בס"ד

מגיש: יוחנן חאיק

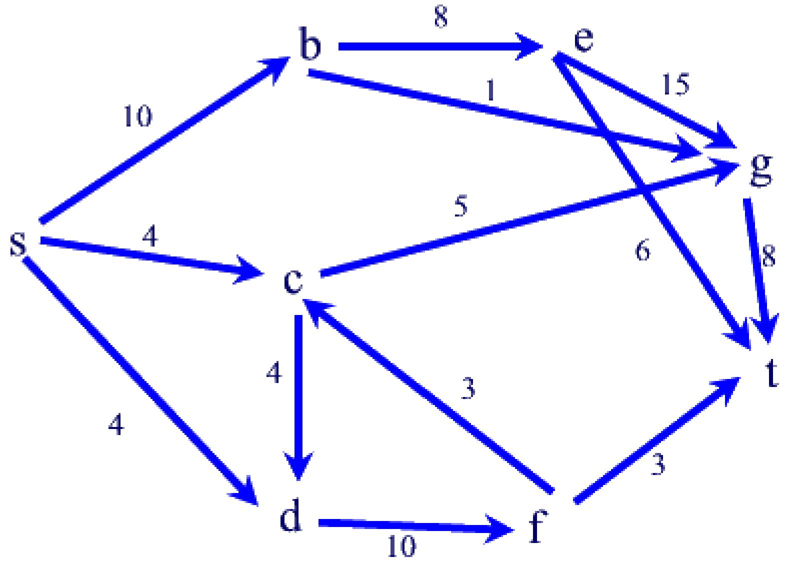
0369026682

תרגיל 5 להגשה - זרימה מקסימלית

<u>תרגיל 1</u>

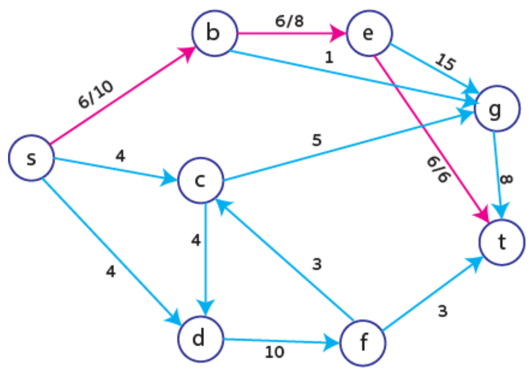
א. נתונה רשת הזרימה הבאה. חשבו בה את הזרימה המקסימלית באמצעות האלגוריתם של Edmonds Karp. הראו את הרשת השיורית בכל שלב.

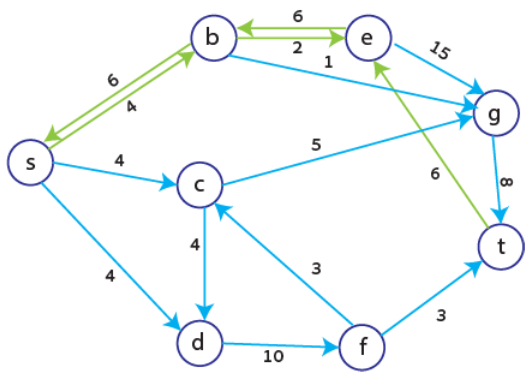
ב. מהו החתך המינימלי ברשת זו? נמקו.

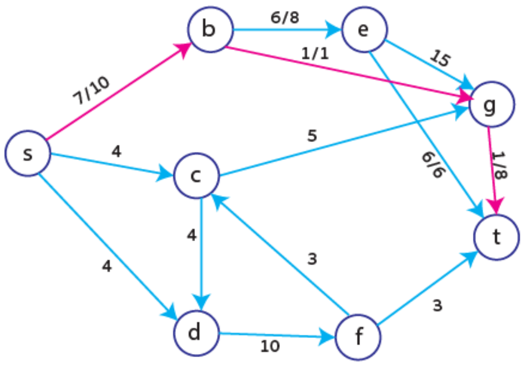


המסלול:

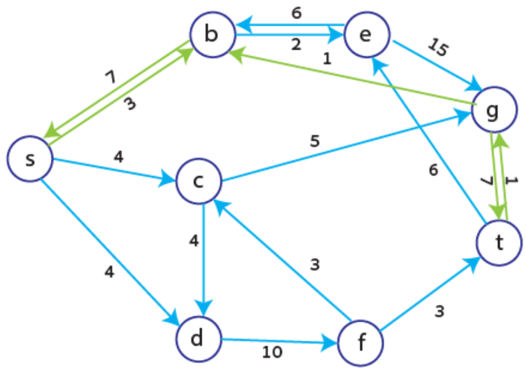
הרשת השיורית:



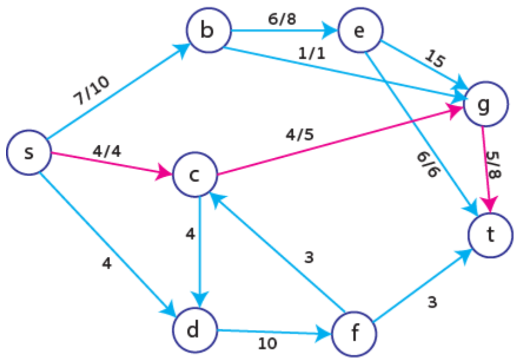




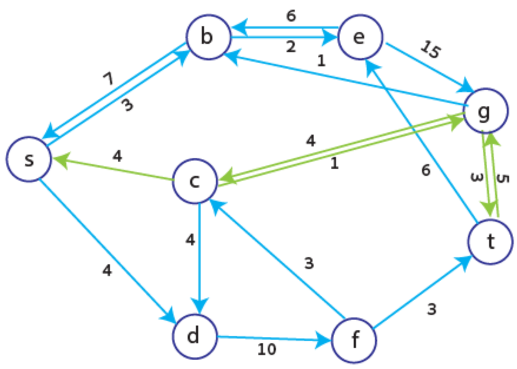
b
e
g
s
c
t
d
f
6/8
1/1
15
7/10
4
5
6/6
1/8
4
4
3
3
10



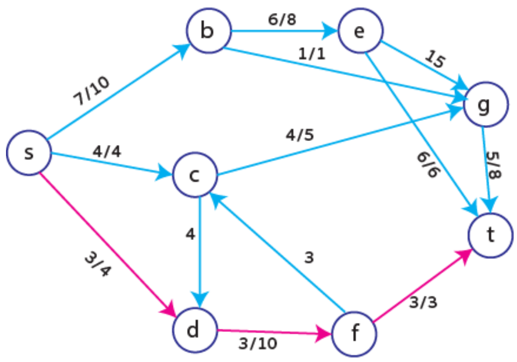
b
e
g
s
c
t
d
f
6
2
1
15
7
3
4
5
6
7
1
4
4
3
3
10



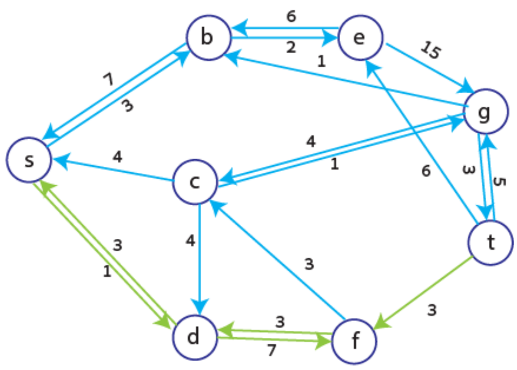
b
e
g
s
c
t
d
f
6/8
1/1
15
7/10
4/4
4/5
6/6
5/8
4
4
3
3
10



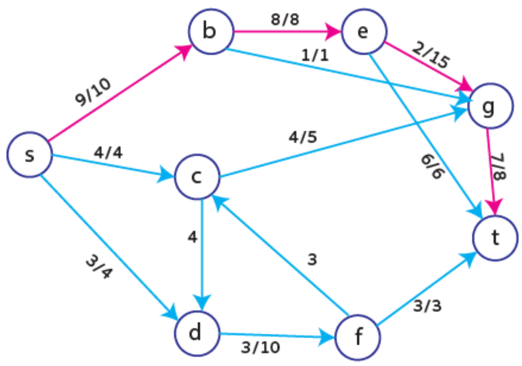
b
e
g
s
c
t
d
f
6
2
1
15
7
3
4
4
1
6
3
5
4
4
3
3
10



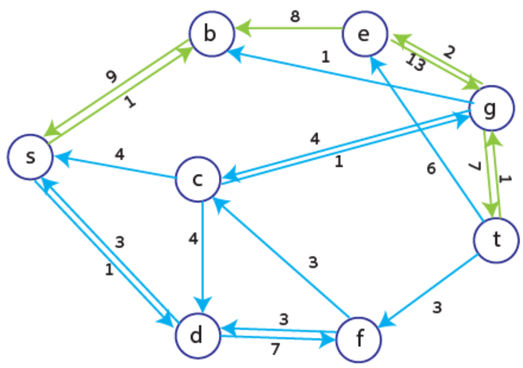
b
e
g
s
c
t
d
f
6/8
1/1
15
7/10
4/4
4/5
6/6
5/8
3/4
4
3
3/3
3/10



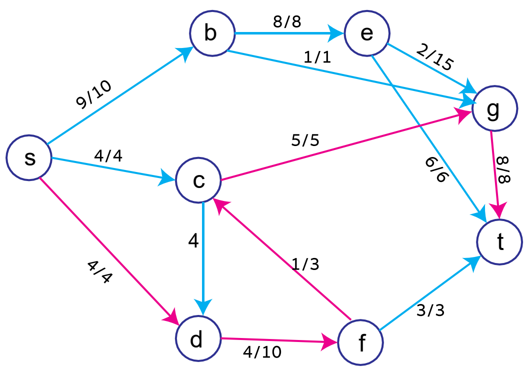
b
e
g
s
c
t
d
f
6
2
1
15
7
3
4
4
1
6
3
5
3
1
4
3
3
3
7

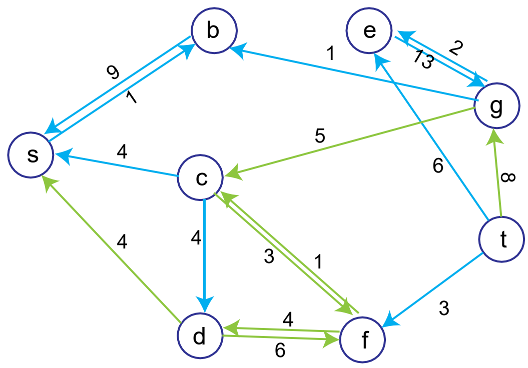


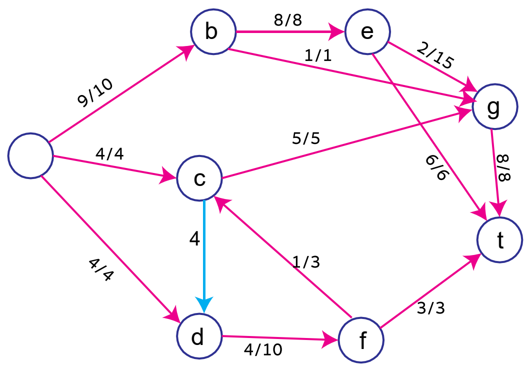
b
e
g
s
c
t
d
f
8/8
1/1
2/15
9/10
4/4
4/5
6/6
7/8
3/4
4
3
3/3
3/10

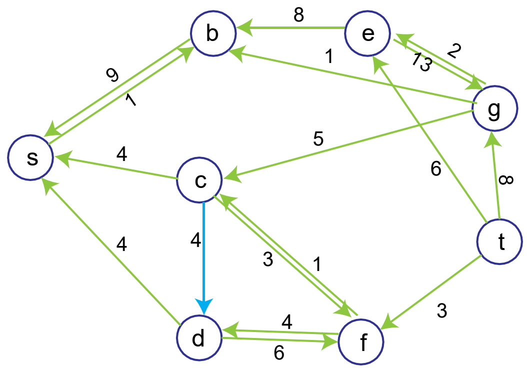


b
e
g
s
c
t
d
f
8
1
2
13
9
1
4
4
1
6
7
1
3
1
4
3
3
3
7









ב. החתך המינימלי יחולק לשתי הקבוצות הבאות: {s}, G-{s}.

דבר זה נוצר כאשר הזרימה הנכנסת לבור היא זרימה רוויה בכל הקשתות הנכנסות, ולכן מה שיקבע את החתך/זרימה הוא הקיבולת המקסימלית של הקשתות המובילות ל-s.

תרגיל 2

נתונה רשת זרימה. נניח הכפילו את הקיבולת המקסימלית של כל קשת בקבוע החיובי C כאשר C גדול מ-1.

א. בכמה תגדל הזרימה המקסימלית האפשרית ברשת זו? נמקו.
ב. איך תשתנה תשובתכם אם C קטן מ-1 ? נמקו.

א. הזרימה תגדל באופן יחסי בהתאם להכפלת הקבוע C
מאחר ואנחנו מדברים על קבוע גדול מ-1, אזי כל השינויים בקיבולות ישתנו בהתאמה, כך שמה שהיה חתך גדול יותר מהחתך המינימלי, עדיין יהיה גדול יותר רק ההפרש יהיה יותר גדול.
מבחינת החתך המינימלי עצמו, כל הכפלת C פשוט תוסיף את אותה רמת זרימה למשל, בשאלה הקודמת, אן החתך המינימלי הוא 17, הכפלת הקשתות ב C=2 פשוט יגדיל כל קשת וסכום החתך יגדל להיות 34.

ב. כל עוד מדובר במספר שהוא גדול מ-0, יישאר אותו דבר.
אם נכפיל בקבוע שלילי, אזי כל כיווני הזרימות ישתנו ולא נוכל להזרים מהמקור לבור, אא רק הפוך.

<u>תרגיל 3</u>

א. נניח נתונה רשת זרימה ובה קשתות שנכנסות לקודקוד המקור S, ונניח שקיימת זרימה f כך שקיימת בה זרימה של 1 בקשת שנכנסת ל-s, כלומר, קיים קודקוד v כך ש- f(v,s)=1. הוכיחו שקיימת זרימה אחרת, 'f, שבה f(v,s)=0, וסך כל הזרימה ב-'f שווה לסך כל הזרימה ב-f.

ב. הציעו אלגוריתם שמקבל רשת זרימה וזרימה f כפי שהוגדרה ומחשב את 'f בזמן שהוא O(E) כאשר E הוא מספר הקשתות ברשת.

א. מאחר שמוגדר לנו שיש זרימה f(v,s) = 1, אז זה אומר שיש לנו מעגל שחוזר בחזרה לקדקוד v (לפי הגדרת רשתות זרימה – כל קדקוד יש לו מסלול מהמקור). ועל מנת לשמר את חוקי הזרימה בה המקור אינו מקבל זרימה, אלא רק מוציא, הזרימה מהמקור לקדקוד v שווה גם הוא 1. ולכן הזרימה מאופסת בין שני הקדקודים, והזרימה הנוספת f' תהיה שווה לס.

הזרימות יהיו שוות מאחר שהזרימה הסימטרית נותנת להעביר את אותה הזרימה לאותו כיוון, כך ישיהו באותה כמות זרימה.

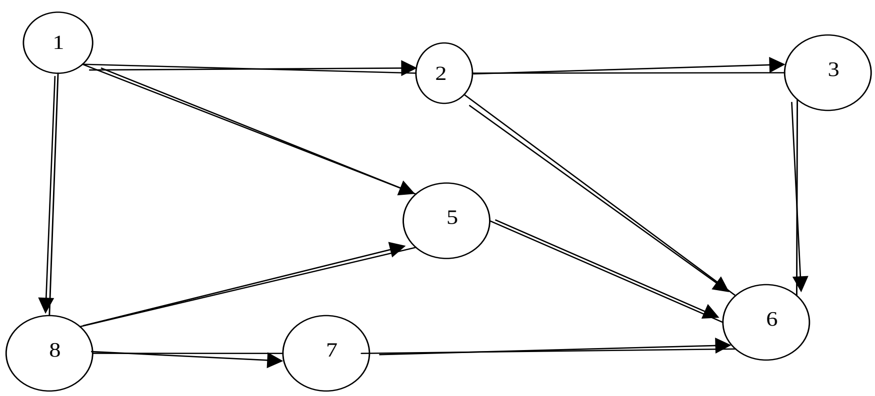
ב. נעבור על המסלול מ-s ל-v.
בכל צלע נוריד 1 מהזרימה.
אם ניתקל בצלע עם זרימה נמוכה מ-1 –
נחפש מסלול אחר

סה"כ זמן ריצה – O(E)

<u>תרגיל 4</u>

בעיית **המסלולים הזרים** בגרף מכוון G מוגדרת באופן הבא: נתון גרף G(V,E) ו-2 קודקודים s,t מ-V. 2 מסלולים בין s ל-t הם **זרים** אם אין להם אף קשת משותפת. מצאו קבוצה מקסימלית של מסלולים הזרים שמחברים בין s ל-t

א. הראו קבוצה מקסימלית של מסלולים זרים בגרף הבא, בין קודקוד המוצא 1 לקודקוד היעד 6



ב. הציעו אלגוריתם שמבוסס על זרימה מקסימלית ומקבל כקלט גרף מכוון G, קודקוד מוצא וקודקוד יעד, ומחזיר קבוצה מקסימלית של מסלולים זרים ביניהם. רמז: תנו לכל קשת משקל 1.

א. {1,2,3,6} {1,5,6}{1,8,7,6}

ב. -נמשקל את הקיבולות של כל הקשתות ב-1.

- נריץ את האלגוריתם למציאת זרימות על פי אדמונדס-קארפ.

הBFS ימצא לנו את כל המסלולים, אך ברגע שנתחיל להזרים הקיבלות 1 תתמלא בכל הכנסה של זרימה למערכת, כך שכל זרימה תהיה זרימה זרה לקודמת ולבאה.

<u>תרגיל 5</u>

נניח ונתונה רשת זרימה, כאשר בנוסף לקיבולת של הקשתות נתונה קיבולת לכל קודקוד, כלומר, לכל קודקוד v ברשת נתונה קיבולת c(v) שמשמעותה היא שאי אפשר להזרים דרך הקודקוד v יותר מאשר c(v) יחידות זרימה.

הציעו אלגוריתם שימצא זרימה מקסימלית ברשת כזו, נמקו את נכונותו וחשבו את סיבוכיותו.

עבור כל קדקוד v∈V, נוסיף קדקוד נוסף v’, כאשר הזרימות ייכנסו כרגיל לקדקוד v, אך תמתח צלא נוספת ל-v’ בקיבולת של אותו קדקוד. שאר הזרימות היוצאות מ-v לפני השינוי, יצאו בעת מ-v’.

בעת נריץ את האלגוריתם הרגיל עם השיפור של אדמנודס קארפ, ונמצא את הזרימה המקסימלית.

נכונות: מאחר שפורד-פולקרסון, מתייחס רק לזרימה בין הקשתות, השינוי שאנו נצטרך לעשות או להבריח את הקשתות לשינוי ברשת. ברגע שנעביר את הזרימה דרך הקשתות המוברחות שבנינו, הזרימה תהיה מקסימלית על פי כל הדרישות.

זמן ריצה:

בנייה של קשתות נוספות – O(V)

מציאת זרימה מקסימלית – $O(VE^2)$

סה”ב – $O(VE^2)$

בהצלחה רבה!