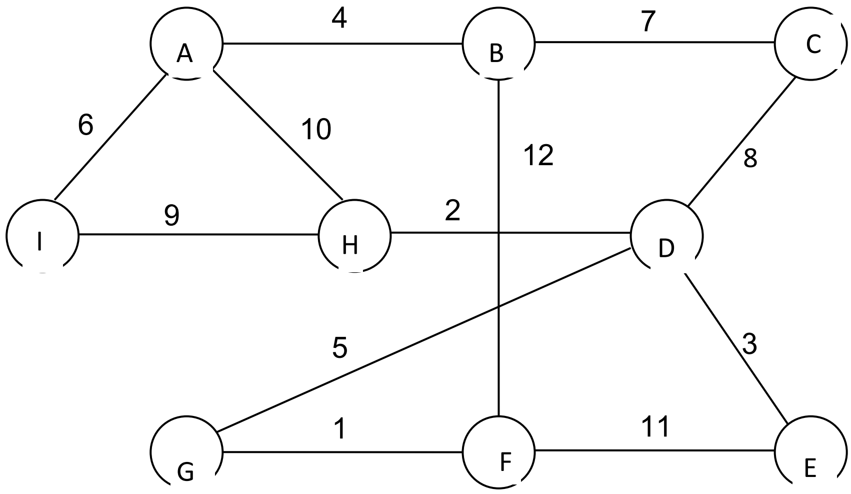
בס"ד, חשוון תשע"ז מגיש: יוחנן חאיק

<u>תרגיל 3: עצים פורשים מינימליים</u>

<u>שאלה 1:</u>

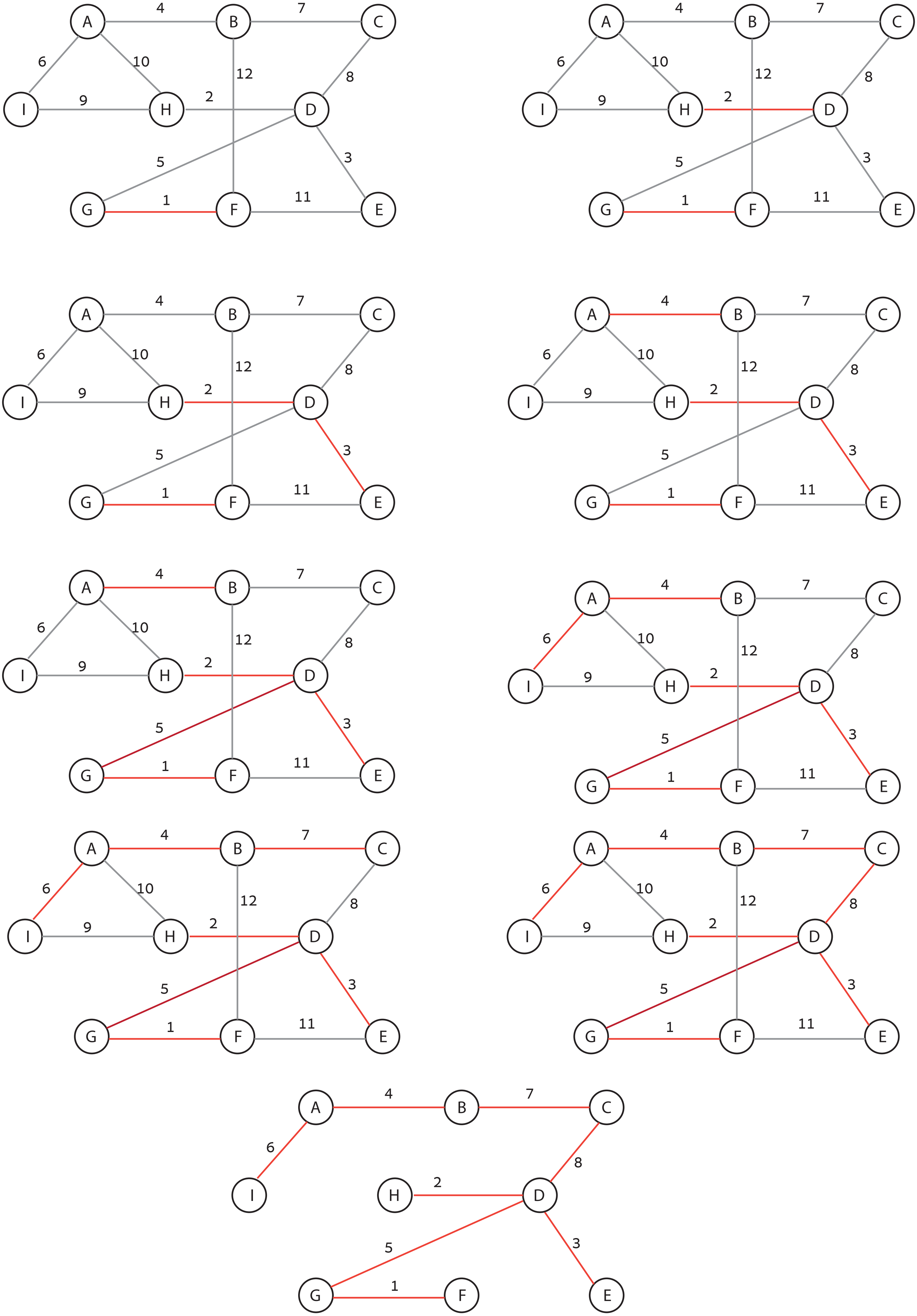
נתון הגרף הבא:



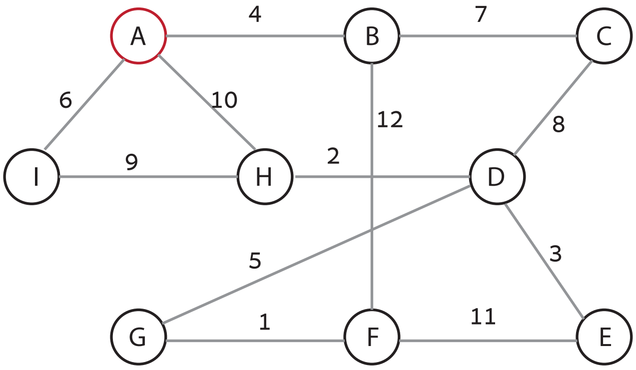
א. הריצו את האלגוריתם של Kruskal למציאת עץ פורש מינימלי של הגרף. הציגו את כל שלבי ההרצה.

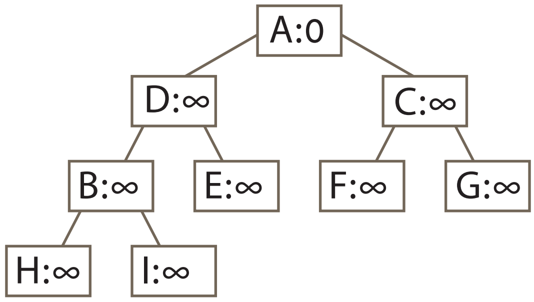
ב. הריצו את האלגוריתם של Prim למציאת עץ פורש מינימלי של הגרף כאשר הקודקוד הראשון שנבחר הוא A. הציגו את כל שלבי ההרצה.

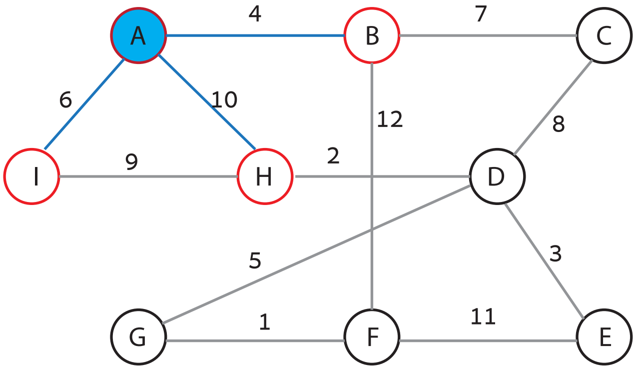
1. א - קרוסקל

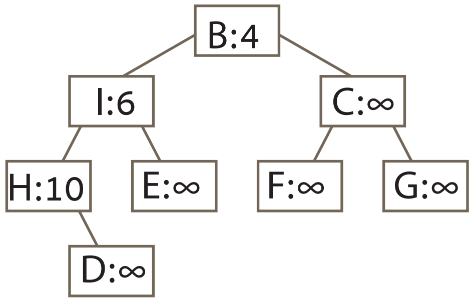


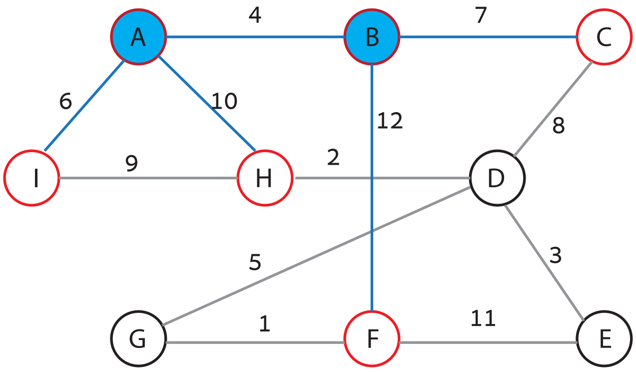
ב.1 - פרים

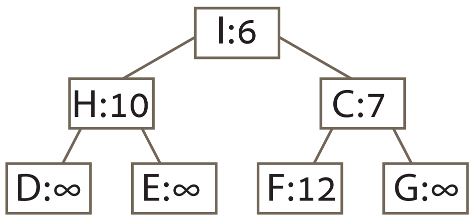

A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E

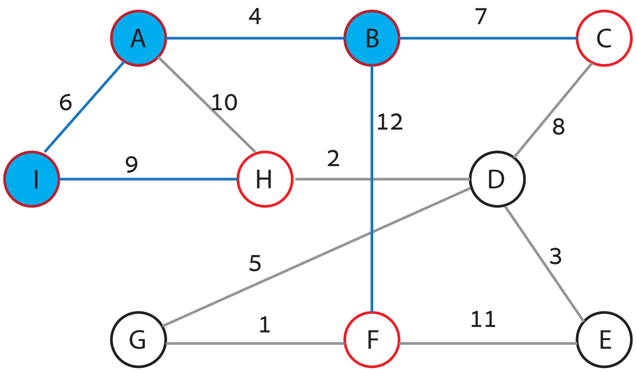

A:0
D:∞
C:∞
B:∞
E:∞
F:∞
G:∞
H:∞
I:∞

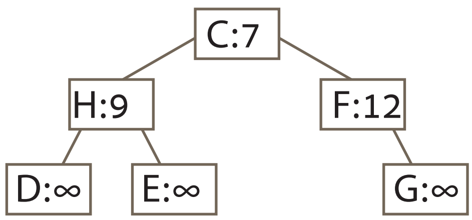

A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E

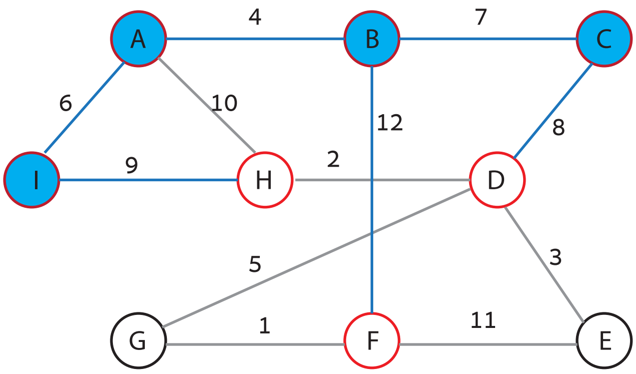

B:4
I:6
C:∞
H:10
E:∞
F:∞
G:∞
D:∞

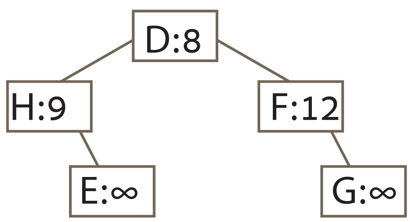

A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E

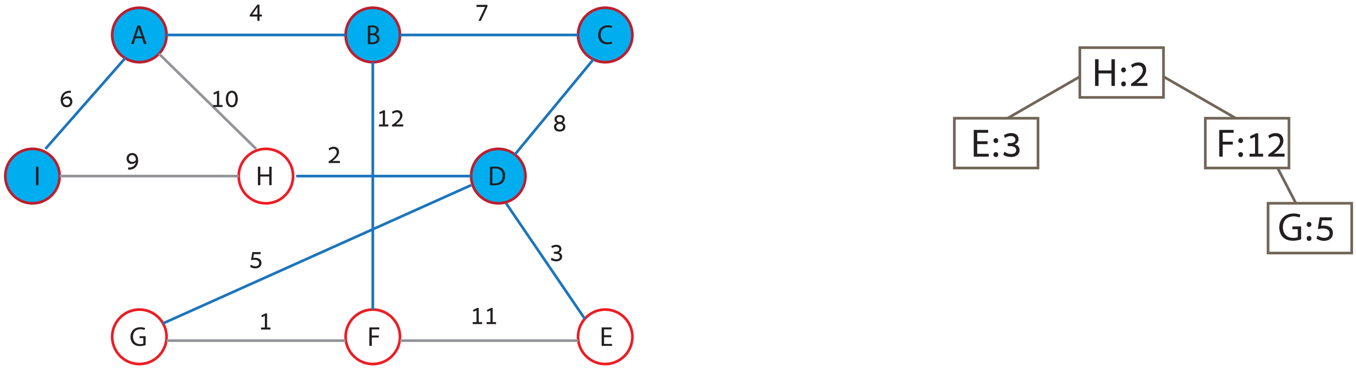

I:6
H:10
C:7
D:∞
E:∞
F:12
G:∞

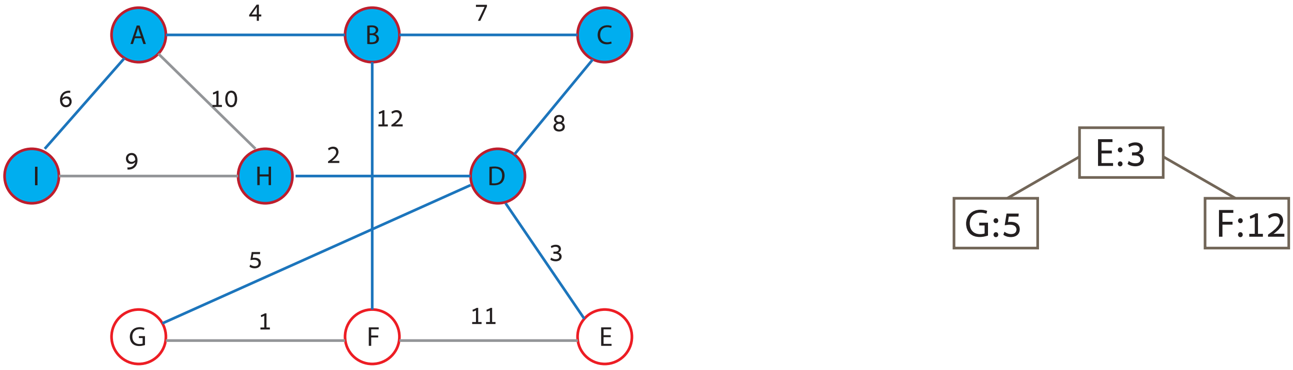

A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E

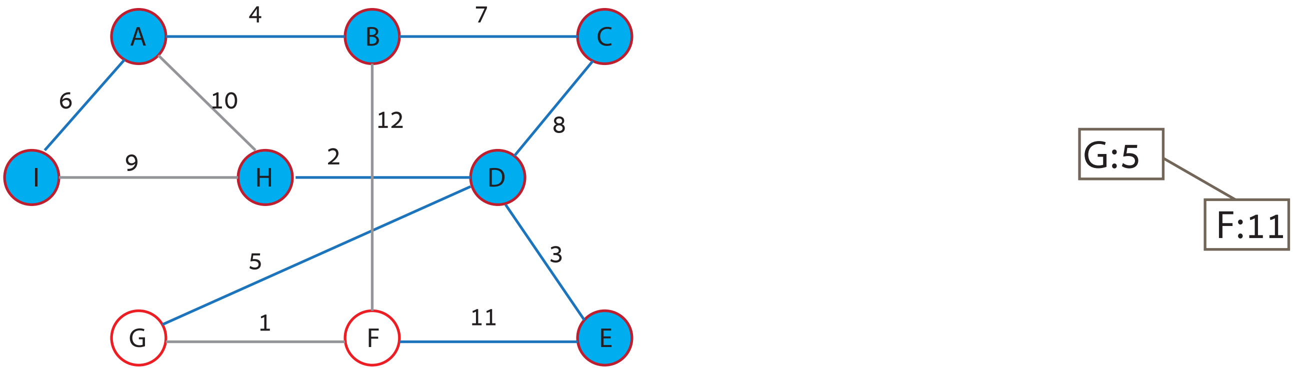

C:7
H:9
F:12
D:∞
E:∞
G:∞

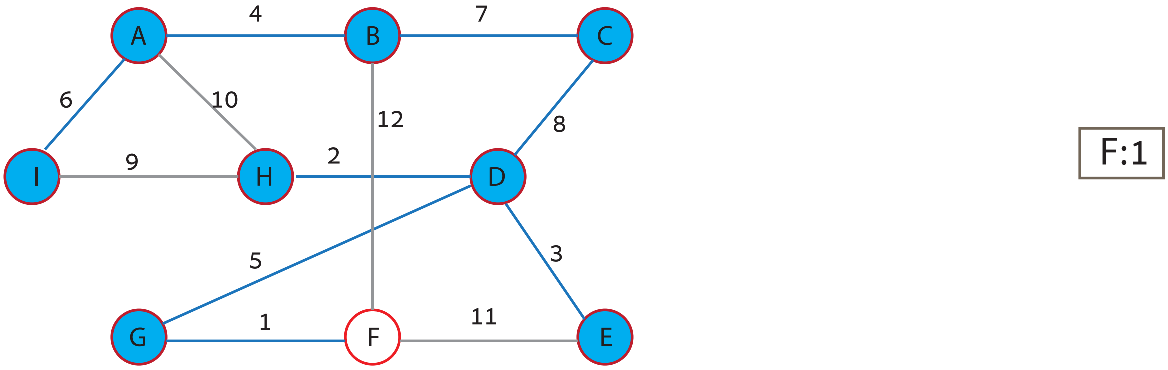

A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E

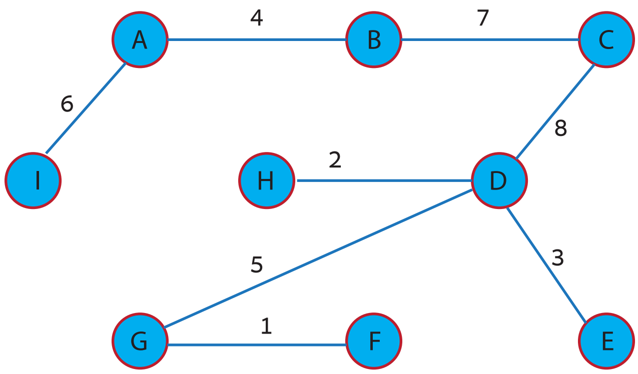

D:8
H:9
F:12
E:∞
G:∞


A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E
H:2
E:3
F:12
G:5


A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E
E:3
G:5
F:12


A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E
G:5
F:11


A
4
B
7
C
6
10
12
8
I
9
H
2
D
5
3
G
1
F
11
E
F:1

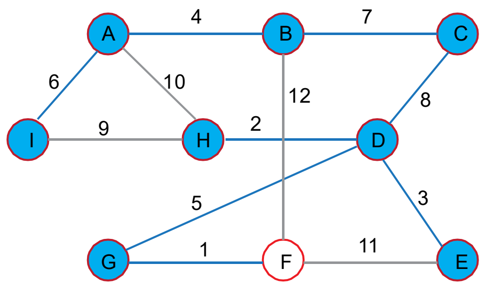

A
4
B
7
C
6
8
I
H
2
D
5
3
G
1
F
E

שאלה 2:

שני תלמידים ממכון שמשון התכוננו לבחינה באלגוריתמים. תלמיד א' טען שאם מוצאים עץ פורש מינימאלי אז בטוח שעבור כל שני קדקודים בגרף, המסלול היחיד בעץ הפורש המינימאלי הוא גם מסלול בעל משקל מינימאלי בין שני הקדקודים בגרף. תלמיד ב' טען שזה לא מחייב, אך אין לו דוגמא קונקרטית. מי מהתלמידים צודק?

אם א' צודק ספק הוכחה! ואם ב' הבא דוגמא והסבר!

תלמיד ב' צודק. להלן דוגמה מהעץ שעשינו בשאלה הקודמת –



נסתכל על הצלע (b,f), אשר בגרף עצמו מקושר בצלע בודד בעל משקל 12. אם נסתכל על העפ"מ של אותו גרף ונחפש את הדרך הקצרה ביותר, נקבל מסלול במשקל 21.

זאת מאחר שאלגוריתם קרוסקל מסתכל על המשקל המינימלי של כל העץ ואינו מחפש את הדרך הקצרה ביותר בין שני קדקודים נתונים.

שאלה 3:

נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $w:E\rightarrow \mathbf{R}$ על הצלעות. כתוב אלגוריתם למציאת עץ פורש מקסימאלי לגרף G מבחינת סכום משקלי הקשתות, ובו $|V|$-1 קשתות. הוכח נכונות ונתח את זמן הריצה ואת גודל הזכרון.

פתרון: נציע גרסה שונה של קרוסקל-

1. נמיין את הקשתות ב-G בסדר יורד לפי משקלי הקשתות.
2. בכל איטרציה, במקום לבחור את הקשת בעלת המשקל הנמוך ביותר (כמו באלגוריתם המקורי), נבחר את הקשת בעלת המשקל הגבוה יותר.

הפתרון לכאורה, נדמה להיות די אינטואיטיבי, כמנהגם של אלגוריתמים חמדניים, אך ברגע שאנחנו נצטרך להוכיח את נכונות האלגוריתם אנחנו נתחיל להסתבך. אנחנו לא יכולים להסתמך באופן פשוט על כך ש"קרוסקל עובד, אז גם זה יעבוד", כי למעשה השינויים שעשינו באלגוריתם הם רחבים מכדי לבטל אותם.

מבחינת ההוכחה, כמובן שמאחר ואנחנו למעשה משתמשים בשיקול חמדני, נוכל להשתמש בדרך ההוכחה המתאימה, אך אנחנו רוצים להוכיח על בסיס הקרוסקל, אבל בצורה נכונה, וללא נפנופי ידיים.

הוכחה: נניח בלי הנחת הכלליות, שכל המשקלים הינם חיוביים (מטעמי נוחות גרידא. אם באמת יש משקלים שליליים, נשנה את הכל בהתאמה, והופ! יש לנו חיוביים. די לשאול שאלות!). כעת, נבנה גרף חדש ונכנה אותו G⁻ שזהה לחלוטין מבחינת המבנה שלו לגרף G. ההבדל היחיד בין הגרפים,

הוא שכעת נגדיר את המשקלים להיות בדיוק הפוכים מאשר המשקל המקורי שלהם. כל המשקלים יהיו כעת שליליים.

עכשיו, נריץ את אלגוריתם קרוסקל על הגרף G^-.

טענה: קבוצת הקשתות שתיתן ריצת האלגוריתם על הגרף G^-, תהיה העץ פורש מקסימום של גרף G אם"ם, קבוצת הקשתות היא העץ הפורש מינימלי.

נוכיח את הטענה הזאת משני הכיוונים.

הוכחה: נניח בשלילה, כי קבוצת הקשתות המתקבלת ב-G^- היא בעלת משקל מינימלי, ונניח כמו כן, שקיימת קבוצת קשתות בG שהמשקל הכולל שלה הוא מקסימלי. אם כן, ננסה להפוך את הסימנים של משקלי הקשתות בקבוצה, ואזי נקבל קבוצת קשתות חדשה, שלמעש משקלה קטן ממשקל קבוצת הקשתות שנמצאו על יד אלגוריתם קרוסקל. **סתירה.**

מצד שני – נתנונה קבוצת קשרים בG שמשקלה מקסימלי. נניח בשלילה שקיימת קבוצת קשתות שונה, אשר בגרף G^-, נותנת עץ במשקל מינימלי קטן יותר מהמקביל שלו. ולכן קבוצת הקשתות עם המשקל המקסימלי בG היא קבוצת הקשתות המינמלית ב-G^- שאותה בחר אלגוריתם קרוסקל. כלומר מצאנו קבוצת קשתות בעלת משקל קטן יותר ממה שקרוסקל מצא, וזה הרי לא ייתכן. **סתירה.**

<u>שאלה 4:</u>

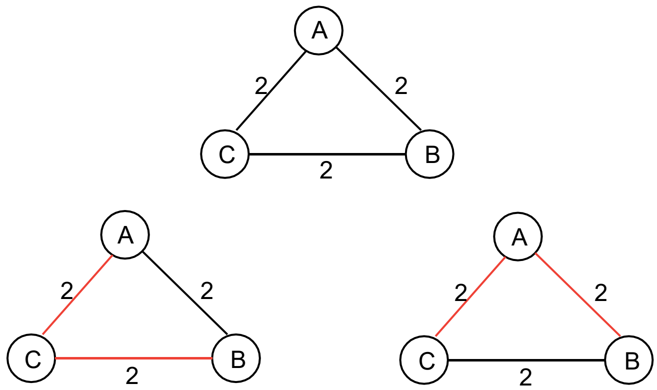
יהא $G(V,E)$ גרף קשיר ולא מכוון. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. לכל גרף G קיים עץ פורש מינימום יחיד.

ב. אם לכל קשת ב-E משקל שונה, אזי ל-G יש עץ פורש מינימלי יחיד.

ג. אם קיימות ב-E שתי קשתות במשקל שווה אזי ל-G יש לפחות שני עצים פורשים מינימום שונים.

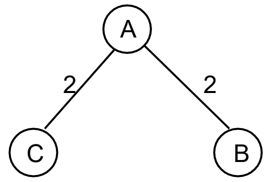
<u>א.</u> לא נכון. יכולים להיות עצים שונים אם יש צלעות בעלי משקל שווה. נתונה דוגמה עבור גרף שכזה, שיש לו מספר עפ"מ שונים זה מזה.



<u>ב.</u> נכון.
ניתן להוכיח זאת בשלילה.
יהיה $G=(V,E)$ גרף משוקלל בעל משקל שונה בכל צלע, ויהי 'G העפ"מ של אותו העץ.
נניח כי קיים $G''\neq G'$.

על מנת שיתקיים אחד כזה, יש צורך שתהיה צלע מסוימת (u,v) הקיימת ב"G ואינה קיימת ב'G.
אך אם קיימת צלע שכזו, שעדיין מקיימת עפ"מ, יש מספר אפשרויות – G' = G" – לא יכול להיות מבסיבי ההנחה שלנו.
W(G")<W(G') אזי 'G אינו מקיים את חוקי העפ"מ ויש פה סתירה.
W(G")>W(G') אזי "G אינו עפ"מ, ויש כאן סתירה.
מש"ל.

ג. לא נכון.
אם יש רק שתי צלעות במשקל שווה, אז יהיה רק עפ"מ אחד.



שאלה 5:

א. הוכח שאם G(V,E) הוא גרף לא מכוון וקשיר, אזי יש לו עץ פורש.
ב. נתון גרף G(V,E) עם פונקצית משקל w, ועץ T שהוא עץ פורש מינימלי לגרף G. הוספנו למשקל של כל קשת ב-E ערך קבוע a. (כלומר, w'(e)=w(e)+a לכל e∈E). האם T ישאר עץ פורש מינימלי לגרף אחרי עדכון המשקלים? נמקו.
ג. נתון גרף G(V,E) עם פונקצית משקל w, ועץ T שהוא עץ פורש מינימלי לגרף G. הכפלנו את המשקל של כל קשת ב-E בערך קבוע חיובי a. (כלומר, w'(e)=w(e)*a לכל e ∈E). האם T ישאר עץ פורש מינימלי לגרף אחרי עדכון המשקלים? נמקו.

א. נוכיח זאת באינדוקציה.
בסיס האינדוקציה יהיה גרף בעל שני קדקודים וצלע אחת, שתהיה גם העפ"מ שלו.
כעת, בעבור הוספת צלע וקדקוד, יש לנו כבר עפ"מ חדש.
עבור כל הגדלה נוספת של צלעות (שהחל מרגע זה יכולה להיות גם מעגלית), ישנם 2 אפשרויות:
1. הצלע מצטרפת עם קדקוד חדש, ואזי היא בטוח שייכת לעפ"מ החדש
2. הצלע סוגרת מעגל בין שני קדקודים בעלי חיבור אחר עם צלעות אחרות – קיים לנו כבר עפ"מ נוכחי, הדבר היחיד שיכול להשתנות הנא אם נריץ מחדש את אחד האלגוריתתמים שישנו את העפ"מ כך שיכלול את הצלע החדשה.

כל עוד אנחנו שומרים על תכונת הקשירות אנחנו נישאר תחת ההגבלו האלה, ואזי תמיד יישאר לנו עץ פורש. מש"ל.

ב. כן. מאחר ואנחנו מדברים על הוספת ערך קבוע לכל הצלעות באופן שווה, לא משנה אם המשקל הקיים הוא חיובי או שלילי, או הקבוע חיובי או שלילי, כל הצלעות זזות באותו יחס, והטווח של גודל הקשתות יישאר אותו טווח רק במיקומים שונים. משקל הץ הכללי כמובן ישתנה בהכפלת מספר הקבוע במספר הצלעות בעץ.
ג. כן. מאחר ואנחנו מכפילים בקבוע חיובי, כל היחסים אמנם משתנים, אך הסדר נשאר אותו דבר, ואף סימני המשקלים לא משתנים. לו היינו מכפילים בשלילי, היינו עלולים להתקל בשינוי של כל הסיצנים, ואז ודאי שזה היה הופך את העץ לאחד חדש.

שאלה 6:

נתון גרף $G(V,E)$ קשיר לא מכוון, שבו המשקולות של כל הצלעות הן ערכים שלמים בין 1 ל- $|V|$. הציעו אלגוריתם שמוצא עץ פורש מינימלי לגרף זה, בסיבוכיות של $O((|V|+|E|)\alpha(|E|,|V|))$

מאחר ונתון לנו טווח המשקלים שהוא בין 1 ל- $|V|$, אנחנו יודעים שהוא סופי ובר מנייה. במצב כזה נוכל לעשות מיון מנייה פשוט שסיבוכיותו $\Theta(|v|+|E|)$, ועליו להריץ את הקרוסקל, שיתחיל לבוד החל מ1 כלפי מעלה באיחוד המסלולים.

סה"כ נקבל את הסיבוכיות הרצויה מהשימוש בפונקציה ההפוכה לאקרמן שהיא סיבוכיות איחוד המסלולים, בהכפלת סיבוכיות מיון המניה - $O((|V|+|E|)\alpha(|E|,|V|))$.