

ב"ה
שנה"ל תשפ"ב, סמסטר ב', מועד ב'
שאלון בחינה בקורס: ניתוח אלגוריתמים וסיבוכיות
מספר קורס: 150134

מס' תלמיד: _____
קמפוס: _____

- שם המרצה: ד"ר מוטי רייף, ד"ר חיים פריאנטי.
- תאריך הבחינה: ה' באב תשפ"ב (2/8).
- משך הבחינה (בדקות): 180 דקות.
- חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר.
- מחשבון: אין להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל סה"כ 17 שאלות.
- חלק א' – 3 שאלות. יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות. כל שאלה – 25 נקודות.
- חלק ב' – 14 שאלות. יש לענות על כולן. כל שאלה 4 נקודות.
- **את התשובות יש לכתוב ע"ג השאלון, דפי הטיוטא לא ייבדקו.**
- **בסוף החלק הפתוח עמוד נוסף לכתיבת תשובה, למקרה הצורך.**
- **השאלון חסוי – יש להחזירו עם מחברת הבחינה.**

תלמיד יקר,

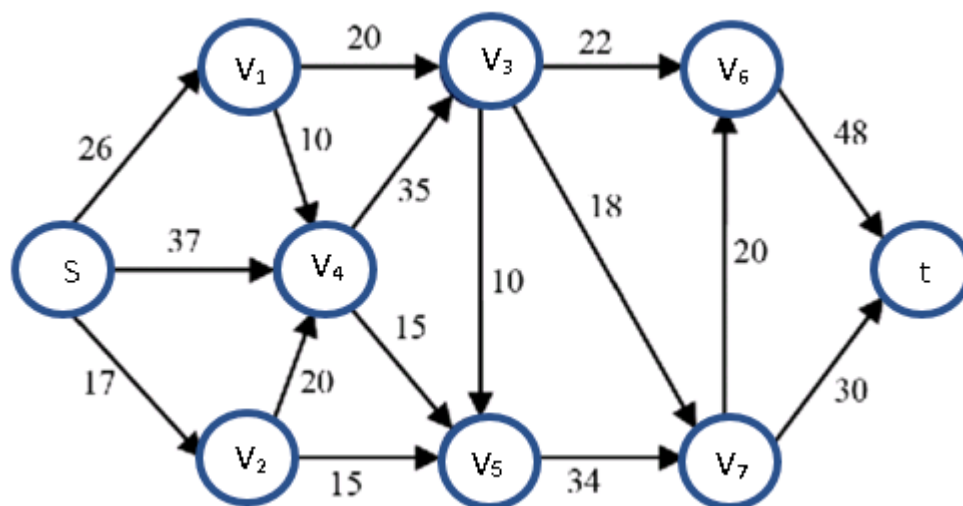
1. נוהל הבחינות של המרכז האקדמי לב מחייב אותך, באחריותך לקוראו ולהכירו - בחינה עלולה להיפסל על כל חריגה מהנוהל.
2. אם אינך מבין את כוונת המרצה בשאלה כלשהי, עליך לכתוב בראש התשובה כיצד הינך מבין את השאלה ולפתור בהתאם. המרצה ישקול האם יש מקום להבנה זו ואז ינקד בהתאם.
3. לידיעתך, תורדנה נקודות לא רק על שגיאות, אלא גם על תוספות לא רלוונטיות, העדר נימוק הולם לתשובה, חוסר סדר ותשובה דו-משמעית, כאשר נדרשת תשובה חד משמעית.

בהצלחה רבה !

חלק א' – שאלות פתוחות.

יש לעשות 2 מתוך 3 שאלות, ולמחוק ב – X את כל השאלה עליה בחרת לא לענות.
בסוף כל שאלה מקום המיועד למענה על השאלה.

שאלה מספר 1 –



- א- (8 נקודות) מצאו את הזרימה המקסימלית ברשת הנתונה, יש לצייר את שלושת השלבים הראשונים (צריך לצייר רשת), ואת הרשת שתתקבל.
 ב- (3 נקודות) מצאו חתך מינימלי ברשת.
 ג- (7 נקודות) נתונה רשת זרימה $G = (V; E)$ מ- s ל- t עם קיבולים חיוביים שלמים על הקשתות. תהי $e \in E$ קשת כלשהי של G . תארו אלגוריתם יעיל אשר בודק האם קיים ברשת חתך מינימלי אשר אינו מכיל את הקשת e .
 ד- (7 נקודות) הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם.

תשובה לשאלה מספר 1-

א'

ב'

ג'

ד'

שאלה מספר 2 -

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון עם פונקציית משקל אי-שלילית על הקשתות $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, ויהי T עץ פורש מינימלי של G . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א- (6 נקודות) לכל זוג צמתים $u, v \in V$ קיים מסלול קל (מסלול קצר) ביותר בין u ו- v אשר משתמש רק בקשתות מ T .

ב- (6 נקודות) בהכרח קיים זוג צמתים $u, v \in V$ כך שישנו מסלול קל ביותר בין u ו- v שמשתמש רק בקשתות מ T .

ג- (13 נקודות) קיימים לפחות $|V| - 1$ זוגות צמתים $u, v \in V$ כך שישנו מסלול קל ביותר בין u ו- v אשר משתמש רק בקשתות מ T .

תשובה לשאלה מספר 2 –

א'

ב'

ג'

ג'

ד'

חלק ב' - לפניך שאלות רב ברירה.**יש לסמן בדף המיועד לכך את התשובה לכל שאלה על פי הנחיות הדף.****שאלה מספר 1:**

נתונה בעיית הסכום הדרוש WS.

הקלט לבעיה הוא סדרה של מספרים שלמים וערך מטרה דרוש.

הבעיה – האם ניתן להוסיף בין כל שני מספרים בסדרה את הסימן פלוס או את הסימן מינוס – ולקבל את הערך הדרוש.

לדוגמא:

$$X = (\{3, 5, 1, 1\}, 8) \in WS \quad (3+5+1-1=8)$$

$$X = (\{3, 4, 5, 1\}, 10) \notin WS$$

א. ניתן להגדיר נוסחה רקורסיבית לפתרון הבעיה ולמצוא פתרון אופטימלי באמצעות תכנות דינמי.

ב. ניתן לפתור בעיה זו בזמן $\Theta(n)$.

ג. הפתרון הנאיבי לבעיה זו הוא פולינומי.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

שאלה מספר 2:

אלגוריתם קירוב לבעיית הסוכן הנוסע -

א. אם יש אלגוריתם עם חסם יחס 2 לכל קלט של הבעיה – זה אומר שניתן למצוא אלגוריתם פולינומי לבעיית ההכרעה של הסוכן הנוסע הכללי.

ב. באלגוריתם זה נעזרים במציאת עץ מסלולים קצרים ביותר מהקדקוד ממנו מתחיל המסלול של הסוכן הנוסע.

ג. יותר מתשובה אחת נכונה.

ד. באלגוריתם שלמדנו ישנו קירוב עם חסם יחס 2 לכל קלט של הסוכן הנוסע.

שאלה מספר 3:

סמן את המשפט הנכון:

- א. למקרה הכללי של הבעיה בשלמים לא ידוע פתרון חמדני, אך ישנם מקרים ספציפיים בהם – יש בוודאות פתרון חמדני.
- ב. אם לכל הפריטים יש את אותו הרווח לקילו הבעיה הופכת להיות ליניארית.
- ג. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.
- ד. לבעיית תרמיל הגב בשלמים בוודאות קיים פתרון חמדני.

שאלה מספר 4:

נתון קלט לבעיית כיסוי קדקודים, נבנה את הקלט המתאים לצורך הרדוקציה מבעיית כיסוי הקדקודים לבעיית SUS.

מה יהיה גודל קבוצת המספרים של הקלט?

- א. קבוצת מספרי הקלט ל - SUS תהיה בגודל של $|E| + |V|$
- ב. קבוצת מספרי הקלט ל - SUS תהיה בגודל של $|E| * |V|$
- ג. קבוצת מספרי הקלט ל - SUS תהיה בגודל $|V|$.
- ד. קבוצת מספרי הקלט ל - SUS תהיה בגודל $|E|$.

שאלה מספר 5:

נתון גרף קשיר G, ועץ פורש T לגרף זה.

הסירו מהגרף צלע כלשהי, ונוצר גרף G' קשיר גם הוא.

מה יהיה זמן הריצה של אלגוריתם יעיל למציאת עץ פורש מינימלי לגרף החדש.

א. $O(|E|)$ ב. $O(1)$ ג. $O(|V|)$

ד. אם הוסרה צלע אחת יש להריץ מחדש את האלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי.

שאלה מספר 6:

נתונה מחרוזת S באורך n תווים.

נרצה למצוא פולינדרום ארוך ביותר בתוך המחרוזת, לאו דווקא ברצף.

נתונה הנוסחה הרקורסיבית הבאה לפתרון הבעיה:

$$M[i,j]= \begin{cases} 1 & i=j \text{ OR } i=j-1, S[i] \neq S[j] \\ 2 & i=j-1, S[i]=S[j] \\ M[i+1,j-1]+2 & i < j-1, S[i]=S[j], \\ \underline{\quad ??? \quad} & i < j-1, S[i] \neq S[j] \end{cases}$$

מה צריך לשים במקום הקו הריק עם סימני השאלה?

א. $\max(M[i,j-1], M[i+1,j])$

ב. $j-i+1$

ג. 0

ד. $M[i+1,j-1]$

שאלה מספר 7:

- הוחלט כי ביום מסויים בשעה מסויימת יתנהל יום פתיחת מחברות לכל המבחנים החסויים במכון. ביום זה כל מרצה יוכל לפגוש רק סטודנט אחד וכל סטודנט יוכל לפגוש רק מרצה אחד.
- בשביל לעשות פתיחת מחברת – צריך שתהיה למרצה כיתה פנויה, והוא יוכל להיפגש בה עם התלמיד. בכל כיתה יכול להתנהל מפגש אחד בלבד בזמן מסויים.
- נתונות n כיתות, m מרצים i – k סטודנטים.
- חלק מהסטודנטים צריכים להיפגש עם המרצה רק בכיתות מוגשות, ואכן חלק מהכיתות הן מוגשות. גם חלק מהמרצים יכולים לפגוש תלמידים אך ורק בכיתות מוגשות.
- בנוסף – ישנן כיתות עם לוח ויש כיתות ללא לוח. חלק מהמרצים וחלק מהסטודנטים סימנו כי הם צריכים כיתה עם לוח לצורך הסבר הערעורים.
- מנסים לעשות בשעה זו את מספר פתיחת המחברות המקסימלי תחת אילוצי ההנגשה, אך לצורך כך צריך לעשות שיבוץ של כיתה + מורה + תלמיד – כך שבאמת יהיו מקסימום של פתיחת מחברות בדיוק בשעה זו. לא חשוב לתלמיד עם איזה מרצה הוא נפגש, כל מרצה יכול לענות על כל ערעור של כל תלמיד.
- איך ניתן לפתור את הבעיה?
- ניתן לעשות רשת זרימה בה יהיו $2+k+m+2n$ קדקודים.
 - ניתן לעשות זאת על ידי חישוב מסלולים קצרים ביותר בגרף בו יהיו $n+m+k$ קדקודים.
 - ניתן לעשות זאת על ידי תכנון חמדני, לקחת את המרצים שצריכים כיתה מוגשת או כיתה עם לוח בסדר אקראי, לשבץ להם כיתה – קודם כל לתלמידים שצריכים כיתה מוגשת או כיתה עם לוח, וכו'...
 - הבעיה ב-NP, לא ידוע לנו כיום על אלגוריתם פולינומי הפותר את הבעיה.

שאלה מספר 8:

נתונות השפות הבאות: A, B, C, D, E וכן נתון כי $B \in NP$ וכי $D \in NPC$.

בנוסף נתון כי $A \leq_p B \leq_p C \leq_p D \leq_p E$

מכאן נובע בוודאות כי:

- אף אחת מהתשובות אינה נכונה.
- $C \notin P$
- $E \notin P$
- $B \notin NP-HARD$

שאלה מספר 9:

נניח כי ידוע ש $NP=NPC$ מכאן נתייחס למסקנות הבאות:

מסקנה ראשונה: $P=NP$.

מסקנה שניה: $P=NPC$.

מסקנה שלישית: $NP-HARD \subseteq Co-NP$ (הכלה ממש)

בהנחה שהטענה $NP=NPC$ נכונה, אלו מהמסקנות הבאות נכונה בהכרח?

הערה: בשאלה זו תתעלמו בבקשה מהשפה הריקה ומהשפה הכוללת את כל המילים (Σ^*).

א. בדיוק שתיים מהקביעות האלה נכונות בוודאות.

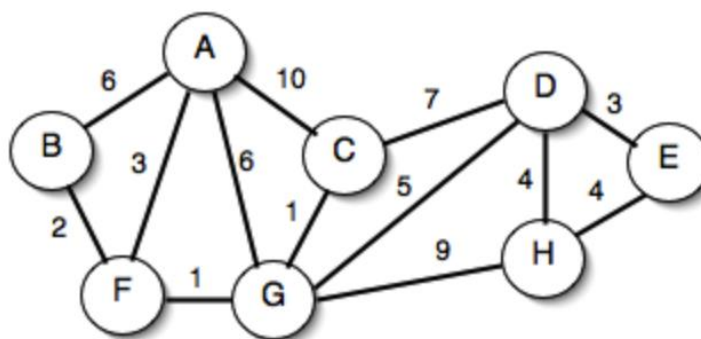
ב. בדיוק אחת מהקביעות האלה נכונה בוודאות.

ג. שלושת הקביעות נכונות בוודאות.

ד. אף אחת מהקביעות לא חייבת להיות נכונה.

שאלה מספר 10:

נתון גרף לא מכוון, בו נדרש למצוא עץ פורש מינימלי:



איזו מהטענות הבאות נכונה?

- א. אם נבצע את התהליך בעזרת אלגוריתם קרוסקל יתכן שלאחר שהוספנו 4 צלעות בטוחות – הקדקודים A,B יהיו בצדדים שונים של חתך המכבד את קבוצת הצלעות הבטוחות שהוספנו.
- ב. אם נבצע את התהליך בעזרת אלגוריתם פריים ונתחיל מקדקוד A יתכן שלאחר שהוספנו 4 צלעות בטוחות – הקדקודים A,B יהיו בצדדים שונים של חתך המכבד את קבוצת הצלעות הבטוחות שהוספנו.
- ג. גם אם נבצע באלגוריתם פריים ונתחיל מקדקוד A וגם אם נבצע את הדרוש בעזרת קרוסקל יתכן שלאחר שהוספנו 4 צלעות בטוחות – הקדקודים A,B יהיו בצדדים שונים של חתך המכבד את קבוצת הצלעות הבטוחות שהוספנו.
- ד. לא משנה באיזה אלגוריתם נבצע את הנדרש, בוודאות לאחר הוספת 4 צלעות בטוחות קדקודים A,B חייבים להיות באותה קבוצה בחתך המכבד את קבוצת הצלעות הבטוחות שהוספנו.

שאלה מספר 11:

נתונה בעיית ה LCS (תת מחרוזת משותפת ארוכה ביותר) הבאה:

$X = \text{"goodluckwiththeexam"}$ $Y = \text{"haveaniceday"}$.

נריך את האלגוריתם על מנת למצוא את התמ"א הדרושה.

- א. השורה האחרונה של המטריצה שתתקבל תהיה זהה לשורה שמעליה, והעמודה האחרונה של המטריצה תהיה זהה לעמודה הקודמת לה.
- ב. ניתן לחשב זאת על ידי טבלה ריבועית ובה 12 שורות ו – 12 עמודות.
- ג. הפתרון המקסימלי יהיה באורך 2.
- ד. ניתן לחשב זאת על ידי טבלה שגודלה הוא לפחות 19 שורות ו – 19 עמודות.

שאלה מספר 12:

משמעות הרדוקציה בין בעיה A לבעיה B, $A \leq_p B$, היא:

- א. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.
- ב. לבעיה B אין פתרון פולינומיאלי.
- ג. לבעיה A אין פתרון פולינומיאלי.
- ד. לשתי הבעיות יש פתרון אופטימלי בעל אותו סדר גודל.

שאלה מספר 13:

נתון גרף בו הצלעות צבועות בצבעים כחול ולבן.

יש למצוא עץ פורש מינימלי בו כמה שיותר צלעות הן לבנות, אך הוא עדיין יהיה המינימלי מבחינת המשקל.

מה יהיה זמן הריצה של האלגוריתם האופטימלי לפתרון הבעיה?

- א. זמן הריצה יהיה זהה בסדר הגודל לזמן הריצה של האלגוריתם של קרוסקל.
- ב. זמן הריצה יהיה זמן הריצה של האלגוריתם הרגיל, בתוספת מיון הצלעות לפי צבעים בהתחלה, דבר שיגדיל בסדרי גודל את זמן הריצה.
- ג. זמן הריצה יהיה זהה בסדר הגודל לזמן הריצה שיתקבל אם הצלעות הן מחוסרות צבע, אך יידרש תוספת של $\Theta(|V|)$ מקום בזיכרון.
- ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

שאלה מספר 14:

נתון גרף קשיר ממושקל $G=(V,E)$ כאשר $n=|V|$, ונתון קודקוד a כלשהו בגרף זה. בהרצת אלגוריתם פלואיד ורשל, מה מהמשפטים הבאים לא נכון בעקבות הפעלת האלגוריתם:

- א. נקבל עץ פורש מינימלי עבור הגרף.
- ב. נדרש ל- $\Theta(n^2)$ מקום בזיכרון כדי להפעיל את האלגוריתם.
- ג. נקבל מסלולים קצרים ביותר מקדקוד a לכל שאר הקדקודים.
- ד. נקבל מסלולים קצרים ביותר לקדקוד a מכל אחד מקדקודי הגרף.