- Выпишите сингулярные числа, а также левые и правые сингулярные векторы матрицы A. Так как SVD-разложение не единственно, найдите то разложение, в котором матрицы U и V имеют наименьшее количество отрицательных элементов.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = USV^T$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 104 & -72 \\ -72 & 146 \end{pmatrix} = VS^TU^TUSV^T = VS^2V^T, \quad \underbrace{U^TU}_{I}$$

S^2 – диагональная матрица, следовательно, матрица V – матрица перехода, приводящая A^TA к диагональному виду. Она состоит из собственных векторов A^TA.

$$A^TA \begin{cases} \lambda_1 = 200, & v_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 50, & v_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

правые сингулярные векторы

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \begin{pmatrix} 200 & \\ & 50 \end{pmatrix}$$

Аналогично для U:

$$US^2U^T = AA^T = \begin{pmatrix} 125 & 75 \\ 75 & 125 \end{pmatrix}$$

$$AA^T \begin{cases} \lambda_1 = 200, & u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 50, & u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

левые сингулярные векторы

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \sqrt{\begin{pmatrix} 200 & \\ & 50 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \pm 10\sqrt{2} & \\ & \pm 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Сингулярные числа обычно выбирают положительными: $s_1 = 10\sqrt{2}$, $s_2 = 5\sqrt{2}$

Проверим знаки:

$$USV^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\sqrt{2} & \\ & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$$

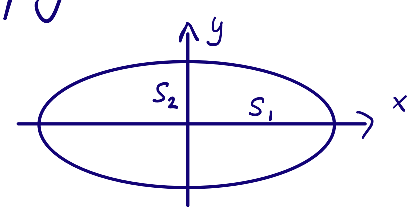
$$= \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Т.к. собственные векторы определены с точностью до знака, могла понадобиться корректировка.

- Нарисуйте единичный круг и его образ под действием оператора A. Изобразите сингулярные векторы и отметьте их координаты.

$$A = \underbrace{U}_{\text{вращение}} \underbrace{S}_{\text{сжатие}} \underbrace{V^T}_{\text{вращение}}$$

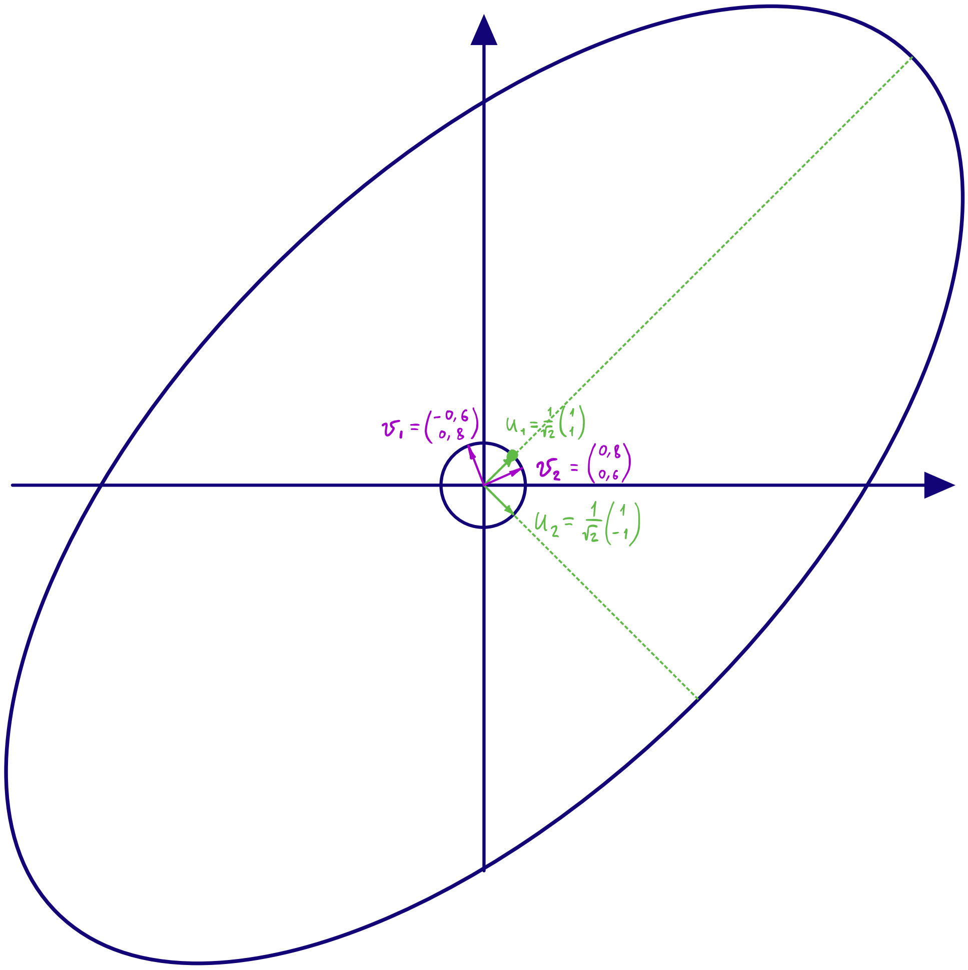
Вращение V^T переводит единичный круг в единичный круг. Затем он становится эллипсом



, который затем поворачивается матрицей U.

Результирующий эллипс имеет полуоси

$$\vec{u}_1 \cdot s_1 = \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 \cdot s_2 = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$$



- Чему равна спектральная норма и норма Фробениуса матрицы A?

$$\|A\|_2 := \max(s_1, s_2) = 10\sqrt{2}$$

$$\|A\|_F = \|S\|_F = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{250}$$

норма Фробениуса не меняется
при умножении на унитарную матрицу

- Найдите A^{-1} с помощью SVD-разложения.

$$A^{-1} = (USV^+)^{-1} = (V^+)^{-1} S^{-1} U^{-1} = V S^{-1} U^+$$

$$= \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{10\sqrt{2}} & \\ & \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,05 & -0,11 \\ 0,1 & -0,02 \end{pmatrix}$$

- Найдите собственные числа λ_1 и λ_2 матрицы A.

$$0 = \det(A - \lambda \hat{1}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 11 \\ -10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 100$$

$$D = 9 - 400 = -391$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{391}}{2}$$