

II. EXERCISES

1. (10) Assume you are flipping a biased coin and the outcome of 100 flips is 75 Heads and 25 Tails. Compute the MLE for the Head probability p_0 and its error δp (the error is defined such that the probability of p to lie in the interval $[p_0 - \delta p, p_0 + \delta p]$ is 95%).

Вероятность получить H орлов и T решек
при заданной p равна

$$P(H, T | p) = \binom{H+T}{H} p^H (1-p)^T$$

(биномиальное распределение)

Функция правдоподобия равна

$$L(p) = P \Big|_{\substack{H=25 \\ T=75}} = \binom{100}{25} p^{25} (1-p)^{75}$$

Максимальное правдоподобие достигается при

$$\frac{\partial L}{\partial p} \sim 25 p^{24} (1-p)^{75} - 75 p^{25} (1-p)^{74} = 0$$

$$25(1-p) - 75p = 0$$

$$p_0 = 0,25$$

Нужно найти δp такое, что

$$0,95 = \frac{\int_{p_0 - \delta p}^{p_0 + \delta p} L(p) dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} L(p) dp} =$$

$$= \frac{\int_{p_0 - \delta p}^{p_0 + \delta p} p^{25} (1-p)^{25} dp}{\int_0^1 p^{25} (1-p)^{25} dp} = I_{p_0 + \delta p}(26, 26) - I_{p_0 - \delta p}(26, 26),$$

$$\text{где } I_x(a, b) := \frac{\int_0^x p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp}{\int_0^1 p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp} -$$

это релу меризованная неполная

Бета - функция; она является CDF

для Бета - распределения. Решим
полученное уравнение в Wolfram:

```
In[17]:= incBeta = CDF[BetaDistribution[26, 76]];
           [ф... бэта распределение]

In[18]:= Solve[incBeta[0.25 + dp] - incBeta[0.25 - dp] == 0.95]
           [решить уравнения]

... Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer
           was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the
           result.

... Solve: Warning: Solve was unable to prove that the solution set found is complete.

Out[18]= {{dp -> 0.0845949}}
```

Ответ: $p \in [0,25 - 0,846; 0,25 + 0,846]$