5. (7) Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min_x \left\| Ax - b \right\|_2 \quad \text{при условии} \quad Cx = \vec{0}$$

Предполагая, что матрица $A^T A$ обратима, воспользуйтесь методом множителей Лагранжа и получите выражение для точки минимума x.

$$\min \| Ax - b \| \iff \min \| Ax - b \|^2$$

$$L = (Ax - b)^T (Ax - b) - \lambda^T C x$$

$$= x^T A^T A x - 2 b^T A x - b^2 - \lambda^T C x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} = x^T C^T = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2 x^T A^T A - 2 b^T A - \lambda^T C = 0$$

$$\Downarrow \quad \cdot (A^T A)^{-1}$$

$$2 x^T - 2 b^T A (A^T A)^{-1} - \lambda^T C (A^T A)^{-1} = 0 \qquad (1)$$

$$\Downarrow \quad \cdot C^T$$

$$0 - (2 b^T A + \lambda^T C)(A^T A)^{-1} C^T = 0$$

$$\lambda^T C (A^T A)^{-1} C^T = -2 b^T A (A^T A)^{-1} C^T$$

Предполагая, что матрица $C(A^TA)^{-1}C^T$ обратима, получим

$$x^T = -2b^T A(A^TA)^{-1}C^T\left(C(A^TA)^{-1}C^T\right)^{-1}$$

Подставим в (1):

$$x^T = b^T A(A^TA)^{-1}\left(\hat{1} - C^T\left(C(A^TA)^{-1}C^T\right)^{-1}C(A^TA)^{-1}\right)$$

$$x = \left(\hat{1} - (A^TA)^{-1}C^T\left(C(A^TA)^{-1}C^T\right)^{-1}C\right)(A^TA)^{-1}A^T b$$