2. (25) Multivariate normal distribution over vectors of length k is defined as follows:

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{\Sigma}) = (2\pi)^{-k/2} \det(\mathbf{\Sigma})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}\right). \tag{1}$$

Your goal is to compute the following integral:

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2}) = \int d^k\mathbf{y}\mathcal{N}(\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathbf{\Sigma}_1)\mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{\Sigma}_2) \tag{2}$$

in two ways. Before proceeding to the multivariate case, you may consider $k = 1$ for simplicity.

- (5) The integral $I(\mathbf{x}, \mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2})$ has a straightforward probabilistic interpretation of a convolution of two probability distribution functions. Having this in mind, the result of this integration can be written down immediately (consult Eq. (1)).

Вычисление интеграла эквивалентно вычислению плотности вероятности для случайного вектора $x = x_1 + x_2$, где случайные векторы x_1 и x_2 распределены нормально:

$$x_1 \sim \mathcal{N}(\Sigma_1), \quad x_2 \sim \mathcal{N}(\Sigma_2)$$

Согласно одному из определений, случайный вектор x имеет многомерное нормальное распределение, если $\exists\, A, \mu$:

$$x = A\vec{\xi} + \vec{\mu},$$

где ξ – вектор из независимых стандартных нормальных величин: $\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$.

В нашем случае $\mu = 0$ и

$$x = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

т. е. суммарная случайная величина тоже распределена нормально.

Матрицы ковариаций у нескоррелированных векторов складываются, поэтому

$$x \sim \mathcal{N}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$$

$$I = P(x) = (2\pi)^{-k/2} \det(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} x\right)$$

- (20) The integral $I(\mathbf{x},\boldsymbol{\Sigma_1},\boldsymbol{\Sigma_2})$ can be reduced to the standard integral:

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^\top \mathbf{A}x+B^\top x} d^k x = \sqrt{\frac{(2\pi)^k}{\det A}}\, e^{\frac{1}{2}B^\top \mathbf{A}^{-1}B}.$$

Use this fact to re-derive the result of the previous item.

$$I = \int dy\, \mathcal{N}(x-y \mid \Sigma_1)\, \mathcal{N}(y \mid \Sigma_2)$$

$$= \int dy\, (2\pi)^{-k} \det(\Sigma_1)^{-1/2} \det(\Sigma_2)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left((x-y)^T \Sigma_1^{-1}(x-y) + y^T \Sigma_2^{-1} y\right)\right)$$

$$= (2\pi)^{-k} \det(\Sigma_1)^{-1/2} \det(\Sigma_2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T \Sigma_1^{-1} x\right) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\int dy\, \exp\left(-\frac{1}{2} y^T \overbrace{\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)}^{A} y + \overbrace{x^T \Sigma_1^{-1}}^{B^T} y\right)}_{(2\pi)^{k/2} \det\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} x^T \Sigma_1^{-1}\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1} \Sigma_1^{-1} x\right)}$$

$$= (2\pi)^{-k/2} \det(\Sigma_1)^{-1/2} \det(\Sigma_2)^{-1/2} \det\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2} x^T \left(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_1^{-1}\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1} \Sigma_1^{-1}\right)\right]$$

Докажем, что

$$\left(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_1^{-1}\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1}\Sigma_1^{-1}\right) = \left(\Sigma_1+\Sigma_2\right)^{-1}$$

Δ

$$\left(\Sigma_1+\Sigma_2\right)\left(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_1^{-1}\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1}\Sigma_1^{-1}\right) =$$

$$= \hat{1} + \Sigma_2\Sigma_1^{-1} - \underbrace{\underbrace{\left(\Sigma_1+\Sigma_2\right)\Sigma_1^{-1}}_{\left(\hat{1} - \Sigma_2\Sigma_1^{-1}\right)}}_{\Sigma_2\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_1^{-1}\right)}\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1}\Sigma_1^{-1}$$

$$= \hat{1} + \Sigma_2\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2\Sigma_1^{-1} = \hat{1}$$

$\square$

Заметим, что

$$\det\left(\Sigma_1\right)^{-1/2}\det\left(\Sigma_2\right)^{-1/2}\det\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)^{-1/2} =$$

$$= \det\left(\Sigma_1\left(\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}\right)\Sigma_2\right)^{-1/2} = \det\left(\Sigma_2+\Sigma_1\right)^{-1/2}$$

Следовательно,

$$I = (2\pi)^{-k/2}\det\left(\Sigma_2+\Sigma_1\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}x^T\left(\Sigma_1+\Sigma_2\right)^{-1}x\right)$$