Projeto 4: Tomografia Computadorizada

Herberth Luan Vieira Oliveira
12559110

Juliana de Abreu Faria
10336275

Victor Viana de Oliveira Matos
11810821

Vinícius da Costa Collaço
11811012

Vitor Sillos Alonso
9506935

4 de junho de 2022

1 Introdução

O trabalho tem como objetivo de apresentar as aplicações e a construção do modelo matemático apresentado na década de 70 pelo programador britânico Goldfrey Hounsfield que trabalhou junto com um profissional da neurorradiologia. Com trabalho deles foi possível as imagens internas do cérebro humano.

1.1 Resumo do Artigo

O processo para retirada de imagens internas da parte do corpo humano foram batizadas por teus criadores (Goldfrey) como tomografia computadorizada axial transversa.

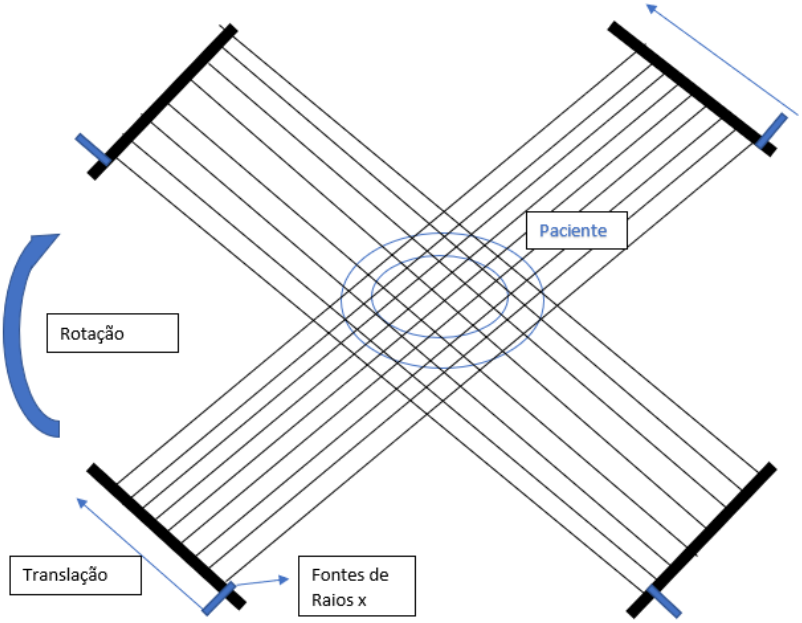
A técnica desenvolvida parte de uma reconstrução de imagens bidimensionais com seções transversais junto a fluxos de raios X unidimensionais que vão passando pelo corpo do paciente. A construção da imagem se dará pelos raio X que passam no corpo e são captados pelos detectores e são convertidos em energia elétrica, e logo um estímulo elétrico para o computador formar a imagem.

1.1.1 As construções das equações lineares

Para que o computador monte as imagens o algoritmo montando precisa resolver uma série de equações lineares, como trata-se de diversas equações é mencionado que no artigo é utilizada o artifício da Técnica de Reconstrução Algébrica (TRA), que, normalmente, utiliza-se para achar os valores aproximados de sistemas lineares como se formarão e suas soluções serão a base para formação da imagem da tomografia.

O escaneamento de um corpo no artigo estudado é dado de duas formas : modo paralelo e modo leque, o estudado nesse trabalho é o primeiro, ou seja, modo paralelo.

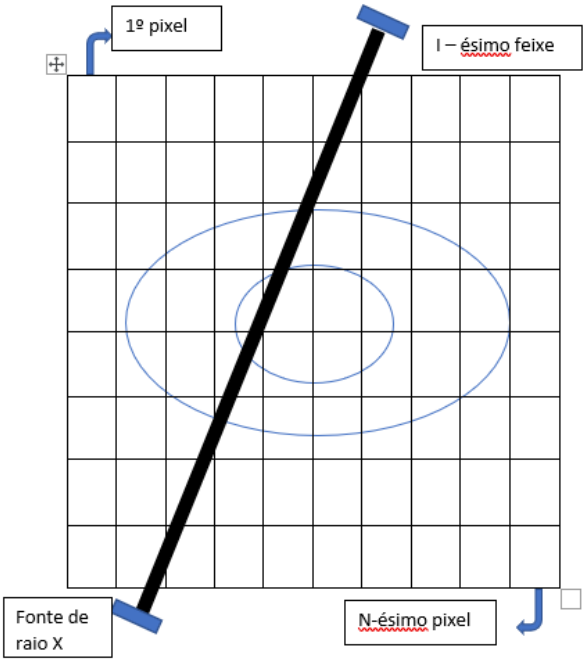
Modo paralelo:'Escaneamento' por meio de Raio X



Fonte: Feito pelo próprio autor.

Como é próprio do nome, modo paralelo, os raios X passaram pelo corpo de maneira paralela e unidimensional, mas os raios que são detectados são aqueles que não ultrapassam (absorvida) o corpo ou desviados, fazendo um par fonte-detector é girado de um pequeno ângulo e é feito um novo conjunto de medidas; o processo se repete até chegar o número de medidas que se almeja, abaixo está a imagem do que foi descrito.

Um dos feixes de Raio X ultrapassando o corpo



Fonte: Feito pelo próprio autor.

Essa imagem apresenta a secção transversal e imagem construída no feixes de raios X, como se percebe ela é dividida em pixels que vão e 1 a N. Para construção da imagem imagina-se que o paciente está sendo "bombardeado"por raios X e também se tem a ideia de cada pixel será "igualmente bombardeado"pelo feixes de Raios X.

Portanto, o objetivo é determinar a densidade de Raios X em cada pixel. A diferenciação da densidade é dada uma tonalidade de cinza, isso se dá pelo fato da diferença de absorção dos feixes de raios X em diferentes tecidos do corpo humano.

A densidade de raios X absorvida pelo j-ésimo pixel é dado por x_j e é definida:

$$x_j = ln\left(\frac{\text{nmero de ftons entrando no j} - \text{esimo pixel}}{\text{nmero de ftons saindo do j} - \text{simo pixel}}\right)$$

Aplicando a propriedade logarítmica ln(a/b) = -ln(b/a), temos:

x_j = -ln(fraçao de fótons que passa pelo j-ésimo pixel sem ser absorvida)

E para um dado feixe, temos que a seção de fótons que passa por uma fileira de pixeis deve ser igual à fração de protons que passa pela seção tranversal sem ser absorvida.

$$\left(\begin{array}{c}\text{fração de fótons do feixe que passa}\\ \text{pela fileira de pixels sem ser absorvida}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{fração de fótons do feixe que passa}\\ \text{pela seção transversal sem ser absorvida}\end{array}\right)$$

Dessa maneira, dada uma densidade b obtida empiricamente com calibrações do aparelho de tomografia e variáveis x1, x2...xn sendo as diversas densidades desconhecidas, obtemos a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = b1$$

Ademais, de maneira análoga aos casos horizontais ou verticais, se considerarmos os feixes que passam por cada pixel de linhas ou colunas que constem em

$$j_1, j_2, ..., j_n$$

, então temos que:

$$x_j1 + x_j2 + ... + x_jn$$

Se definirmos o coeficiente a como sendo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = j_1, j_2, \ldots, j_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$a_{i1} * x_1 + a_{i2} * x_2 + ... + a_{in} * x_n = b_n$$

Isto posto, se considerarmos um escaneamento completo com M equações, teremos o

sistema abaixo:

$$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + ... + a_{1n} * x_n = b_1$$

$$a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + ... + a_{2n} * x_n = b_2$$

$$a_{31} * x_1 + a_{32} * x_2 + ... + a_{3n} * x_n = b_3$$

$$a_{M1} * x_1 + a_{M2} * x_2 + ... + a_{Mn} * x_n = b_M$$

Este sistema de equações com M equações e N variáveis, para este projeto, será considerado com M > N, na qual existem mais feixes do que pixels no campo de visão. Devido a erros experimentais e de modelagem, dificilmente encontraremos uma solução exata para o sistema de equações. Para tanto, podemos nos utilizar de algorítimos para encontrar soluções aproximadas.

Para este exemplo, utilizaremos um algoritmo pertencente à classe de Técnicas de Reconstrução Algébrica (TRA). Neste algoritmo, dado um número de equações que não possuem intersecção em comum, não existe uma única solução exata. Porém, a área formada pela intersecção de conjuntos de equações estão situados relativamente próximos e podem ser considerados como uma solução aproximada do sistema.

Para obter essa solução aproximada, são usados os seguintes passos:

Algoritmo 1

Passo 0. Escolhemos algum ponto inicial $\mathbf{x}_0$ arbitrário.

Passo 1. Projetamos $\mathbf{x}_0$ ortogonalmente sobre a primeira reta L_1 e denotamos essa projeção por $\mathbf{x}_1^{(1)}$. O expoente (1) indica que essa é a primeira de uma sucessão de rodadas do algoritmo.

Passo 2. Projetamos $\mathbf{x}_1^{(1)}$ ortogonalmente sobre a segunda reta L_2 e denotamos essa projeção por $\mathbf{x}_2^{(1)}$.

Passo 3. Projetamos $\mathbf{x}_2^{(1)}$ ortogonalmente sobre a terceira reta L_3 e denotamos essa projeção por $\mathbf{x}_3^{(1)}$.

Passo 4. Tomamos $\mathbf{x}_3^{(1)}$ como o novo valor de $\mathbf{x}_0$ e repetimos a rodada de passos de 1 a 3. Na segunda rodada, denotamos os pontos projetados por $\mathbf{x}_1^{(2)}$, $\mathbf{x}_2^{(2)}$, $\mathbf{x}_3^{(2)}$; na terceira rodada, por $\mathbf{x}_1^{(3)}$, $\mathbf{x}_2^{(3)}$, $\mathbf{x}_3^{(3)}$, e assim por diante.

Fonte: Lell et al., 2015

Este algorítimo gerará sequências de pontos, na qual um valor x1* se aproximará da reta L1, um valor x2* se aproximará da reta L2 e assim por diante, de maneira que as iterações do algorítimo não irão além destes pontos, sendo portanto conhecido como o ciclo limite.

Para o cálculo da projeção ortogonal, usamos a seguinte equação:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}^* + \frac{(b - \mathbf{a}^T \mathbf{x}^*)}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

Para testar o algorítimo, serão consideradas três equações:

$$L_1: \quad \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = b_1$$
$$L_2: \quad \mathbf{a}_2^T \mathbf{x} = b_2$$
$$L_3: \quad \mathbf{a}_3^T \mathbf{x} = b_3$$

Na qual temos os valores:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$
$$b_1 = 2, \qquad b_2 = -2, \qquad b_3 = 3$$

Ao rodar o algorítimo 6 vezes, é possível ver os resultados na imagem a seguir:

	x_1	x_2
$\mathbf{x}_0$	1,00000	3,00000
$x_1^{(1)}$	0,00000	2,00000
$x_2^{(1)}$	0,40000	1,20000
$x_3^{(1)}$	1,30000	0,90000
$x_1^{(2)}$	1,20000	0,80000
$x_2^{(2)}$	0,88000	1,44000
$x_3^{(2)}$	1,42000	1,26000
$x_1^{(3)}$	1,08000	0,92000
$x_2^{(3)}$	0,83200	1,41600
$x_3^{(3)}$	1,40800	1,22400
$x_1^{(4)}$	1,09200	0,90800
$x_2^{(4)}$	0,83680	1,41840
$x_3^{(4)}$	1,40920	1,22760
$x_1^{(5)}$	1,09080	0,90920
$x_2^{(5)}$	0,83632	1,41816
$x_3^{(5)}$	1,40908	1,22724
$x_1^{(6)}$	1,09092	0,90908
$x_2^{(6)}$	0,83637	1,41818
$x_3^{(6)}$	1,40909	1,22728

Os resultados obtidos ao final das rodadas estão visíveis na figura a seguir

$$\mathbf{x}_1^* = \left(\tfrac{12}{11}, \tfrac{10}{11}\right) = (1{,}09090\ldots, 0{,}90909\ldots)$$
$$\mathbf{x}_2^* = \left(\tfrac{46}{55}, \tfrac{78}{55}\right) = (0{,}83636\ldots, 1{,}41818\ldots)$$
$$\mathbf{x}_3^* = \left(\tfrac{31}{22}, \tfrac{27}{22}\right) = (1{,}40909\ldots, 1{,}22727\ldots)$$

1.2 Atualidade

O algorítimo CAT de tomografia auxiliada por computadores (do inglês computerized axial tomography) foi implementado com sucesso por Godfrey N. Hounsfield para realização de exames em larga escala. O exame se utiliza da tirada de diversas imagens ao redor de um eixo axial para conseguir obter as relações de densidade dos materiais e assim gerar as imagens.

O primeiro paciente examinado com esta tecnologia ocorreu no hospital de Atkinson Morley em Londres (Lell et al., 2015), sendo este fato um marco uma nova era no estudo clínico. Originalmente, o exame usava uma técnica rotacional sobre um eixo, na qual eram obtidas imagens a cada 1 grau rotacionado. Ao todo o exame levava em torno de 5 minutos.

Nas chamadas tecnologias de primeira e segunda geração (Lell et al., 2015) os scans eram feitos apenas na região da cabeça. Com a chegada da terceira geração, foram introduzidas imagens obtidas com rotação de 360 graus. Em 1987, com a introdução de tecnologia de sistema em rotação contínua os tempos de ciclo de 1s. Procedimentos CT feito em fluxos espirais foram introduzidos em 1989 e trouxeram uma nova perspectiva em imagens 3D para tomografias. Em 2005, com a introdução de DSCT (Dual Source Computorized Tomography) houve um grande avanço na definição das imagens e tempos de processamentos. Com este avanço, iniciou-se uma corrida por um aumento de definição das imagens.

Para típicas imagens médicas, o eixo X-Y simboliza o eixo transversal do paciente, enquanto que o eixo Z simboliza o eixo longitudinal. Um típico vetor consiste de 800 a 1000 detectores no eixo transversal, com até 320 detectores no eixo Z (Lell et al., 2015). A vantagem de um maior número de detectores no eixo Z é um maior número de detalhes no eixo longitudinal. Em 1992, a empresa Elscint introduziu no mercado o primeiro equipamento CT com 2 detectores. Dessa maneira, em 1998 outras empresas concorrentes introduziram no mercado equipamentos com 4 detectores. Com isso teve início uma corrida por detectores, culminando no equipamento Toshiba Aquilion One, com 320 Detectores (Lell et al., 2015). Alguns modelos de inovação com suas principais características podem ser vistos na figura a seguir, mostra-se as características dos equipamentos:

CT System	Vendor	Configuration	Collimation (mm)	Cone (Degree)	Rotation (Second)	Max Power
Revolution CT	GE	256×0.625 mm Gemstone Clarity	160	15	0.28	103 kW Performix HDw
Brilliance ICT	Philips	$2 \cdot 128 \times 0.625$ mm NanoPanel^{3D}	80	7.7	0.27	120 kW iMRC
IQon	Philips	$2 \cdot 64 \times 0.625$ mm NanoPanel Prism	40	3.9	0.27	120 kW iMRC
Definition Edge	Siemens	$2 \cdot 64 \times 0.6$ mm Stellar	38.4	3.7	0.28	100 kW Straton
Definition Flash	Siemens	$2 \cdot 2 \cdot 64 \times 0.6$ mm Stellar	38.4	3.7	0.28	2·100 kW Straton
Somatom Force	Siemens	$2 \cdot 2 \cdot 96 \times 0.6$ mm Stellar^{Infinity}	57.6	5.5	0.25	2·120 kW Vectron
Aquilion ONE Vision	Toshiba	320×0.5 mm Quantum	160	15	0.275	100 kW MegaCool Vi

Names of detector and x-ray tube systems in Table 1 are trademarks. The notation of the detector configuration is the number of active detector rows × the slice thickness. An additional factor of 2 indicates that a z flying focal spot is used to double the number of slices. Another factor of 2 indicates that a dual-source dual-detector configuration is implemented. The collimation refers to the active width of the detector. All length values are scaled to the isocenter (z-axis).

Fonte: Lell et al., 2015

2 Algoritmos

2.1 Bibliotecas Utilizadas

Nesse trabalho foi utilizada a linguagem Python com a utilização das seguintes bibliotecas:

```
import numpy as np
import pandas as pd
from skimage import io
from skimage import data
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

Listing 1: Import de bibliotecas

No decorrer do relatório e transcrição dos códigos serão as bibliotecas serão utilizadas com os codinomes adotados no código acima.

2.2 Projeção Ortogonal

```
def ProjecaoOrtogonal (a,b,x_star):
  #Funcao para achar o ponto ortogonal entre a reta ax = b e o ponto x*
  num = b - (np.dot(a.T,x_star))
  den = np.dot(a.T,a)

  xp = x_star + num/den*a

  return xp
```

Listing 2: Projeção Ortogonal

O algoritimo para achar a projeção ortogonal de um ponto em relação à uma reta (pensando em um plano cartesiano), foi baseado na equação descrita no início. O algorítimo foi criado para funcionar com qualquer tamanho de vetor, e retorna um vetor coluna.

```
#Teste Função ProjecaoOrtogonal
a = np.array([[1],[1]])
b = np.array([[2]])
x_star = np.array([[1],[3]])

ProjecaoOrtogonal(a,b,x_star)
```

```
array([[0.],
       [2.]])
```

Teste Função Projeção Ortogonal.

2.3 Algoritimo 1

```
def Algoritmo1 (a1,a2,a3,b1,b2,b3,x,n):
  resultado = []
  resultado.append(np.array(x))
  x0 = ProjecaoOrtogonal(a1,b1,x)

  for i in range (n):
    x1 = ProjecaoOrtogonal(a1,b1,x0)
    resultado.append(x1)
    x2 = ProjecaoOrtogonal(a2,b2,x1)
    resultado.append(x2)
    x3 = ProjecaoOrtogonal(a3,b3,x2)
    resultado.append(x3)
    x0 = x3

  return resultado
```

Listing 3: Algoritimo1

O Algorítimo1 usa o algorítimo de Projeção Ortogonal, para o caso de resolução de um sistema linear com 3 linhas, se pensarmos em um plano, ou 3 equações lineares. No exemplo abaixo a resolução do exemplo mostrado no livro com o algorítimo construído.

Entrada

```
#Teste Para o exemplo1 do Livro (pg. 621)
a1 = np.array([[1],[1]])
b1 = 2
a2 = np.array([[1],[-2]])
b2 = -2
a3 = np.array([[3],[-1]])
b3 = 3
x = np.array([[1],[3]])
n = 6 #rodadas de iteração
tab1 = Algoritmo1(a1,a2,a3,b1,b2,b3,x,n)
tab1
```

Saída

```
[array([[1],
        [3]]), array([[0.],
        [2.]]), array([[0.4],
        [1.2]]), array([[1.3],
        [0.9]]), array([[1.2],
        [0.8]]), array([[0.88],
        [1.44]]), array([[1.42],
        [1.26]]), array([[1.08],
        [0.92]]), array([[0.832],
        [1.416]]), array([[1.408],
        [1.224]]), array([[1.092],
        [0.908]]), array([[0.8368],
        [1.4184]]), array([[1.4092],
        [1.2276]]), array([[1.0908],
        [0.9092]]), array([[0.83632],
        [1.41816]]), array([[1.40908],
        [1.22724]]), array([[1.09092],
        [0.90908]]), array([[0.836368],
        [1.418184]]), array([[1.409092],
        [1.227276]])]
```

Teste do Algorítimo1.

Para cada iteração no Algorítimo1, valor 'n', tem a saída de 3 vetores colunas de duas dimensões, que graficamente representam os 3 pontos resultantes do sistema, na 6 iteração já tem uma boa convergência.

Para melhor apresentação, o resultado foi transformado em um DataFrame.

```
Tabela1 = pd.DataFrame()

```

```
#Df apartir de tab1 (resultado do ex1)
for i in range (len(tab1)):
  Tabela1 = Tabela1.append(tab1[i].T.tolist())

#Renomeando Colunas e resetando o index
Tabela1.rename({0:'X1',1:'X2'},inplace=True,axis=1)
Tabela1 = Tabela1.reset_index().drop('index',axis=1)
Tabela1
```

Listing 4: Tabela 1 em DataFrame

	X1	X2
0	1.000000	3.000000
1	0.000000	2.000000
2	0.400000	1.200000
3	1.300000	0.900000
4	1.200000	0.800000
5	0.880000	1.440000
6	1.420000	1.260000
7	1.080000	0.920000
8	0.832000	1.416000
9	1.408000	1.224000

	X1	X2
10	1.092000	0.908000
11	0.836800	1.418400
12	1.409200	1.227600
13	1.090800	0.909200
14	0.836320	1.418160
15	1.409080	1.227240
16	1.090920	0.909080
17	0.836368	1.418184
18	1.409092	1.227276

Teste do Algorítimo1.

O algorítimo converge bem rapidamente, na sexta interação temos o valor convergindo na quarta casa decimal. Na imagem do resultado podemos ver a conversão comparando os últimos 2 grupos de resultados (linhas 13, 14 e 15 comparado com as linhas 16, 17 e 18)

2.4 Algoritimo2

```
def Algoritmo2 (a,b,xstar,n):

  resultado = []
  lenb = len(b)
  resultado.append(np.atleast_2d(xstar)) #primeiro resultado
  xstarC = np.atleast_2d(xstar).T #lista em vetor coluna
  x0 = ProjecaoOrtogonal(np.array(a[0].T),b[0],xstarC)

  for j in range(n):
    for i in range (lenb):
      x0 = ProjecaoOrtogonal(np.array(a[i].T),b[i],x0)
```

```
12        resultado.append(x0.T)
13
14
15    return resultado
```

Listing 5: Algorítimo2

O Algorítimo 2, generaliza o primeiro algorítimo para um cenário além de equações no plano, para um hiperplano. Na entrada o algorítimo recebe a matriz a, onde cada linha representa um mapeamento das equações, a lista b, com os resultados das equações, o ponto inicial (xstar) e o número de iterações 'n'. Como resultado final é produzido uma lista de arrays.

2.4.1 Teste Algoritimo2

```
#Matriz vetor a
a =np.matrix([[0,0,0,0,0,0,1,1,1],
              [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
              [1,1,1,0,0,0,0,0,0],
              [0,0,0,0,0,1,0,1,1],
              [0,0,1,0,1,0,1,0,0],
              [1,1,0,1,0,0,0,0,0],
              [0,0,1,0,0,1,0,0,1],
              [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
              [1,0,0,1,0,0,1,0,0],
              [0,1,1,0,0,1,0,0,0],
              [1,0,0,0,1,0,0,0,1],
              [0,0,0,1,0,0,1,1,0]])
#Valores de b
b = [13.0, 15.0, 8.0, 14.79, 14.31, 3.81, 18.0, 12.0, 6.0, 10.51, 16.13,
    7.04]
xstar = np.zeros(9)
```

Listing 6: entradas

como exemplo para teste do algorítimo, usamos o problema prático de uma imagem de 9 pixels. A primeira equação no exemplo é:

$$x_7 + x_8 + x_9 = 13.0$$

e como vetor inicial, começamos em um vetor zerado.

```
tab2 = Algoritmo2(a,b,xstar,45)

Tabela2 = pd.DataFrame()

#Df apartir de tab2
for i in range (len(tab2)):
```

```
  Tabela2 = Tabela2.append(tab2[i].tolist())

#Renomeando Colunas e resetando o index
Tabela2.rename({0:'x1', 1:'x2', 2:'x3',
                3:'x4', 4:'x5', 5:'x6',
                6:'x7', 7:'x8', 8:'x9'}, inplace=True,axis=1)
Tabela2 = Tabela2.reset_index().drop('index',axis=1)
Tabela2.round
```

Listing 7: Calculo e Saída

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.33	4.33	4.33
2	0.00	0.00	0.00	5.00	5.00	5.00	4.33	4.33	4.33
3	2.67	2.67	2.67	5.00	5.00	5.00	4.33	4.33	4.33
4	2.67	2.67	2.67	5.00	5.00	5.37	4.33	4.71	4.71
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
536	1.23	0.85	5.58	2.06	7.75	4.85	1.67	3.40	7.58
537	1.58	0.85	5.58	2.41	7.75	4.85	2.02	3.40	7.58
538	1.58	0.60	5.32	2.41	7.75	4.59	2.02	3.40	7.58
539	1.32	0.60	5.32	2.41	7.49	4.59	2.02	3.40	7.32
540	1.32	0.60	5.32	2.15	7.49	4.59	1.76	3.14	7.32

541 rows × 9 columns

Teste do Algorítimo2.

O algorítimo como foi construído inicialmente tem um problema que consome muita memória RAM sem necessidade, pois ele guarda todos os valores das iterações, mas só precisamos do último valor, pois é o valor convergido. No exemplo a última linha corresponde o resultado do algorítimo para os 9 pixels.

2.5 Algoritimo Generalizado

```
def Algoritmo2 (a,b,xstar,n):

  lenb = len(b)
  xstarC = np.atleast_2d(xstar).T #lista em vetor coluna
  x0 = ProjecaoOrtogonal(np.array(a[0].T),b[0],xstarC)
```

```
6
7   for j in range(n):
8     for i in range (lenb):
9       x0 = ProjecaoOrtogonal(np.array(a[i].T),b[i],x0)
10
11
12  return x0.T
```

Listing 8: Algorítimo Generalizado

Para a otimização de uso de memória o Algorítimo2 foi feita uma pequena alteração para só retornar a última linha, sendo assim possível usar o modelo em construção de imagens maiores.

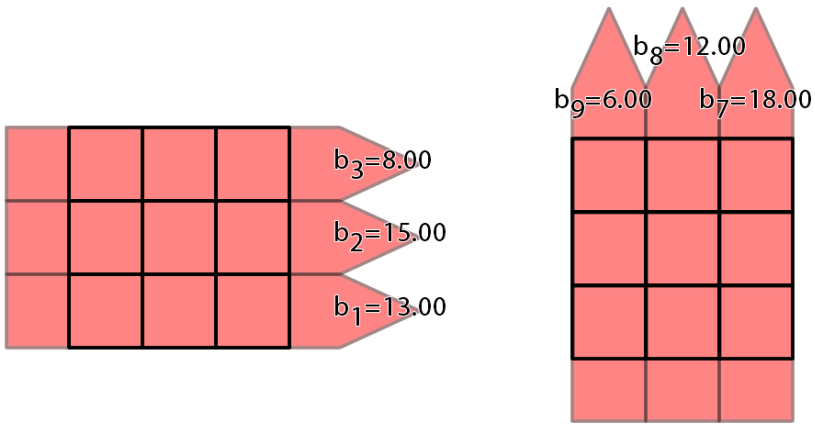
3 Problema Prático 3×3

A **i-ésima equação de feixe** tem o seguinte formato para N pixels:

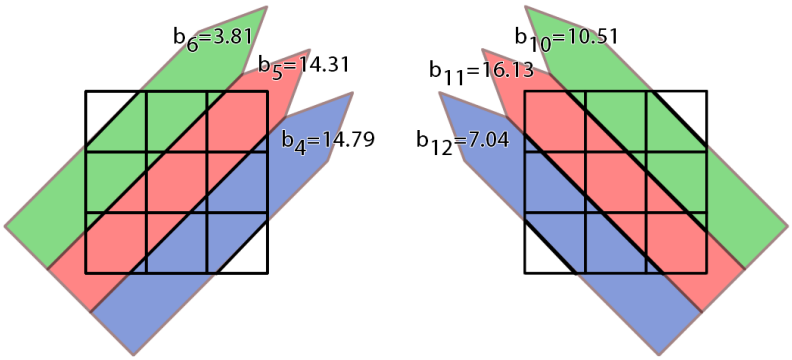
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... \ + a_{iN}x_N = b_i$$

Calcularemos as 12 equações do tipo definido acima para cada um dos três métodos (do centro do pixel, da reta central e da área).

Considerando as especificações dos feixes dadas, temos que os 4 conjuntos de feixes são da seguinte forma:



Feixes verticais e horizontais.



Feixes diagonais.

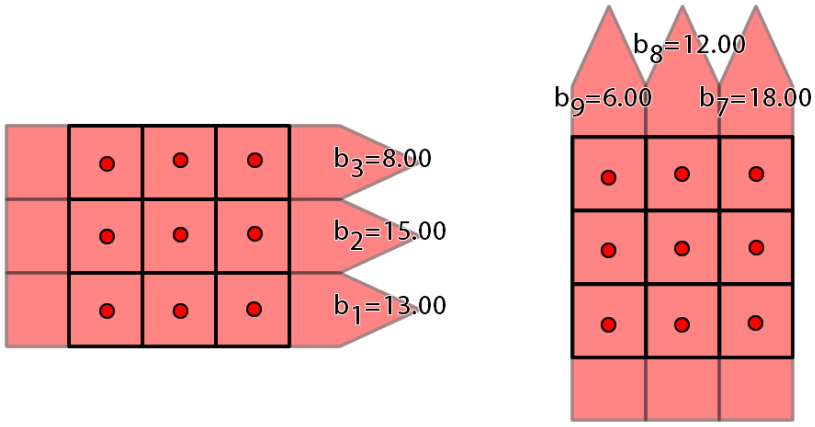
Neste caso portanto, independentemente do método escolhido teremos sempre 12 equações de feixe (pois temos 12 feixes).

3.1 Usando o Método do Centro do Pixel

Os coeficientes a_{ij} no caso do método do centro do pixel são da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \textit{se o } i-\textit{esimo feixe passa pelo centro do } j-\textit{esimo pixel} \\ 0 & , \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Para o caso em que os feixes são verticais e horizontais tem-se o seguinte esquema, destacando o centro dos pixels:



Centros destacados: Feixes verticais e horizontais.

Como pode-se perceber, o feixe 3 passa pelo centro dos pixels 1, 2 e 3. Logo a equação de feixe correspondente será:

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_3$$

Analogamente para os outros 5 feixes, temos:

$$x_4 + x_5 + x_6 = b_2$$

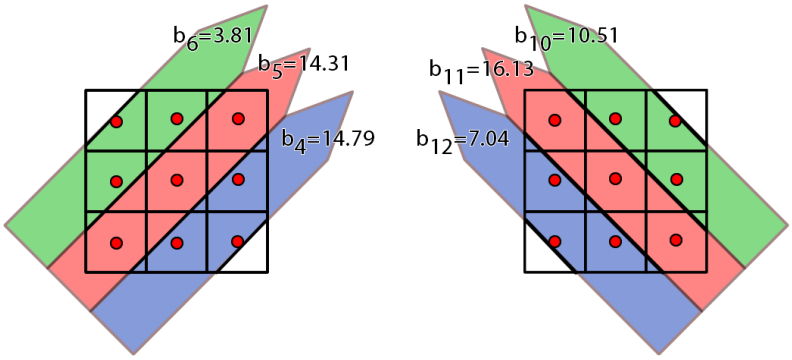
$$x_7 + x_8 + x_9 = b_1$$

$$x_1 + x_4 + x_7 = b_9$$

$$x_2 + x_5 + x_8 = b_8$$

$$x_3 + x_6 + x_9 = b_7$$

Já no caso dos feixes diagonais temos a seguinte situação:



Centros destacados: Feixes diagonais.

Nota-se que o feixe 6 passa pelo centro dos pixels 1, 2 e 4, logo a equação deste feixe é dada por:

$$x_1 + x_2 + x_4 = b_6$$

Fazendo o mesmo procedimento para os outros 5 feixes diagonais temos:

$$x_3 + x_5 + x_7 = b_5$$

$$x_6 + x_8 + x_9 = b_4$$

$$x_2 + x_3 + x_6 = b_{10}$$

$$x_1 + x_5 + x_9 = b_{11}$$

$$x_4 + x_7 + x_8 = b_{12}$$

3.1.1 Equações: método do centro do pixel

Juntando as equações acima e substituindo os valores de b_1 ... b_{12} pelos valores numéricos dados, temos que **as 12 equações de feixe para o caso do método do centro**

do pixel são:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 8.00 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15.00 \\ x_7 + x_8 + x_9 = 13.00 \\ x_1 + x_4 + x_7 = 6.00 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 12.00 \\ x_3 + x_6 + x_9 = 18.00 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3.81 \\ x_3 + x_5 + x_7 = 14.31 \\ x_6 + x_8 + x_9 = 14.79 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 10.51 \\ x_1 + x_5 + x_9 = 16.13 \\ x_4 + x_7 + x_8 = 7.04 \end{array}}$$

3.2 Usando o Método da Reta Central

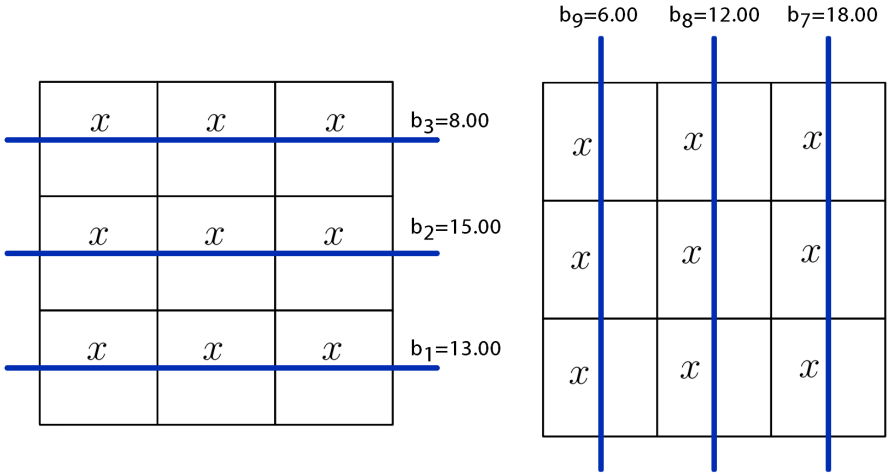
No método da reta central os coeficientes a_{ij} são definidos como:

$$a_{ij} = \left(\frac{\text{comprimento da reta central do i} - \text{esimo feixe que fica no j} - \text{esimo pixel}}{\text{l arg ura do j} - \text{esimo pixel}} \right)$$

Como estamos considerando que a largura de todos os pixels é igual a $L_{pixel} = x$, então os coeficientes a_{ij} ficam:

$$a_{ij} = \left(\frac{\text{comprimento da reta central do i} - \text{esimo feixe que fica no j} - \text{esimo pixel}}{x} \right)$$

Quando os feixes passam paralelamente aos lados temos que o comprimento da reta central que fica no interior de cada pixel é igual a própria largura do pixel, como pode ser visto na imagem abaixo:



Retas centrais: Feixes verticais e horizontais.

Portanto nos casos em que os feixes são $i = 1, 2, 3, 7, 8, 9$, os valores de a_{ij} são tais que:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 \quad , \textit{se o } i - \textit{esimo feixe atravessa o } j - \textit{esimo pixel} \\ \\ \frac{0}{x} = 0 \quad , \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Então para estes feixes temos as seguintes equações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_3$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = b_2$$

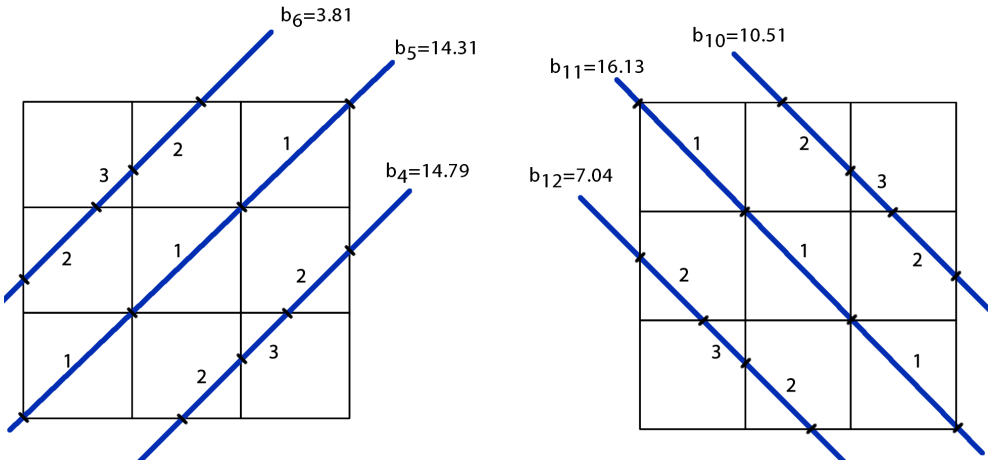
$$x_7 + x_8 + x_9 = b_1$$

$$x_1 + x_4 + x_7 = b_9$$

$$x_2 + x_5 + x_8 = b_8$$

$$x_3 + x_6 + x_9 = b_7$$

Já nos casos em que os feixes são diagonais, as retas centrais destes feixes são divididas pelas delimitações dos pixels nos segmentos de reta 1, 2 e 3. Como pode ser visto abaixo:



Retas centrais: Feixes diagonais.

Sendo o comprimento desses segmentos de reta denotados por L_1, L_2 e L_3, temos que por geometria simples as suas medidas são dadas por:

Comprimento de L_1

$$L_1 = x\sqrt{2}$$

$$\boxed{L_1 = 1.41421 \cdot x}$$

Comprimento de L_2

$$L_2 = x\left(2\sqrt{2} - 2\right)$$

$$\boxed{L_2 = 0.82842 \cdot x}$$

Comprimento de L_3

$$L_3 = x\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{L_3 = 0.58578 \cdot x}$$

Com os valores de L_1, L_2 e L_3 calculados, analisaremos agora a trajetória de cada reta central para determinar as equações destes feixes diagonais.

A reta central do feixe 6 passa com comprimento L_2 pelo pixel 4, com comprimento L_3 pelo pixel 1, e com comprimento L_2 pelo pixel 2. Então a equação do feixe 6 será:

$$\frac{L_2}{x}x_4 + \frac{L_3}{x}x_1 + \frac{L_2}{x}x_2 = b_6$$

Seguindo o mesmo raciocínio para os feixes 4, 5, 10, 11 e 12, temos as seguintes

equações:

$$\frac{L_2}{x}x_8 + \frac{L_3}{x}x_9 + \frac{L_2}{x}x_6 = b_4$$
$$\frac{L_1}{x}x_7 + \frac{L_1}{x}x_5 + \frac{L_1}{x}x_3 = b_5$$
$$\frac{L_2}{x}x_2 + \frac{L_3}{x}x_3 + \frac{L_2}{x}x_6 = b_{10}$$
$$\frac{L_1}{x}x_1 + \frac{L_1}{x}x_5 + \frac{L_1}{x}x_9 = b_{11}$$
$$\frac{L_2}{x}x_4 + \frac{L_3}{x}x_7 + \frac{L_2}{x}x_8 = b_{12}$$

3.2.1 Equações: Método da Reta Central

Substituindo os valores de b_1 ... b_12 e de L_1, L_2 e L_3 nas 12 equações acima, temos que as equações no caso do método da reta central são:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8.00$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = 15.00$$
$$x_7 + x_8 + x_9 = 13.00$$
$$x_1 + x_4 + x_7 = 6.00$$
$$x_2 + x_5 + x_8 = 12.00$$
$$x_3 + x_6 + x_9 = 18.00$$
$$0.82842 \cdot x_4 + 0.58578 \cdot x_1 + 0.82842 \cdot x_2 = 3.81$$
$$1.41421 \cdot x_7 + 1.41421 \cdot x_5 + 1.41421 \cdot x_3 = 14.31$$
$$0.82842 \cdot x_8 + 0.58578 \cdot x_9 + 0.82842 \cdot x_6 = 14.79$$
$$0.82842 \cdot x_2 + 0.58578 \cdot x_3 + 0.82842 \cdot x_6 = 10.51$$
$$1.41421 \cdot x_1 + 1.41421 \cdot x_5 + 1.41421 \cdot x_9 = 16.13$$
$$0.82842 \cdot x_4 + 0.58578 \cdot x_7 + 0.82842 \cdot x_8 = 7.04$$

3.3 Usando o Método da Área

Por definição, os coeficientes a_{ij} no método da área são dados por:

$$a_{ij} = \left(\frac{\text{area do i} - \text{esimo feixe que fica no j} - \text{esimo pixel}}{\text{area do i} - \text{esimo feixe que ficaria no j} - \text{esimo pixel se o i} - \text{esimo feixe atravessasse o j} - \text{esimo pixel paralelamente aos lados}} \right)$$

Considerando a largura de cada pixel como x, então a área de cada um dos pixels é:

$$A_{pixel} = x^2$$

Então neste caso os coeficientes a_{ij} são:

$$a_{ij} = \left(\frac{\text{area do i} - \text{esimo feixe que fica no j} - \text{esimo pixel}}{x^2} \right)$$

Nos casos em que os feixes atravessam paralelamente aos lados, isto é nos casos de feixe vertical e horizontal, pelo fato de a largura do feixes ser a mesma largura dos pixels, então os feixes ocupam totalmente a área dos pixels que atravessam. Então os valores de a_{ij} nos casos em que $i = 1, 2, 3, 7, 8, 9$, são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \quad , \textit{se o } i - \textit{esimo feixe atravessa o } j - \textit{esimo pixel} \\ \\ \dfrac{0}{x^2} = 0 \quad , \textit{caso contrario} \end{cases}$$

Assim, como nos outros casos, as equações de feixe em que $i = 1, 2, 3, 7, 8, 9$ são:

$$x_1 + x_2 + x_3 = b_3$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = b_2$$

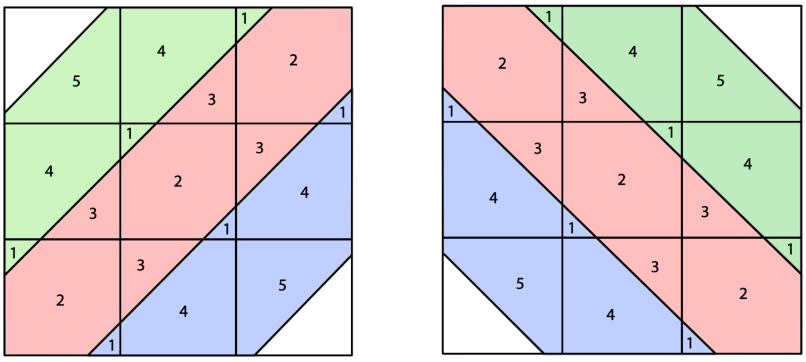
$$x_7 + x_8 + x_9 = b_1$$

$$x_1 + x_4 + x_7 = b_9$$

$$x_2 + x_5 + x_8 = b_8$$

$$x_3 + x_6 + x_9 = b_7$$

Já no caso dos feixes diagonais, são formadas áreas com medidas de 5 tamanhos diferentes, como indicado nas numerações de 1 a 5 abaixo:

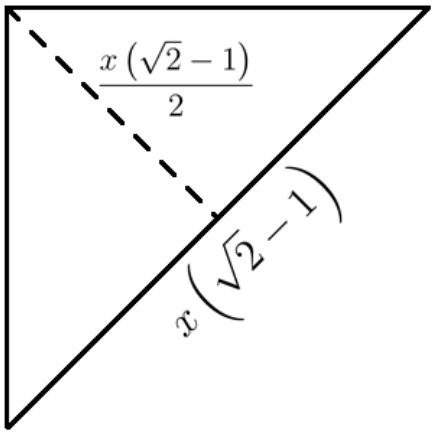


Feixes diagonais: áreas de 5 tamanhos diferentes.

Precisamos agora calcular as áreas A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 associadas respectivamente a cada uma das numerações 1, 2, 3, 4 e 5 na imagem acima.

Calculando área A_1

Sendo a largura dos pixels igual a x, então temos o seguinte esquema para as medias da base e altura para qualquer um dos triângulos identificados com o número 1:



Área 1: Base e altuda dos triangulos 1.

Portanto a área A_1 é:

$$A_1 = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$A_1 = \frac{x\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \frac{x\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}}{2}$$

$$A_1 = \frac{x^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}$$

$$A_1 = x^2 \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{A_1 = 0.04289 \cdot x^2}$$

Calculando área A_2

A área A_2 é obtida subtraindo a área de um pixel (x^2) por 2 vezes a área A_1, temos então:

$$A_2 = x^2 - 2 \cdot A_1$$

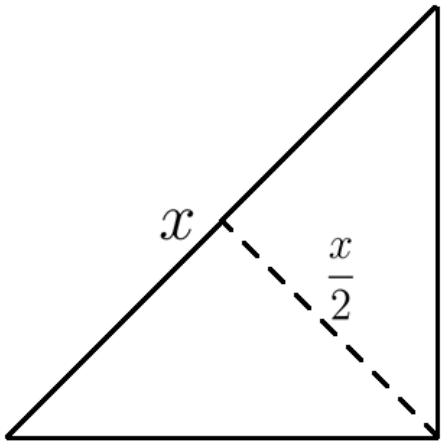
$$A_2 = x^2 - 2 \cdot \left(x^2 \cdot \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$A_2 = x^2 \cdot \left(1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{A_2 = 0.91421 \cdot x^2}$$

Calculando área A_3

O triângulo da área 3 tem como base e altura as seguintes medidas:



Área 3: Base e altuda dos triangulos 3.

Assim, a área A_3 é dada por:

$$A_3 = \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$A_3 = \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2}$$

$$A_3 = \frac{x^2}{4}$$

$$\boxed{A_3 = 0.25 \cdot x^2}$$

Calculando área A_4

A área 4 é obtida subtraindo-se a área de um pixel (x^2) pela área A_3. Então temos:

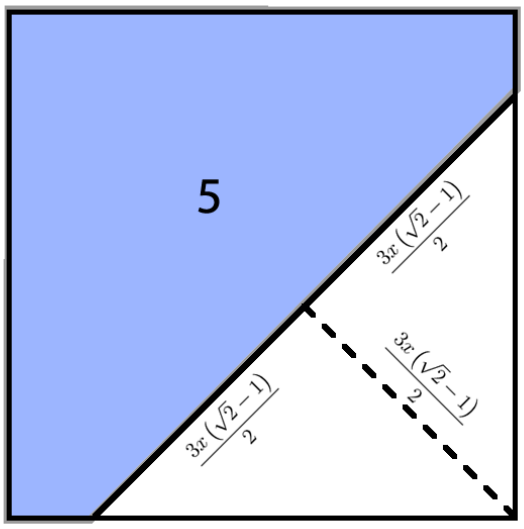
$$A_4 = x^2 - A_3$$

$$A_4 = x^2 - 0.25 \cdot x^2$$

$$\boxed{A_4 = 0.75 \cdot x^2}$$

Calculando área A_5

A área 5 está destacada em azul na imagem abaixo e pode ser obtida subtraindo-se a área do pixel (x^2) pela área do triangulo em branco:



Área 5: Área do pixel menos a área do triangulo branco.

Então a área A_5 é dada por:

$$A_5 = x^2 - \frac{base \cdot altura}{2}$$

$$A_5 = x^2 - \frac{3x\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \frac{3x\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}}{2}$$

$$A_5 = x^2 - \frac{9x^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}$$

$$A_5 = \frac{4x^2 - 9x^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}$$

$$A_5 = x^2\left[\frac{4-9\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}\right]$$

$$A_5 = x^2\left[\frac{18\sqrt{2}-23}{4}\right]$$

$$\boxed{A_5 = 0.61396 \cdot x^2}$$

Com as 5 áreas calculadas agora podemos encontrar as equações de feixe de todos os 6 feixes que passam na diagonal.

O feixe 6 passa pelos pixels 3, 5 e 7 cobrindo a área A_1. Passa pelos pixels 2 e 4

cobrindo a área A_4. E passa pelo pixel 1 cobrindo a área A_5. Então para o feixe 6 a equação será:

$$\frac{A_1}{x^2} \cdot (x_3 + x_5 + x_7) + \frac{A_4}{x^2} \cdot (x_2 + x_4) + \frac{A_5}{x^2} \cdot x_1 = b_6$$

O feixe 5 passa pelos pixels 3, 5 e 7 cobrindo a área A_2. E passa pelos pixels 2, 4, 6 e 8 cobrindo a área A_3. Logo equação do feixe 5 é:

$$\frac{A_2}{x^2} \cdot (x_3 + x_5 + x_7) + \frac{A_3}{x^2} \cdot (x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = b_5$$

O feixe 4 passa pelos pixels 3, 5 e 7 cobrindo a área A_1. Passa pelos pixels 6 e 8 cobrindo a área A_4. E Passa pelo pixel 9 cobrindo a área A_5. Então a equação do feixe 4 é:

$$\frac{A_1}{x^2} \cdot (x_3 + x_5 + x_7) + \frac{A_4}{x^2} \cdot (x_6 + x_8) + \frac{A_5}{x^2} \cdot x_9 = b_4$$

O feixe 10 passa pelos pixels 1, 5 e 9 cobrindo a área A_1. Passa pelos pixels 2 e 6 cobrindo a área A_4. E passa pelo pixel 3 cobrindo a área A_5. Assim, temos que a equação do feixe 10 é:

$$\frac{A_1}{x^2} \cdot (x_1 + x_5 + x_9) + \frac{A_4}{x^2} \cdot (x_2 + x_6) + \frac{A_5}{x^2} \cdot x_3 = b_{10}$$

O feixe 11 passa pelos pixels 1, 5 e 9 cobrindo a área A_2. E passa pelos pixels 2, 4, 6 e 8 cobrindo a área A_3. Então neste caso temos:

$$\frac{A_2}{x^2} \cdot (x_1 + x_5 + x_9) + \frac{A_3}{x^2} \cdot (x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = b_{11}$$

E por último, o feixe 12 passa pelos pixels 1, 5 e 9 cobrindo a área A_1. Passa pelos pixels 4 e 8 cobrindo a área A_4. E passa pelo pixel 7 cobrindo a área A_5. Temos que a equação do feixe 12 é então:

$$\frac{A_1}{x^2} \cdot (x_1 + x_5 + x_9) + \frac{A_4}{x^2} \cdot (x_4 + x_8) + \frac{A_5}{x^2} \cdot x_7 = b_{12}$$

3.3.1 Equações: método da área

Juntando as 12 equações acima e substituindo os valores de A_1 ... A_5 e de b_1 ... b_{12} temos:

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 + x_3 = 8.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 = 15.00 \\
x_7 + x_8 + x_9 = 13.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 = 6.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 = 12.00 \\
x_3 + x_6 + x_9 = 18.00 \\
0.04289 \cdot (x_3 + x_5 + x_7) + 0.75 \cdot (x_2 + x_4) + 0.61396 \cdot x_1 = 3.81 \\
0.91421 \cdot (x_3 + x_5 + x_7) + 0.25 \cdot (x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = 14.31 \\
0.04289 \cdot (x_3 + x_5 + x_7) + 0.75 \cdot (x_6 + x_8) + 0.61396 \cdot x_9 = 14.79 \\
0.04289 \cdot (x_1 + x_5 + x_9) + 0.75 \cdot (x_2 + x_6) + 0.61396 \cdot x_3 = 10.51 \\
0.91421 \cdot (x_1 + x_5 + x_9) + 0.25 \cdot (x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = 16.13 \\
0.04289 \cdot (x_1 + x_5 + x_9) + 0.75 \cdot (x_4 + x_8) + 0.61396 \cdot x_7 = 7.04
\end{gathered}
$$

4 Aplicação do Algoritmo generalizado

Agora aplicaremos o algoritmo generalizado (função *Algoritmo 2* criada em *Python* no inicio deste texto) para cada um dos três métodos vistos acima.

Para a reconstrução da imagem a partir do resultado do algorítimo generalizado primeiramente precisamos rearranjar os resultados para uma matriz quadrada, no exemplo da primeira saída do Algorítimo 2, por exemplo, a saída é um array com o resultado dos 9 pixels, porém precisamos colocá-los em uma matriz 3x3.

```
#Cria a matriz com os resultados, a partir da tabela
def MatrizResultado(tab_df):

  tab_df = pd.DataFrame(tab_df) #Para Funcionar com df ou array
  resultado = tab_df.tail(1)
  len_tab = len(resultado.iloc[0])
  n = int(math.sqrt(len_tab))
  saida = np.zeros((n,n))

  #Resultados em Matriz Quadrada n por n
  for i in range (n):
    for j in range (n):
      saida[i][j] = resultado.iloc[0][i*n + j]

  return saida
```

Listing 9: Matriz Resultado

Tendo o resultado podemos converter em imagem, usando as bibliotecas scikit-image e matplotlib, onde o pixel com maior valor ficará branco, o de menor valor preto, com os intermediários em tons de cinza.

4.1 Caso do Método do Centro Pixel

No código abaixo definimos as váriaveis com os valores encontrados na seção anterior.

```
#Matriz vetor a para o m todo do centro do pixel
a =np.matrix([[0,0,0,0,0,0,1,1,1],
              [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
              [1,1,1,0,0,0,0,0,0],
              [0,0,0,0,0,1,0,1,1],
              [0,0,1,0,1,0,1,0,0],
              [1,1,0,1,0,0,0,0,0],
              [0,0,1,0,0,1,0,0,1],
              [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
              [1,0,0,1,0,0,1,0,0],
              [0,1,1,0,0,1,0,0,0],
              [1,0,0,0,1,0,0,0,1],
              [0,0,0,1,0,0,1,1,0]])
#Valores de b
b = [13.0, 15.0, 8.0, 14.79, 14.31, 3.81, 18.0, 12.0, 6.0, 10.51, 16.13,
    7.04]
xstar = np.zeros(9)
```

Listing 10: Definindo variáveis: Método do Centro do Pixel

Agora usamos o algoritmo generalizao para calcular qual será a imagem obtida, gerando a *Tabela2*:

```
tab2 = Algoritmo2(a,b,xstar,45)

Tabela2 = pd.DataFrame()

#Df apartir de tab1 (resultado do ex1)
for i in range (len(tab2)):
  Tabela2 = Tabela2.append(tab2[i].tolist())

#Renomeando Colunas e resetando o index
Tabela2.rename({0:'x1', 1:'x2', 2:'x3',
                3:'x4', 4:'x5', 5:'x6',
                6:'x7', 7:'x8', 8:'x9'}, inplace=True,axis=1)
Tabela2 = Tabela2.reset_index().drop('index',axis=1)
Tabela2.round(2)
```

Listing 11: Método do centro do Pixel: Construindo a imagem

O código acima gera a seguinte tabela como saída, lembrando que a última linha desta tabela representa a nossa resposta final, isto é, o valor da intensidade de coloração de nossa imagem como resposta.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.33	4.33	4.33
2	0.00	0.00	0.00	5.00	5.00	5.00	4.33	4.33	4.33
3	2.67	2.67	2.67	5.00	5.00	5.00	4.33	4.33	4.33
4	2.67	2.67	2.67	5.00	5.00	5.37	4.33	4.71	4.71
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
536	1.23	0.85	5.58	2.06	7.75	4.85	1.67	3.40	7.58
537	1.58	0.85	5.58	2.41	7.75	4.85	2.02	3.40	7.58
538	1.58	0.60	5.32	2.41	7.75	4.59	2.02	3.40	7.58
539	1.32	0.60	5.32	2.41	7.49	4.59	2.02	3.40	7.32
540	1.32	0.60	5.32	2.15	7.49	4.59	1.76	3.14	7.32

541 rows × 9 columns

Tabela2: Última linha representa a imagem gerada pelo método do CENTRO DO PIXEL.

4.2 Caso do Método da Reta Central

Fazendo o mesmo processo para os valores obtidos na seção 3 para o método da reta central temos:

```
#Matriz vetor a para o m todo da reta central
a_rc =np.matrix([[1,1,1,0,0,0,0,0,0],
                 [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
                 [0,0,0,0,0,0,1,1,1],
                 [1,0,0,1,0,0,1,0,0],
                 [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
                 [0,0,1,0,0,1,0,0,1],
                 [0.58578,0.82842,0,0.82842,0,0,0,0,0],
                 [0,0,1.41421,0,1.41421,0,1.41421,0,0],
                 [0,0,0,0,0,0.82842,0,0.82842,0.58578],
                 [0,0.82842,0.58578,0,0,0.82842,0,0,0],
                 [1.41421,0,0,0,1.41421,0,0,0,1.41421],
                 [0,0,0,0.82842,0,0,0.58578,0.82842,0]])
#Valores de b
b_rc = [8.0, 15.0, 13.0, 6.00, 12.00, 18.00, 3.81, 14.31, 14.79, 10.51,
    16.13, 7.04]
xstar_rc = np.zeros(9)

tab3 = Algoritmo2(a_rc,b_rc,xstar_rc,45)
```

```
19
20 Tabela3 = pd.DataFrame()
21
22 #Df apartir de tab1 (resultado do ex1)
23 for i in range (len(tab3)):
24   Tabela3 = Tabela3.append(tab3[i].tolist())
25
26 #Renomeando Colunas e resetando o index
27 Tabela3.rename({0:'x1', 1:'x2', 2:'x3',
28                 3:'x4', 4:'x5', 5:'x6',
29                 6:'x7', 7:'x8', 8:'x9'}, inplace=True,axis=1)
30 Tabela3 = Tabela3.reset_index().drop('index',axis=1)
31 Tabela3.round(2)
```

Listing 12: Método da reta central: construindo a imagem

O código acima gera a seguinte *Tabela3* em que a última linha representa a imagem contruída com o método da reta central.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	2.67	2.67	2.67	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	2.67	2.67	2.67	5.00	5.00	5.00	0.00	0.00	0.00
3	2.67	2.67	2.67	5.00	5.00	5.00	4.33	4.33	4.33
4	0.67	2.67	2.67	3.00	5.00	5.00	2.33	4.33	4.33
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
536	2.17	1.44	3.96	1.62	4.37	8.70	1.79	5.88	5.18
537	2.17	1.44	3.96	1.62	4.37	8.55	1.79	5.72	5.07
538	2.17	1.40	3.93	1.62	4.37	8.50	1.79	5.72	5.07
539	2.10	1.40	3.93	1.62	4.30	8.50	1.79	5.72	5.00
540	2.10	1.40	3.93	1.58	4.30	8.50	1.76	5.68	5.00

541 rows × 9 columns

Tabela3: Última linha representa a imagem gerada pelo método da RETA CENTRAL.

4.3 Caso do Método da Área

E mais uma vez, repetindo o processo anterior para os valores obtidos na seção 3 para o caso da Área, temos o seguinte processo que retorna os valores dos pixels da imagem gerada.

```
#Matriz vetor a para o m todo da Area
a_area =np.matrix([[1,1,1,0,0,0,0,0,0],
                   [0,0,0,1,1,1,0,0,0],
                   [0,0,0,0,0,0,1,1,1],
                   [1,0,0,1,0,0,1,0,0],
                   [0,1,0,0,1,0,0,1,0],
                   [0,0,1,0,0,1,0,0,1],
                   [0.61396,0.75,0.04289,0.75,0.04289,0,0.04289,0,0],
                   [0,0.25,0.91421,0.25,0.91421,0.25,0.91421,0.25,0],
                   [0,0,0.04289,0,0.04289,0.75,0.04289,0.75,0.61396],
                   [0.04289,0.75,0.61396,0,0.04289,0.75,0,0,0.04289],
                   [0.91421,0.25,0,0.25,0.91421,0.25,0,0.25,0.91421],
                   [0.04289,0,0,0.75,0.04289,0,0.61396,0.75,0.04289]])
#Valores de b
b_area = [8.0, 15.0, 13.0, 6.00, 12.00, 18.00, 3.81, 14.31, 14.79,
    10.51, 16.13, 7.04]
xstar_area = np.zeros(9)

tab4 = Algoritmo2(a_area,b_area,xstar_area,45)

Tabela4 = pd.DataFrame()

#Df apartir de tab1 (resultado do ex1)
for i in range (len(tab4)):
  Tabela4 = Tabela4.append(tab4[i].tolist())

#Renomeando Colunas e resetando o index
Tabela4.rename({0:'x1', 1:'x2', 2:'x3',
                3:'x4', 4:'x5', 5:'x6',
                6:'x7', 7:'x8', 8:'x9'}, inplace=True,axis=1)
Tabela4 = Tabela4.reset_index().drop('index',axis=1)
Tabela4.round(2)
```

Listing 13: Método da reta central: construindo a imagem

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
0	0.00	0.00	0.00	0.0	0.0	0.0	0.00	0.00	0.00
1	2.67	2.67	2.67	0.0	0.0	0.0	0.00	0.00	0.00
2	2.67	2.67	2.67	5.0	5.0	5.0	0.00	0.00	0.00
3	2.67	2.67	2.67	5.0	5.0	5.0	4.33	4.33	4.33
4	0.67	2.67	2.67	3.0	5.0	5.0	2.33	4.33	4.33
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
536	3.00	0.99	4.01	1.0	5.0	9.0	2.00	6.00	5.00
537	3.00	0.99	4.01	1.0	5.0	9.0	2.00	6.00	5.00
538	3.00	0.99	4.01	1.0	5.0	9.0	2.00	6.00	5.00
539	3.00	0.99	4.01	1.0	5.0	9.0	2.00	6.00	5.00
540	3.00	0.99	4.01	1.0	5.0	9.0	2.00	6.00	5.00

541 rows × 9 columns

Tabela4: Última linha representa a imagem gerada pelo método da ÁREA.

4.4 Imagens Geradas

A partir das variáveis *Tabela2*, *Tabela3* e *Tabela4* geradas acima, iremos agora, usado a função *Matriz Resultado* já definida e usando a biblioteca matplotlib, mostrar as imegens obtidas com os três métodos.

```
fig, (ax0, ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=1, ncols=3, figsize=(16, 6),
                                    sharex=True, sharey=True)

ax0.imshow(MatrizResultado(Tabela2), cmap=plt.cm.gray)
ax0.axis('off')
ax0.set_title('Centro do Pixel')
ax1.imshow(MatrizResultado(Tabela3), cmap=plt.cm.gray)
ax1.set_title('Reta Central')
ax1.axis('off')
ax2.imshow(MatrizResultado(Tabela4), cmap=plt.cm.gray)
ax2.set_title('Area')
ax2.axis('off')

plt.show()
```

Listing 14: Método da reta central: construindo a imagem

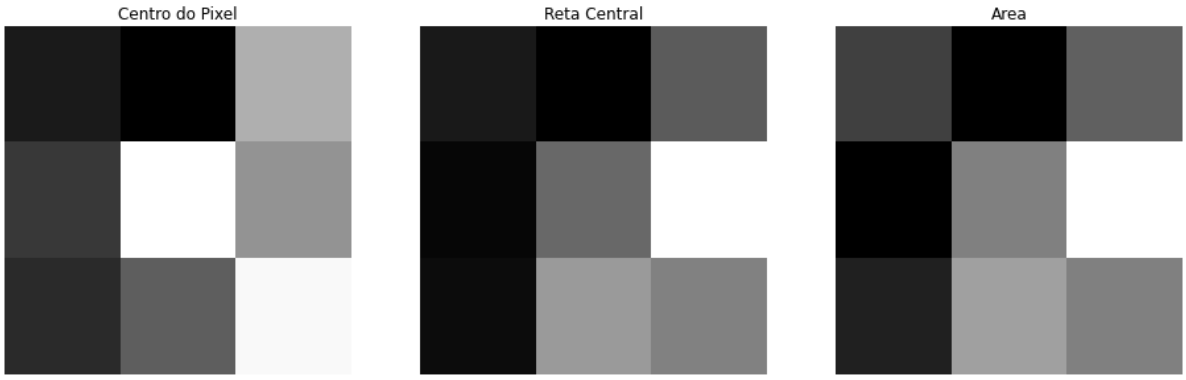


Tabela4: Comparação das imagens geradas pelos 3 métodos.

5 Desafio

5.1 Matriz a

Tendo o modelo e os algorítimos para reconstrução da imagem, podemos testar para exemplo maiores e reais.

Inicialmente precisamos construir a matriz a para qualquer tamanho de imagem. Para facilitar a generalização das matrizes, escolhemos usar mais vetores nas diagonais, esses vetores passando pelas diagonais dos quadrados do pixels.

```
def cria_matriz_a_diagonal_1(n): # imagem n x n , com n*n pixels
    colunas = n*n
    linhas = (n-1)*2+1
    salto = n-1

    matriz = np.zeros((linhas, colunas))

    for i in range(int(linhas/2)+1):
        matriz[i][i] = 1
        for j in range(i):
            matriz[i][i+(j+1)*salto] = 1

    for i in range(int(linhas/2)+1, linhas):
        for j in range(colunas):
            matriz[i][j] = matriz[linhas-i-1][colunas-j-1]

    return matriz

def cria_matriz_a_diagonal_2(n): # imagem n x n , com n*n pixels
    colunas = n*n
    linhas = (n-1)*2+1
    salto = n+1

```

```
    matriz = np.zeros((linhas, colunas))

    for i in range(int(linhas/2)+1):
        matriz[i][n-1-i] = 1
        for j in range(i):
            matriz[i][n-1-i+(j+1)*salto] = 1

    for i in range(int(linhas/2)+1, linhas):
        for j in range(colunas):
            matriz[i][j] = matriz[linhas-i-1][colunas-j-1]

    return matriz

def cria_matriz_a_vertical(n): # imagem n x n , com n*n pixels
    linhas = n
    colunas = n*n
    salto = n

   matriz = np.zeros((linhas, colunas))

    for i in range(linhas):
      for j in range(linhas):
         matriz[i][i+salto*j] = 1

  return matriz

def cria_matriz_a_horizontal(n): # imagem n x n , com n*n pixels
    linhas = n
    colunas = n*n
    salto = n

    matriz = np.zeros((linhas, colunas))

    for i in range(linhas):
        for j in range(linhas):
          matriz[i][salto*i+j] = 1

    return matriz

def cria_matriz_a(n):
    md1 = cria_matriz_a_diagonal_1(n)
    md2 = cria_matriz_a_diagonal_2(n)
    mv = cria_matriz_a_vertical(n)
    mh = cria_matriz_a_horizontal(n)
    matriz_a = np.concatenate((md1,md2,mv,mh))
```

```
69      return (np.asmatrix(matriz_a))
```

Listing 15: Matriz a

No nosso modelo a matriz 'a' terá número de colunas igual ao número de pixeis da imagem e número de linhas aproximadamente a 6 vezes o número de uma coluna/linha de pixeis. No modelo usado para 9 pixeis, a matriz 'a' tinha uma quantidade de linhas de 4 vezes o número de uma coluna/linha de pixel. Portanto o nosso modelo de criação da matriz a irá consumir mais memória, que funciona para imagens não muito grandes, mas para imagens maior que 512 x 512 pixel, teria que ter muita memória RAM disponível.

5.2 Matriz b

Com a matriz 'a' e a nossa imagem de teste. podemos construir uma lista com os resultados 'b'. Onde cada resultado representa a somatória do valor de cada pixel onde o feixe de raio x passa.

```
1  def CriaListab(matriz_a,imagem_np):
2    len_img = len(imagem_np)
3    pixel = len_img*len_img #n pixel para imagem quadrada
4    vetor_pixel = [] #inicial
5    for i in range (len_img):
6      for j in range (len_img):
7        vetor_pixel.append(imagem_np[i][j])
8    vetor_pixel = np.array(vetor_pixel)
9
10   b = []
11   for k in range(len(matriz_a)):
12     res = np.array(matriz_a[k])*vetor_pixel
13     b.append(res.sum())
14
15   return b
```

Listing 16: Matriz b

5.3 Teste para uma imagem de 80 x 80 pixel

5.3.1 Imagem mais complexa

Com o nosso modelo, podemos testar com imagens reais. Usaremos imagens da biblioteca scikit-image, inicialmente utilizaremos uma imagem mais complexa. Utilizaremos a imagem data.camera(), porém a imagem inicial possuí 512 x 512 pixel, então faremos o crop da imagem, pegando uma parte de 80 x 80 da imagem original

```
1  #Crop imagem camera em 80x80
2  camera = data.camera() #Imagem inicial
3
```

```
camera80 = np.zeros((80,80))
for i in range(80):
  for j in range(80):
    camera80[i][j]= camera[300+i][300+j] #parte central da imagem
```

Listing 17: Corte de imagem

```
matriz_a_teste = cria_matriz_a(80)
b_teste = CriaListab(matriz_a_teste,camera80)
x_teste = np.zeros(matriz_a_teste.shape[1])
teste80 = Algoritmo2(matriz_a_teste,b_teste,x_teste,50)
```

Listing 18: Teste 1 imagem 80 x 80

A saída na variável teste80 é a matriz coluna, com 6.400 valores, um para cada pixel da imagem resultante, a partir do vetor inicial zerado.

```
teste80_df = pd.DataFrame(teste80[-1]).T
teste80img = MatrizResultado(teste80_df)

#Criacao da imagem
fig, (ax0, ax1) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(16, 6),
                               sharex=True, sharey=True)

ax0.imshow(camera80, cmap=plt.cm.gray)
ax0.axis('off')
ax0.set_title('Original')
ax1.imshow(teste80img, cmap=plt.cm.gray)
ax1.set_title('Gerada')
ax1.axis('off')

plt.savefig('camera80.png')
```

Listing 19: Teste 1 imagem 80 x 80

Imagem original vs Imagem gerada pelo modelo

Podemos observar que um pedaço da imagem que está exatamente a 45 graus foi reconstruída com boa precisão, mas o resto nem tanto. Isso se deve à limitação do nosso modelo que só reconstrói a imagem a partir de 4 feixes, em um caso real a máquina gira ao redor do paciente tendo vários ângulos, então o modelo com as limitações impostas não funciona muito bem com imagens mais complexas

5.3.2 Imagem mais simples

A imagem mais simples utilizada foi também retirada da biblioteca scikit-image, foram seguidos os mesmos passos anteriores, porém ao invés da imagem data.camera(), foi utilizada a imagem data.checkerboard() da biblioteca. A imagem escolhida é um tabuleiro de xadrez, onde só tem valor 255(branco) e 0 (preto), bem mais simples.

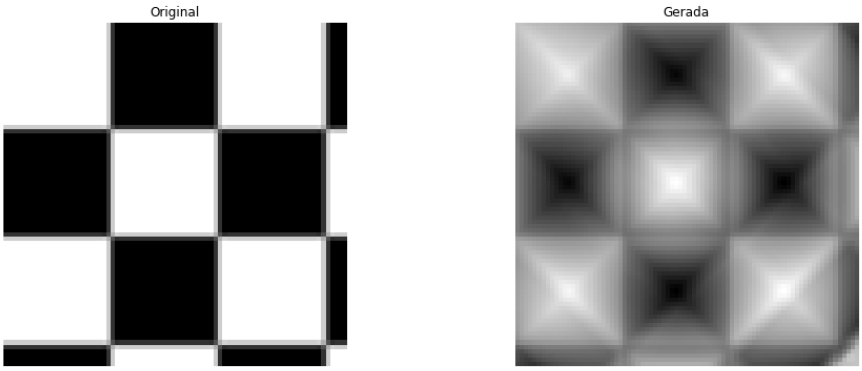


Imagem original vs Imagem gerada pelo modelo, Tabuleiro de xadrez partindo de um vetor zerado.

Podemos usar um vetor inicial diferente do zerado para avaliar o resultado. Para isso foram seguidos os passos anteriores, só mudando a seguinte linha de código

```
x_teste = np.random.randint(0,255,size=(matriz_a_teste.shape[1]))
```

criando assim um vetor inicial com valores aleatórios entre 0 e 255.

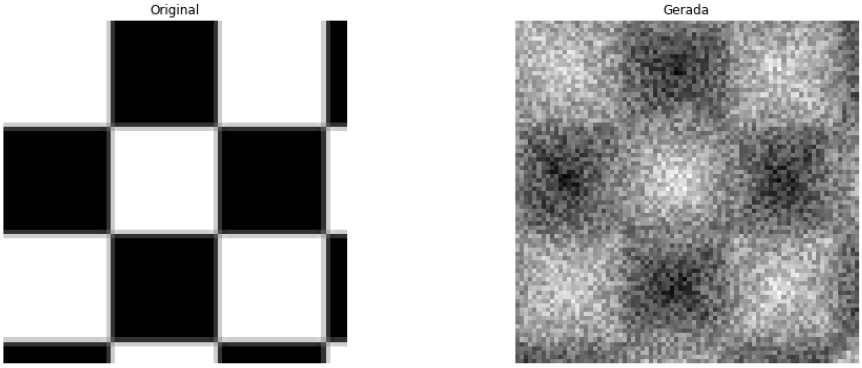


Imagem original vs Imagem gerada pelo modelo, Tabuleiro de xadrez partindo de um vetor aleatório inicial.

No caso mais simples conseguimos ver mais claro a reconstrução das imagens pelo nosso modelo. Também foi possível ver a diferença quando partimos de vetores inicias diferentes.

5.4 Teste para uma imagem de 512 x 512 pixel

No caso para a reconstrução da imagem de 512 x 512 pixel, tivemos alguns problemas de memória RAM rodando o notebook com todas as funções. Então tivemos que fazer cada parte separada, e em um ambiente com mais memória RAM disponível.

O problema maior de memória foi para a criação da matriz a, pois no caso de 512 x 512, ela é uma matriz com 262144 colunas e 3070 linhas. E a grande maioria dos valores é zerado, então uma opção utilizada foi exportar em formato npz, que é um método no numpy onde podemos ter essa matriz com um arquivo bem menor, pois ela só guarda o valor e posição dos valores diferente de zero. Ai tendo esse arquivo localmente, podemos gerar a matriz a, consumindo menos recurso de RAM, com o seguinte algorítimo

```
1
2 matriz_a_512_csr = sparse.load_npz("../input/d/victorvianaom/matrizes-a/
     matriz_a_512_csr.npz")
3 matriz_512 = matriz_a_512_csr.todense()
```

Listing 20: reconstruindo a matriz a do arquivo npz

5.4.1 Imagem mais complexa

Tendo a matriz 'a', podemos usar nossos algoritmos para reconstruir a figura data.camera(), cujo o tamanho original possui 512 x 512, a partir de um vetor zerado

```
1 camera = data.camera()
2 b_teste = CriaListab(matriz_512,camera)
3 x_teste = np.zeros(262144)
4 teste512 = Algoritmo2(matriz_512,b_teste,x_teste,20)
5
6 teste512_df = pd.DataFrame(teste512)
7 teste512img = MatrizResultado(teste512_df)
8
9 fig, (ax0, ax1) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(16, 6),
10                                 sharex=True, sharey=True)
11
12 ax0.imshow(camera, cmap=plt.cm.gray)
13 ax0.axis('off')
14 ax0.set_title('Original')
```

```
ax1.imshow(teste512img, cmap=plt.cm.gray)
ax1.set_title('Gerada')
ax1.axis('off')

#plt.show()
plt.savefig("512_camera.png")
```

Listing 21: imagem 512 x 512

Figura mais complexa gerada pelo modelo

No caso da figura mais complexa, podemos ver só as partes mais escuras e mais claras, mas não da para definir muito bem qual era a imagem original, isso se deve ao fato do nosso modelo só pegar informações de 4 direções.

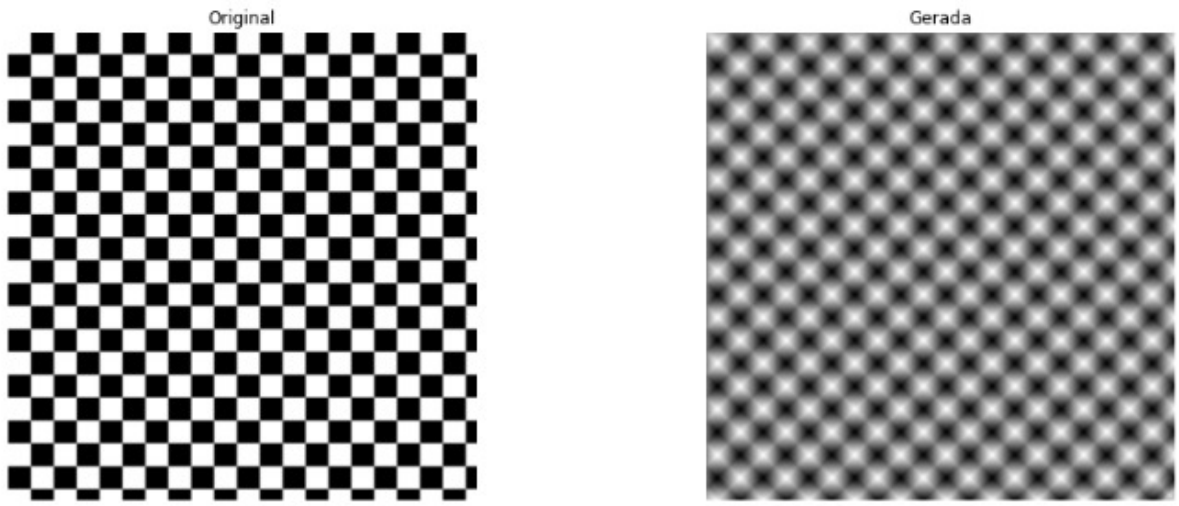
5.4.2 Imagem mais simples

Para a imagem mais simples, utilizamos a imagem do tabuleiro de xadrez (data.checkerboard()), porém a imagem original possui 200 x 200 pixel, então copiamos a imagem lado a lado algumas vezes, depois recortamos até ficar com 512 x 512, assim utilizando a mesma matriz 'a' anteriormente. Simulando com o algoritmo abaixo podemos ver o resultado com uma imagem mais simples.

```
b_teste = CriaListab(matriz_512,xadrez_512)
x_teste = np.zeros(262144)
teste512 = Algoritmo2(matriz_512,b_teste,x_teste,20)

teste512_df = pd.DataFrame(teste512)
teste512img = MatrizResultado(teste512_df)

fig, (ax0, ax1) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(16, 6),
                               sharex=True, sharey=True)

```

```
ax0.imshow(xadrez_512, cmap=plt.cm.gray)
ax0.axis('off')
ax0.set_title('Original')
ax1.imshow(teste512img, cmap=plt.cm.gray)
ax1.set_title('Gerada')
ax1.axis('off')

#plt.show()
plt.savefig("512_xadrez.png")
```

Listing 22: Imagem 512 x 512 mas simples



Na imagem mais simples da para ver o resultado bem mais consistente, vendo claramente que a imagem gerada partiu de um xadrez branco e preto

Referências

Lell, M. M., Wildberger, J. E., Alkadhi, H., Damilakis, J., and Kachelriess, M. (2015). Evolution in computed tomography: the battle for speed and dose. *Investigative radiology*, 50(9):629–644.