המרכז האקדמי לב

שנה"ל **תשפ"ב**, סמסטר **א'**, מועד **א'**
שאלון בחינה בקורס: **ניתוח אלגוריתמים וסיבוכיות**
מספר קורס: **150134.2.5782**

<u>שאלון - מועד א':</u>

חלק א': ענו <u>רק</u> על 2 מתוך 3 השאלות הבאות:

(העונה על 3 שאלות, תיבדקנה שאלות 1,2 בלבד).

<u>שאלה 1 (25 נק')</u>

בחברת התוכנה "פרויקטור" יש k פרויקטי פיתוח פעילים, ויש n מתכנתים.

על החברה להחליט כמה מתכנתים לשבץ לכל פרויקט, כאשר נתונה טבלת-רווח Profit(Proj,i) המחשבת לכל פרויקט Proj ולכל מספר מתכנתים i את הרווח הצפוי מפרויקט Proj אם ישובצו אליו i מתכנתים.

החברה רוצה לשבץ את n המתכנתים ל-k הפרויקטים כך שסך הרווח שיתקבל אצלה יהיה מקסימלי. יחד עם זאת, לכל פרויקט נדרש לשבץ לפחות מתכנת אחד.

לדוגמה:

מס' מתכנתים ← פרויקט↓	1	2	3	4	5	6	7
1	30	50	60	80	100	120	130
2	20	50	70	80	85	90	95
3	40	60	80	100	120	140	160
4	10	20	30	40	50	60	70

א. (5 נק') חשבו מה הפתרון האופטימלי (כלומר פתרון המביא לרווח מקסימלי) עבור הבעיה שבדוגמא, כלומר, להראות את שיבוץ המתכנתים לפרויקטים, אם יש בסך הכל 4 פרויקטים ו-7 מתכנתים **(ניתן לבצע סעיף זה לפני או אחרי שפתרתם את סעיפים ב-ד).**

ב. (8 נק') <u>הגדירו</u> מהי בעיה ומהי תת בעיה עבור בעיה זו <u>והוכיחו</u> שבעיה זו מקיימת את תכונת תת המבנה האופטימלי.

ג. (7 נק') הגדירו נוסחה רקורסיבית מדויקת ומלאה לפתרון בעיית אופטימיזציה זו.

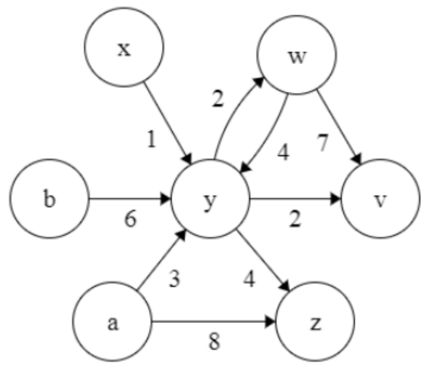
ד. (5 נק') הסבירו במילים איך תבנו את הטבלה לפתרון הבעיה: מה יהיה גודל הטבלה, ובאיזה סדר היא תתמלא.

<u>שאלה 2</u>

נתון גרף מכוון עם משקולות. $G=(V,E)$. יהי $y \in V$.

קדקוד y נקרא צוואר בקבוק של הגרף, אם עבור כל שני קדקודים $u,v \in V$ - אם קיים מסלול מ- u ל-v אז קיים מסלול קצר ביותר ביניהם שעובר דרך y.

לדוגמה, בשרטוט המצורף, הקדקוד y הוא צוואר בקבוק של הגרף.



א. (5 נק') האם יכול להיות לגרף יותר מקדקוד צוואר בקבוק אחד? אם כן, הראו דוגמה, אם לא, נמקו. **(ניתן לבצע סעיף זה לפני או אחרי שפתרתם את סעיפים ב-ד).**

ב. (12 נק') כתבו אלגוריתם פולינומי יעיל, המקבל גרף G מכוון וקשיר חזק עם משקולות חיוביות או שליליות, ובודק האם יש בו קדקוד כלשהו שהוא צוואר בקבוק של הגרף. אם כן, על האלגוריתם להחזיר את הקדקוד. אם לא, על האלגוריתם להחזיר False.

ג. (5 נק') נמקו את נכונות האלגוריתם שהצעתם (נקודות יתקבלו רק על אלגוריתם נכון).

ד. (3 נק') הסבירו וחישבו את סיבוכיותו של האלגוריתם שהצעתם (נקודות יתקבלו רק על אלגוריתם נכון).

<u>שאלה 3</u>

נתונה הבעיה האלגוריתמית הבאה:

נתונה חברת משלוחים שהצטברו אצלה n חבילות למשלוח לאותו יעד, כאשר לכל חבילה P_i יש משקל W_i ק"ג. ברשות החברה k משאיות, כל משאית יכולה להעביר לכל היותר חבילות במשקל כולל של 1000 ק"ג. ברצוננו לבדוק האם יכולה חברת המשלוחים להעביר את כל החבילות תוך שימוש במשאיות שיש לה, בלי להשתמש במשאית אחת פעמיים.

א. (5 נק') הראו שהבעיה שייכת ל-NP.

ב. (12 נק') הראו שהבעיה קשה ב-NP.

ג. (8 נק') הציעו אלגוריתם קירוב פולינומי לבעיה זו, ופרטו מה הסיבוכיות שלו ומה חסם היחס שלו.

<u>חלק ב': ענו על כל 6 השאלות הבאות (ניקוד כל שאלה 6 נק'):</u>

[Info]

ראינו כי ניתן למלא את המטריצות של התכנון הדינמי במספר צורות שונות.

- מילוי שורה אחרי שורה.
- מילוי עמודה אחרי עמודה.
- מילוי מהאלכסון הראשי כלפי מעלה.

נתונות הבעיות הבאות:

א. בעיית התרמיל בשלמים.

ב. בעיית הרכבת מכוניות.

ג. בעיית תת מחרוזת משותפת ארוכה.

ד. בעיית כפל מטריצות.

אלו מהטענות הבאות **<u>אינה</u>** נכונה?

[q1]

את בעיית הרכבת המכוניות ניתן לפתור באמצעות מילוי שורה אחר שורה או מילוי עמודה אחר עמודה.

[a]

את בעיית כפל מטריצות ניתן לפתור באמצעות מילוי מהאלכסון הראשי כלפי מעלה.

[a]

את בעיית תת המחרוזת המשותפת הארוכה ביותר ניתן לפתור באמצעות מילוי שורה אחר שורה או מילוי עמודה אחר עמודה.

[a]

את בעיית תרמיל הגב בשלמים ניתן לפתור באמצעות מילוי שורה אחר שורה או מילוי עמודה אחר עמודה.

[a]

מה היה קורה אם היינו מריצים את אלגוריתם דיקסטרה על גרף ובו משקולת שלילית אחת?

[q2]

יתכן כי נקבל עץ מסלולים קצרים נכון וערכי d נכונים המסמנים את המסלול הקצר לכל קדקוד.

[a]

בוודאי היה מתקבל עץ מסלולים קצרים לא נכון.

[a]

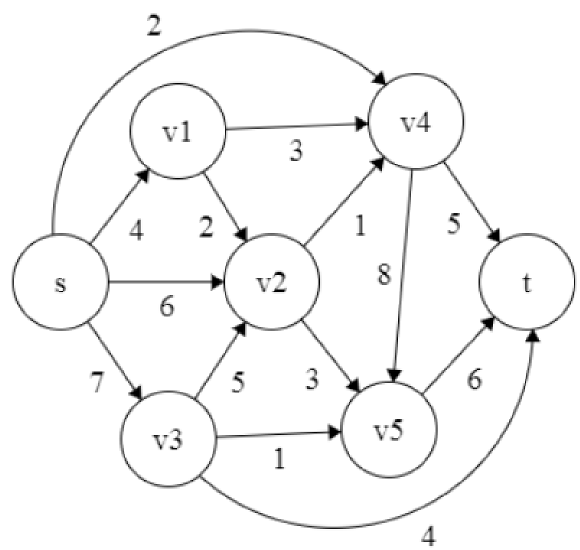
ערכי d שיתקבלו יהיו וודאי נכונים, אך עץ המרחקים הקצרים שיתקבל – הוא לא העץ המתאים.

[a]

עץ המסלולים הקצרים שיתקבל יהיה בוודאות נכון, אבל ערכי d לא יהיו נכונים.

[a]

נתונה רשת הזרימה הבאה:



איזו טענה נכונה עבור רשת זרימה זו?

[q3]

ניתן להזרים ברשת זו זרימה של 14.

[a]

החתך המינימלי ברשת זו הוא החתך שמפריד בין כל הקדקודים לבין t.

[a]

על פי משפט החתך המינימלי-זרימה מקסימלית, הקיבולת של כל החתכים ברשת זו תהיה קיבולת שווה.

[a]

החתך עם קיבולת מינימלית ברשת זו הוא עם קיבולת 8.

[a]

נתון גרף G=(V,E) <u>קשיר לא מכוון</u> עם פונקציית משקל חיובית לקשתות, ונתון עץ פורש מינימלי T עבור גרף זה.

כמו כן, נתון חתך X,Y בגרף G, ושתי קשתות e, f שחוצות את החתך X,Y. כמו כן ידוע שאין אף קשת נוספת שחוצה את החתך הזה.

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

[q4]

אם w(e)<w(f), אז הקשת e שייכת ל-T.

[a]

אם w(e)=w(f), אז גם e וגם f שייכות ל-T.

[a]

אם w(e)<w(f), אז הקשת f אינה שייכת ל-T.

[a]

אף תשובה לא בהכרח נכונה.

[a]

איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה לגבי קבוצות הסיבוכיות אותן למדנו?

[q5]

אם יש בעיה A ב- coNPC, ומצאנו רדוקציה פולינומית ממנה לבעיה ב-P אזי P=NP.

[a]

כל בעיה שהיא גם ב-NP וגם ב-coNP היא גם ב-P.

[a]

אם יש שתי בעיות A,B, שתיהן ב-NP, והצלחנו לעשות רדוקציה פולינומית מ-A ל-B ומ-B ל-A, אזי שתי הבעיות הן ב- NPC.

[a]

אם יש בעיה A שהיא ב NP, והצלחנו לעשות רדוקציה פולינומית מבעיה A לבעיית טאוטולוגיה, אז NP=coNP.

[a]

נדון בבעיית האופטימיזציה של הסוכן הנוסע: נתון גרף שלם עם משקולות, וברצוננו למצוא את המסלול ההמילטוני שסכום המשקולות שלו מינימלי. לפניכם הטענות הבאות:

א) לא קיים אלגוריתם קירוב פולינומי עם חסם יחס ρ לבעיה הכללית, כאשר אי שוויון המשולש אינו מתקיים.

ב) אם אי שוויון המשולש מתקיים, קיים אלגוריתם פולינומי להחזרת המסלול האופטימלי.

סמנו את התשובה הנכונה

[q6]

טענה א) נכונה אם P שונה מ-NP.

[a]

טענה ב) נכונה רק אם P שונה מ-NP.

[a]

טענה א) וטענה ב) נכונות תמיד.

[a]

טענה א) נכונה אם P שווה ל-NP.

[a]

טענה א) נכונה אם P שונה מ-NP.

[a]

טענה ב) נכונה רק אם P שונה מ-NP.

[a]

טענה א) וטענה ב) נכונות תמיד.

[a]

טענה א) נכונה אם P שווה ל-NP.

[a]