מתמטיקה בדידה ממן 11

שאלה 1

א. $\{\{1\},\{2\}\} \subseteq \{1,2\}$: לא נכון

ב. $\{\{1\},2\} \subseteq \{2\}$: נכון

ג. $\left\{\{\{1\},\{2\}\}\right\} \in \{\{1\},\{2\}\}$: נכון

ד. $\{\emptyset\}\setminus\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$: נכון

ה. $\{\emptyset\}\setminus\{\{\emptyset\}\} \in \emptyset$: נכון

ו. $\{\mathbb{N}\} \in \{2\}$: לא נכון

ז. $|\{\mathbb{N}\}| = |\{1,\mathbb{N}\}|$: לא נכון

ח. $\{1,2\} \cap P(\{1,2\}) \neq \emptyset$: לא נכון

שאלה 2

A,B,C קבוצות.

א. $(A \cup B)\setminus(C\setminus B) = B \cup (A\setminus C)$

א. $(A\cup B)\setminus(C\setminus B)=B\cup(A\setminus C)$

לפי $(A\setminus B)=A\cap B^c$ ⇐ $= (A\cup B)\setminus(C\cap B^c)$

כנ"ל ⇐ $= (A\cup B)\cap(C\cup B^c)^c$

לפי דה מורגן, $(C\cap B^c)^c=C^c\cup B^{cc}$ ⇐ $= (A\cup B)\cap(C^c\cup B^{cc})$

לפי $(A^c)^c=A$ ⇐ $= (A\cup B)\cap(C^c\cup B)$

לפי חוק החילוף $(A\cup B)=(B\cup A)$ ⇐ $= (B\cup A)\cap(B\cup C^c)$

לפי חוק הפילוג $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$ ⇐ $= B\cup(A\cap C^c)$

לפי $(A\setminus B)=A\cap B^c$ ⇐ $= B\cup(A\setminus C)$

ב. $P(A\setminus B) \subseteq \left(P(A)\setminus P(B)\right) \cup \{\emptyset\}$

$= B \cup (A \setminus C)$

ד. $P(A\setminus B) \subseteq (P(A)\setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$

נוכיח את $P(A\setminus B) \subseteq (P(A)\setminus P(B))$

נניח שקיים x שהוא $x \in P(A\setminus B)$. אם כך, $x \subseteq A\setminus B$.

לכן כל איבר ב- x מתקיים שהוא איבר ב- A, כלומר $x \subseteq A$.

כעת יש לנו שני מקרים:

אם $x=\emptyset$, אזי $x \in (P(A)\setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$ כיון שהוא אחד מהאיברים באיחוד.

אם $x \neq \emptyset$, קיים $y \in x$ ולכן $y \in A\setminus B$ - כלו', $y \in A$ וגם $y \notin B$. כלומר, $x \subseteq A$

אבל $x \nsubseteq B$. מכאן נובע ש- $x \in P(A)$ ו- $x \notin P(B)$ ולכן $x \in (P(A)\setminus P(B))$

ולכן $x \in (P(A)\setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$

ולכן עבור כל $x \in P(A\setminus B)$ מתקיים $x \in (P(A)\setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$

ולכן $P(A\setminus B) \subseteq (P(A)\setminus P(B)) \cup \{\emptyset\}$

ג. אם A, B קבוצות סופיות אז $|P(A)| = |P(A \cap B)| \cdot |P(A\setminus B)|$

ג. אם A, B קבוצות סופיות אז $|P(A)| = |P(A \cap B)| \cdot |P(A\setminus B)|$

נראה ש- $A = (A\cap B) \cup (A\setminus B)$: (מכיון שהן קבוצות סופיות וזרות)

לפי $(A\setminus B) = A \cap B^c$ $\Leftarrow$ $(A\cap B) \cup (A\setminus B) = (A\cap B) \cup (A \cap B^c)$

לפי חוק הפילוג $(A\cap(B\cup C)) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ $\Leftarrow$ $= A \cap (B \cup B^c)$

$\boxed{4}$ החיתוך של קבוצה עם הקבוצה האוניברסלית U יתן את הקבוצה. $= A \cap U = A$

לפי $B \cup B^c = U$

לכן $|A| = |A\cap B| + |A\setminus B|$

מכיון שמספר האיברים ב- $P(A)$ הוא $|P(A)| = 2^{|A|}$, זאת אומרת שמספר האיברים הוא $2^{|A\cap B| + |A\setminus B|} = 2^{|A\cap B|} \cdot 2^{|A\setminus B|}$

כלומר, $|P(A\cap B)| \cdot |P(A\setminus B)|$

שאלה 3

A, B, C קבוצות חלקיות לקבוצה אוניברסלית U.

א. **אם** $A \cup B^C \neq U$ **ו-** $B \cup A^C \neq U$ **אז** $|A\Delta B| \geq 2$

א. אם $A\cup B^c\neq U$ ו- $B\cup A^c\neq U$ אז $|A\Delta B|\geq 2$

אם $A\cup B^c\neq U$, אז $(A\cup B^c)^c\neq\emptyset$ (נתון שהקבוצה לא שווה לקבוצה האוניברסלית לכן המשלים לא יכול להיות הקבוצה הריקה)

$(A\cup B^c)^c = A^c\cap B^{cc}$ לפי $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$

$= A^c\cap B$ לפי $(A^c)^c = A$

$= B\setminus A$ לפי $B\cap A^c = B\setminus A$, חוק החילוף

מצאנו ש- $B\setminus A\neq\emptyset$, לכן קיים איבר $x\in B\setminus A$ ולכן $|B\setminus A|\geq 1$

כנ"ל עבור $B\cup A^c\neq U$ – אם כך, $(A\cup B^c)^c\neq\emptyset$ ולפיכך עפ"י שימוש בזהויות באלגברה של קבוצות מתקבל $A\setminus B\neq\emptyset$, וקיים איבר $y\in A\setminus B$ ולכן $|A\setminus B|\geq 1$.

מכיון שהקבוצות A,B זרות,

$|A\Delta B| = |(A\setminus B)\cup(B\setminus A)| = |(A\setminus B)| + |(B\setminus A)| \geq 2$

לפי הגד $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

ב. **אם** $A\Delta B\subseteq A\Delta C$ **אז** $A\cap C\subseteq B\subseteq A\cup C$

ב. אם $A\Delta B\subseteq A\Delta C$ אז $A\cap C\subseteq B\subseteq A\cup C$

נוכיח תחילה ש- $A\cap C\subseteq B$:

נניח שקיים x כך ש- $x\in A\cap C$. אז $x\in A$ ו- $x\in C$ לפי הגדרת חיתוך.

אם נניח ש- $x\notin B$, נקבל $x\in A\Delta B$, אבל אז מהנתון נקבל ש $x\in A\Delta C$ כיון ש- $A\Delta B$ קבוצה חלקית ל- $A\Delta C$, וזה סותר את ההנחה ש- $x\in A\cap C$. כלומר, ההנחה $x\notin B$.

מכאן שלכל $x\in A\cap C$ מתקיים $x\in B$ – כלומר, $A\cap C\subseteq B$.

נוכיח ש- $B\subseteq A\cup C$

נניח ש- $x\in B$. אם $x\in A$, אז הוא גם $x\in A\cup C$.

אם $x\notin A$, אז $x\in B\setminus A$ אז $x\in A\Delta B$ (לפי ההגדרה של $A\Delta B$ - $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$)

מהנתון נקבל אם כך ש- $x\in A\Delta C$.

מכיון ש- $x\notin A$, $x\in C$ ולכן $x\in A\cup C$.

לכן הוכחנו שעבור $x\in B$, $B\subseteq A\cup C$.

ג. **אם** $B\Delta\{2,3\} = A\Delta\{1,2\}$ **אז** $A\Delta B = \{1,3\}$

ג. אם $A\Delta\{1,2\}=B\Delta\{2,3\}$ אז $A\Delta B=\{1,3\}$

נניח כי $(A\Delta\{1,2\})=(B\Delta\{2,3\})$

$A\Delta(A\Delta\{1,2\})=A\Delta(B\Delta\{2,3\}) \quad \Leftarrow A\Delta$

$(A\Delta A)\Delta\{1,2\}=(A\Delta B)\Delta\{2,3\} \quad \Leftarrow$ חוק הקיבוץ להפרש סימטרי

$\emptyset\Delta\{1,2\}=(A\Delta B)\Delta\{2,3\} \quad \Leftarrow A\Delta A=\emptyset$

$\{1,2\}=(A\Delta B)\Delta\{2,3\} \quad \Leftarrow \emptyset\Delta A=A$

$\{1,2\}\Delta\{2,3\}=((A\Delta B)\Delta\{2,3\})\Delta\{2,3\} \quad \Leftarrow \Delta\{2,3\}$

$\{1,2\}\Delta\{2,3\}=(A\Delta B)\Delta\emptyset \quad \Leftarrow$ חוק הקיבוץ, $A\Delta A=\emptyset$

$A\Delta B=\{1,2\}\Delta\{2,3\} \quad \Leftarrow B\Delta\emptyset=B$

$A\Delta B=\{1,3\}$

שאלה 4

4. לכל $k\in\mathbb{N}$ נסמן $A_k=\{2^{nk}\mid n\in\mathbb{N}\}$

א. $\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$ לומר $\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subseteq A_1$ וגם $A_1\subseteq\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$

נראה שהקבוצה A_1 הגדולה שווה ל- A_k. $\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k=A_1$ $\quad \{2^0, 2^{1\cdot1}, 2^{2\cdot1}, 2^{3\cdot1}, 2^{4\cdot1}\ldots\}$

מהגדרת האיחוד ברור שהקבוצה $A_1\subseteq\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$.

נראה הפוך- ש- $\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subseteq A_1$.

נניח ש- $x\in\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$. אז קיים $k\in\mathbb{N}$ ש- $x\in A_k$.

מהגדרת A_k רואים שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $x=2^{nk}$ -ומכיון ש- nk הוא מספר טבעי

ו- A_1 היא קבוצת כל החזקות עם מעריך טבעי, (של 2), מכיון ש- $x\in A_1$.

מכיון רואים שלכל $x\in\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k$ מתקיים $x\in A_1 \Leftarrow \bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subseteq A_1$

משתי ההכלות מתקבל ש- $\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k=A_1$

ד. $\bigcap_{k=2}^{5} A_k$

$A_2\{2^{0\cdot2},2^{1\cdot2},2^{2\cdot2},2^{3\cdot2},2^{4\cdot2}\ldots\}$
$A_3\{2^{0\cdot3},2^{1\cdot3},2^{2\cdot3},2^{3\cdot3},2^{4\cdot3}\ldots\}$
$A_4\{2^{0\cdot4},2^{1\cdot4},2^{2\cdot4},2^{3\cdot4},2^{4\cdot4}\ldots\}$
$A_5\{2^{0\cdot5},2^{1\cdot5},2^{2\cdot5},2^{3\cdot5},2^{4\cdot5}\ldots\}$

ניקח את $k=60$, כיון שזה המספר הקטן ביותר המתחלק ב- 2,3,4,5
נראה ש- $\bigcap_{k=2}^{5} A_k \subseteq A_{60}$ וגם $A_{60} \subseteq \bigcap_{k=2}^{5} A_k$
נניח ש- $x\in A_{60}$. לפי הגדרת הקבוצה קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $x=2^{60k}$
לכן נוכל לרשום $x=2^{5(12k)}=2^{4(15k)}=2^{3(20k)}=2^{2(30k)}$
ומכאן ש- $x\in A_5,\ x\in A_4,\ x\in A_3,\ x\in A_2$
כלומר $x\in\bigcap_{k=2}^{5} A_k$ ומכאן $A_{60}\subseteq\bigcap_{k=2}^{5} A_k$
נראה ש $\bigcap_{k=2}^{5} A_k\subseteq 60$.
נניח ש- $x\in\bigcap_{k=2}^{5} A_k$. אז x איבר בכל אחת מהקבוצות A_2,A_3,A_4,A_5 - כלומר
$x\in A_5, x\in A_4, x\in A_3, x\in A_2$ לכן קיים $y\in\mathbb{N}$ כך ש- $x=2^y$ כאשר y מתחלק
בכל אחד מהמספרים 2,3,4,5. אבל אז y מתחלק ב-60, לכן קיים $k\in\mathbb{N}$
כך ש- $y=60k$, ולכן $x=2^{60k}$ — כלומר, $x\in A_{60}$ ומכאן ש $\bigcap_{k=2}^{5} A_k\subseteq A_{60}$.
משתי ההכלות מתקבל ש- $\bigcap_{k=2}^{5} A_k=A_{60}$

ה. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

נראה ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k=A_0=\{1\}$, כלומר $A_0\subseteq\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ וגם $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\subseteq A_0$
מכיון שלכל k טבעי מתקיים $1=2^{0\cdot k}\in A_k$ לכן מתקיים $A_0\subseteq\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.
ונראה ההפך, ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\subseteq A_0$. נניח ש- $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.
אז, הוא שייך לכל אחת מהאיברים. אז לכל x טבעי מתקיים $x\in A_k$. כלומר קיים n טבעי
כך ש- $x=2^{nk}$. לכן קיים מספר טבעי y כך ש- $x=2^y$, ו-y הוא כפולה של כל מספר
טבעי $k\geq 1$. $x=2^{n\cdot1}=2^{n\cdot2}=2^{n\cdot3}\ldots$
המספר הטבעי היחיד שהוא כפולה של כל מספר טבעי הוא 0. ולכן $y=0 \Rightarrow x=2^0 \Rightarrow x=1$
לכן $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\subseteq\{1\}=A_0$
משתי ההכלות מתקבל ש- $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k=A_0$

3. $\{\frac{x}{8} \mid x\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3\}$

$y=\frac{x}{8}$

$A_1\setminus A_2$ היא קבוצת כל החזקות הזוגיות של 2.

$(A_1\setminus A_2)\cap A_3$ היא קבוצת כל החזקות הזוגיות המתחלקות ב3.

כלומר, $x = 2^{6k+3}$, $x = 8\cdot 2^{6k}$, $\frac{x}{8} = 2^{6k}$, $y=2^{6k}$

מכאן ש- $y\in A_6$, $\{x/8 \mid x\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3\}\subseteq A_6$

נוכיח ש- $A_6 \subseteq \{x/8 \mid x\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3\}$

אם $y\in A_6$ אז $y=2^{6k}$ ולכן $8y = 8\cdot 2^{6k} = 2^{3(2k+1)}$ $x=8y$

$2^{3(2k+1)}\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3$ - חזקה של 2 עם מעריך לא זוגי המתחלק ב-3.

כלומר, $x\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3$, ומכאן רואים ש- $y=\frac{x}{8}$ כאשר $x\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3$ —

כלומר, $A_6\subseteq\{\frac{x}{8} \mid x\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3\} \Leftarrow y\in\{\frac{x}{8} \mid x\in(A_1\setminus A_2\cap A_3\}$

משני ההכלות מתקבל ש- $\{\frac{x}{8} \mid x\in(A_1\setminus A_2)\cap A_3\}$

$\{2^{0\cdot 1}, 2^{1\cdot 1}, 2^{2\cdot 1}, 2^{3\cdot 1} \ldots\}$

$\{2^{0\cdot 2}, 2^{1\cdot 2}, 2^{2\cdot 2}, 2^{3\cdot 2} \ldots\}$

$\{2^{0\cdot 3}, 2^{1\cdot 3}, 2^{2\cdot 3}, 2^{3\cdot 3} \ldots\}$

$\{2^{0\cdot 4}, 2^{1\cdot 4}, 2^{2\cdot 4}, 2^{3\cdot 4} \ldots\}$

$\{2^{0\cdot 5}, 2^{1\cdot 5}, 2^{2\cdot 5}, 2^{3\cdot 5} \ldots\}$

$\{2^{0\cdot 6}, 2^{1\cdot 6}, 2^{2\cdot 6}, 2^{3\cdot 6} \ldots\}$