מתמטיקה בדידה ממן 12

שאלה 1

סעיף א'

סעיף א',

$P(\{1,2,3,4\})$

נוכיח שהיחס הוא יחס שקילות ונמצא את מחלקות השקילות.

ע"מ להראות יחס שקילות צריך שהיחס יהיה רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

רפלקסיבי: מתקיים ARA כי לכל $A\in P(\{1,2,3,4\})$ מתקיים $A\cup\{1,2\}=A\cup\{1,2\}$, ולכן R יחס רפלקסיבי.

סימטרי: מתקיים BRA כי לכל $A,B\in P(\{1,2,3,4\})$ אם ARB אז $A\cup\{1,2\}=B\cup\{1,2\}$ ולכן $B\cup\{1,2\}=A\cup\{1,2\}$ ולכן R יחס סימטרי.

טרנזיטיבי: מתקיים ARC כי לכל $A,B,C\in P(\{1,2,3,4\})$ אם ARB ו- BRC אז: $A\cup\{1,2\}=C\cup\{1,2\}$ ולכן R טרנזיטיבי.

מכאן ש- R הוא יחס שקילות, וכעת נמצא את מחלקות השקילות:

שתי קבוצות $A,B\in P(\{1,2,3,4\})$ נמצאות ביחס R אם ורק אם האיחוד שלהן עם $\{1,2\}$ שווה לזה.

יש 4 תוצאות אפשריות לאיחוד: $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,3,4\}$

נרשום את קבוצת החזקה- בה יש 2^4 איברים:

$\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4$

$\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$

האיברים בקבוצה שאם נאחד אותם עם $\{1,2\}$ נקבל $\{1,2\}$:

מחלקת השקילות $S_{\{1,2\}}$: $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

האיברים בקבוצה שאם נאחד אותם עם $\{1,2\}$ נקבל $\{1,2,3\}$:

מחלקת השקילות $S_{\{1,2,3\}}$: $\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

האיברים בקבוצה שאם נאחד אותם עם $\{1,2\}$ נקבל $\{1,2,4\}$:

מחלקת השקילות $S_{\{1,2,4\}}$: $\{\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,2,4\}\}$

האיברים בקבוצה שאם נאחד אותם עם $\{1,2\}$ נקבל $\{1,2,3,4\}$:

מחלקת השקילות $S_{\{1,2,3,4\}}$: $\{\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

קיבלנו 4 מחלקות שקילות כאשר לכל מחלקה יש 4 איברים.

סעיף ב'

סעיף ג:

נוכיח ש-S הוא יחס סדר חלקי ונמצא את האיברים המינימאלים והמקסימאלים.

כדי להראות שיחס הוא סדר, צריך להראות שהוא אי רפלקסבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

אנטי רפלקסיבי: מכיון ש-$A\cup\{1,2\}\not\subset A\cup\{1,2\}$ (מוכל ממש) לכן $A \not S A$ ($\langle A,A\rangle \notin S$)

אנטי סימטרי: אם ASB אז $B \not S A$, מכיון ש-A מוכל ממש ב-B $\Leftarrow$ יש איבר ב-B שלא נמצא ב-A.
לכן $B\cup\{1,2\}\not\subset A\cup\{1,2\}$.

טרנזיטיבי: אם ASB ו- BSC אז נראה ש- ASC:
אם A מוכל ממש ב- B ($A\cup\{1,2\}\subset B\cup\{1,2\}$) וגם B מוכל ממש ב-C ($B\cup\{1,2\}\subset C\cup\{1,2\}$)
אז A מוכל ממש ב-C ($A\cup\{1,2\}\subset C\cup\{1,2\}$) ולכן ASC והיחס טרנזיטיבי.
לכן S הוא יחס סדר.
נראה ש-S הוא יחס סדר לא מלא- כי יחס לא משווה.
$\{1,3\},\{2,3\}$ ונציב אותם

$$\{1,3\}\cup\{1,2\} \not\subset \{2,3\}\cup\{1,2\}$$
$$\{1,2,3\} = \{1,2,3\}$$

נמצא את האיברים המינימאליים והמקסימאלים:
המקסימאלים הם האיברים שלא יהיו מוכלים ממש בקבוצה השניה- כלו, הקבוצה שמכילה את כל 4 האיברים. לכן האיברים המקסימאלים הם $\{1,2,3,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$
והפוך עם האיברים המינימאלים: הם האיברים שתמיד יהיו מוכלים בקבוצה $\{1,2\}$
לכן האיברים המינימאלים יהיו: $\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}$

שאלה 2

סעיף א'

סעיף א': $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ אם ורק אם ($x_1+y_1=1$ $x_2+y_2=1$) או $((x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0)$

$\underbrace{(x_1+y_1-1)}_{\text{חיובי}}\cdot\underbrace{(x_2+y_2-1)}_{\text{חיובי}}>0$

$\underbrace{(x_1+y_1-1)}_{\text{שלילי}}\cdot\underbrace{(x_2+y_2-1)}_{\text{שלילי}}>0$

נוכיח שהיחס הוא שקילות – נראה שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

רפלקסיבי: נראה ש-$\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$ אם $x+y=1$ אז לפי הגדרת R $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$

אם $x+y\neq 1$ אז $x+y-1\neq 0$ והיחס בין הזהים נשאר כך שאם יהיה שלילי או חיובי התוצאה גדולה מאפס. לכן ראינו שלא משנה המקרים, היחס מתקיים ולכן הוא רפלקסיבי.

סימטרי: אם $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ אז גם $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_1,y_1\rangle$ כי $x_1+y_1=x_2+y_2=1$ ולכן $x_2+y_2=x_1+y_1=1$ או $(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0$ ולכן $(x_2+y_2-1)(x_1+y_1-1)>0$ ולכן היחס סימטרי.

טרנזיטיבי: נניח ש-$\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ וגם $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$.

כאשר $x_1+y_1=1$, מתוך $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ נובע ש- $x_2+y_2=1$ ומתוך $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$ נובע ש- $x_3+y_3=1$ ולכן $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$

כאשר $x_1+y_1\neq 1$, מתוך $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_2,y_2\rangle$ נובע ש- $(x_1+y_1-1)(x_2+y_2-1)>0$ ולכן $x_2+y_2\neq 1$ ולכן מתוך $\langle x_2,y_2\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$ נובע ש- $(x_2+y_2-1)(x_3+y_3-1)>0$. מכיון ששתי המכפלות חיוביות נקבל ש- $x_1+y_1-1, x_2+y_2-1, x_3+y_3-1$ הם בעלי אותו סימן ושונים מאפס ולכן $(x_1+y_1-1)(x_3+y_3-1)>0$ ומכך $\langle x_1,y_1\rangle R\langle x_3,y_3\rangle$. לכן היחס טרנזיטיבי.

לכן היחס הוא יחס שקילות. כעת נמצא את מחלקות השקילות.

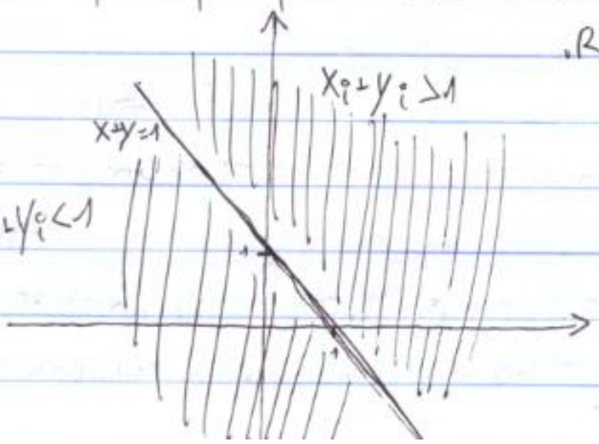
נראה את שלושת מחלקות השקילות:

- $x_i+y_i=1$, לדוג' $\langle 1,0\rangle$ ונסמן אותו (את מחלקת השקילות שלה) כ- $S_{\langle 1,0\rangle}$

ומכאן ש- $S_{\langle 1,0\rangle}=\{\langle x,y\rangle\in R\times R \mid x+y=1\}$. מחלקת שקילות זו היא קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על הישר $x+y=1$.

- $x_i+y_i>1$, לדוג' $\langle 1,1\rangle$ ונסמן את מחלקת השקילות שלה כ- $S_{\langle 1,1\rangle}$ ומכאן ש- $S_{\langle 1,1\rangle}=\{\langle x,y\rangle\in R\times R \mid x+y>1\}$. מחלקת שקילות זו היא קבוצת כל הנקודות מעל הישר $x+y=1$.
- $x_i+y_i<1$, לדוג' $\langle 0,0\rangle$ ונסמן את מחלקת השקילות שלה כ- $S_{\langle 0,0\rangle}$ ומכאן ש- $S_{\langle 0,0\rangle}=\{\langle x,y\rangle\in R\times R \mid x+y<1\}$. מחלקת שקילות זו היא קבוצת כל הנקודות מתחת הישר $x+y=1$.

שלושת הקבוצות $S_{\langle 1,0\rangle}, S_{\langle 1,1\rangle}, S_{\langle 0,0\rangle}$ הן מחלקות השקילות של היחס וניתן לראות שהן מגדירות חלוקה של $R\times R$.



סעיף ב'

סעיף ג'

1. נניח ש- $a\neq b$, $a,b>0$. אז $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ כלומר $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{a^2}{a^2+a^2}=\frac{1}{2}$

$$(a-b)^2\geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab \Rightarrow 1\geq \frac{2ab}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{ab}{a^2+b^2}\leq \frac{1}{2}$$

מכיון שנתון ש- $a\neq b$, לכן השוויון יהיה תמיד קטן מחצי, לכן $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$

נראה כעת ש- $\langle a,b\rangle S\langle 1,1/n\rangle$.

נניח ש- n מספר טבעי כך ש- $1/n<\frac{ab}{a^2+b^2}$.

$$\frac{1\cdot 1/n}{1^2+(1/n)^2}<\frac{ab}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{1/n}{1+1/n^2}\cdot\frac{n^2}{n^2}<\frac{ab}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1}<\frac{ab}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1}<1/n<\frac{ab}{a^2+b^2}$$

הוכחה:

נראה ש: $\frac{n}{n^2+1}<1/n \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+1}<1 \Rightarrow n^2<n^2+1 \Rightarrow 0<1$

מכיון שאי השוויון מתקיים היחס מתקיים.

2. כדי להוכיח שהיחס הוא יחס סדר חלקי, נראה שהיחס לא רפלקסיבי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי ולא משווה.

לא רפלקסיבי: $\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{ab}{a^2+b^2}$, לכן $\langle a,b\rangle \not S\langle a,b\rangle$.

אנטי סימטרי: היחס הוא $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle$. נבדוק את היחס $\langle c,d\rangle S\langle a,b\rangle$. מכיון ש- $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$, $\frac{cd}{c^2+d^2}>\frac{ab}{a^2+b^2}$, לכן הוא לא מקיים את היחס- $\langle a,b\rangle \not S\langle a,b\rangle$.

טרנזיטיבי: אם $\langle a,b\rangle S\langle c,d\rangle$ ו- $\langle c,d\rangle S\langle e,f\rangle$, כלומר $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$ ו- $\frac{cd}{c^2+d^2}<\frac{ef}{e^2+f^2}$ ומכאן נובע ש- $\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{ef}{e^2+f^2}$ ולכן $\langle a,b\rangle S\langle e,f\rangle$ לכן S טרנזיטיבי.

נראה שהיחס הוא יחס סדר חלקי: ניקח לדוג' את $\langle 5,4\rangle$ $\langle 4,5\rangle$. היחס ביניהם לא משווה כי $\langle 4,5\rangle\not S\langle 5,4\rangle$ (יש שוויון ביניהם) וגם $\langle 5,4\rangle\not S\langle 4,5\rangle$, $\langle 4,5\rangle\neq\langle 5,4\rangle$

3. האיברים המקסימלים והמינימלים:

המקסימליים: מכיון ש- $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ ו- $a\neq b$, $a,b>0$ איברים מהסוג $\langle a,b\rangle$ לא מקסימלים.

אם נניח ש- $\langle a,a\rangle S\langle c,d\rangle$ נקבל $\frac{a^2}{a^2+a^2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$, כלומר $\frac{1}{2}<\frac{cd}{c^2+d^2}$. אבל אז נקבל ש- $c^2+d^2-2cd<0$ - כלומר, $(c-d)^2<0$ וזו סתירה. לכן $\langle a,a\rangle S\langle c,d\rangle$ לא מתקיים

לכן כל האיברים $\langle a,a\rangle$ כאשר $a>0$ הם האיברים המקסימלים, ויש אינסוף מספרים כאלה.

המינימלים: בסעיף 1 ראינו ש- $\langle a,b\rangle S\langle a,a\rangle$ וגם $\langle 1,1/n\rangle S\langle a,b\rangle$ לכן $\langle a,a\rangle$ ו- $\langle a,b\rangle$ לא מינימלים כי תמיד אפשר להגיע יותר לכיוון האפס ולכן אין איברים מינימלים.

שאלה 3

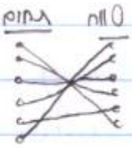
שאלה 3 $f: N \Rightarrow N$

א. נוכיח ש-f היא פונקציה חד חד ערכית אם ורק אם התמונה של הקבוצה A שונה מהתמונה של הקבוצה B. A,B קבוצות שונות.

מכיוון ה-f: נניח ש-f היא חד חד ערכית. נוכיח על דרך השלילה, נניח בשלילה ש- $f[A]=f[B]$.

מכיוון ש-f חח"ע, $A=B$. אך מכיוון שנתון שהקבוצות שונות, מצאנו סתירה.

לכן $f[A]\neq f[B]$.



מכיוון השני: נניח ש- $f[A]\neq f[B]$. נראה ש-f היא חח"ע.

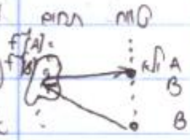
נניח בשלילה ש-f לא חח"ע, וקיימים נקודות x,y כאשר $x\neq y$ ו- $f[x]=f[y]$.

הקבוצה $f[N\setminus\{x\}]$ מכילה את תמונות המספרים הטבעיים השונים מ-x, כולל את תמונת y.

אבל לפי ההנחה $f[x]=f[y]$, מכיון שהקבוצה $f[N\setminus\{x\}]$ מכילה את תמונת כל המספרים הטבעיים. זו סתירה, כי הקבוצות N ו- $N\setminus\{x\}$ שונות והתמונות שלהן חייבות להיות גם שונות.

לכן $f[A]\neq f[B]$ ולכן f חח"ע.

ד. נוכיח ש-f היא פונקציה על אם ורק אם $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$.



מכיוון ראשון: נניח ש-f היא על ו- $A\neq B$.

נניח בשלילה ש- $f^{-1}[A]=f^{-1}[B]$. אם כך, אז $f(f^{-1}[A])=f(f^{-1}[B])$

אבל מכיון ש-f היא על, $A=B$ (לפי המוכחת בספר, שאלה 10 ג' בפרק 3) וזו סתירה.

לכן $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$

מכיוון שני: נניח ש- $A\neq B$ ו- $f^{-1}[A]\neq f^{-1}[B]$.

נניח בשלילה ש-f לא על. (נקודה בטווח שלא קיימת אף נקודה מהתחום שמובילה אליה) נניח $f^{-1}[\{y\}]=\emptyset$

ומכאן ש- $f^{-1}[\{y\}]\cup f^{-1}[N\setminus\{y\}] = \emptyset\cup f^{-1}[N\setminus\{y\}]$ ולכן $f^{-1}[\{y\}\cup N\setminus\{y\}]=f^{-1}[N\setminus\{y\}]$

כלומר $f^{-1}[N]=f^{-1}[N\setminus\{y\}]$ כאשר N ו- $N\setminus\{y\}$ הן קבוצות אינסופיות שונות וזו סתירה.

לכן f היא על.

שאלה 4

סעיף א'

סעיף א. $f\langle q,n\rangle=\langle q/n, n\rangle$

1. נוכיח ש-f היא חח"ע: נניח ש- $f\langle q_1,n_1\rangle=f\langle q_2,n_2\rangle$ כאשר $\langle q_1,n_1\rangle,\langle q_2,n_2\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$

נקבל $\langle q_1/n_1,n_1\rangle=\langle q_2/n_2,n_2\rangle$ ומזה נובע לפי הגדרת שוויון בין זוגות סדורים ש- $n_1=n_2$, $q_1/n_1=q_2/n_2$,

וזה מחייב ש- $q_1=q_2$, ומזה נובע ש- $\langle q_1,n_1\rangle=\langle q_2,n_2\rangle$. לכן הפונקציה חח"ע.

נראה שהפונקציה היא על: נניח ש- $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$. נמצא $\langle q,n\rangle$ כך ש- $f\langle q,n\rangle=\langle a,b\rangle$,

כלומר $\langle q/n,n\rangle=\langle a,b\rangle$. ברור מכאן שצריך לבחור $n=b$ ו- $\underset{\mathbb{Q}}{q}=\underset{\mathbb{Q}}{a}\underset{\mathbb{Z}}{n}=ab$

ולכן לפי הגדרת הפונקציה $f\langle q,n\rangle=f\langle ab,b\rangle=\langle ab/b,b\rangle=\langle a,b\rangle$.

מכאן לכל איבר $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$ יש מקור ע"י f והפונקציה היא על.

2. נמצא את הפונקציה ההפכית f^{-1}: מכיוון ש-f היא חח"ע הפונקציה הפיכה, והפונקציה f^{-1} אמורה להתאים לכל איבר $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$ את המקור שלו ע"י f- $\langle ab,b\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$

לכן $f^{-1}\langle a,b\rangle=\langle ab,b\rangle \Leftarrow \in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$ לכל $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}^*$

נעשה בדיקה: $f\langle q,n\rangle=\ q=3/4,\ n=7\ \ q/n=3/28,\ \ a=3/28,\ b=7\ \ ab=21/28=3/4$

סעיף ב'

סעיף ג': $\langle x,y\rangle \in Z\times Z$ $\quad g\langle x,y\rangle=\langle 2x+3y,3x+5y\rangle$ $\quad h\langle x,y\rangle=\langle x+3y,x+5y\rangle$

נראה שרק אחת מהפונקציות h,g הפיכה ונמצא את ההפכית.

נראה ש-h לא הפיכה: מספיק להראות שהפונקציה לא על כך שהיא לא הפיכה.

~~[illegible]~~ נניח שקיים $\langle a,b\rangle\in Z\times Z$ ונחפש איברים $\langle x,y\rangle\in Z\times Z$ כך ש- $h\langle x,y\rangle=\langle a,b\rangle$.

כלומר $\langle x+3y,x+5y\rangle=\langle a,b\rangle$. נקבל $\begin{cases}x+3y=a\\x+5y=b\end{cases}$ ונקבל $2y=b-a$. אבל מכיוון שמדובר

רק על מספרים שלמים, ומכיוון ניתן שאם $a-b$ שלם אי-זוגי, לא ניתן למצוא $\langle x,y\rangle\in Z\times Z$ כך ש-$h\langle x,y\rangle=\langle a,b\rangle$

לדוגמא, אם נחפש $h\langle x,y\rangle=\langle 16,21\rangle$ נקבל $\begin{cases}x+3y=16\\x+5y=21\end{cases}$ ונקבל $2y=5$, $y=2.5$

לכן הפונקציה אינה על ואינה הפיכה.

נראה ש-g הפיכה: נראה שהיא חח"ע והפיכה.

חח"ע: נראה ש- $g\langle x_1,y_1\rangle=g\langle x_2,y_2\rangle$, $\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\in Z\times Z$

$$\langle 2x_1+3y_1,3x_1+5y_1\rangle=\langle 2x_2+3y_2,3x_2+5y_2\rangle$$

$$2x_1+3y_1=2x_2+3y_2 \ \backslash\cdot 3 \qquad 3x_1+5y_1=3x_2+5y_2 \ \backslash\cdot 2$$

$$6x_1+9y_1=6x_2+9y_2 \qquad 6x_1+10y_1=6x_2+10y_2$$

$$6x_1=6x_2+9y_2-9y_1 \qquad 6x_1=6x_2+10y_2-10y_1$$

$$6x_2+9y_2-9y_1=6x_2+10y_2-10y_1$$

$$y_1=y_2$$

$$2x_1+3y_2=2x_2+3y_2$$

$$2x_1=2x_2$$

$$x_1=x_2$$

לכן הפונקציה חד חד ערכית.

נראה שהפונקציה היא על: נראה שעל כל זוג מספרים שלמים אפשר להגיע למספרים שלמים.

נניח ש- $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ונמצא $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך ש- $g\langle x,y\rangle=\langle a,b\rangle$, כלומר $\langle 2x+3y, 3x+5y\rangle=\langle a,b\rangle$.

$$2x+3y=a \qquad 3x+5y=b$$

$$6x+9y=3a \qquad 6x+10y=2b$$

$$6x=3a-9y \qquad 6x=2b-10y$$

$$3a-9y=2b-10y$$

$$y=2b-3a$$

התוצאה תהיה מספר שלם, מכיון ש- a,b מספרים שלמים לכן $2b-3a$ יהיה גם מספר שלם.

$$2x+3(2b-3a)=a$$

$$2x+6b-9a=a$$

$$2x=10a-6b$$

$$x=5a-3b$$

וכן, יצא לנו כאן מספר שלם.

לכן הפונקציה היא על. מצאנו שלכל $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ יש מקור יחיד ב- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ע"י g שהוא $\langle x,y\rangle=\langle 5a-3b, 2b-3a\rangle$ לכן הפונקציה הפיכה, ומוגדרת כך:

$$g^{-1}\langle a,b\rangle=\langle 5a-3b, 2b-3a\rangle$$

לבדיקה, ניקח $g\langle x,y\rangle$ $x=1, y=7$

$$2x+3y=2\cdot 1+3\cdot 7=23$$

$$3x+5y=3\cdot 1+5\cdot 7=38$$

$$g^{-1}\langle x,y\rangle = x=23, y=38$$

$$5x-3y=5\cdot 23-3\cdot 38=1$$

$$2y-3x=2\cdot 38-3\cdot 23=7$$

ראינו ע"י הבדיקה שזו הפונקציה ההופכית.