MAP2212 - EP1 Cálculo de π por Monte Carlo

Vinícius da Costa Collaço - 11811012

28 de março de 2022

1 Introdução

Esse relatório visa apresentar uma solução para o primeiro exercício programa (EP1) proposto na matéria MAP2212/2022 (Laboratório de Computação e Simulação) do curso de bacharelado de matemática aplicada e computacional (BMAC) do instituito IME-USP.

O objetivo é utilizar o método estocástico de Monte Carlo para estimar o valor do número π com acurácia de 0.05%.

Utilizando a linguagem *Python* e bibliotecas adequadas, devemos gera pontos pseudo aleatórios, uniformemente distribuídos no intervalo $x_i \in [-1,1]^2, i \in \{1,\ldots,n\}$, o valor de π será estimado pela proporção $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$, sendo $T(x)$ a função indicadora dada por $T(x) = \mathbb{1}(\|x\|_2 \leq 1)$, que testa se o ponto cai dentro do círculo de raio 1 com centro na origem do plano cartesiano.

O número de pontos gerados deverá ser definido utilizando métodos apropriados

2 Cálculo do estimador de π

seja $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$, tendo a função indicadora dada por $T(x) = \mathbb{1}(\|x\|_2 \leq 1)$, para $n \to \infty$ temos:

$$\hat{p} = \frac{area_{circulo}}{area_{quadrado}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

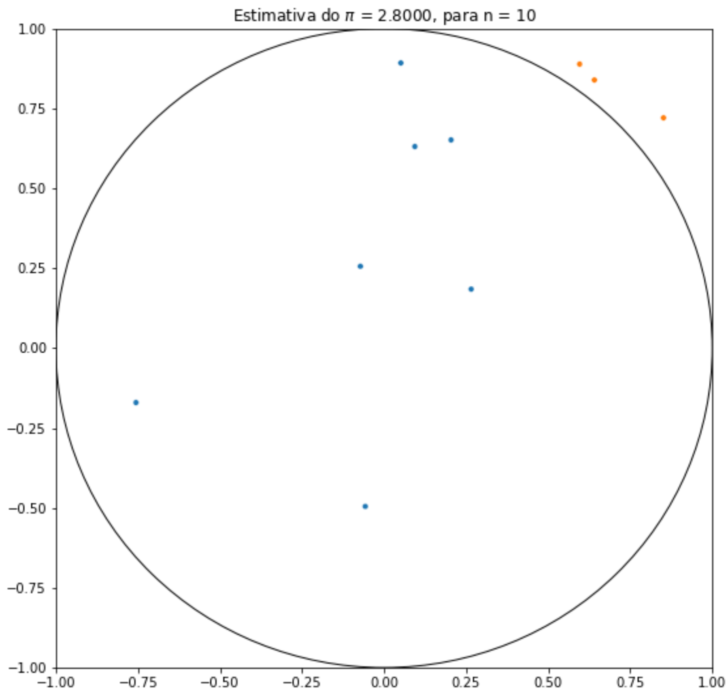
portanto o estimador $\hat{\pi}$ é dado por:

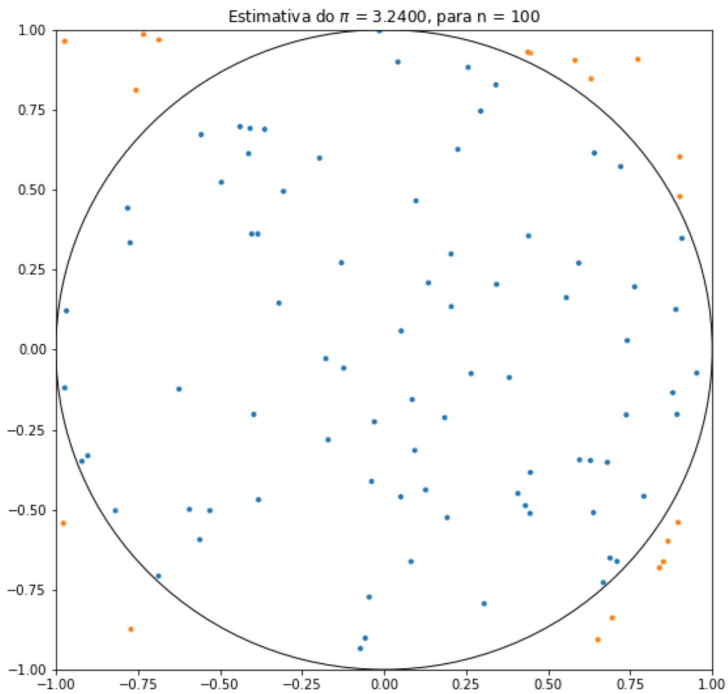
$$\hat{\pi} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}[\mathbb{1}(\|x_i\|_2 \leq 1)]$$

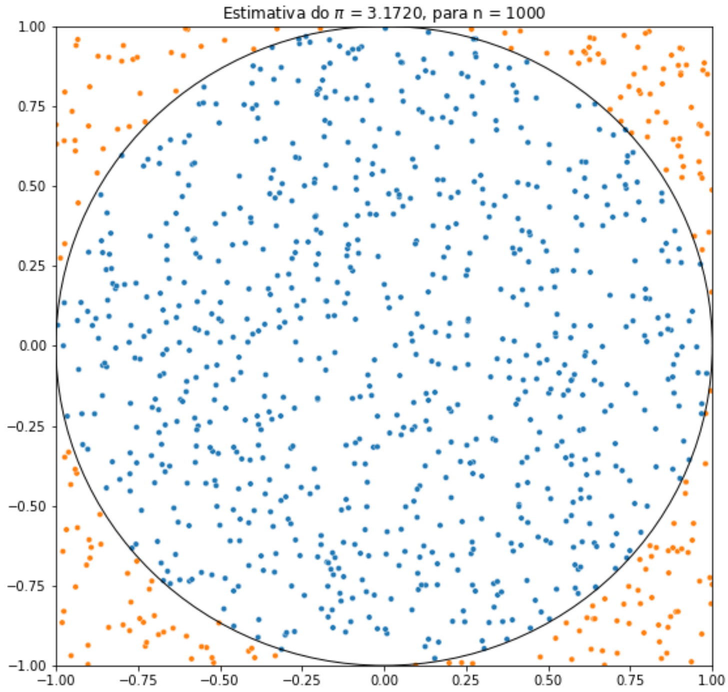
3 Simulações iniciais

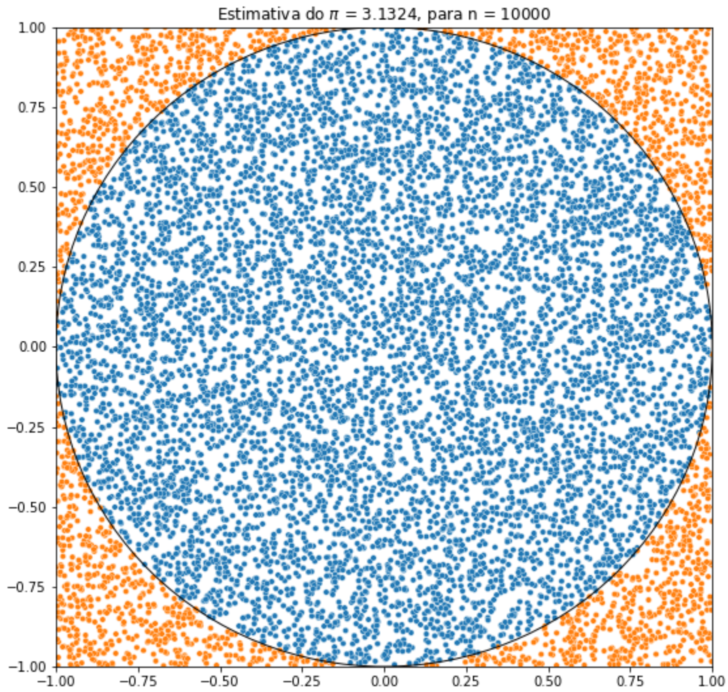
Inicialmente foram feitas algumas simulações iniciais para testar o algorítimo graficamente, para essas simulações foi utilizada a função gera_grafico () com valor de Seed =

39, e 'n' de 10, 100, 1000 e 10000, gerando as seguintes imagens respectivamente.









Podemos verificar inicialmente que o valor de π aproxima-se do valor real conforme o valor do 'n' vai aumentando, porém esses valores foram escolhidos arbitrariamente. Um valor de 'n' que atenda os requisitos do problema será calculado na próxima secção.

4 Definindo o tamanho da amostra (n)

Para a definição do valor do n, iremos utilizar a aproximação assintótica de uma distribuição Bernoulli.

Supondo que o tamanho da amostra seja relativamente grande, pelo teorema do limite central, podemos aproximar a Bernoulli por uma normal, tendo:

$$P(|\hat{p} - p| \leq \varepsilon) \geq \gamma$$

?

$$P(-\varepsilon \leq \hat{p} - p \leq \varepsilon) = P\left(\frac{-\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) \approx \gamma$$

obtendo finalmente

$$n = \frac{\sigma^2 {Z_\gamma}^2}{\varepsilon^2}$$

4.1 Intervalo de confiança

Para o problema será utilizado um intervalo de confiança $\gamma = 95\%$, escolhido arbitrariamente obtendo assim o Z_γ da $N(0,1)$, portanto $Z_\gamma = 1,96$

4.2 Variância

Para a variância podemos utilizar uma abordagem mais pessimista ou uma abordagem mais otimista.

Na abordagem pessimista podemos usar a variância máxima de uma Bernoulli, ou seja

$$\sigma^2_{pessimista} = 0,25$$

Porém sabemos que o nosso $\hat{p} = \dfrac{\pi}{4}$, dado que a variância de uma distribuição de Bernoulli é dada por $X \sim Ber(p)$; $Var(X) = p(1-p)$, podemos então estabelecer a nossa estimativa de variância otimista dada por:

$$\sigma^2_{otimista} = \left(\frac{\hat{\pi}}{4}\right)\left(1 - \frac{\hat{\pi}}{4}\right)$$

para n grande temos que o nosso estimador $\hat{\pi} \approx \pi$, portanto temos a nossa variância otimista dada por:

$$\sigma^2_{otimista} = 0,16855$$

Poderíamos também estabelecer a variância empiricamente, porém a variância otimista é um bom parâmetro estabelecido, diminuindo o tamanho da amostra em relação à variância máxima, portanto será utilizado o valor calculado da variância otimista para cálculo da amostra

4.3 Erro amostral (ε)

No problema é pedido uma acurácia de 0,05%, ou seja:

$$\frac{|\hat{\pi} - \pi|}{\pi} \leq 0,0005$$

Temos, $\hat{\pi} = \dfrac{4}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$, logo:

$$\frac{|\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - \pi|}{\pi} \leq 0,0005 \implies 4 * \frac{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - \pi|}{\pi} \leq 0,0005$$

$$\implies \frac{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - \pi|}{\pi} \leq \frac{0,0005}{4} \implies \frac{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - \pi|}{\pi} \leq 0,000125$$

então:

$$\varepsilon = 0,000125\pi \therefore \varepsilon = 0,0003927$$

4.4 Cálculo do n

Tendo todas as variáveis calculadas podemos calcular o n adequado para o problema

$$n = \frac{\sigma^2 {Z_\gamma}^2}{\varepsilon^2} = \frac{0,16855 * (1,96)^2}{(0,0003927)^2} = 4198741,11$$

portanto:

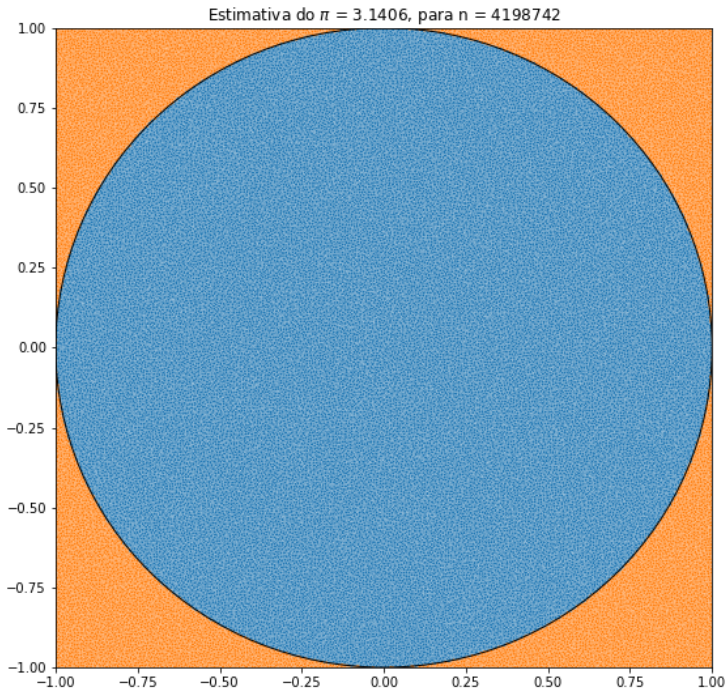
$$n = 4198742$$

5 Resultados e discussões

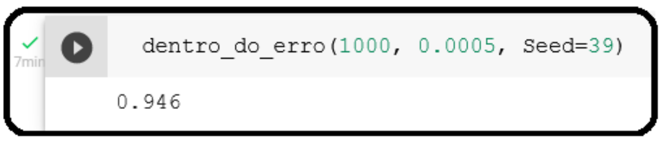
Na fase inicial da criação do algorítimo tentou-se gerar ponto a ponto e a cada passo calcular o π, em um *loop*, porém com esse método o algorítimo demorava muito tempo (cerca de 30 min, no ambiente *Colab*) para executar rotinas com n na casa de 10^6, então ao invés desse método optou-se por utilizar a biblioteca *numpy* para gerar todos os pontos em um único *array* e então calcular a proporção da função indicadora, o algorítimo ficou expressivamente mais rápido, porém consumindo mais memória RAM, porém com o n calculado na ordem de $4 * 10^6$, o algorítimo não teve problema de executar no ambiente

Colab. Começou-se a ter problemas com n na ordem de 10^8, não sendo necessário fazer qualquer mudança no algorítimo final.

Utilizando a função gera_grafico(n, Seed), com o $n = 4198742$ e $Seed = 39$, podemos observar graficamente o resultado da simulação com o π estimado dentro dos parâmetros estabelecidos.



Para um teste empírico, foi criada a função dentro_do_erro(n, acuracia, Seed), que verifica qual a porcentagem dentre n simulações estão dentro da acurácia desejada, a função foi executada com $n = 1000$, $acurcia = 0.0005$ e $Seed = 39$ obtendo o seguinte resultado:



Nessa simulação 94,6% dos $\pi's$ estimados ficaram dentro da acurácia estipulada, bem próximo do intervalo de confiança escolhido (95%), com os resultados desse experimento replicável, gera-se um indicativo que as contas e estipulações escolhidas durante o processo foram bem executadas, e que os resultados empíricos são condizentes com os resultados teóricos.

6 Conclusão

No processo de elaboração do exercício proposto, podemos verificar uma aplicação do método de Monte Carlo, gerando um número esperado a partir de números (ou pares de números) uniformemente aleatórios.

O método não aparenta ser a maneira mais eficiente de se calcular o valor de π, porém trás um caso prático onde foi necessário o uso de ferramentas estatísticas e de criação/otimização de algorítimos, além de uso e pesquisa de bibliotecas adequadas para uma boa execução do problema proposto