $T_0$  середину диапазона — 3500 °K — и присвоили его точке, наиболее удалённой от «носика». Эта точка не является ни самой горячей, ни самой холодной, поэтому она должна с достаточной точностью представлять среднюю температуру.

Теоретически можно было бы выбрать  $T_0$  случайным параметром и подбирать его в процессе семплирования. Можно было пытаться добиться того, чтобы проинтегрированный по поверхности модельный спектр имел линии той же эквивалентной ширины / имел то же соотношение  $J - K$ , что и измеренный. Но мы решили, что это неоправданно усложнит модель, не дав ей выигрыша в точности.

Рассмотрим теперь, как в работе [10] была получена температура.

#### 4.4.1 Спектрометрический метод

В спектрометрическом методе вычисляется эквивалентная ширина линий

$$W_\lambda := \int \left(1 - \frac{F}{F_0}\right) d\lambda$$

где  $F_0(\lambda)$  — предполагаемый световой поток на данной длине волны в отсутствие линии.

Эквивалентная ширина зависит от столбцовой плотности поглощающих частиц  $\rho$ , силы осциллятора  $f$  (величины, отражающей вероятность перехода между уровнями энергии), заселённости начального уровня  $n$  и его статистического веса  $g$ :

$$W_\lambda = W_\lambda(n(T)\rho g f) \quad (4.4)$$

Эта зависимость называется *кривой роста* [11]. Она состоит из несколь-

ких сегментов: линейного (для слабых линий), пологого ( $W_\lambda \sim \sqrt{\ln x}$ ) и сегмента затухания ( $W_\lambda \sim \sqrt{x}$ ).

Столбцовая плотность  $\rho$  зависит от относительного содержания химического элемента, например  $[\text{Fe}/\text{H}]$ .

Заселённость  $n(T)$  определяется в два этапа: сначала с помощью формулы Саха вычисляется доля атомов в нужной степени ионизации, затем с помощью распределения Больцмана вычисляется доля атомов на нужном уровне энергии.

Зависимость  $n(T)$  определяется энергией уровней. Поэтому разные линии одного элемента по-разному отвечают на изменение температуры.

Сила осциллятора и статистический вес — табличные величины, в работе [10] они взяты из VALD (Vienna Atomic Line Database).

На практике (4.4) вычисляется с помощью атмосферных моделей, таких как PHOENIX:

$$W_\lambda = \text{PHOENIX}(T_{\text{eff}}, \log g, [\text{Fe}/\text{H}]) \quad (4.5)$$

С помощью (4.5) можно вычислять относительное содержание элемента по эквивалентной ширине линии и эффективной температуре.

В работе [10] авторы подбирают  $T_{\text{eff}}$  такую, что относительное содержание, вычисленное для разных линий одного элемента (железа), оказывается одинаковым.

Они получают 3600 °K.

#### 4.4.2 Фотометрический метод

В фотометрическом методе вычисляется показатель цвета — разность звёздных величин в фильтрах  $J$  и  $K$  (или других).

Для Т Северной Короны  $J - K$  слабо меняется с фазой и приблизительно равно 1.19.

Примечательно, что в ваттах/м<sup>2</sup> блеск в фильтре  $J$  больше блеска в фильтре  $K$ , поэтому разность звёздных величин  $m_J - m_K$  должна быть отрицательной. Но она положительная, поскольку нуль звёздной величины зависит от фильтра. По соглашению, он соответствует блеску Веги в данном фильтре.

Далее вычисленное значение  $J - K$  сопоставлялась с калибровочной

кривой из работы [12]. Калибровочная кривая была получена экспериментально на основе звёзд, у которых удалось измерить угловой размер и посчитать эффективную температуру непосредственно из определения (4.1).

При использовании фотометрического метода авторы работы [10] получили 3400 °K.

Погрешность не оценивалась, но, судя по разбросу оценок, она составляет порядка 100 °K.

## 5 Результаты

Мы получили апостериорное распределение вероятностей для параметров системы и насэмплировали из него, как описано в разделе 3.2.

Количество семплов — 4096, эффективный размер выборки (т.е. количество независимых семплов, которое давало бы ту же статистическую мощность) — около 1000.

Каждому семплу соответствует кривая блеска. На их основе мы построили график с доверительным интервалом (рис. 5.1).

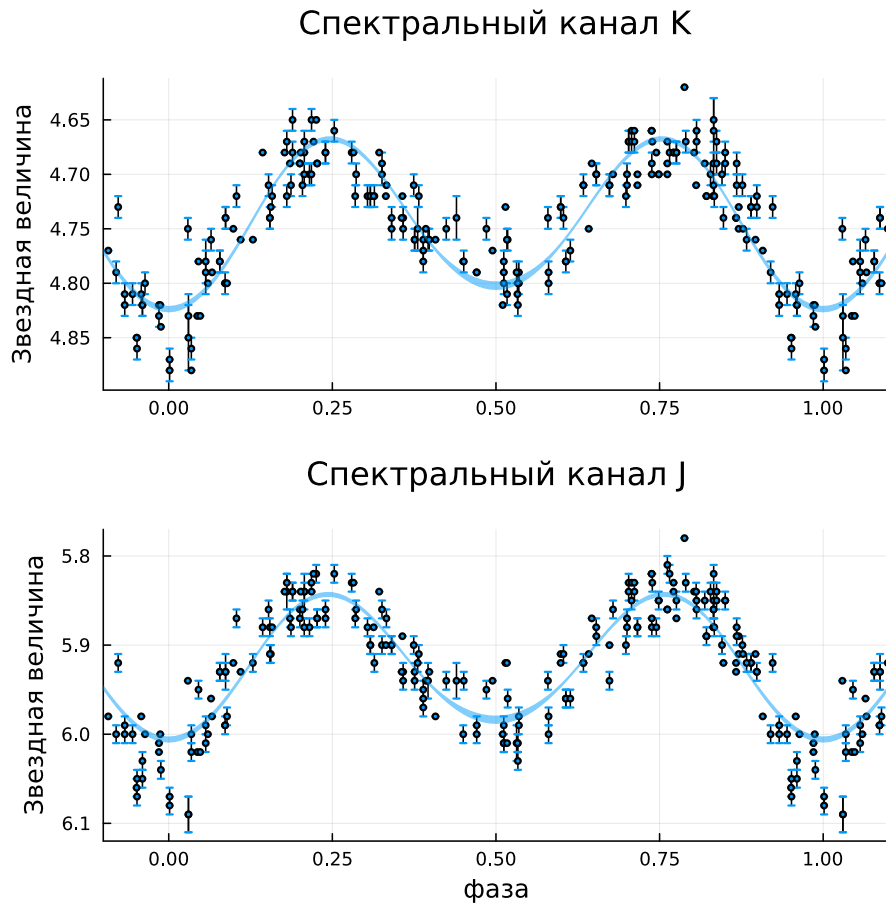


Рисунок 5.1 — Насэмплированные кривые блеска (доверительный интервал  $1\sigma$ ). Из графика видно, что модель плохо описывает данные в окрестности более глубокого минимума. Мы обсуждаем это подробнее в разделе 5.2.

Также мы построили распределения каждого случайного параметра по отдельности:

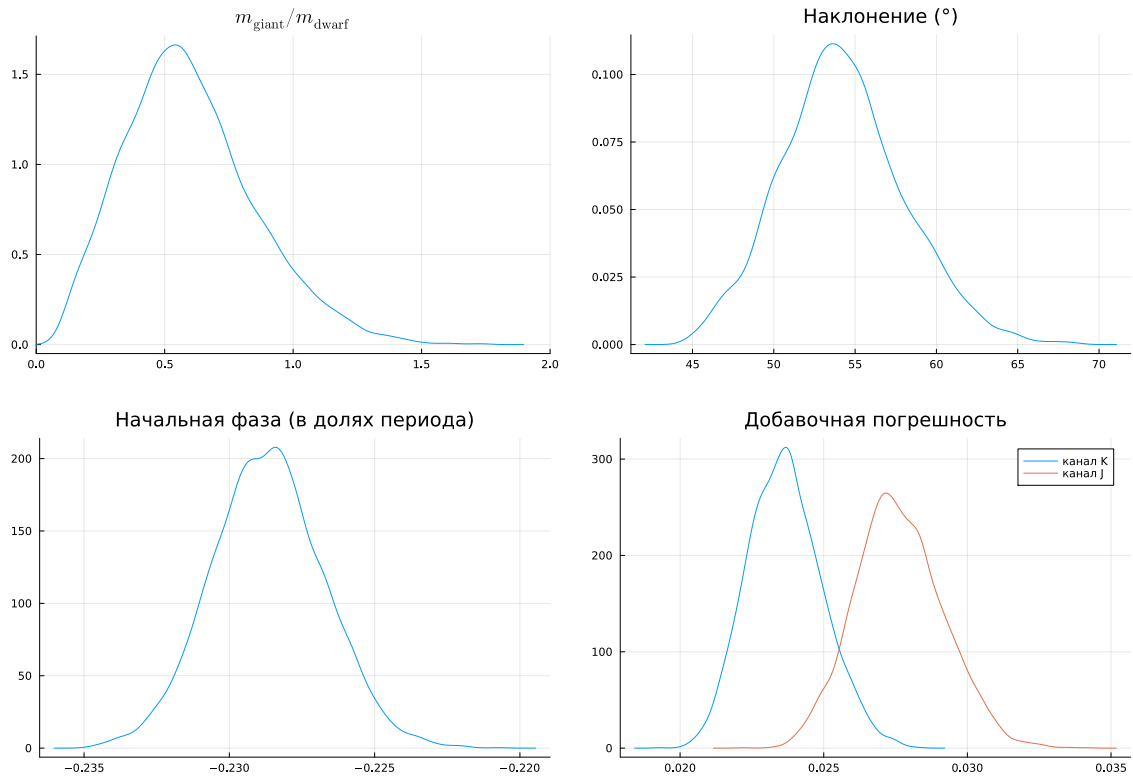


Рисунок 5.2 — Апостериорные распределения параметров модели.

## 5.1 Сравнение с другими работами

Мы построили двумерный график оценки плотности вероятностей для массы белого карлика и наклона орбиты (рис. 5.3).

Результаты довольно близки к тем, что были получены в работах [13] (рис. 5.4) и [14] (рис. 5.5).

В нашей работе, как и в [13], [14], получилось, что соотношение масс  $\frac{m_{\text{giant}}}{m_{\text{dwarf}}} \lesssim 1$  и наклонение орбиты  $i \in (50^\circ, 60^\circ)$ .

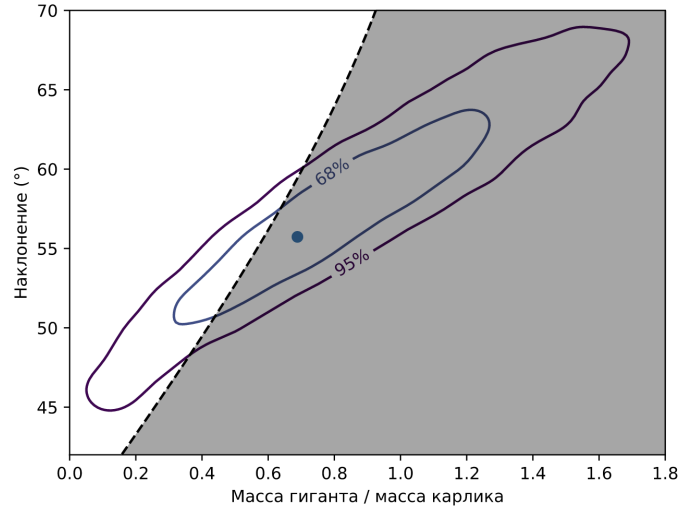


Рисунок 5.3 — Совместное распределение апостериорных вероятностей для соотношения масс компонентов и наклонения орбиты Т Северной Короны, полученное в данной работе с помощью теоремы Байеса. Синей точкой отмечены наиболее вероятные значения. Пунктирной линией отмечено ограничение на массу белого карлика, вытекающее из предела Чандрасекара и измерений лучевых скоростей.

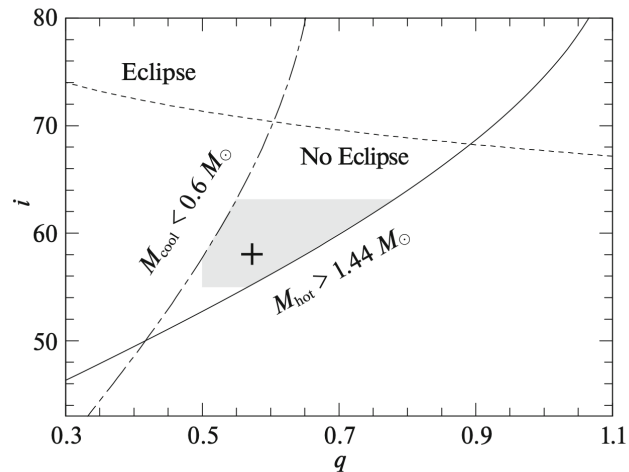


Рисунок 5.4 — Возможные наклонения и соотношения масс компонентов Т Северной Короны, полученные в работе [13]. Кривые очерчивают ограничения, соответствующие  $m_{\text{dwarf}} < 1.44 M_{\odot}$ ,  $m_{\text{giant}} > 0.6 M_{\odot}$  и отсутствию затмений. В серую область, по утверждению авторов статьи, по критерию Фишера попадает 90% моделей, описывающих наблюдаемые данные. Крестом обозначены параметры, соответствующие наименьшему отклонению от наблюдений ( $i = 58^{\circ}$ ,  $q = 0.57$ )

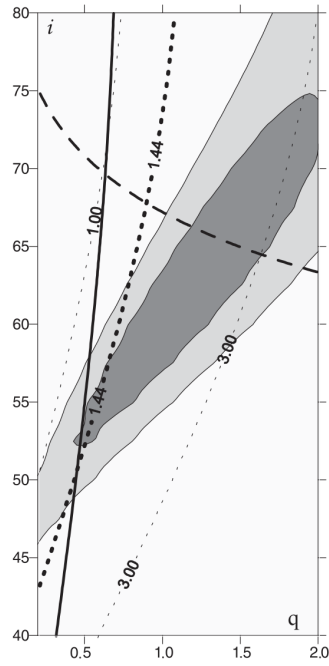


Рисунок 5.5 — Наклонения и соотношения масс компонентов Т Северной Короны, полученные в работе [14]. Темно-серая область соответствует доверительному интервалу 75%, светло-серая — 90%. В этой работе, как и в [13], использовался критерий Фишера. Сплошная линия соответствует  $m_{\text{giant}} = 0.6M_{\odot}$ , пунктирная линия — отсутствию затмений, линия из точек —  $m_{\text{dwarf}} = 1.44M_{\odot}$ .



## 5.2 Runs Test

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Announcing T CrB pre-eruption dip / B. E. Schaefer [и др.]. — 2023. — URL: <https://www.aavso.org/news/t-crb-pre-eruption-dip>. AAVSO.
- 2 Ge H., Xu K., Ghahramani Z. Turing: A Language for Flexible Probabilistic Inference // Proceedings of the Twenty-First International Conference on Artificial Intelligence and Statistics / под ред. A. Storkey, F. Perez-Cruz. — PMLR, 2018. — URL: <https://proceedings.mlr.press/v84/ge18b.html>.
- 3 Zeipel H. v. The Radiative Equilibrium of a Rotating System of Gaseous Masses // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1924. — URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/84.9.665>.
- 4 Lucy L. B. Gravity-Darkening for Stars with Convective Envelopes // Zeitschrift für Astrophysik. — 1967. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1967ZA.....65...89L>.
- 5 Claret A. Studies on stellar rotation. III. An improvement of the treatment of the brightening distribution of rotating and tidally distorted stars // Astronomy and Astrophysics. — 2003. — URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20030690>.
- 6 Espinosa Lara F., Rieutord M. Gravity darkening in binary stars // Astronomy and Astrophysics. — 2012. — URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219942>.
- 7 Claret A. A new non-linear limb-darkening law for LTE stellar atmosphere models // Astronomy and Astrophysics. — 2000. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2000A&A...363.1081C>.
- 8 The No-U-Turn sampler: adaptively setting path lengths in Hamiltonian Monte Carlo. / M. D. Hoffman, A. Gelman [и др.] // Journal of Machine Learning Research. — 2014. — URL: <https://www.jmlr.org/papers/volume15/hoffman14a/hoffman14a.pdf>.
- 9 Infrared Spectroscopy of Symbiotic Stars. I. Orbits for Well-Known S-Type Systems / F. C. Fekel [и др.] // The Astronomical Journal. — 2000. — URL: <https://dx.doi.org/10.1086/301260>.
- 10 The Metallicity and Lithium Abundances of the Recurring Novae T CrB and RS Oph / G. Wallerstein [и др.] // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 2008. — URL: <https://dx.doi.org/10.1086/587965>.

11 *Aufdenberg J. P.* Stellar Spectroscopy // Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition) / под ред. R. A. Meyers. — Third Edition. — New York : Academic Press, 2003. — ISBN 978-0-12-227410-7. — URL: <https://doi.org/10.1016/B0-12-227410-5/00735-3>.

12 *Alonso A., Arribas S., Martínez-Roger C.* The effective temperature scale of giant stars (F0-K5). II. Empirical calibration of  $T_{eff}$  versus colours and [Fe/H] // Astronomy and Astrophysics Supplement Series. — 1999. — DOI: 10.1051/aas:1999521. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1999A&AS..140..261A>.

13 Recurrent symbiotic nova T Coronae Borealis before the outburst / Maslennikova, N. A. [и др.] // Letters to the Astronomical Journal: Astronomy and Space Astrophysics. — 2023. — DOI: 10.31857/S0320010823090036. — URL: <https://istina.cemi-ras.ru/publications/article/594092122/>.

14 *Tatarnikova A. A., Tatarnikov A. M., Shenavrin V. I.* Modeling of the IR Light Curves of the Symbiotic Recurrent Nova T CrB // Binary Paths to Type Ia Supernovae Explosions / под ред. R. Di Stefano, M. Orio, M. Moe. — 2013. — DOI: 10.1017/S1743921312015025. — URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2013IAUS..281..203T>.