

מס' תלמיד: _____ קמפוס: _____ למילוי ע"י הסטודנט
--

- שם המרצה: ד"ר מוטי רייף, ד"ר חיים פריאנטי.
- תאריך הבחינה: א' בתמוז תשפ"ב (30/6).
- משך הבחינה (בדקות): 180 דקות.
- חומר עזר: אין להשתמש בחומר עזר.
- מחשבון: אין להשתמש במחשבון.
- המבחן כולל סה"כ 17 שאלות.
- חלק א' – 3 שאלות. יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות. כל שאלה – 25 נקודות.
- חלק ב' – 14 שאלות. יש לענות על כולן. כל שאלה 4 נקודות.
- את התשובות יש לכתוב ע"ג השאלון, דפי הטיוטא לא ייבדקו.
- בסוף החלק הפתוח עמוד נוסף לכתיבת תשובה, למקרה הצורך.
- **השאלון חסוי – יש להחזירו עם מחברת הבחינה.**

תלמיד יקר,

1. נוהל הבחינות של המרכז האקדמי לב מחייב אותך, באחריותך לקוראו ולהכירו - בחינה עלולה להיפסל על כל חריגה מהנוהל.
2. אם אינך מבין את כוונת המרצה בשאלה כלשהי, עליך לכתוב בראש התשובה כיצד הינך מבין את השאלה ולפתור בהתאם. המרצה ישקול האם יש מקום להבנה זו ואז ינקד בהתאם.
3. לידיעתך, תורדנה נקודות לא רק על שגיאות, אלא גם על תוספות לא רלוונטיות, העדר נימוק הולם לתשובה, חוסר סדר ותשובה דו-משמעית, כאשר נדרשת תשובה חד משמעית.

בהצלחה רבה !

שאלה מספר 1 -

ג- מה הסיבוכיות של האלגוריתם (5 נקודות).

2.

[illegible]

ב.

ג.

שאלה מספר 2-

מפעל למוטות מנסה למקסם את רווחיו. המוטות מיוצרים במפעל בגודל מסויים ויש לחלק את המוטות ולמקסם את הרווח.

עבור כל גודל מקבלים תמורה כספית שונה (לא בהכרח חתיכת מוט גדולה יותר תקבל תמורה גדולה יותר).

עליכם להחליט כיצד לחתוך את המוטות (אם בכלל) על מנת להרוויח כמה שיותר כסף.

בהינתן מוט שאורכו $0 < n$ ניתן לחתוך אותו לחתיכות בגדלים שלמים שונים.

לכל מוט באורך n $1 \leq i$ נתון $c(i)$ - הרווח על מוט באורך i .

בהינתן מוט באורך n , וטבלת רווחים לכל אורך מוט - יש למצוא לאיזה חתיכות כדאי לחתוך אותו על מנת למקסם את הרווחים.

א- הציעו שיקול חמדני לפתרון הבעיה. האם אלגוריתם המבוסס על שיקול זה פותר את הבעיה? אם כן - הוכיחו את נכונותו אם לא – תנו דוגמא נגדית (6 נקודות).

ב- האם ניתן לפתור בעיה זו על ידי תכנון דינמי? הסבירו מדוע (6 נקודות).

ג- כתבו אלגוריתם (בפסאודוקוד + הסבר מילולי) לבעיה זו (10 נקודות).

ד- האם האלגוריתם שכתבתם פולינומי? הסבירו את זמן הריצה שלו (3 נקודות).

תשובה לשאלה מספר 2:

א.

ב.

.7

שאלה מספר 3נתון גרף G .

הבעיה 2-COLOR: האם ניתן לצבוע את הגרף $G(V,E)$ ב-2 צבעים בלבד, כך שכל קשת $(u,v) \in E$ מקשרת בין קדקודים בעלי צבע שונה. אם הצלחנו לבצע את הצביעה, נאמר שהגרף הוא 2-צביע ($G \in 2\text{-COLOR}$). בעיה זו שייכת ל P .

הבעיה 3-COLOR: האם ניתן לצבוע את הגרף $G(V,E)$ ב-3 צבעים בלבד, כך שכל קשת $(u,v) \in E$ מקשרת בין קדקודים בעלי צבע שונה. אם הצלחנו לבצע את הצביעה, נאמר שהגרף הוא 3-צביע ($G \in 3\text{-COLOR}$). בעיה זו שייכת ל NPC .

הבעיה 4-COLOR: האם ניתן לצבוע את הגרף $G(V,E)$ ב-4 צבעים בלבד, כך שכל קשת $(u,v) \in E$ מקשרת בין קדקודים בעלי צבע שונה. אם הצלחנו לבצע את הצביעה, נאמר שהגרף הוא 4-צביע ($G \in 4\text{-COLOR}$).

א- הוכיחו כי בעיית 4-COLOR היא מסוג NP (8 נקודות).

ב- הוכיחו כי בעיית 4-COLOR היא מסוג NPC על ידי רדוקציה פולינומיאלית של בעיית 3-COLOR לבעיית 4-COLOR (8 נקודות).

ג- בעיית $K\text{-COLOR}$ היא הכללה של הבעיה, ושואלת בהינתן גרף G ומספר טבעי K האם הגרף G הוא K -צביע. לכל אחת מבין 3 משפחות סיבוכיות הבאות ענו על השאלה האם בעיית $K\text{-COLOR}$ שייכת **בוודאות** למשפחת הסיבוכיות?

האפשרויות הן: P, NP, NPC . יש להוכיח את התשובות (9 נקודות).

תשובה לשאלה מספר 3:

א.

ב.

ג.

המשך תשובה לשאלה מספר: _____

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

חלק ב' - לפניך שאלות רב ברירה. יש לסמן בדף המיועד לכך את התשובה לכל שאלה על פי הנחיות הדף.

שאלה מספר 1:

הגדרת הבעיה H-HAM-C: בהינתן גרף $G=(V,E)$ יש לקבוע האם קיים בגרף מעגל המילטוני שעובר דרך חצי מקדקודי הגרף.

- א. הבעיה שייכת ל – NPC.
- ב. הבעיה שייכת ל – P.
- ג. הבעיה שייכת ל – NP, אך לא ידוע כי היא שייכת ל – NPC.
- ד. הבעיה שייכת ל – NP-HARD, לא ידוע אם היא שייכת ל – NP.

שאלה מספר 2:

בהינתן פסוקית בצורה של CNF, מה בוודאות נכון?

- א. ניתן לאמת שייכות של הפסוק ל SAT בזמן פולינומי.
- ב. ניתן לבדוק בזמן פולינומיאלי האם יש השמה מספקת לפסוק.
- ג. ניתן לאמת שייכות של הפסוק ל TAUT בזמן פולינומי.
- ד. יותר מתשובה אחת נכונה.

שאלה מספר 3:

פרופסור תחכמוני מציע את האלגוריתם החמדני, והקצרצר הבא לפתרון בעיית המסלולים הקצרים ביותר בגרף מכוון, ממקור יחיד S :

האלגוריתם : יש להפעיל את האלגוריתם פרים למציאת עץ פורש מינימלי המתחיל מ-S ולהחזיר עץ זה.

- א. אם הגרף לא מכיל מעגלים האלגוריתם יחזיר את הפתרון הנכון.
- ב. האלגוריתם יחזיר את הפתרון הדרוש רק במקרה שכל המשקולות הם אי שליליים.
- ג. האלגוריתם יחזיר תמיד את הפתרון הדרוש.
- ד. האלגוריתם יחזיר את הפתרון הדרוש רק במקרה שכל המשקולות הם שלמים.

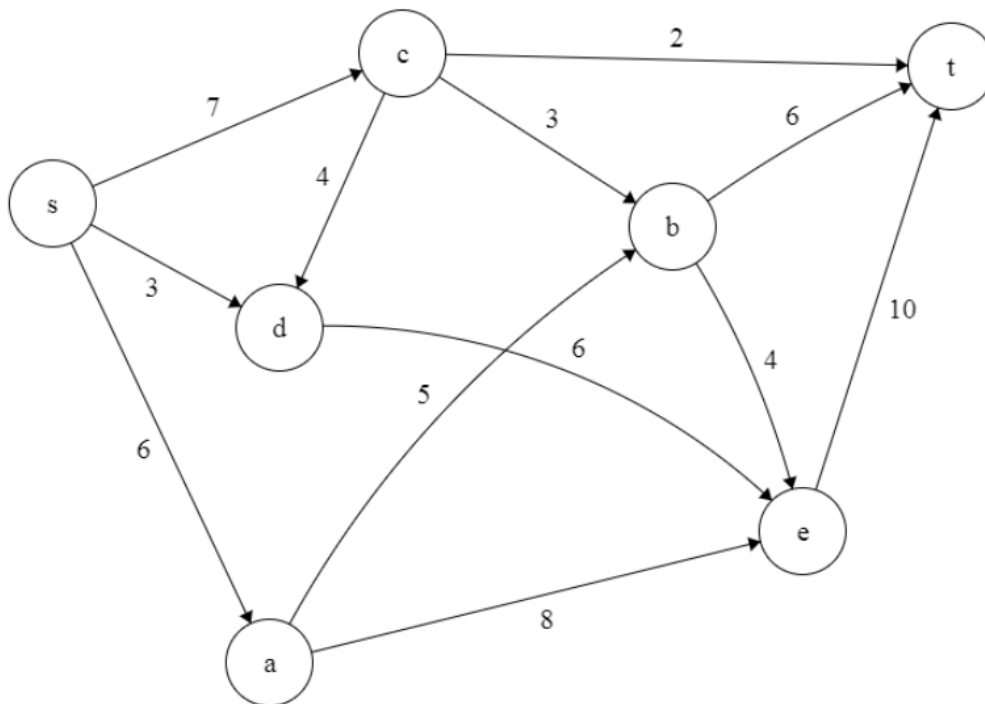
שאלה מספר 4:

באלגוריתם תיכנון דינמי בנינו במקביל 2 טבלאות – אחת עבור הפתרון האופטימלי, והשניה עבור מציאת דרך שיחזור הפתרון.

- א. כל התשובות נכונות.
- ב. בבעיית התרמיל בשלמים – ניתן לוותר על מטריצה זו ולשחזר את הפתרון בלי להגדיל את סדר הגודל של זמן הריצה.
- ג. בבעיית תת מחרוזת משותפת ארוכה ביותר – ניתן לוותר על מטריצה זו ולשחזר את הפתרון בלי להגדיל את סדר הגודל של זמן הריצה.
- ד. בבעיית כפל המטריצות – ניתן לוותר על מטריצה זו ולשחזר את הפתרון בלי להגדיל את סדר הגודל של זמן הריצה.

שאלה מספר 5:

נתונה רשת הזרימה הבאה :



- א. אם הקיבולת בצלע (a,e) תהיה 1 יהיו שני חתכים מינימליים ברשת.
- ב. הצלע הראשונה שתיעלם ברשת השיורית בהרצת אדמונדס-קארפ היא הצלע (c,b) .
- ג. אם נשנה את הקיבול של הצלע (e,t) להיות 8- יהיו שתי אפשרויות למסלול שיפור ראשון באלגוריתם של אדמונדס-קארפ, אך בכל ערך אחר – תהיה אפשרות למסלול אחד בלבד.
- ד. הזרימה המקסימלית ברשת זו היא 15.

שאלה מספר 6:

נתון גרף לא מכוון, ונתון חתך בגרף. נתונות שתי צלעות: e_1, e_2 אשר חוצות את החתך.
 (א) במציאת עץ פורש מינימלי - יתכן כי אף אחת מהצלעות האלה לא תהיה בעץ הפורש המינימלי.
 (ב) בבניית רשת זרימה. רק הקשת עם המשקל הקטן יותר יכולה להיות שייכת לחתך המינימלי ברשת זרימה.
 (ג) יתכן כי בבניית המסלול הקצר ביותר מהקדקוד s לקדקוד v , שתי הקשתות תהיינה שייכות למסלול זה.

א. טענות א', ג' נכונות שתיהן.

ב. רק טענה א' נכונה.

ג. רק טענה ב' נכונה.

ד. כל הטענות נכונות.

שאלה מספר 7:

בהינתן המטבעות הבאים :

- מטבעות של שקל

- מטבעות של שלושה שקלים.

- מטבעות של 9 שקלים.

- מטבעות של 20 שקלים.

מכל אחד מהם ישנה כמות בלתי מוגבלת של מטבעות. נרצה לתת עודף ללקוח בכמות מינימלית של מטבעות.

א. פעולת החזרת עודף ללקוח במקרה זה היא פעולה דינמית.

ב. פעולת החזרת עודף ללקוח במקרה זה היא פעולה חמדנית.

ג. אין פתרון להחזרת עודף בצורה אחרת מלבד בעזרת פתרון נאיבי.

ד. האלגוריתם המוצא פתרון אופטימלי יעבוד בזמן $O(1)$ כי בסף הכל מדובר על פעולת חילוק אחת פשוטה.

שאלה מספר 8:

אם יצליחו להוכיח חסם תחתון אקספוננציאלי לבעיה M השייכת ל- NP_Hard , מה תהיה המשמעות של זה:

א. אם \bar{M} (הבעיה המשלימה ל- M) שייכת ל- NPC , המשמעות של זה היא כי $P \neq NP$.

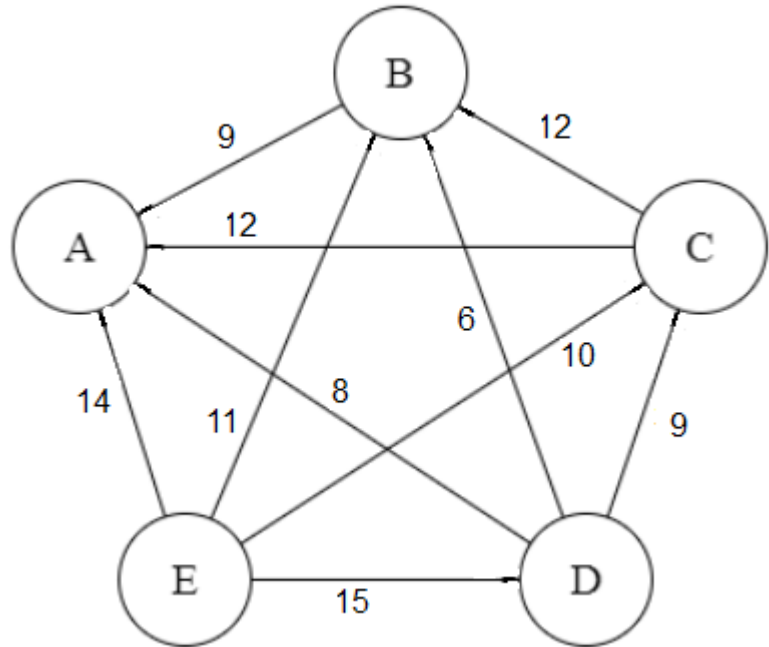
ב. המשמעות תהיה כי $P \neq NP$.

ג. המשמעות תהיה קיימת רדוקציה מבעיה זו לכל בעיה ב- NPC .

ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

שאלה מספר 9:

נתון הקלט הבא לבעיית הסוכן הנוסע:



- א. מבעיה זו קיימת רדוקציה לבעיית ה-SUS.
- ב. הפתרון האופטימלי לבעיה זו הוא קטן מ-32.
- ג. הפתרון המקורב שיתקבל לבעיה זו הוא 41.
- ד. ייתכן כי גרף זה המצויר בשאלה התקבל כתוצאה של הפעלת רדוקציה על קלט של HAM-C.

שאלה מספר 10:

מה מהמשפטים הבאים **לא שקול** למשפט הבא: נתונה רשת זרימה ובה זרימה מקסימלית.

- א. לכל קדקוד מלבד המקור והבור – סכום הזרימה הנכנסת שווה לסכום הזרימה היוצאת.
- ב. ברשת קיים חתך רווי.
- ג. ברשת השיורית לא קיים מסלול שיפור נוסף.
- ד. כל המשפטים מלבד זה שקולים לרשום בשאלה, ולכן אין תשובה נכונה.

שאלה מספר 11:

נתונה גרסת ההכרעה של בעיית SUBSET-SUM (SUS).

- א. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.
- ב. ידוע כי וודאי לא ניתן לפתור בעיה זו בזמן פולינומי.
- ג. יש רדוקציה מכל בעיה ב- P לבעיה זו, ולכן הבעיה פולינומית.
- ד. ניתן להשתמש ברדוקציה מבעיית SUS לבעיית PAR על מנת להוכיח שייכות של בעיית ה- SUS ל- NPC .

שאלה מספר 12:

בהינתן טבלת פתרון לחישוב תמ"א (תת מחרוזות משותפת ארוכה ביותר) של שתי מחרוזות, אחת באורך n והשניה באורך m -

רוצים לחשב את הערך של התא הנמצא בשורה מספר 3 בעמודה 7.

- א. על מנת שבוודאות נוכל לחשב את הערך של תא זה נחשב קודם ערכים של 20 תאים, מלבד שורה 0 ועמודה 0 של האתחול.
- ב. על מנת לחשב רק ערך זה – יש לחשב את השורות 1, 2, ועת 6 התאים הראשונים של שורה 3.
- ג. חישוב תא זה נותן את אורך התמ"א של 3 התווים הראשונים של שתי המחרוזות.
- ד. על מנת שבוודאות נוכל לחשב את הערך של התא הזה יש לחשב קודם ערכים של 7 האלכסונים הראשונים של המטריצה.

שאלה מספר 13:

נתון אלגוריתם קירוב לתרמיל בשלמים –

נחבר כל שלושה פריטים יחד לפריט אחד (שלושת הראשונים – לפריט אחד. שלושת הבאים – יחוברו יחד לפריט השני, וכו'...) – על מנת להקטין משמעותית את מספר הקלטים, ונעגל את המשקל שלהם יחד על ידי עיגול ספרת האחדות לעשיריה הקרובה ביותר (53 מעגלים ל – 50, 89 מעגלים ל – 90 וכו'), ואז נפעיל את האלגוריתם הדינמי של התרמיל בשלמים על כמות קטנה יותר של פריטים.

- א. האלגוריתם שיתקבל כלל לא נותן פתרון תקין לקלט.
- ב. האלגוריתם שיתקבל נותן אלגוריתם קירוב פולינומי בעל חסם יחס של 3.
- ג. האלגוריתם שיתקבל פותר את הבעיה, אך לא יהיה פולינומי.
- ד. האלגוריתם שיתקבל הוא פולינומי, אך לא ניתן לקבוע לו חסם יחס קבוע.

שאלה מספר 14:

יהי G גרף לא מכוון שמשקולות קשתותיו הן מספרים חיוביים, ויהי T עץ פורש מינימלי ב- G . תהי $e=(v,u)$ צלע ב- T .

טענה: משקל המסלול הקצר ביותר ב- G בין u ל- v הוא $w(e)$ (משקלה של הצלע e).

- א. הטענה בהכרח נכונה.
- ב. הטענה בהכרח לא נכונה.
- ג. הטענה נכונה רק כאשר המשקלות הן מספרים שלמים.
- ד. יש דוגמאות שהטענה נכונה, ויש דוגמאות שהטענה לא נכונה.