בס"ד

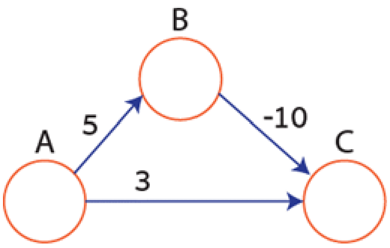
מגיש: יוחנן חאיק

תרגיל בית 4: מסלולים קצרים בגרף

<u>שאלה 1</u>

א. הבא דוגמה עם גרף ובו קשת(ות) בעלת(ות) משקל שלילי למקרה בו אלג' דייקסטרה לא עובד כשורה. הסבר(י)!

ב. נתון גרף DAG ובו קשתות חיוביות ושליליות. האם הפעלת האלגוריתם של דיקסטרה עליו תחזיר פתרון נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, הראו דוגמא נגדית.



א-ב. הגרף הנ"ל עונה על שתי השאלות. מדובר בדרישות הרצויות של DAG בעל משקלות מעורבים, ואם נריץ עליו את האלגוריתם של דייקסטרה, ונתחיל בקדקוד A, הקדקוד הבא שייבחן ויצא מהתור הוא דווקא C שיקבל א הערך 3, למרות שאם היינו בודקים עד הסוף, הערך האמיתי שלו הוא דווקא 5- ולא 3.

<u>שאלה 2</u>

הוסיפו לאלג' פלויד-וורשאל קטע קוד המזהה מעגל בעל משקל שלילי. נמקו את נכונות ההוספה.

For i = 1 to n
  if $D_{ii} \neq 0$
    print "There is negative circle for" i

האלכסון המרכזי של מטריצה D מעודכן בתחילה ל0. הדרך היחידה שהוא ישתנה הוא אך ורק אם יש מעגל שלילי, מה שגורר את זה שהמרחק מהקדקוד לעצמו יהיה קטן מ-0.

<u>שאלה 3</u>

נתון גרף G מכוון עם קודקודים אדומים וכחולים, ונתונה פונקציית משקל w חיובית לקשת שבין כל שני קודקודים.

כתבו אלגוריתם יעיל שמוצא את המסלול הקצר ביותר בין 2 קודקודים v1,v2 בגרף G, כאשר מותר למסלול לעבור רק דרך קשתות שמחברות קודקודים עם צבעים שונים זה מזה. חשבו את סיבוכיות האלגוריתם שהצעתם.

למעשה, ניתן למיין את כל הקשתות לכ2 שהן 4 סוגים שונים – קשת פסולה – עוברת בין שני קדקודים באותו הצבע. קשת מותרת – עוברת בין שני קדקודים בצבע שונה.

נגדיר פונקצית משקל חדשה c עבור כל הקדקודים בגרף באופן הבא:

$$C(u,v) = \begin{cases} C(e) = 1 & \text{עבור קשת פסולה} \\ C(e) = 0 & \text{עבור קשת מותרת} \end{cases}$$

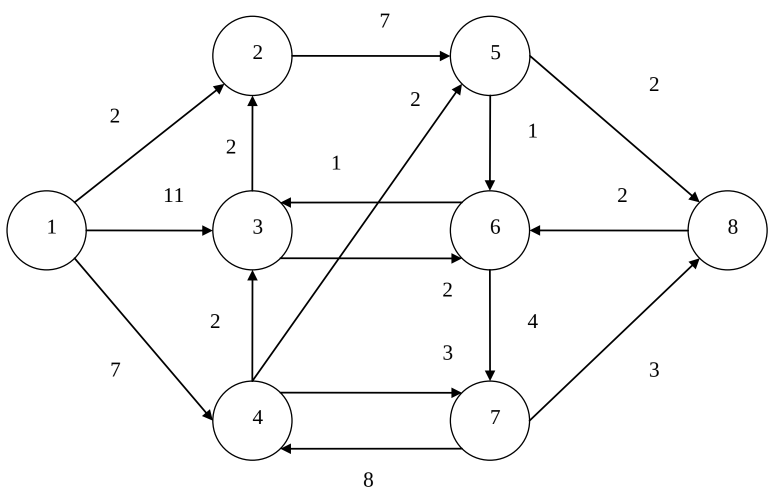
כעת נוכל להריץ את האלגוריתם של דייקסטרה על הגרף, ולקחת רק מסלולים שהמשקל שלהם יהיה 0 – לא נגעו בקשתות פסולות.

סיבוכיות – מישקול מחדש – O(E) – מעבר על כל הצלעות.

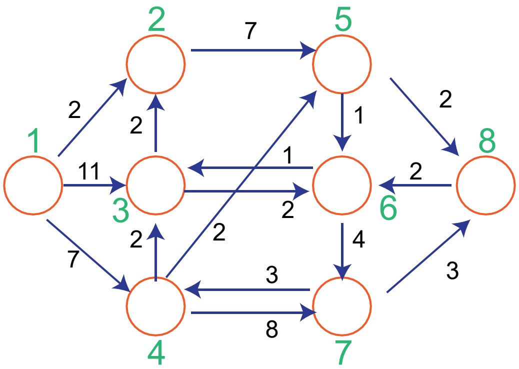
אלגוריתם למציאת מסלול קצר – O((E+V)LogV)

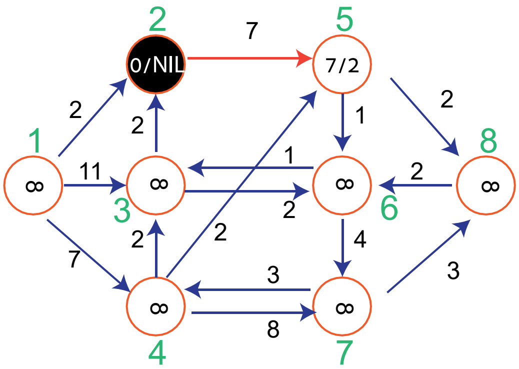
<u>שאלה 4</u>

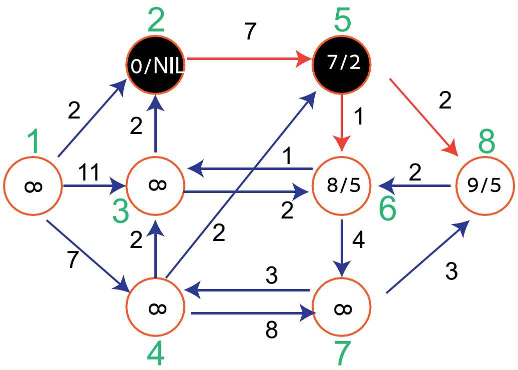
הרץ את האלגוריתם של דיאקסטרה על הגרף הבא עבור $s = 2$:

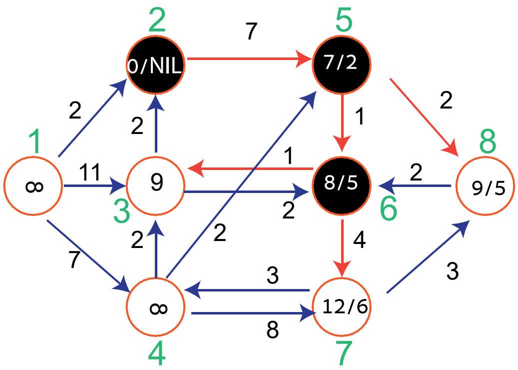


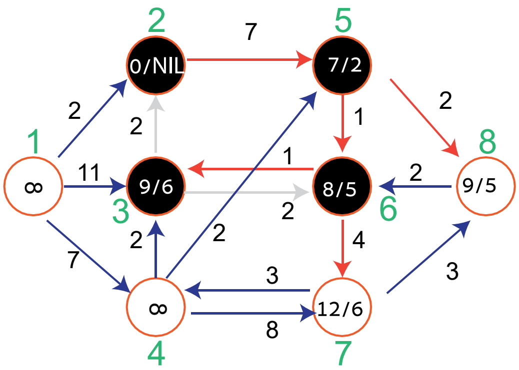
הצג את ערכי d, π . הצג גם את עץ המסלולים האופטימליים.

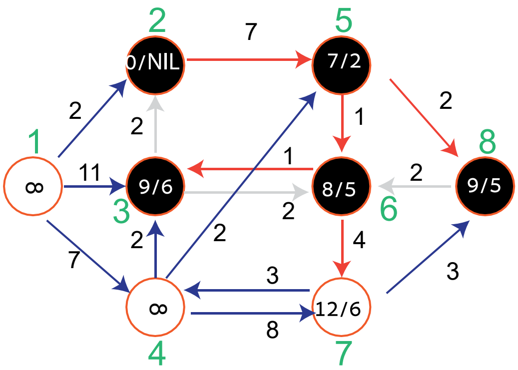

1
2
3
4
5
6
7
8
7
2
2
11
1
2
2
2
2
1
4
3
8
7
3

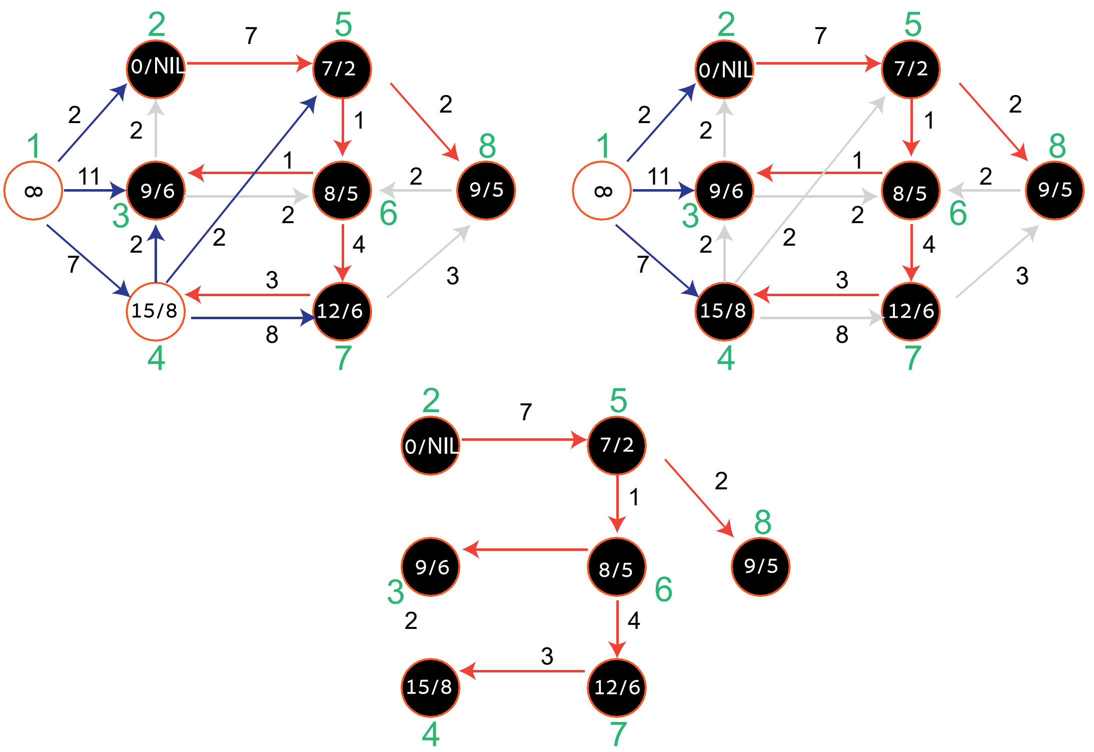

0/NIL
7/2
∞
∞
∞
∞
∞
∞


0/NIL
7/2
∞
∞
8/5
9/5
∞
∞


0/NIL
7/2
∞
9
8/5
9/5
∞
12/6


0/NIL
7/2
∞
9/6
8/5
9/5
∞
12/6


0/NIL
7/2
∞
9/6
8/5
9/5
∞
12/6



שאלה 5

נתון גרף מכוון G(V,E) עם משקולות, וידוע שיש בו מעגל שלילי (אחד או יותר). הציעו אלגוריתם שמקבל את הגרף ו-2 קודקודים u,v ובודק האם אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם מוגדר. (כלומר, האם המסלול הקצר ביותר בין u ל-v אינו עובר דרך המעגל השלילי). נתחו את סיבוכיות האלגוריתם שהצעתם.

מאחר ומוגדר לנו שיש מעגל שלילי, ניתן להשתמש פשוט בלולאה שנמצאת באלגוריתם של בלמן-פורד ולהריץ אותו ברברס מקצה המסלול, ובכל פעם להכניס את הקודם לאותם קדקודים. אם יהיה מעגל שלילי, באחד מהמקומות יתקיים התנאי של הלולאה. האלגוריתם יחזיר אמת, אם הוא ימצא שיש מעגל שלילי על המסלול

```
Negative-Circle(u,v)
 i = π(v)
 If i = u
        return FALSE
 if d[v]>d[u]+w(u,v)
        return TRUE
 else Negative-Circle(u,i)
```

סיבוכיות – במקרה הגרוע נצטרך לעבור על כל הקשתות בגרף, ולכן מדובר על O(E)

שאלה 6

ענו נכון/לא נכון ונמקו בקצרה:

א. באלגוריתם של בלמן פורד, אם באיזושהו שלב עבור i<|V|-1 הלולאה החיצונית עברה על כל הקשתות ולא מצאה שום צעד שיפור Relax לבצע, הרי ניתן לצאת מהאלגוריתם כי נמצאו כבר המסלולים הקצרים בגרף.

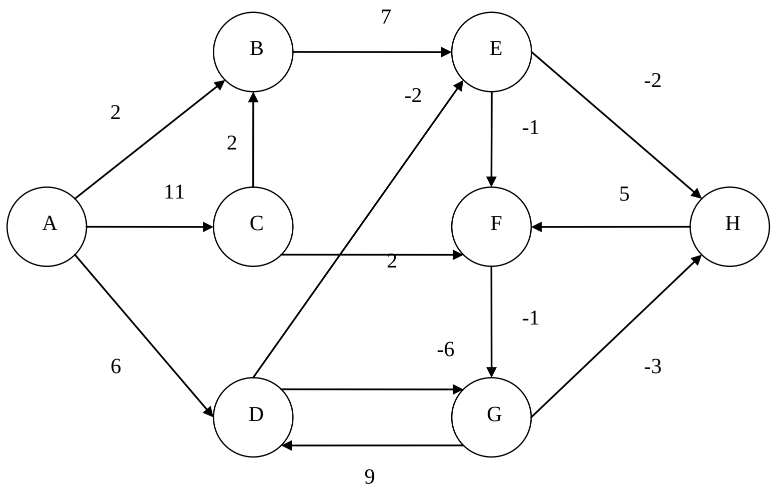
נכון. ברגע שאיטרציה שלמה על כל הקדקודים עברה ללא שיפור, אז לא היה שינוי שישפיע במעבר נוסף.

ב. אם קיים מעגל שלילי בגרף, אזי המסלול הקצר בין <u>כל</u> 2 קודקודים u,v בגרף זה אינו מוגדר.

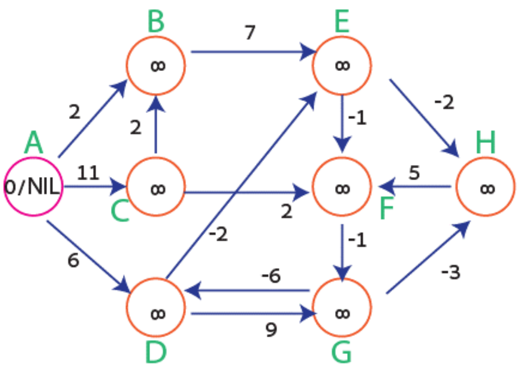
לא נכון. המרחק אינו מוגדר רק לכל קדקוד הנמצא במעגל השלילי או יוצא ממנו. הקדקודים שלפני המעגל מוגדרים באופן מוחלט.

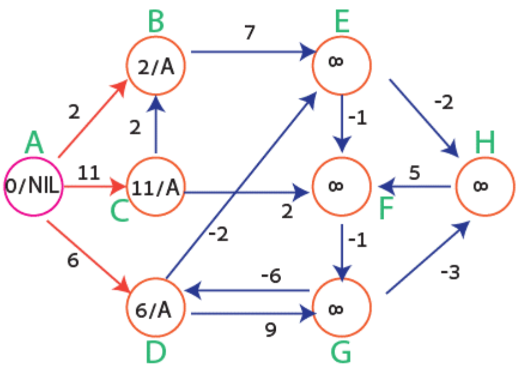
<u>שאלה 7</u>

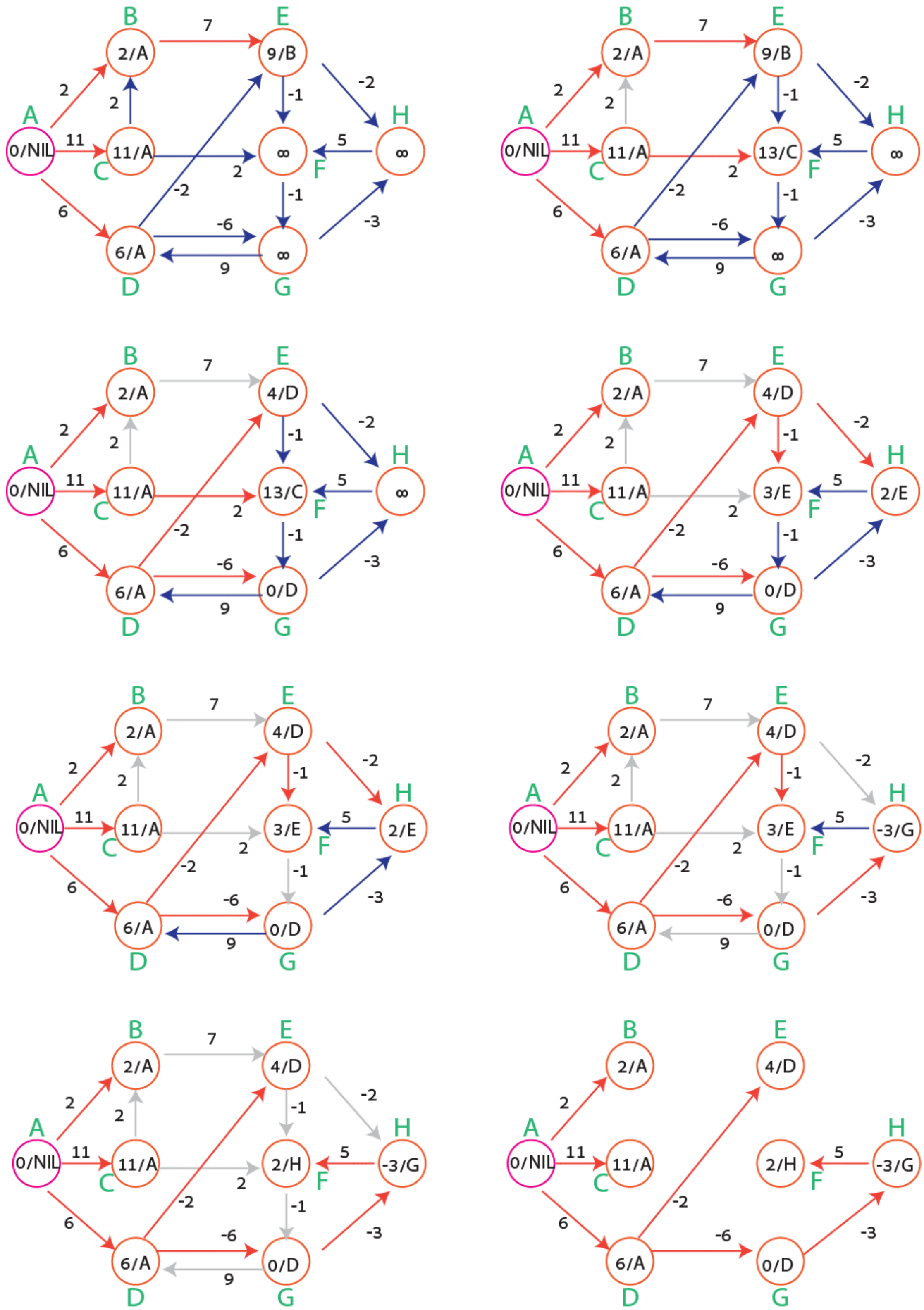
הרץ את האלגוריתם של בלמן-פורד על הגרף עבור $s = A$:



הצג את ערכי d,π. הצג גם את עץ המסלולים האופטימליים.



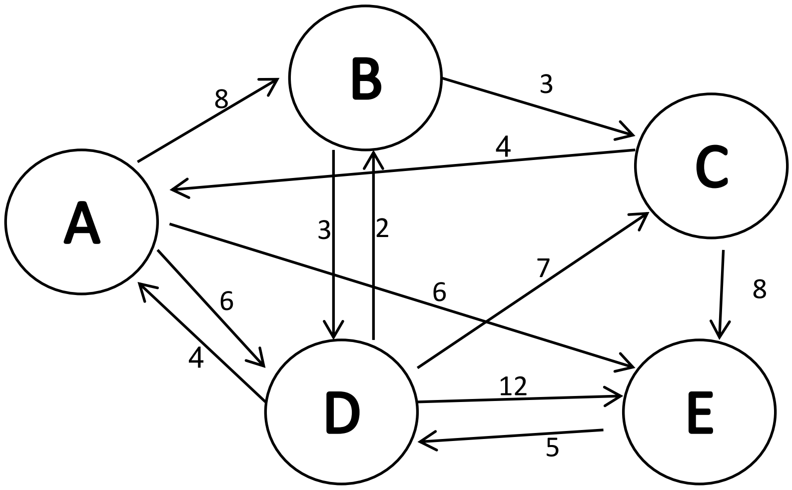




קיים בגרף מעגל שלילי אינסופי, שמתנתק לבאורה מהעץ הכללי של המסלולים הקצרים ביותר

<u>שאלה 8</u>

הרץ את אלגוריתם פלויד-וורשאל (פרק 26.2) על הגרף הבא:



בכל השלבים (היעזר בסריקה של פרק 26 הנמצאת במודול). **Π** ו- **D** הצג את ערכי המטריצות

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & 6 \\ \infty & 0 & 3 & 3 & \infty \\ 4 & \infty & 0 & \infty & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(0)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & NIL & 1 & 1 \\ NIL & NIL & 2 & 2 & NIL \\ 3 & NIL & NIL & NIL & 3 \\ 4 & 4 & 4 & NIL & 4 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & 6 \\ \infty & 0 & 3 & 3 & \infty \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(1)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & NIL & 1 & 1 \\ NIL & NIL & 2 & 2 & NIL \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ \infty & 0 & 3 & 3 & \infty \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(2)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ NIL & NIL & 2 & 2 & NIL \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 3 & 11 \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(3)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & NIL & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 3 & 11 \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(4)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & NIL & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 3 & 11 \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(5)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & NIL & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & NIL \end{bmatrix}$$