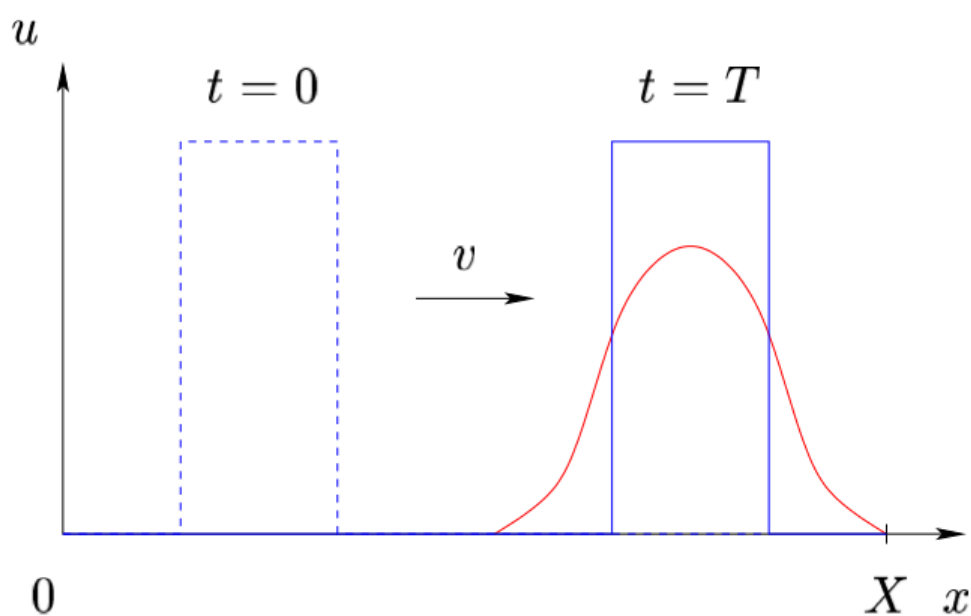


# Méthode de Galerkin discontinue (GD) espace - temps appliquée à l'équation d'advection 1D

Sana AMRI et Krystal LEGER\*  
Sous la direction de Juliette RYAN†

May 28, 2017



---

\*Elèves de MACS 2, SupGalilée - Université Paris 13

†ONERA Calcul Haute Performance - LAGA Université Paris 13

# Contents

<b>I</b>	<b>RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION D'ADVECTION 1D</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Méthode de Galerkin discontinue appliquée uniquement en espace</b>	<b>4</b>
1.1	Méthode de Galerkin discontinue	4
1.1.1	Discrétisation spatiale du domaine	5
1.1.2	Espace fonctionnel discret	5
1.1.3	Formulation variationnelle	7
1.1.4	Conditions aux interfaces	9
1.2	Discrétisation temporelle	11
1.2.1	Méthode Euler explicite	12
1.2.2	Méthode Runge Kutta d'ordre 2	14
1.2.3	Méthode RK3b	17
<b>2</b>	<b>Méthode de Galerkin discontinue espace-temps</b>	<b>19</b>
2.1	Discrétisation du domaine	19
2.2	Espace fonctionnel discret	20
2.3	Formulation variationnelle	22
2.4	Conditions aux interfaces	23
2.5	Vers la résolution d'un système matricielle	25
2.6	Parallélisme	30

# INTRODUCTION

A l'origine utilisée pour la résolution stationnaire de transport de neutrons, la méthode de Galerkin Discontinues (GD) permet aujourd'hui de résoudre de nombreux problèmes tels que les équations d'Euler, de Navier-Stokes, ou même de Maxwell. Cette méthode fait le lien entre la méthode des volumes finis et des éléments finis.

On discrétise le domaine en cellules formant un maillage. Puis, comme la méthode des éléments finis, on se place dans une base de fonctions définies sur tout l'ensemble de discrétisation. Le problème est ainsi mis sous formulation variationnelle en le multipliant par des fonctions tests appartenant au même ensemble que la base de fonction. On cherche ainsi à approcher chaque maille par une fonction qui est polynomiale sur la cellule concernée et valant zéro ailleurs. Ainsi, bien que les fonctions de formes soient définies sur tout l'espace de discrétisation, on ne leur impose pas de continuité aux interfaces, ce qui fait le lien avec les volumes finis. Les hypothèses de régularité sur la solution ne concernent que l'intérieur de chaque cellule. Le principe de conservation des flux permet, de la même manière que pour la méthode des volumes finis, de régulariser les valeurs aux interfaces.

Au cours de ce projet nous avons découvert la méthode GD en résolvant numériquement l'équation d'advection en 1D. Nous avons utilisé la méthode GD uniquement en espace et approximé le temps par diverses méthodes de différences finies. Cette méthode de résolution est aujourd'hui la plus répandue.

Puis, nous avons appliqué la méthode GD en espace et en temps. Autrement dit, nous avons considéré le temps comme une variable d'espace. Cette méthode, assez originale, permet d'aboutir à un système de résolution matriciel du type  $AU_h = B$  où  $A$  est une matrice tridiagonale par bloc. Cette méthode a l'avantage d'être parallélisable. En effet, à l'aide d'un développement de Taylor, il est possible de rendre cette matrice diagonale par bloc et donc permettre la résolution du système sur plusieurs machines.

## Part I

### RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION D'ADVECTION 1D

## 1 Méthode de Galerkin discontinue appliquée uniquement en espace

### 1.1 Méthode de Galerkin discontinue

Dans cette section, nous étudierons la méthode de Galerkin appliquées uniquement en espace dans le cas de l'équation de transport en 1D.

- La forme générale d'une équation de transport s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} F(u) = 0 \quad (1)$$

Ici on suppose que l'équation est linéaire  $F(u) = vu$ , avec  $v$  une constante.

- Dans cette partie, on cherche une fonction  $u : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable, solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \partial_x u = 0 & [0, T] \times [a, b] \\ u(t = 0, x) = u_0(x) & \text{en } t = 0 \\ u(t, x = a) := u_a(t) = u_0(a - vt) & \text{en } x = a \text{ (si } v > 0) \\ u(t, x = b) := u_b(t) = u_0(b - vt) & \text{en } x = b \text{ (si } v < 0) \end{cases} \quad (2)$$

On impose :

1. une condition initiale en temps  $u_0$  afin d'avoir unicité de la solution
2. des conditions aux limites à l'implémentation du schéma car le problème est hyperbolique.

### 1.1.1 Discrétisation spatiale du domaine

On définit un maillage régulier du segment  $[ab]$  par :

- $N+1$  points  $x_i$
- $N$  cellules  $K_i = ]x_i, x_{i+1}[$  de longueurs constantes  $h = x_{i+1} - x_i$
- Sur chaque cellule, on considère le point milieu  $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
- $x_1$  et  $x_{N+1}$  sont les points où les conditions limites sont atteintes.

On considère l'ensemble de discrétisation  $\Omega_h = \bigcup_{i=1}^N K_i$  en  $N$  cellules disjointes qui fait apparaître les arêtes du maillage (qui sont les points  $x_i$  dans le cas d'un segment).

Voici ci-dessous un schéma du maillage adopté :

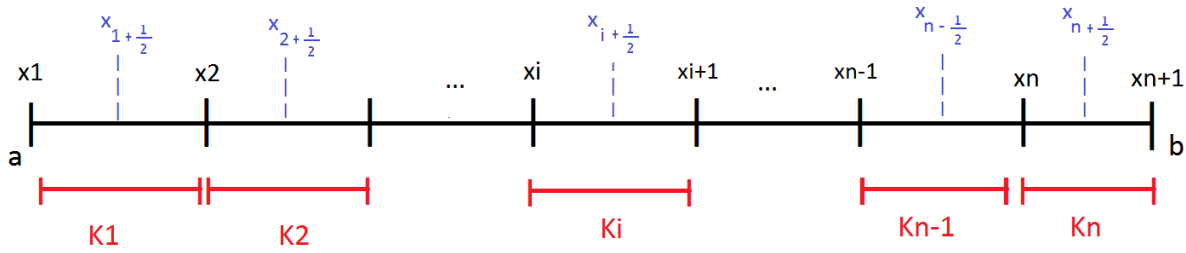


Figure 1: Maillage équation de transport 1D

### 1.1.2 Espace fonctionnel discret

La méthode de Galerkin consiste à approcher la solution  $u$  sur chaque cellule  $K_i$  par un polynôme  $v|_{K_i}$  de degré  $q$ . C'est pourquoi, on introduit l'espace :

$$V_h^i := \{v \in L^2(\Omega_h) \mid v|_{K_i} \in P^q(K_i)\}$$

avec  $P^q(K_i)$  est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus égal à  $q$  de  $K_i \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dans la suite, **on impose  $q = 1$** .

L'espace  $V_h^i$  est un espace de Hilbert (comme sous espace fermé de  $L^2(\Omega_h)$ ) de dimension fini  $q+1$ .

Ainsi, on peut donc définir  $\{\varphi_0^i, \varphi_1^i\}$  une base de  $V_h^i$  où :

$$\varphi_0^i(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans } K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_1^i(x) = \begin{cases} x - x_{i+\frac{1}{2}} & \text{dans } K_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, la solution numérique restreinte à la cellule  $K_i$  est notée :

$$u_{|K_i}(t, x) = \sum_{j=0}^q a_j^i(t) \varphi_j^i(x) = a_0^i(t) \varphi_0^i(x) + a_1^i(t) \varphi_1^i(x) \quad (3)$$

Sur chaque cellule  $K_i$ , l'équation **(2)** devient :

$$\frac{\partial u_{|K_i}(t, x)}{\partial t} + v \partial_x u_{|K_i}(t, x) = 0 \quad (4)$$

**Remarques :**

1. La solution numérique sur  $\Omega_h$  s'écrit :

$$u_h(t, x) = \sum_{i=1}^N u_{|K_i}(t, x) = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=0}^q a_j^i(t) \varphi_j^i(x) \right) = \sum_{i=1}^N a_0^i(t) \varphi_0^i(x) + a_1^i(t) \varphi_1^i(x)$$

2. On a  $2N$  inconnues  $a_j^i(t)$  qui dépendent du temps.

3. Par soucis de clarté, on notera :  $a_j^i(t) := a_j^i$ ,  $u_{|K_i}(t, x) := u_{|K_i}$  et  $\varphi_j^i(x) := \varphi_j^i$

L'espace de discrétisation sur  $\Omega_h$  est ainsi défini par  $V_h := \bigcup_{i=1}^N V_h^i$  dont chaque élément peut s'écrire comme combinaison linéaire de la base orthogonale  $F = \{\varphi_0^i, \varphi_1^i, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ .

### 1.1.3 Formulation variationnelle

Sachant que  $u_h \in V_h$  s'écrit

$$u_h(t, x) = \sum_{i=1}^N u_{|K_i}(t, x) \text{ avec,}$$

$$u_{|K_i}(t, x) = a_0^i(t)\varphi_0^i(x) + a_1^i(t)\varphi_1^i(x)$$

Trouver  $u_h \in V_h$  vérifiant **(2)** pour un instant  $t$  fixé, revient donc à déterminer les coefficients  $\{a_0^i(t), a_1^i(t)\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$

#### Formulation variationnelle :

1. On multiplie l'équation **(4)** par chaque éléments de la base  $F$  de  $V_h$ . ce qui nous amène au système suivant de  $2N^2$  équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{|K_i}}{\partial t} \varphi_0^\alpha + v \partial_x u_{|K_i} \varphi_0^\alpha = 0 & , \text{ pour } i, \alpha \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial u_{|K_i}}{\partial t} \varphi_1^\alpha + v \partial_x u_{|K_i} \varphi_1^\alpha = 0 & , \text{ pour } i, \alpha \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

2. On intègre chaque équation sur les cellules  $K_i$  et on applique la formule de Green sur les termes de dérivées en espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_i} u_{|K_i} \varphi_0^\alpha dx + v \int_{\partial K_i} (u_{|K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_0^\alpha d\sigma(x) - v \int_{K_i} \frac{\partial \varphi_0^\alpha}{\partial x} u_{|K_i} dx = 0, & \text{ pour } i, \alpha \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_i} u_{|K_i} \varphi_1^\alpha dx + v \int_{\partial K_i} (u_{|K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_1^\alpha d\sigma(x) - v \int_{K_i} \frac{\partial \varphi_1^\alpha}{\partial x} u_{|K_i} dx = 0, & \text{ pour } i, \alpha \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases} \quad (5)$$

#### Remarques :

- (a)  $\int_{K_i} \varphi_j^\alpha dx$ ,  $j \in \{0, 1\}$  est non nul uniquement lorsque  $\alpha = i$ .
- (b)  $\frac{\partial \varphi_0^i(x)}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial \varphi_1^i(x)}{\partial x} = \varphi_0^i(x)$
- (c) Ce système d'équations est la projection de la solution de l'équation de transport **(1)** sur l'espace  $V_h$ .

3. Après simplification, on obtient les  $2N$  équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_i} u_{|K_i} \varphi_0^i dx + v \int_{\partial K_i} (u_{|K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_0^i d\sigma(x) = 0 & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_i} u_{|K_i} \varphi_1^i dx + v \int_{\partial K_i} (u_{|K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_1^i d\sigma(x) - v \int_{K_i} \varphi_0^i u_{|K_i} dx = 0 & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

4. En substituant  $u_{|K_i}$  par sa projection sur  $K_i$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_i} [a_0^i \varphi_0^i + a_1^i \varphi_1^i] \varphi_0^i dx + v \int_{\partial K_i} (u_{|K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_0^i d\sigma(x) = 0 & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_i} [a_0^i \varphi_0^i + a_1^i \varphi_1^i] \varphi_1^i dx + v \int_{\partial K_i} (u_{|K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_1^i d\sigma(x) - v \int_{K_i} \varphi_0^i [a_0^i \varphi_0^i + a_1^i \varphi_1^i] dx = 0 & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

**Remarques :**

- (a) On ne substitue pas les  $u|_{K_i}$  qui sont sur le bord des cellules, car les intégrales de bord doivent être **conservatives**. Autrement dit, on doit avoir :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x \in K_{i-1}}} u(t, x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x \in K_i}} u(t, x)$$

L' intégrale de bord sur  $\partial K_i$  représente la somme des flux entrants ou sortants de  $K_i$ . Ce qui sort de  $K_{i-1}$  vers  $K_i$  doit être identique à ce qui entre dans  $K_i$  depuis  $K_{i-1}$ . On s'intéressera aux valeurs prises aux interfaces un peu plus bas.

- (b) On note :

- $C_{0,0} = \int_{K_i} \varphi_0^i \varphi_0^i dx = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = h$
- $C_{1,0} = C_{0,1} = \int_{K_i} \varphi_1^i \varphi_0^i dx = 0$  (caractère orthogonal de la base)
- $C_{1,1} = \int_{K_i} \varphi_1^i \varphi_1^i dx = \frac{h^3}{12}$

**On obtient ainsi l'EDO en temps suivante :**

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_0^i = \frac{-v}{C_{0,0}} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_0^i d\sigma(x) & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} a_1^i = \frac{-v}{C_{1,1}} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_1^i d\sigma(x) + \frac{v C_{0,0}}{C_{1,1}} a_0^i & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases} \quad (6)$$



### 1.1.4 Conditions aux interfaces

La solution numérique étant discontinue entre les arêtes<sup>1</sup>, il existe donc deux valeurs des variables de chaque coté d'une interface  $x_i$ . On doit avoir conservativité des intégrales de bords, c'est pourquoi on détermine les flux sur chaque interface.

- **Points intérieurs :**

On s'intéresse ici, aux points intérieurs  $x_i$ ,  $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$

On rappelle que l'on doit avoir le principe de conservativité :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x < x_i}} u|_{K_{i-1}}(t, x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x > x_i}} u|_{K_i}(t, x) \stackrel{\text{notation}}{\Longleftrightarrow} u|_{K_{i-1}}(t, x_i^-) = u|_{K_i}(t, x_i^+)$$

– **Si le flux est entrant  $v > 0$  :**

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_0^i d\sigma(x) &= \int_{K_i} \partial_x (u|_{K_i} \varphi_0^i) dx, \text{ (Formule de Stokes)} \\ &= \int_{K_i} \frac{d}{dx} (u|_{K_i} \varphi_0^i) dx \\ &= u|_{K_i}(t, x_{i+1}^-) \times \varphi_0^i(x_{i+1}^-) - u|_{K_{i-1}}(t, x_i^-) \times \varphi_0^i(x_i^+) \text{ (car } v > 0) \\ &= u|_{K_i}(t, x_{i+1}^-) - u|_{K_{i-1}}(t, x_i^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_1^i d\sigma(x) &= u|_{K_i}(t, x_{i+1}^-) \times \varphi_1^i(x_{i+1}^-) - u|_{K_{i-1}}(t, x_i^-) \times \varphi_1^i(x_i^+) \\ &= \frac{h}{2} [u|_{K_i}(t, x_{i+1}^-) + u|_{K_{i-1}}(t, x_i^-)] \end{aligned}$$

– **Si le flux est sortant  $v < 0$  :**

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_0^i d\sigma(x) &= \int_{K_i} \partial_x (u|_{K_i} \varphi_0^i) dx, \text{ (Formule de Stokes)} \\ &= \int_{K_i} \frac{d}{dx} (u|_{K_i} \varphi_0^i) dx \\ &= u|_{K_{i+1}}(t, x_{i+1}^+) \times \varphi_0^i(x_{i+1}^-) - u|_{K_i}(t, x_i^+) \times \varphi_0^i(x_i^+) \text{ (car } v < 0) \\ &= u|_{K_{i+1}}(t, x_{i+1}^+) - u|_{K_i}(t, x_i^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_1^i d\sigma(x) &= u|_{K_{i+1}}(t, x_{i+1}^+) \times \varphi_1^i(x_{i+1}^-) - u|_{K_i}(t, x_i^+) \times \varphi_1^i(x_i^+) \\ &= \frac{h}{2} [u|_{K_{i+1}}(t, x_{i+1}^+) + u|_{K_i}(t, x_i^+)] \end{aligned}$$

**Remarque :** Afin de faciliter la lecture, on se permettra par la suite l'abus d'écriture suivant :

$$\lim_{x \rightarrow x_i} u|_{K_i}(t, x) := u|_{K_i}(t, x_i)$$

<sup>1</sup>Dans notre cas le maillage est un segment, donc les arêtes ne sont rien d'autres que les points de discrétisations en espaces  $\{x_i\}_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ . On essaye de garder une écriture qui permettra de généraliser aisément dans le cas de l'application de la méthode GD en espace et en temps.

- **Conditions aux bords :**

Il s'agit des cas non traité dans les conditions aux interfaces.

- Cas  $i = 1$  et  $v > 0$  :

$$u(t, x_1) = u_a(t) = u_0(x_1 - vt)$$

- Cas  $i = N+1$  et  $v < 0$  :

$$u(t, x_{N+1}) = u_b(t) = u_0(x_{N+1} - vt)$$

## 1.2 Discrétisation temporelle

Pour toutes les discrétisations temporelles, on supposera  $v > 0$

On rappelle le système (6) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_0^i = \frac{-v}{C_{0,0}} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_0^i d\sigma(x) & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} a_1^i = \frac{-v}{C_{1,1}} \int_{\partial K_i} (u|_{K_i} \cdot \vec{n}) \varphi_1^i d\sigma(x) + \frac{v C_{0,0}}{C_{1,1}} a_0^i & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

$v$  étant strictement positif, on a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_0^i = \frac{-v}{C_{0,0}} [u|_{K_i}(t, x_{i+1}) - u|_{K_{i-1}}(t, x_i)] & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} a_1^i = \frac{-vh}{2C_{1,1}} [u|_{K_i}(t, x_{i+1}) + u|_{K_{i-1}}(t, x_i)] + \frac{v C_{0,0}}{C_{1,1}} a_0^i & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases} \quad (7)$$

Dans le système (7), on va approximer les termes contenant une dérivée en temps par différentes méthodes de différences finies.

- Instant initial  $t = 0$  :

- On cherche les coefficients  $\{a_j^i(0)\}$ .  
On a :

$$\begin{cases} \int_{K_i} u|_{K_i}(0, x) \varphi_0^i(x) dx = \int_{K_i} [a_0^i(0) \varphi_0^i(x) + a_1^i(0) \varphi_1^i(x)] \varphi_0^i(x) \\ \int_{K_i} u|_{K_i}(0, x) \varphi_1^i(x) dx = \int_{K_i} [a_0^i(0) \varphi_0^i(x) + a_1^i(0) \varphi_1^i(x)] \varphi_1^i(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{K_i} u|_{K_i}(0, x) \varphi_0^i(x) dx = a_0^i(0) C_{0,0} \\ \int_{K_i} u|_{K_i}(0, x) \varphi_1^i(x) dx = a_1^i(0) C_{1,1} \end{cases}$$

- En utilisant la donnée  $u(t = 0, x) = u_0(x)$ , on en déduit les coefficients  $\{a_j^i(0)\}$  :

$$\begin{cases} \int_{K_i} u_0(x) \varphi_0^i(x) dx = a_0^i(0) C_{0,0} \\ \int_{K_i} u_0(x) \varphi_1^i(x) dx = a_1^i(0) C_{1,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0^i(0) = \frac{1}{C_{0,0}} \int_{K_i} u_0(x) \varphi_0^i(x) dx \\ a_1^i(0) = \frac{1}{C_{1,1}} \int_{K_i} u_0(x) \varphi_1^i(x) dx \end{cases} \quad (8)$$

### 1.2.1 Méthode Euler explicite

#### Schéma du modèle

- On discrétise l'espace temps  $[0, T]$  en  $M+1$  points  $t_n$  tels que  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  soit constant,  $t_0=0$  et  $t_M = T$ . On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_0^i(t_n) = \frac{a_0^i(t_{n+1}) - a_0^i(t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t) & , \text{ pour } n \in \llbracket 0, M \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} a_1^i(t_n) = \frac{a_1^i(t_{n+1}) - a_1^i(t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t) & , \text{ pour } n \in \llbracket 0, M \rrbracket \end{cases}$$

- La solution de l'équation de transport est donc approchée par le schéma suivant pour  $n \in \llbracket 0, M \rrbracket$  :

$$\begin{cases} \frac{[a_0^i]^{n+1} - [a_0^i]^n}{\Delta t} = \frac{-v}{C_{0,0}} [u|_{K_i}(t, x_{i+1}) - u|_{K_{i-1}}(t, x_i)] & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{[a_1^i]^{n+1} - [a_1^i]^n}{\Delta t} = \frac{-vh}{2C_{1,1}} [u|_{K_i}(t, x_{i+1}) + u|_{K_{i-1}}(t, x_i)] + \frac{vC_{0,0}}{C_{1,1}} [a_0^i]^n & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

avec la notation  $[X]_{pas \text{ en temps}}^{pas \text{ en espace}}$ .

**Le schéma GD-EE est défini par :**

$$\begin{cases} [a_0^i]^{n+1} = [a_0^i]^n - \frac{(\Delta t)v}{C_{0,0}} \times ([u|_{K_i}]_{i+1}^n - [u|_{K_{i-1}}]_i^n) & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ [a_1^i]^{n+1} = [a_1^i]^n - \frac{vh(\Delta t)}{2C_{1,1}} ([u|_{K_i}]_{i+1}^n + [u|_{K_{i-1}}]_i^n) + \frac{v(\Delta t)C_{0,0}}{C_{1,1}} [a_0^i]^n & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases}$$

#### RESULTATS D'ANALYSE<sup>a</sup> :

- Condition de stabilité (CFL) :**  $v \cdot \Delta t < h^{\frac{3}{2}}$
- Ordre du schéma :** Le schéma est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

<sup>a</sup>Guy Chavent, B.Cockburn. Consistance et stabilité des schémas LRG pour les lois de conservations scalaires. [Rapport de recherche] RR-0710, INRIA. 1987. <inria-00075842>

**Test du schéma implémenté sur Matlab :** On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & [0, 2] \times [-1, 1] \\ u(t = 0, x) = \sin(\pi x) & \text{en } t = 0 \\ u(t, x = a) = \sin(\pi(a - vt)) & \text{en } x = a \\ u(t, x = b) = \sin(\pi(b - vt)) & \text{en } x = b \end{cases} \quad (9)$$

La solution exacte s'écrit :

$$u(x) = \sin(\pi(x - vt))$$

Voici ci-dessous un affichage de la solution obtenue<sup>2</sup> à l'instant T=2.

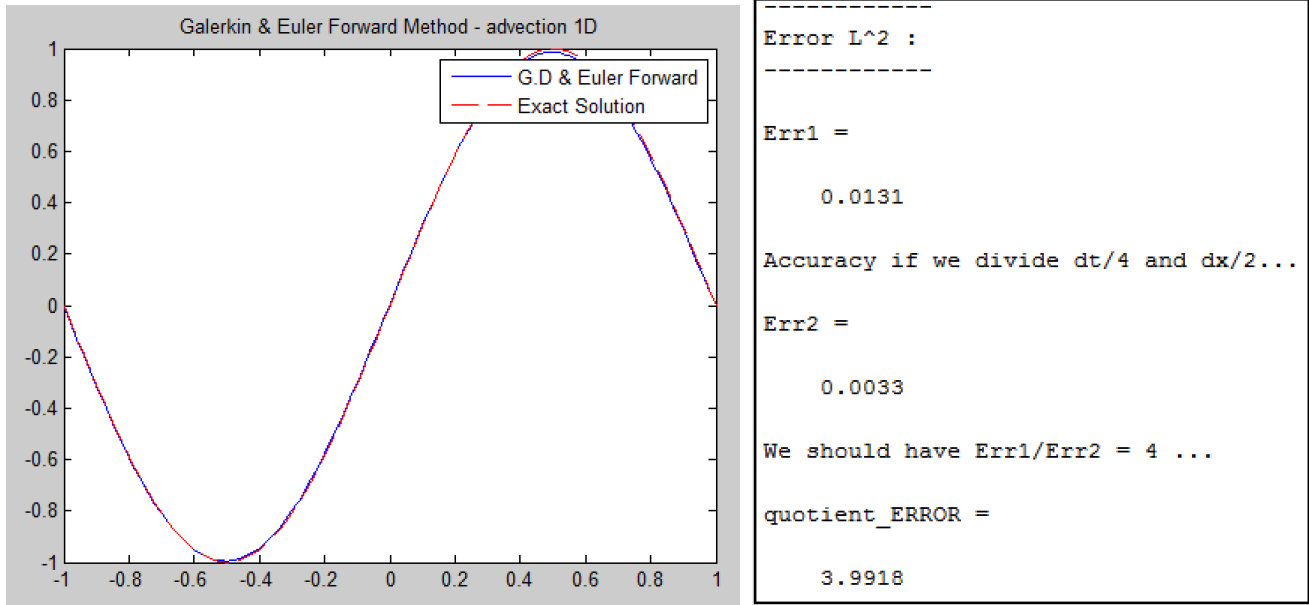


Figure 2: Methode GD & Euler explicite - équation de transport 1D

#### • Vérification de l'ordre du schéma :

On choisit un pas de discrétisation en temps et en espace qui vérifient la condition (CFL).

L'erreur de troncature Err doit satisfaire :  $Err = O(dt) + O(h^2)$ . Autrement dit, si on pose  $dt_1 = \frac{dt}{4}$  et  $h_1 = \frac{h}{2}$  alors la nouvelle erreur doit être de l'ordre :

$$Err1 = O(dt_1) + O(h_1^2) = \frac{1}{4} \times [O(dt) + O(h^2)] = \frac{1}{4} \times Err$$

Dans le test ci-dessus, on a considéré :

- N=100 cellules en espace et M=1000 cellules en temps pour calculer Err1
- N=200 cellules en espace et M=4000 cellules en temps pour calculer Err2

L'erreur a été calculé en norme  $L^2$  discrète définie par :

$$Err = \sqrt{\sum_{i=1}^{N+1} h * (Uh(T, x_i) - Uexact(T, x_i))^2}$$

<sup>2</sup>Méthode d'implémentation - cf ANNEXE 1

### 1.2.2 Méthode Runge Kutta d'ordre 2

On discrétise l'espace temps  $[0, T]$  en  $M+1$  points  $t_n$  tels que  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  soit constant,  $t_0=0$  et  $t_M=T$ .

Par le système (6), on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} a_0^i = -\frac{v}{C_{0,0}} [u_{|K_i}(t, x_{i+1}) - u_{|K_{i-1}}(t, x_i)] & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \\ \frac{\partial}{\partial t} a_1^i = -\frac{vh}{2C_{1,1}} \times [u_{|K_i}(t, x_{i+1}) + u_{|K_{i-1}}(t, x_i)] + \frac{vC_{0,0}}{C_{1,1}} a_0^i & , \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{cases} \quad (10)$$

On cherche à se ramener sous la forme :  $Y'(t) = F(t, Y(t))$  afin de pouvoir appliquer une méthode de Runge-Kutta.

- On pose pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ :

$$Y_i(t) = \begin{pmatrix} y_1^i(t) \\ y_2^i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^i(t) \\ a_1^i(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

et

$$F_i(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{C_{0,0}} [u_{|K_i}(t, x_{i+1}) - u_{|K_{i-1}}(t, x_i)] \\ -\frac{vh}{2C_{1,1}} \times [u_{|K_i}(t, x_{i+1}) + u_{|K_{i-1}}(t, x_i)] + \frac{vC_{0,0}}{C_{1,1}} y_1^i(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\text{avec } u_{|K_i}(t, x_{i+1}) = y_1^i(t) + y_2^i(t) \times \frac{h}{2} \text{ pour } i \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ et } u_{|K_{i-1}}(t, x_i) = \begin{cases} y_1^{i-1}(t) + y_2^{i-1}(t) \times \frac{h}{2} & \text{si } i \in \llbracket 2, N \rrbracket \\ u_0(x_1 - vt) & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

- Pour un  $i$  fixé, on a donc  $Y_i'(t) = F_i(t, Y(t))$

Ainsi,

$$Y'(t) = F(t, Y(t)) \iff \begin{cases} Y_1'(t) = F_1(t, Y(t)) \\ Y_2'(t) = F_2(t, Y(t)) \\ \vdots \\ Y_i'(t) = F_i(t, Y(t)) \\ \vdots \\ Y_N'(t) = F_N(t, Y(t)) \end{cases} \quad (13)$$

**Attention** : Chaque ligne du système contient 2 équations. Ce qui fait un total de  $2N$  équations.

On applique une méthode de Runge Kutta 2 ( $\alpha = \frac{1}{2}$  - tableau de Butcher) **sur le système (13)** :  
Pour chaque pas de temps  $n \times \Delta t$ , on calcule :

$$\begin{cases} K_1 &= F(t_n, Y^n) \\ K_2 &= F(t_{n+1}, Y^n + \Delta t \times K_1) \\ Y^{n+1} &= Y^n + \frac{\Delta t}{2} \times (K_1 + K_2) \end{cases}$$

- **Remarques :**

1.  $K_1$  et  $K_2$  sont des vecteurs de tailles  $2N$ .
2. On note  $Y^n$  vecteur de  $2N$  éléments à l'instant  $t_n$ .

La méthode RK2 est définie pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  par :

$$\begin{cases} K_{1,i} &= F_i(t_n, Y^n) \\ K_{2,i} &= F_i(t_{n+1}, Y^n + \Delta t \times K_1) \\ Y_i^{n+1} &= Y_i^n + \frac{\Delta t}{2} \times (K_{1,i} + K_{2,i}) \end{cases} \quad (14)$$

avec,

$$F_i(t_n, Y^n) = \left( \begin{array}{c} -\frac{v}{C_{0,0}} [u_{|K_i}(t_n, x_{i+1}) - u_{|K_{i-1}}(t_n, x_i)] \\ -\frac{vh}{2C_{1,1}} \times [u_{|K_i}(t_n, x_{i+1}) + u_{|K_{i-1}}(t_n, x_i)] + \frac{vC_{0,0}}{C_{1,1}} \times [y_1^i]^n \end{array} \right)$$

---

## RESULTATS D'ANALYSE<sup>a</sup>

1. **Condition de stabilité (CFL) :**  $v \cdot dt < 0.3 \cdot h$
2. **Ordre du schéma :** Le schéma est d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.

---

<sup>a</sup>Thèse de Christophe Drozo, ONERA, page 38

**Test du schéma implémenté sur Matlab :** On cherche à résoudre le système (14).

Voici ci-dessous un affichage de la solution obtenue<sup>3</sup> à l'instant  $T=2$ .

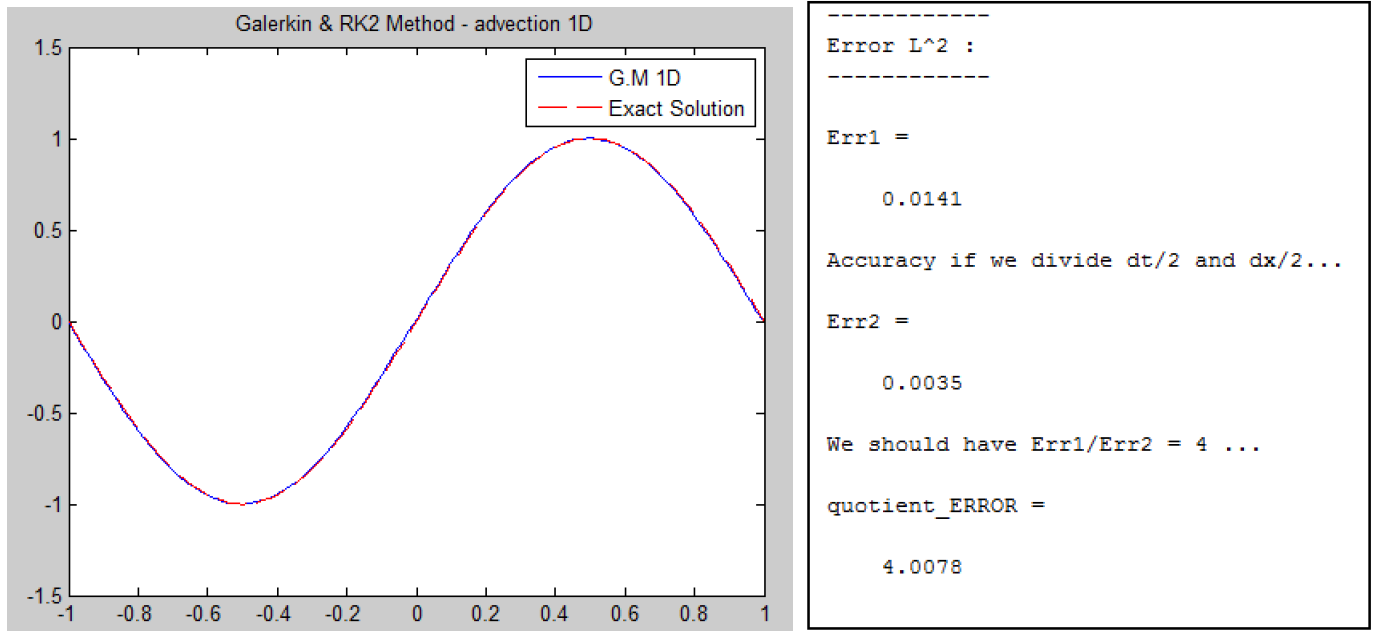


Figure 3: Methode GD & RK2 - équation de transport 1D

• **Vérification de l'ordre du schéma :**

On choisit un pas de discrétisation en temps et en espace qui vérifient la condition (CFL).

L'erreur de troncature Err doit satisfaire :  $Err = O(dt^2) + O(h^2)$ . Autrement dit, si on pose  $dt_1 = \frac{dt}{2}$  et  $h_1 = \frac{h}{2}$  alors la nouvelle erreur doit être de l'ordre :

$$Err1 = O(dt_1^2) + O(h_1^2) = \frac{1}{4} \times [O(dt^2) + O(h^2)] = \frac{1}{4} \times Err$$

Dans le test ci-dessous, on a considéré :

- N=100 cellules en espace et M=400 cellules en temps pour calculer Err1
- N=200 cellules en espace et M=800 cellules en temps pour calculer Err2

<sup>3</sup>Méthode d'implémentation - cf ANNEXE 2



### 1.2.3 Méthode RK3b

Dans la méthode RK3b, on se ramène à un système déjà établi dans la section 1.2.2, et définit par la formule **(13)** que l'on rappelle ici :

$$Y'(t) = F(t, Y(t)) \iff \begin{cases} Y'_1(t) = F_1(t, Y(t)) \\ Y'_2(t) = F_2(t, Y(t)) \\ \vdots \\ Y'_i(t) = F_i(t, Y(t)) \\ \vdots \\ Y'_N(t) = F_N(t, Y(t)) \end{cases}$$

avec,

$$Y_i(t) = \begin{pmatrix} y_1^i(t) \\ y_2^i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^i(t) \\ a_1^i(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_i(t, Y(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{C_{0,0}}[u_{|K_i}(t, x_{i+1}) - u_{|K_{i-1}}(t, x_i)] \\ -\frac{vh}{2C_{1,1}} \times [u_{|K_i}(t, x_{i+1}) + u_{|K_{i-1}}(t, x_i)] + \frac{vC_{0,0}}{C_{1,1}} y_{1,i}(t) \end{pmatrix} \quad (15)$$

**La méthode RK3b est définie pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  par :**

$$\begin{cases} K_{1,i} = Y_i^n + \Delta t \times F_i(t_n, Y^n) \\ K_{2,i} = \frac{3}{4}Y_i^n + \frac{1}{4}K_{1,i} + \frac{\Delta t}{4}F_i(t_{n+1}, K_1) \\ Y_i^{n+1} = Y_i^n + \frac{\Delta t}{6}[F_i(t_n, Y^n) + F_i(t_{n+1}, K_1) + 4F_i(t_{n+\frac{1}{2}}, K_2)] \end{cases} \quad (16)$$

#### RESULTATS D'ANALYSE

1. **Condition de stabilité (CFL) :**  $v \cdot dt < 0.41 \cdot h$
2. **Ordre du schéma :** Le schéma est d'ordre 3 en temps et d'ordre 2 en espace.

**Test du schéma implémenté sur Matlab :** On cherche à résoudre le système (16).

Voici ci-dessous un affichage de la solution obtenue<sup>4</sup> à l'instant T=1.

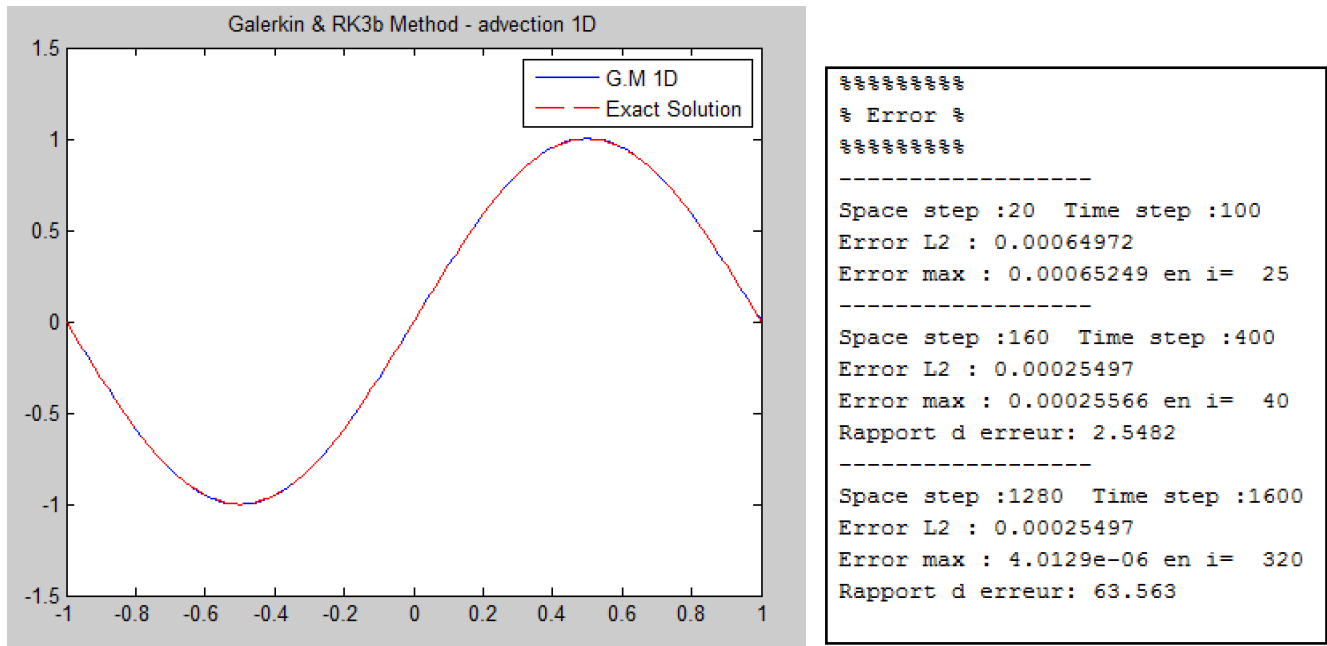


Figure 4: Methode GD & RK3b - équation de transport 1D

#### • Vérification de l'ordre du schéma :

On choisit un pas de discrétisation en temps et en espace qui vérifient la condition (CFL). Dans le test ci-dessous, on a considéré :

- N=100 cellules en espace et M=500 cellules en temps

L'erreur de troncature Err doit satisfaire :  $Err = O(dt^3) + O(h^2)$ . Autrement dit, si on pose  $dt_1 = \frac{dt}{4}$  et  $h_1 = \frac{h}{8}$  alors la nouvelle erreur doit être de l'ordre :

$$Err1 = O(dt_1^3) + O(h_1^2) = \frac{1}{64} \times [O(dt^2) + O(h^2)] = \frac{1}{64} \times Err$$

<sup>4</sup>Pour l'implémentation, on procède de manière analogue à la méthode RK2.

## 2 Méthode de Galerkin discontinue espace-temps

Dans cette section, on considère la variable de temps comme une variable d'espace. Autrement dit, le système (1) se réécrit de la façon suivante :

$$\nabla \cdot \overrightarrow{G(u)} = 0 \quad (17)$$

où :

- $\overrightarrow{G(u)} = \begin{pmatrix} vu \\ u \end{pmatrix}$ ,
- $v$  est une **constante** non nulle
- l'opérateur  $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_t \end{pmatrix}$

Autrement dit, on cherche une fonction  $u : [0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable, telle que :

$$\begin{cases} v\partial_x u + \partial_t u = 0 & [0, T] \times [0, 1] \\ u(t, 0) := g_1(t) & \text{en } x = 0 \\ u(0, x) := g_2(x) & \text{en } t = 0 \end{cases} \quad (18)$$

### 2.1 Discrétisation du domaine

On définit un maillage régulier du rectangle  $[0, T] \times [0, 1]$  par :

- $N_x + 1$  points  $x_i$  sur  $[0, 1]$ .
- $N_x$  intervalles  $K_i^{[x]} = ]x_i, x_{i+1}[$  sur  $[0, 1]$  telle que  $h_x = x_{i+1} - x_i$  soit constant.

---

- $N_t + 1$  points  $t_j$  sur  $[0, T]$ .
- $N_t$  intervalles  $K_j^{[t]} = ]t_j, t_{j+1}[$  sur  $[0, T]$  telle que  $h_t = t_{j+1} - t_j$  soit constant.

---

- $N_x \times N_t$  cellules  $\Omega_{ij} = K_i^{[x]} \times K_j^{[t]}$  d'aire constante  $\Lambda = h_t \times h_x$

---

- Sur chaque intervalle  $K_i$  et  $K_j$ , on considère respectivement les points milieux  $\{x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\}_{i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket}$  et  $\{t_{j+\frac{1}{2}} = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}\}_{j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket}$

---

- La décomposition du domaine  $\Omega_h = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq N_x \\ 1 \leq j \leq N_t}} \Omega_{ij}$  en  $N_x \times N_t$  cellules disjointes fait apparaître les arêtes du maillage :

$$\Gamma = \Gamma_v + \Gamma_h$$

où,

$\rightarrow \Gamma_v$  est l'ensemble des arêtes verticales (cf schéma ci-dessous) définie par :

$$\Gamma_v = \{\sigma_{1,j}^{[v]}, \sigma_{2,j}^{[v]}, \dots, \sigma_{N_x+1,j}^{[v]}, \forall j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket\}$$

$\rightarrow \Gamma_h$  est l'ensemble des arêtes horizontales (cf schéma ci-dessous) définie par :

$$\Gamma_h = \{\sigma_{i,1}^{[h]}, \sigma_{i,2}^{[h]}, \dots, \sigma_{i,N_t+1}^{[h]}, \forall i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket\}$$

Voici ci-dessous un schéma du maillage adopté.

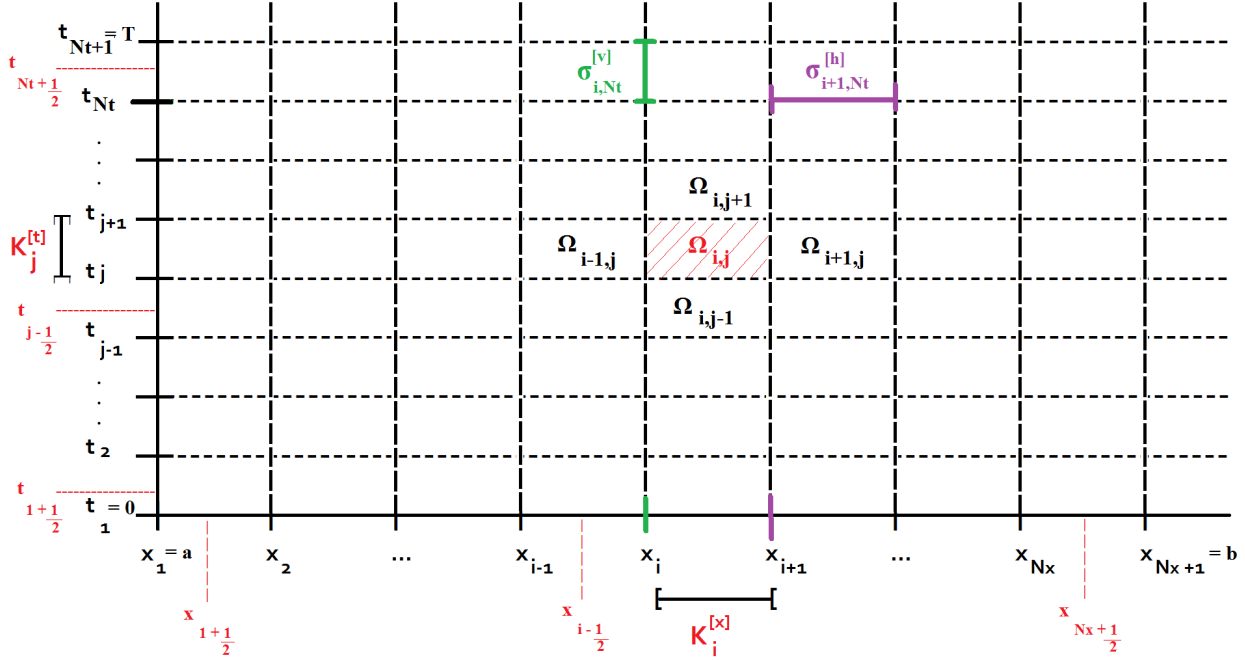


Figure 5: Schéma du maillage 2D

## 2.2 Espace fonctionnel discret

- La méthode de Galerkin consiste à approcher la solution  $u$  sur chaque cellule  $\Omega_{ij}$  par un polynôme  $u|_{\Omega_{ij}}$  de degré  $q$ . C'est pourquoi, on introduit l'espace :

$$W_h^{ij} := \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_{\Omega_{ij}} \in P^q(\Omega_{ij})\}$$

où  $P^q(\Omega_{ij})$  est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus égal à  $q$  de  $\Omega_{ij} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dans la suite, **on impose  $q = 1$** .

- Notons que sur chaque arête, on a une discontinuité de première espèce de la solution.
- Les polynômes de  $n$  variables, de degré inférieur ou égal à  $q$ , forme un espace linéaire de dimension :

$$\frac{n^{q+1} - 1}{n - 1}$$

Ici, on a  $n = 2$  et  $q = 1$ , c'est pourquoi  $W_h^{ij}$  est de dimension 3.

- On définit ainsi  $\{\varphi_0^{i,j}, \varphi_1^{i,j}, \varphi_2^{i,j}\}$  une base de  $W_h^{ij}$  où :

$$\varphi_0^{i,j}(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_{ij} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_1^{i,j}(t, x) = \begin{cases} x - x_{i+\frac{1}{2}} & \text{dans } \Omega_{ij} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_2^{i,j}(t, x) = \begin{cases} t - t_{j+\frac{1}{2}} & \text{dans } \Omega_{ij} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La solution numérique restreinte à  $\Omega_{ij}$  s'écrit comme combinaison linéaire de la base défini ci-dessus :

$$u|_{\Omega_{ij}}(t, x) = a_0^{i,j} \times \varphi_0^{i,j}(t, x) + a_1^{i,j} \times \varphi_1^{i,j}(t, x) + a_2^{i,j} \times \varphi_2^{i,j}(t, x)$$

- Sur  $\Omega_h$ , la solution  $u_h$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de la base  $E = \{\varphi_0^{i,j}, \varphi_1^{i,j}, \varphi_2^{i,j}, i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket, j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket\}$

$$u_h(t, x) = \sum_{i,j} u|_{\Omega_{ij}}(t, x)$$

- Sur chaque cellule  $\Omega_{ij}$ , l'équation **(18)** devient :

$$\text{div}(\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}})) = 0 \tag{19}$$

## 2.3 Formulation variationnelle

Sachant que  $u_h \in \Omega_h$  s'écrit

$$u_h(t, x) = \sum_{i,j} u_{|\Omega_{ij}}(t, x) \text{ avec,}$$

$$u_{|\Omega_{ij}}(t, x) = a_0^{i,j} \times \varphi_0^{i,j}(t, x) + a_1^{i,j} \times \varphi_1^{i,j}(t, x) + a_2^{i,j} \times \varphi_2^{i,j}(t, x)$$

Trouver  $u_h \in \Omega_h$  vérifiant **(18)**, revient donc à déterminer les  $3 \times N_x \times N_t$  coefficients  $\{a_0^{ij}, a_1^{ij}, a_2^{ij}\}_{i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket, j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket}$ .

**Formulation variationnelle :**

1. On multiplie l'équation **(19)** par chaque élément de la base **E** de  $\Omega_h$ .  
Ce qui nous amène au système de  $3 \times N_x^2 \times N_t^2$  équations suivant :

Pour tout  $(i, \alpha) \in \llbracket 1, N_x \rrbracket^2$  et  $(j, \beta) \in \llbracket 1, N_t \rrbracket^2$ ,

$$\begin{cases} \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x))] \varphi_0^{\alpha, \beta}(t, x) = 0 \\ \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x))] \varphi_1^{\alpha, \beta}(t, x) = 0 \\ \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x))] \varphi_2^{\alpha, \beta}(t, x) = 0 \end{cases}$$

2. On intègre chaque équation sur les cellules  $\Omega_{ij}$  :

Pour tout  $(i, \alpha) \in \llbracket 1, N_x \rrbracket^2$  et  $(j, \beta) \in \llbracket 1, N_t \rrbracket^2$ ,

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{ij}} \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x))] \times \varphi_0^{\alpha, \beta}(t, x) \, dxdt = 0 \\ \int_{\Omega_{ij}} \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x))] \times \varphi_1^{\alpha, \beta}(t, x) \, dxdt = 0 \\ \int_{\Omega_{ij}} \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x))] \times \varphi_2^{\alpha, \beta}(t, x) \, dxdt = 0 \end{cases}$$

**Remarques :**

- (a)  $\int_{K_{ij}} \varphi_k^{\alpha, \beta}(t, x) \, dxdt$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$  est non nul uniquement lorsque  $\alpha = i$  et  $\beta = j$ .  
On a ainsi  $3 \times N_x \times N_t$  équations.
- (b) Ce système d'équations est la projection de la solution de l'équation de transport **(18)** sur l'espace  $\Omega_h$
- (c) Par soucis de clarté, on notera  $u_{|\Omega_{ij}}(t, x) := u_{|\Omega_{ij}}$  et  $\varphi_k^{i,j}(t, x) := \varphi_k^{i,j}$

3. Par la remarque **(a)**, on s'est ramené à autant d'équations que d'inconnues.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$ , le système précédent équivaut à :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{ij}} \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \varphi_0^{i,j}] \, dxdt - \int_{\Omega_{ij}} \vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot (\nabla \varphi_0^{i,j}) \, dxdt = 0 \\ \int_{\Omega_{ij}} \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \varphi_1^{i,j}] \, dxdt - \int_{\Omega_{ij}} \vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot (\nabla \varphi_1^{i,j}) \, dxdt = 0 \\ \int_{\Omega_{ij}} \text{div}[\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \varphi_2^{i,j}] \, dxdt - \int_{\Omega_{ij}} \vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot (\nabla \varphi_2^{i,j}) \, dxdt = 0 \end{cases}$$

**Remarques :**

(a) On a  $\nabla \varphi_0^{i,j}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\nabla \varphi_1^{i,j}(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\nabla \varphi_2^{i,j}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

On applique la formule de Green, afin de faire apparaître les interfaces (que l'on déterminera par la suite en utilisant le principe de conservativité) :

Ainsi, en simplifiant, on obtient pour tout  $i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$ ,

$$\begin{cases} \int_{\partial \Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_0^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) = 0 \\ \int_{\partial \Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_1^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) - \int_{\Omega_{ij}} v \times u|_{\Omega_{ij}} dx dt = 0 \\ \int_{\partial \Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_2^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) - \int_{\Omega_{ij}} u|_{\Omega_{ij}} dx dt = 0 \end{cases} \quad (20)$$

## 2.4 Conditions aux interfaces

La solution numérique étant discontinue sur les arêtes  $\Gamma$ , il existe donc deux valeurs des variables de chaque coté d'une interface  $\sigma_{i,j}^{[.]}$ . On doit avoir conservativité des intégrales de bords, c'est pourquoi on détermine les flux sur chaque interfaces.

**Arêtes internes :** On définit l'ensemble des arêtes internes par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{int} &= \Gamma \setminus \Gamma_{bord} \\ \text{où } \Gamma_{bord} &= \{\sigma_{1,j}^{[v]}, \forall j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket\} \cup \{\sigma_{i,1}^{[h]}, \forall i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket\} \end{aligned}$$

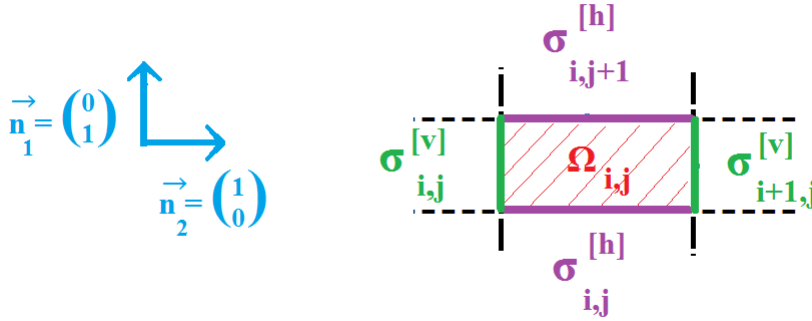


Figure 6: arêtes internes

Pour  $k = \{0, 1, 2\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= \int_{\sigma_{i,j}^{[v]}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) \\ &+ \int_{\sigma_{i,j}^{[h]}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) \\ &+ \int_{\sigma_{i+1,j}^{[v]}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) \\ &+ \int_{\sigma_{i,j+1}^{[h]}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) \end{aligned}$$

De façon analogue au cas 1D, les intégrales doivent être conservatives. Ainsi, on doit donc avoir :  
 Pour tout  $x_i$  tel que  $i \in \llbracket 2, N_x \rrbracket$  et  $t_j$  tel que  $j \in \llbracket 2, N_t \rrbracket$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x < x_i}} u_{|\Omega_{i-1,j}}(t, x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i \\ x > x_i}} u_{|\Omega_{i,j}}(t, x) \\ \lim_{\substack{t \rightarrow t_j \\ t < t_j}} u_{|\Omega_{i,j-1}}(t, x) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_j \\ t > t_j}} u_{|\Omega_{i,j}}(t, x) \end{array} \right. \stackrel{\text{notation}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} u_{|\Omega_{i-1,j}}(t, x_i^-) = u_{|\Omega_{i,j}}(t, x_i^+) \\ u_{|\Omega_{i,j-1}}(t_j^-, x) = u_{|\Omega_{i,j}}(t_j^+, x) \end{array} \right.$$

- **Si le flux est entrant**  $v > 0$  : (Le flux se déplace de  $x_i \rightarrow x_{i+1}$  et de  $t_j \rightarrow t_{j+1}$ )

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x_i^-)) \cdot (-\vec{n}_2)] \times \varphi_k^{i,j}(t, x_i^+) d\sigma(t) \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t_j^-, x)) \cdot (-\vec{n}_1)] \times \varphi_k^{i,j}(t_j^+, x) d\sigma(x) \\ &+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t, x_{i+1}^-)) \cdot (\vec{n}_2)] \times \varphi_k^{i,j}(t, x_{i+1}^-) d\sigma(t) \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}(t_{j+1}^-, x)) \cdot (\vec{n}_1)] \times \varphi_k^{i,j}(t_{j+1}^+, x) d\sigma(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} v [u_{|\Omega_{ij}}(t, x_{i+1}^-) \varphi_k^{i,j}(t, x_{i+1}^-) - u_{|\Omega_{i-1,j}}(t, x_i^-) \varphi_k^{i,j}(t, x_i^+)] d\sigma(t) \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u_{|\Omega_{ij}}(t_{j+1}^-, x) \varphi_k^{i,j}(t_{j+1}^-, x) - u_{|\Omega_{i,j-1}}(t_j^-, x) \varphi_k^{i,j}(t_j^+, x)] d\sigma(x) \end{aligned} \quad (21)$$

- **Si le flux est sortant**  $v < 0$  : (Le flux se déplace de  $x_i \leftarrow x_{i+1}$  et de  $t_j \leftarrow t_{j+1}$ )

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} v [u_{|\Omega_{i+1,j}}(t, x_{i+1}^+) \varphi_k^{i,j}(t, x_{i+1}^-) - u_{|\Omega_{i,j}}(t, x_i^+) \varphi_k^{i,j}(t, x_i^+)] d\sigma(t) \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u_{|\Omega_{ij}}(t_{j+1}^-, x) \varphi_k^{i,j}(t_{j+1}^-, x) - u_{|\Omega_{i,j-1}}(t_j^-, x) \varphi_k^{i,j}(t_j^+, x)] d\sigma(x) \end{aligned}$$

**Arêtes externes :** Pour les arêtes sur le bord  $\Gamma_{bord}$ , on utilise les conditions du système **(18)** :

- $u(0, x_i) = g_2(x_i), \forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$
- $u(t_j, 0) = g_1(t_j), \forall j \in \llbracket 1, N_t + 1 \rrbracket$



## 2.5 Vers la résolution d'un système matricielle

Dans cette partie, nous allons écrire la formulation variationnelle sous forme matricielle dans le cas où le flux est entrant  $v > 0$ .

### Retour vers la formulation variationnelle (20) :

Dans l'objectif de simplifier le système (20) dans le cas où le flux est entrant ( $v > 0$ ), nous allons adopter certaines notations.

- On pose ici certaines notations et on effectue des calculs formels, afin de faciliter l'écriture des étapes qui vont suivre :

(a)  $C_{k_1 k_2}^{i,j}(t, x) = C_{k_2 k_1}^{i,j}(t, x) = \varphi_{k_1}^{i,j}(t, x) \times \varphi_{k_2}^{i,j}(t, x)$  avec  $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2\}$  :

	$C_{0k}^{i,j}(t, x)$	$C_{1k}^{i,j}(t, x)$	$C_{2k}^{i,j}(t, x)$
$k = 0$	1	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$
$k = 1$	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i+\frac{1}{2}})^2$	$(x - x_{i+\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$
$k = 2$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i+\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$	$(t - t_{j+\frac{1}{2}})^2$

(b)  $C_{k_1 k_2}^{i-1,j}(t, x) = \varphi_{k_1}^{i-1,j}(t, x) \times \varphi_{k_2}^{i,j}(t, x)$  avec  $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2\}$  :

	$C_{k_1 0}^{i-1,j}(t, x)$	$C_{k_1 1}^{i-1,j}(t, x)$	$C_{k_1 2}^{i-1,j}(t, x)$
$k_1 = 0$	1	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$
$k_1 = 1$	$x - x_{i-\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$	$(x - x_{i-\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$
$k_1 = 2$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$	$(t - t_{j+\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$	$(t - t_{j+\frac{1}{2}})^2$

	$C_{0k_2}^{i-1,j}(t, x)$	$C_{1k_2}^{i-1,j}(t, x)$	$C_{2k_2}^{i-1,j}(t, x)$
$k_2 = 0$	1	$x - x_{i-\frac{1}{2}}$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$
$k_2 = 1$	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$	$(t - t_{j+\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$
$k_2 = 2$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i-\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$	$(t - t_{j+\frac{1}{2}})^2$

(c)  $C_{k_1 k_2}^{i,j-1}(t, x) = \varphi_{k_1}^{i,j-1}(t, x) \times \varphi_{k_2}^{i,j}(t, x)$  avec  $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2\}$  :

	$C_{k_1 0}^{i,j-1}(t, x)$	$C_{k_1 1}^{i,j-1}(t, x)$	$C_{k_1 2}^{i,j-1}(t, x)$
$k_1 = 0$	1	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$
$k_1 = 1$	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i+\frac{1}{2}})^2$	$(x - x_{i+\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$
$k_1 = 2$	$t - t_{j-\frac{1}{2}}$	$(t - t_{j-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$	$(t - t_{j-\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$

	$C_{0k_2}^{i,j-1}(t, x)$	$C_{1k_2}^{i,j-1}(t, x)$	$C_{2k_2}^{i,j-1}(t, x)$
$k_2 = 0$	1	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$t - t_{j-\frac{1}{2}}$
$k_2 = 1$	$x - x_{i+\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i+\frac{1}{2}})^2$	$(t - t_{j-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$
$k_2 = 2$	$t - t_{j+\frac{1}{2}}$	$(x - x_{i+\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$	$(t - t_{j-\frac{1}{2}})(t - t_{j+\frac{1}{2}})$

#### • Remarque :

- Ce tableau nous permettra de calculer plus aisément les intégrales  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} C_{k_1 k_2}(t, x) dt$  et  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} C_{k_1 k_2}(t, x) dx$ .  
Notons que la base

$E = \{\varphi_0^{ij}, \varphi_1^{ij}, \varphi_2^{ij}, i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket, j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket\}$  est orthogonale. Autrement dit, pour tout  $k_1 \neq k_2$ ,

$$\int_{\Omega_{ij}} C_{k_1 k_2}(t, x) dt = 0$$

2. A partir **1.**, on établit les tableaux suivant :

(a) .

$k_1 k_2 =$	$\{0,0\}$	$\{0,1\}$	$\{1,1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2,2\}$
$\int_{t_j}^{t_{j+1}} C_{k_1 k_2}^{ij}(t, x_{i+1}) dt$	$h_t$	$\frac{h_x h_t}{2}$	$\frac{h_x^2 h_t}{4}$	0	0	$\frac{h_t^3}{12}$
$\int_{x_i}^{x_{i+1}} C_{k_1 k_2}^{ij}(t_{j+1}, x) dx$	$h_x$	0	$\frac{h_x^3}{12}$	$\frac{h_x h_t}{2}$	0	$\frac{h_t^2 h_x}{4}$

(b) .

$k_1 k_2 =$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(2,0)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
$\int_{t_j}^{t_{j+1}} C_{k_1 k_2}^{i,j-1}(t, x_i) dt$	$h_t$	$\frac{-h_x h_t}{2}$	$\frac{h_x h_t}{2}$	$\frac{-h_x^2 h_t}{4}$	0	0	0	0	$\frac{h_t^3}{12}$

(c) .

$k_1 k_2 =$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(2,0)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
$\int_{x_i}^{x_{i+1}} C_{k_1 k_2}^{i,j-1}(t_j, x) dx$	$h_x$	0	0	$\frac{h_x^3}{12}$	$\frac{-h_x h_t}{2}$	$\frac{h_x h_t}{2}$	0	0	$\frac{-h_t^2 h_x}{4}$

3. Sachant que  $u|_{\Omega_{ij}}(t, x) = a_0^{i,j} \varphi_0^{i,j}(t, x) + a_1^{i,j} \varphi_1^{i,j}(t, x) + a_2^{i,j} \varphi_2^{i,j}(t, x)$ , on a pour tout  $k \in \{0, 1, 2\}$  :

$$u|_{\Omega_{ij}}(t, x) \varphi_k^{i,j}(t, x) = a_0^{i,j} C_{0k}^{i,j}(t, x) + a_1^{i,j} C_{1k}^{i,j}(t, x) + a_2^{i,j} C_{2k}^{i,j}(t, x)$$

$$u|_{\Omega_{i-1,j}}(t, x) \varphi_k^{i,j}(t, x) = a_0^{i-1,j} C_{0k}^{i-1,j}(t, x) + a_1^{i-1,j} C_{1k}^{i-1,j}(t, x) + a_2^{i-1,j} C_{2k}^{i-1,j}(t, x)$$

$$u|_{\Omega_{i,j-1}}(t, x) \varphi_k^{i,j}(t, x) = a_0^{i,j-1} C_{0k}^{i,j-1}(t, x) + a_1^{i,j-1} C_{1k}^{i,j-1}(t, x) + a_2^{i,j-1} C_{2k}^{i,j-1}(t, x)$$

4. A partir de **3.**, le terme de flux **(21)** devient pour tout  $k \in \{0, 1, 2\}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= v \int_{t_j}^{t_{j+1}} [a_0^{i,j} C_{0k}^{i,j}(t, x_{i+1}) + a_1^{i,j} C_{1k}^{i,j}(t, x_{i+1}) + a_2^{i,j} C_{2k}^{i,j}(t, x_{i+1})] dt \\ &\quad - v \int_{t_j}^{t_{j+1}} [a_0^{i-1,j} C_{0k}^{i-1,j}(t, x_i) + a_1^{i-1,j} C_{1k}^{i-1,j}(t, x_i) + a_2^{i-1,j} C_{2k}^{i-1,j}(t, x_i)] dt \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [a_0^{i,j} C_{0k}^{i,j}(t_{j+1}, x) + a_1^{i,j} C_{1k}^{i,j}(t_{j+1}, x) + a_2^{i,j} C_{2k}^{i,j}(t_{j+1}, x)] dx \\ &\quad - \int_{x_i}^{x_{i+1}} [a_0^{i,j-1} C_{0k}^{i,j-1}(t_j, x) + a_1^{i,j-1} C_{1k}^{i,j-1}(t_j, x) + a_2^{i,j-1} C_{2k}^{i,j-1}(t_j, x)] dx \end{aligned}$$

Après simplification (à l'aide du tableau 2.), le terme de flux s'écrit pour tout  $i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$  :

• Pour  $k = 0$  :

$$\begin{aligned} D_0 = \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_0^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= v(a_0^{i,j} h_t + a_1^{i,j} \frac{h_x h_t}{2} - a_0^{i-1,j} h_t - a_1^{i-1,j} \frac{h_x h_t}{2}) \\ &\quad + a_0^{i,j} h_x + a_2^{i,j} \frac{h_t h_x}{2} + a_0^{i,j-1} h_x + a_2^{i,j-1} \frac{h_t h_x}{2} \end{aligned}$$

• Pour  $k = 1$  :

$$\begin{aligned} D_1 = \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_1^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= v[a_0^{i,j} \frac{h_x h_t}{2} + a_1^{i,j} \frac{h_x^2 h_t}{4} + a_0^{i-1,j} \frac{h_x h_t}{2} + a_1^{i-1,j} \frac{h_x^2 h_t}{4}] \\ &\quad + \frac{h_x^3}{12} (a_1^{i,j} + a_1^{i,j-1}) \end{aligned}$$

• Pour  $k = 2$  :

$$\begin{aligned} D_2 = \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_2^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) &= \frac{h_t^3}{12} v(a_2^{i,j} - a_2^{i-1,j}) \\ &\quad + a_0^{i,j} \frac{h_x h_t}{2} + a_2^{i,j} \frac{h_t^2 h_x}{4} - a_0^{i,j-1} \frac{h_x h_t}{2} - a_2^{i,j-1} \frac{h_t^2 h_x}{4} \end{aligned}$$

5. Par ce qui a été fait en **3.**, on en déduit une simplification de la formulation variationnelle **(20)** que l'on rappelle ici :  
Pour tout  $i \in \llbracket 1, N_x \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$ ,

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_0^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) = 0 \\ \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_1^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) - \int_{\Omega_{ij}} v \times u|_{\Omega_{ij}} dxdt = 0 \\ \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u|_{\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_2^{i,j} d\sigma(x) d\sigma(t) - \int_{\Omega_{ij}} u|_{\Omega_{ij}} dxdt = 0 \end{cases}$$

Sachant que  $\int_{\Omega_{ij}} u|_{\Omega_{ij}} dxdt = a_0^{i,j} h_x h_t$ , le système s'écrit , **par les calculs établis en 4.**,

$$\begin{cases} D_0 = 0 \\ D_1 - v \times a_0^{i,j} h_x h_t = 0 \\ D_2 - a_0^{i,j} h_x h_t = 0 \end{cases}$$

- Ainsi, la formulation variationnelle dans le cas où le flux est entrant ( $v > 0$ ), se réécrit :

$$\begin{cases} 0 = (v\alpha_1 + \alpha_2)a_0^{i,j} + (v\alpha_3)a_1^{i,j} + (\alpha_3)a_2^{i,j} \\ \quad + (-v\alpha_1)a_0^{i-1,j} + (-v\alpha_3)a_1^{i-1,j} \\ \quad + (\alpha_2)a_0^{i,j-1} + (\alpha_3)a_2^{i,j-1} \\ 0 = (-v\alpha_3)a_0^{i,j} + (v\alpha_4 + \alpha_6)a_1^{i,j} \\ \quad + (v\alpha_3)a_0^{i-1,j} + (v\alpha_4)a_1^{i-1,j} \\ \quad + (\alpha_6)a_1^{i,j-1} \\ 0 = (-\alpha_3)a_0^{i,j} + (v\alpha_7 + \alpha_5)a_2^{i,j} \\ \quad + (-v\alpha_7)a_2^{i-1,j} \\ \quad + (-\alpha_3)a_0^{i,j-1} + (-\alpha_5)a_2^{i,j-1} \end{cases} \quad (22)$$

où,

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
$h_t$	$h_x$	$\frac{h_x h_t}{2}$	$\frac{h_x^2 h_t}{4}$	$\frac{h_t^2 h_x}{4}$	$\frac{h_x^3}{12}$	$\frac{h_t^3}{12}$

### 1. Cas initial $j = 1$ ou $i = 1$ :

- En utilisant la donnée  $g_2$  et le fait que  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_2(x) \varphi_k^{i,1}(0, x) dx = a_k^{i,1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_k^{i,1}(0, x) \varphi_k^{i,1}(0, x) dx$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ , on obtient les coefficients  $\{a_0^{i,0}, a_1^{i,0}, a_2^{i,0}, i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ .
- En utilisant la donnée  $g_1$  et le fait que  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} g_1(t) \varphi_k^{1,j}(t, 0) dt = a_k^{1,j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_k^{1,j}(t, 0) \varphi_k^{1,j}(t, 0) dt$ ,  $k \in \{0, 1, 2\}$ , on obtient les coefficients  $\{a_0^{0,j}, a_1^{0,j}, a_2^{0,j}, j \text{ fixé}\}$ .

### 2. Ecriture matricielle :

On cherche à établir l'écriture matricielle du système (22), pour un **temps  $t_j$  fixé sachant que les coefficients  $a_k^{i,j-1}$  à l'instant  $t_{j-1}$  sont connus.**

Posons :

- $A_1 = \begin{pmatrix} v\alpha_1 + \alpha_2 & v\alpha_3 & \alpha_3 \\ -v\alpha_3 & v\alpha_4 + \alpha_6 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & v\alpha_7 + \alpha_5 \end{pmatrix}$  et  $A_2 = \begin{pmatrix} -v\alpha_1 & -v\alpha_3 & 0 \\ v\alpha_3 & v\alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & -v\alpha_7 \end{pmatrix}$
- $\vec{b}_{1,j} = \begin{pmatrix} \alpha_2 a_0^{1,j-1} + \alpha_3 a_2^{1,j-1} + b_1 \\ \alpha_6 a_1^{1,j-1} + b_2 \\ -\alpha_3 a_0^{1,j-1} - \alpha_5 a_2^{1,j-1} + b_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b}_{i,j} = \begin{pmatrix} \alpha_2 a_0^{i,j-1} + \alpha_3 a_2^{i,j-1} \\ \alpha_6 a_1^{i,j-1} \\ -\alpha_3 a_0^{i,j-1} - \alpha_5 a_2^{i,j-1} \end{pmatrix}$  (où  $b_1, b_2$  et  $b_3$  sont établis à l'étape précédente)
- $\vec{u}_{i,j} = \begin{pmatrix} a_0^{i,j} \\ a_1^{i,j} \\ a_2^{i,j} \end{pmatrix}$

On cherche le vecteur  $U_h$  défini par :

$$U_h = \begin{pmatrix} \vec{u}_{1,j} \\ \vec{u}_{2,j} \\ \vdots \\ \vec{u}_{i-1,j} \\ \vec{u}_{i,j} \\ \vdots \\ \vec{u}_{N_x,j} \end{pmatrix}$$

tel que :

$$AU_h = B$$

où,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & A_1 & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & A_2 & A_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_{1,j}} \\ \overrightarrow{b_{2,j}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{i-1,j}} \\ \overrightarrow{b_{i,j}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{N_x,j}} \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

- (a) La matrice A est inversible si et seulement si la matrice  $A_1$  est inversible.  
Or  $\det(A_1) = 0 \iff h_x = h_t = 0$ .

### 3. Affichage :

On a considéré le problème suivant :  $v=1$

$$\begin{cases} v\partial_x u + \partial_t u = 0 & [0, 2] \times [0, 1] \\ u(t, 0) := -\sin(\pi t) & \text{en } x = 0 \\ u(0, x) := \sin(\pi x) & \text{en } t = 0 \end{cases}$$

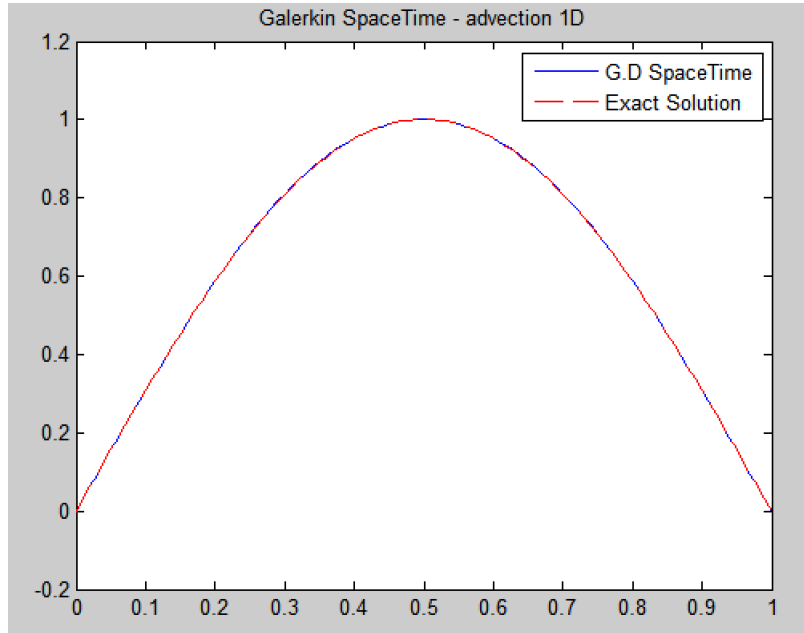


Figure 7: GD Espace - temps

## 2.6 Parallélisme

Le parallélisme permet d'effectuer les calculs permettant la résolution numérique d'un problème sur plusieurs machine.

Nous rappelons que pour  $v > 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{ij} d\sigma(x) d\sigma(t) &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} v [u_{|\Omega_{ij}}(t, x_{i+1}^-) \varphi_k^{ij}(t, x_{i+1}^-) - u_{|\Omega_{i-1,j}}(t, x_i^-) \varphi_k^{ij}(t, x_i^+)] d\sigma(t) \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u_{|\Omega_{ij}}(t_{j+1}^-, x) \varphi_k^{ij}(t_{j+1}^-, x) - u_{|\Omega_{i,j-1}}(t_j^-, x) \varphi_k^{ij}(t_j^-, x)] d\sigma(x) \end{aligned} \quad (23)$$

Au temps  $t \in ]t_j, t_{j+1}[$ ,  $u_{|\Omega_{ij}}(t, x)$  est connu, et ce pour tout  $i \in [1, N_x]$ .

- Pour obtenir un système parallèle, nous avons besoin de connaître  $u_{|\Omega_{i-1,j}}(t, x_i^+)$ . Pour cela, nous allons effectuer un développement de Taylor dans la cellule  $\Omega_{i-1,j}$

Puisque nous considérons les points milieux de chaque cellule, nous allons effectuer ce développement de Taylor en  $(t_{j+1/2}, x)$

On a :

$$\begin{aligned} u_{|\Omega_{i-1,j}}(t_{j+1/2}, x_i^+) &= u_{|\Omega_{i-1,j-1}}(t_j, x_i^+) + \frac{h_t}{2} \partial_t u_{|\Omega_{i-1,j-1}}(t_j, x_i^+) + O\left(\frac{h_t^3}{8}\right) \\ &= a_0^{i-1,j-1} + a_1^{i-1,j-1}(x_i - x_{i-1/2}) + a_2^{i-1,j-1}(t_j - t_{j-1/2}) + \frac{h_t}{2} a_2^{i-1,j-1} + O\left(\frac{h_t^3}{8}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

Finalement on obtient :

$$u_{|\Omega_{i-1,j}}(t_{j+1/2}, x_i^+) = a_0^{i-1,j-1} + a_1^{i-1,j-1} \frac{h_x}{2} + a_2^{i-1,j-1} h_t + O\left(\frac{h_t^3}{8}\right) \quad (25)$$

Ainsi, le terme de flux devient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_k^{ij} d\sigma(x) d\sigma(t) &\simeq v \int_{t_j}^{t_{j+1}} [a_0^{i,j} C_{0k}^{i,j}(t, x_{i+1}) + a_1^{i,j} C_{1k}^{i,j}(t, x_{i+1}) + a_2^{i,j} C_{2k}^{i,j}(t, x_{i+1})] dt \\ &- v (a_0^{i-1,j-1} + a_1^{i-1,j-1} \frac{h_x}{2} + a_2^{i-1,j-1} h_t) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_k^{i,j}(t, x) dt \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} [a_0^{i,j} C_{0k}^{i,j}(t_{j+1}, x) + a_1^{i,j} C_{1k}^{i,j}(t_{j+1}, x) + a_2^{i,j} C_{2k}^{i,j}(t_{j+1}, x)] dx \\ &- \int_{x_i}^{x_{i+1}} [a_0^{i,j-1} C_{0k}^{i,j-1}(t_j, x) + a_1^{i,j-1} C_{1k}^{i,j-1}(t_j, x) + a_2^{i,j-1} C_{2k}^{i,j-1}(t_j, x)] dx \end{aligned}$$

- Après simplification (à l'aide du tableau 2.), le terme de flux s'écrit pour tout  $i \in [1, N_x]$  et  $j \in [1, N_t]$  :

– Pour  $k = 0$  :

$$\begin{aligned} D_0 = \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_0^{ij} d\sigma(x) d\sigma(t) &\simeq v (a_0^{ij} h_t + a_1^{ij} \frac{h_x h_t}{2} - (a_0^{i-1,j-1} + a_1^{i-1,j-1} \frac{h_x}{2} + a_2^{i-1,j-1} h_t) h_t) \\ &+ a_0^{ij} h_x + a_2^{ij} \frac{h_t h_x}{2} - a_0^{i,j-1} h_x - a_2^{i,j-1} \frac{h_t h_x}{2} \end{aligned}$$

– Pour  $k = 1$  :

$$D_1 = \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_1^{ij} d\sigma(x) d\sigma(t) \simeq v[a_0^{ij} \frac{h_x h_t}{2} + a_1^{ij} \frac{h_x^2 h_t}{4} - (a_0^{i-1,j-1} + a_1^{i-1,j-1} \frac{h_x}{2} + a_2^{i-1,j-1} h_t) \frac{-h_x h_t}{2}] + \frac{h_x^3}{12} (a_1^{ij} - a_1^{i,j-1})$$

– Pour  $k = 2$  :

$$D_2 = \int_{\partial\Omega_{ij}} [\vec{G}(u_{|\Omega_{ij}}) \cdot \vec{n}] \varphi_2^{ij} d\sigma(x) d\sigma(t) \simeq \frac{h_t^3}{12} v(a_2^{ij}) + a_0^{ij} \frac{h_x h_t}{2} + a_2^{ij} \frac{h_t^2 h_x}{4} + a_0^{i,j-1} \frac{h_x h_t}{2} + a_2^{i,j-1} \frac{h_t^2 h_x}{4}$$

- Sachant que  $\int_{\Omega_{ij}} u_{|\Omega_{ij}} dx dt = a_0^{ij} h_x h_t$ , le système s'écrit , **par les calculs établis en 4.**,

$$\begin{cases} D_0 = 0 \\ D_1 - v \times a_0^{ij} h_x h_t = 0 \\ D_2 - a_0^{ij} h_x h_t = 0 \end{cases}$$

- Ainsi, la formulation variationnelle dans le cas où le flux est entrant ( $v > 0$ ), se réécrit :

$$\begin{cases} 0 = (v\alpha_1 + \alpha_2)a_0^{ij} + (v\alpha_3)a_1^{ij} + (\alpha_3)a_2^{ij} \\ \quad + (-v\alpha_1)a_0^{i-1,j-1} + (-v\alpha_3)a_1^{i-1,j-1} + (-v\alpha_1^2)a_2^{i-1,j-1} \\ \quad + (-\alpha_2)a_0^{i,j-1} + (-\alpha_3)a_2^{i,j-1} \\ 0 = (-v\alpha_3)a_0^{ij} + (v\alpha_4 + \alpha_6)a_1^{ij} \\ \quad + (v\alpha_3)a_0^{i-1,j-1} + (v\alpha_4)a_1^{i-1,j-1} + (2v\alpha_5)a_2^{i-1,j-1} \\ \quad + (-\alpha_6)a_1^{i,j-1} \\ 0 = (-\alpha_3)a_0^{ij} + (v\alpha_7 + \alpha_5)a_2^{ij} \\ \quad + (\alpha_3)a_0^{i,j-1} + (\alpha_5)a_2^{i,j-1} \end{cases} \quad (26)$$

où,

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
$h_t$	$h_x$	$\frac{h_x h_t}{2}$	$\frac{h_x^2 h_t}{4}$	$\frac{h_t^2 h_x}{4}$	$\frac{h_x^3}{12}$	$\frac{h_t^3}{12}$

• **Ecriture matricielle :**

On cherche à établir l'écriture matricielle du système (4), pour un **temps  $t_j$  fixé sachant que les coefficients  $a_k^{i-1,j-1}$  et  $a_k^{i,j-1}$  à l'instant  $t_{j-1}$  sont connus.**

Posons :  $\overrightarrow{u_{i,j}} = \begin{pmatrix} a_0^{ij} \\ a_1^{ij} \\ a_2^{ij} \end{pmatrix},$

$$\overrightarrow{b_{1,j}} = \begin{pmatrix} \alpha_2 a_0^{1,j-1} + \alpha_3 a_2^{1,j-1} + b_1 \\ \alpha_6 a_1^{1,j-1} + b_2 \\ -\alpha_3 a_0^{1,j-1} - \alpha_5 a_2^{1,j-1} + b_3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{b_{i,j}} = \begin{pmatrix} v\alpha_1 a_0^{i-1,j-1} + v\alpha_3 a_1^{i-1,j-1} + v\alpha_1^2 a_2^{i-1,j-1} + \alpha_2 a_0^{i,j-1} + \alpha_3 a_2^{i,j-1} \\ -v\alpha_3 a_0^{i-1,j-1} - v\alpha_4 a_1^{i-1,j-1} - 2v\alpha_5 a_2^{i-1,j-1} + \alpha_6 a_1^{i,j-1} \\ -\alpha_3 a_0^{i,j-1} - \alpha_5 a_2^{i,j-1} \end{pmatrix}$$

$\forall i \in \llbracket 2, N_x \rrbracket$

et  $A_1 = \begin{pmatrix} v\alpha_1 + \alpha_2 & v\alpha_3 & \alpha_3 \\ -v\alpha_3 & v\alpha_4 + \alpha_6 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & v\alpha_7 + \alpha_5 \end{pmatrix}$

On cherche le vecteur  $U_h$  tel que :

$$AU_h = B$$

où,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & A_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \overrightarrow{b_{1,j}} \\ \overrightarrow{b_{2,j}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{i-1,j}} \\ \overrightarrow{b_{i,j}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{N_x,j}} \end{pmatrix}$$



## CONCLUSION

La méthode de Galerkin discontinu regroupe les avantages des méthodes de volumes finis et d'éléments finis. Nous avons particulièrement pu constater les différences entre ces méthodes car, en tant qu'élèves de MACS 2, nous avons étudié ces méthodes en parallèle de ce projet.

Vous trouverez un tableau dans la thèse de Sophie Gérald<sup>5</sup> qui compare les différentes méthodes numériques (GD, VF, EF) en donnant une idée de leurs qualités selon certains critères.

Mené à bien ce projet, nous a permis de comprendre un important point concernant les méthodes numériques en général. La stabilité, la consistance et l'ordre d'un schéma ne suffisent pas à caractériser la qualité d'un schéma numérique. On doit également prendre en compte la méthode d'implémentation, car la capacité des machines utilisées pour mener à bien des calculs est limitée.

---

<sup>5</sup>Tableau page 10 - <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00943621>

# ANNEXE 1 : Méthode d'implémentation du schéma GD - Euler explicite

## Méthode d'implémentation

A chaque instant  $t_n$ , on obtient  $2N$  coefficients qui permettent d'obtenir la solution projetée sur l'espace  $V_h$ .

$$u_h(t, x) = \sum_{i=1}^N a_1^i(t) \varphi_1^i(x) + a_2^i(t) \varphi_2^i(x)$$

**ATTENTION** : Sur matlab, les tableaux sont indexés à partir de 1, c'est pourquoi on a effectué un décalage d'indice ci-dessus.

1. On calcule le vecteur flux qui contient les valeurs aux interfaces et aux bord de  $[a, b]$ . Dans le cas,  $v > 0$  sur chaque cellules  $K_i$ , on doit stocker :

$$F_l = \begin{pmatrix} u_0(x_1 - vt_n) \\ u_{|K_1}(t_n, x_2) \\ \vdots \\ u_{|K_i}(t_n, x_{i+1}) \\ \vdots \\ u_{|K_{N-1}}(t_n, x_N) \\ u_{|K_N}(t_n, x_{N+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x_1 - vt_n) \\ a_1^1(t_n) + a_2^1(t_n) \times (x_2 - x_{1+\frac{1}{2}}) \\ \vdots \\ a_1^i(t_n) + a_2^i(t_n) \times (x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}) \\ \vdots \\ a_1^{N-1}(t_n) + a_2^{N-1}(t_n) \times (x_N - x_{N-\frac{1}{2}}) \\ a_1^N(t_n) + a_2^N(t_n) \times (x_{N+1} - x_{N+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x_1 - vt_n) \\ a_1^1(t_n) + a_2^1(t_n) \times \frac{h}{2} \\ \vdots \\ a_1^i(t_n) + a_2^i(t_n) \times \frac{h}{2} \\ \vdots \\ a_1^{N-1}(t_n) + a_2^{N-1}(t_n) \times \frac{h}{2} \\ a_1^N(t_n) + a_2^N(t_n) \times \frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

2. On définit également :

$$Ib = \begin{pmatrix} F_l(2) - F_l(1) & F_l(2) + F_l(1) \\ F_l(3) - F_l(2) & F_l(3) + F_l(2) \\ \vdots & \vdots \\ F_l(i+1) - F_l(i) & F_l(i+1) + F_l(i) \\ \vdots & \vdots \\ F_l(N) - F_l(N-1) & F_l(N) + F_l(N-1) \\ F_l(N+1) - F_l(N) & F_l(N+1) + F_l(N) \end{pmatrix}$$

---

**Algorithm 1** Implémentation de la méthode GD en espace et Euler Explicite en temps

---

// Dans cet algorithme on ne stockera pas les  $u_h$  à chaque pas de temps. On cherche à avoir  $u_h$  au temps T final

// La matrice A contiendra tout les coefficients  $a_{j \in \{1,2\}}^{i \in [1, N]}$

$A \leftarrow \text{zeros}(N, 2)$  ;

// On stocke les valeurs initiales au temps  $t = 0$  dans la matrice A (méthode de Gauss Legendre)  
(cf formule (7))

**Pour** ipdt allant de 1 à M  
     $t = \Delta t \times \text{ipdt}$ ;

    // Calcul du flux  $F_l$  :

$F_l(1) = u_0(x_1 - vt)$

**Pour** i allant de 2 à N+1

$F_l(i) = A(i, 1) + A(i, 2) * \frac{h}{2}$

**Fin Pour**

    // Calcul de la matrice Ib :

**Pour** i allant de 2 à N+1

$Ib(i, 1) = F_l(i+1) - F_l(i)$ ;

$Ib(i, 2) = F_l(i+1) + F_l(i)$ ;

**Fin Pour**

    // Calcul des coefficients :

**Pour** i allant de 1 à N

$A(i, 1) = A(i, 1) - \frac{(\Delta t)v}{C_{0,0}} \times Ib(i, 1)$

$A(i, 2) = A(i, 2) - \frac{vh(\Delta t)}{2C_{1,1}} \times Ib(i, 2) + \frac{v(\Delta t)C_{0,0}}{C_{1,1}} \times A(i, 1)$

**Fin Pour**

**Fin Pour**

---

La solution approchée au point  $x_i$  au temps T s'écrit donc :

$$\begin{aligned} U_h(T, x_i) &= \sum_{j=1}^N A(j, 1) \times \varphi_1^j(x_i) + A(j, 2) \times \varphi_2^j(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^N [ A(j, 1) \times \varphi_1^j(x_i) + A(j, 2) \times (x_i - x_{j+\frac{1}{2}}) ] \\ &= A(i, 1) + A(i, 2) \times (x_i - x_{i+\frac{1}{2}}) \\ &= A(i, 1) + A(i, 2) \times \left(-\frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

## ANNEXE 2 : Méthode d'implémentation du schéma GD - RK2

---

### Algorithm 2 Méthode d'implémentation RK2

---

En utilisant les matrices  $F_l$  et  $I_b$  définis dans la méthode d'Euler explicite, on obtient à l'instant  $t_n$  :

$$K_{1,i} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{C_{0,0}} \times Ib(i, 1) \\ -\frac{vh}{2C_{1,1}} \times Ib(i, 2) + \frac{vC_{0,0}}{C_{1,1}} \times Y^n(i, 1) \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $K_2$  se détermine à l'instant  $t_{n+1}$ . C'est pourquoi, on procède de la façon suivante :

1. On calcule la matrice  $K_1$  de taille  $2 \times N$ .
2. On stocke  $YY^{n+1} = Y^n + \Delta t \times K_1$  dans une matrice intermédiaire.
3. Pour déterminer  $K_2 = F(t_{n+1}, YY^{n+1})$ , on mets à jour les matrices  $F_l$  et  $I_b$  en utilisant  $YY^{n+1}$ .
4. On détermine ainsi la matrice  $K_2$ , définie par :

$$K_{2,i} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{C_{0,0}} \times Ib(i, 1) \\ -\frac{vh}{2C_{1,1}} \times Ib(i, 2) + \frac{vC_{0,0}}{C_{1,1}} \times YY^{n+1}(i, 1) \end{pmatrix}$$

5. On en déduit la solution à l'instant  $n+1$ , définie par :

$$Y_i^{n+1} = Y_i^n + \frac{\Delta t}{2} \times (K_1 + K_2)$$

---