חלק א': ענו רק על 2 מתוך 3 השאלות הבאות (סה"כ 64 נק'):
(העונה על 3 שאלות, תיבדקנה שאלות 1,2 בלבד).

שאלה 1 (32 נק')

בעיית סדרת-העל-המשותפת-הקצרה-ביותר Shortest Common Super Sequence Problem מוגדרת באופן הבא:

סדרת העל המשותפת הקצרה-ביותר היא סדרה המורכבת מהתווים של הסדרות X ו-Y. התווים יופיעו בסדר המקורי שלהם. אך לא בהכרח בצורה רציפה.

בהינתן שתי סדרות X,Y, יש למצוא את הסדרה הקצרה ביותר Z, כך שגם X מהווה תת סדרה של Z, וגם Y מהווה תת סדרה של Z (כלומר, התווים של X מופיעים כולם בסדרה Z בסדר המקורי, וגם התווים של Y מופיעים כולם בסדרה Z בסדר המקורי).

לדוגמה, עבור הסדרות:

X: ABCBDAB

Y: BDCABA

אורך סדרת-העל-המשותפת-הקצרה-ביותר הוא 9, ואחת האפשרויות שלה היא:

Z: ABCBDCABA

על פי הטבלה הבאה:

X	A	B	C	B	D		A	B	
Y		B			D	C	A	B	A
SCS (Z)	A	B	C	B	D	C	A	B	A

א. (5 נק') הסבירו במילים (בשורה אחת לכל היותר) מה ההבדל בין בעיית תת הסדרה המשותפת הארוכה ביותר שנלמדה בכיתה, לבין בעיית סדרת העל המשותפת הקצרה ביותר שהוגדרה כאן.

ב. (5 נק') הראו מהי תת בעיה עבור בעיה זו.

ג. (8 נק') הראו שמתקיימת עבור בעיה זו תכונת תת המבנה האופטימלי.

ד. (8 נק') הציעו נוסחה רקורסיבית לפתרון בעיית סדרת העל המשותפת הקצרה ביותר.

ה. (6 נק') הציעו איך לפתור את הבעיה תוך שימוש בתכנות דינמי. מה יהיה גודל הטבלה שתבנו, ובאיזה סדר תמלאו אותה? נמקו בקצרה. <u>ניקוד יינתן רק אם התשובה לסעיף ד' נכונה.</u>

<u>שאלה 2 (32 נק')</u>

יהי $G(V,E)$ גרף קשיר לא-מכוון עם משקולות, תהי $A \subseteq E$ קבוצת צלעות, יהי C חתך ב-G המכבד את A, ותהי $e = \{u,v\}$ צלע כלשהי ב-G.

א. (7 נק') טענה: אם בגרף G יש K רכיבים קשירים, אזי יש בדיוק K-1 קשתות מתוך E-A, החוצות את החתך C.

האם הטענה נכונה? אם כן, נמקו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

ב. (10) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

יהי T עץ פורש מינימלי כלשהו של G. אם $A \subset T$, אזי $A \cup \{e\}$ מוכלת בעץ פורש מינימלי כלשהו של G.

ג. (10) הציעו אלגוריתם <u>פולינומי</u>, אשר בהינתן גרף לא-מכוון כלשהו, מוצא יער של עצים פורשים מינימליים עבור כל רכיבי הקשירות של הגרף הנתון. (כלומר, מוצא תת גרף שמורכב מעץ פורש עבור כל רכיב קשיר של הגרף הנתון). הסבירו מדוע האלגוריתם נכון.

ד. (5) מה הסיבוכיות של האלגוריתם שהצעתם בסעיף הקודם? נמקו בשורה אחת. ניקוד ינתן רק למי שפתר נכון את סעיף ג'.

<u>שאלה 3 (32 נק')</u>

בעיית <u>כיסוי הקודקודים הממושקל</u> WVC מוגדרת באופן הבא:

בהינתן גרף G=(V,E), <u>עם משקולות</u> חיוביים על <u>קודקודי</u> הגרף, ובהינתן קבוע K, האם קיימת תת קבוצה 'V של קודקודים, המהווה כיסוי לגרף (כלומר, לכל קשת (u,v) בגרף, קיים נציג אחד לפחות בקבוצה 'V), וכך שסכום משקולות הקודקודים ב-'V הוא קטן או שווה K, כלומר: $\sum_{v \in V'} w(v) \leq K$.

א. (6 נק') הראו שבעיה זו שייכת ל-NP.

ב. (10 נק') הראו שבעיה זו היא NP-Hard

ג. נגדיר את בעיית האופטימיזציה של כיסוי הקודקודים הממושקל, להיות הבעיה הבאה:

בהינתן גרף G=(V,E), <u>עם משקולות</u> חיוביים על <u>קודקודי</u> הגרף, מהי תת הקבוצה 'V של קודקודים המהווה כיסוי לגרף, שסכום משקלות הקודקודים בה מינימלי.

קירוב עם חסם יחס 2 לבעיה זו: משמעותו תת קבוצה של קודקודים שמהווה כיסוי לגרף וסכום משקלות קודקודיה קטן או שווה ל-2 כפול סכום המשקולות המינימלי של כיסוי לגרף.

נתונות 2 טענות, עבור כל אחת מ-2 הטענות, הוכיחו את נכונותה, או הראו דוגמה נגדית כדי להפריך אותה:

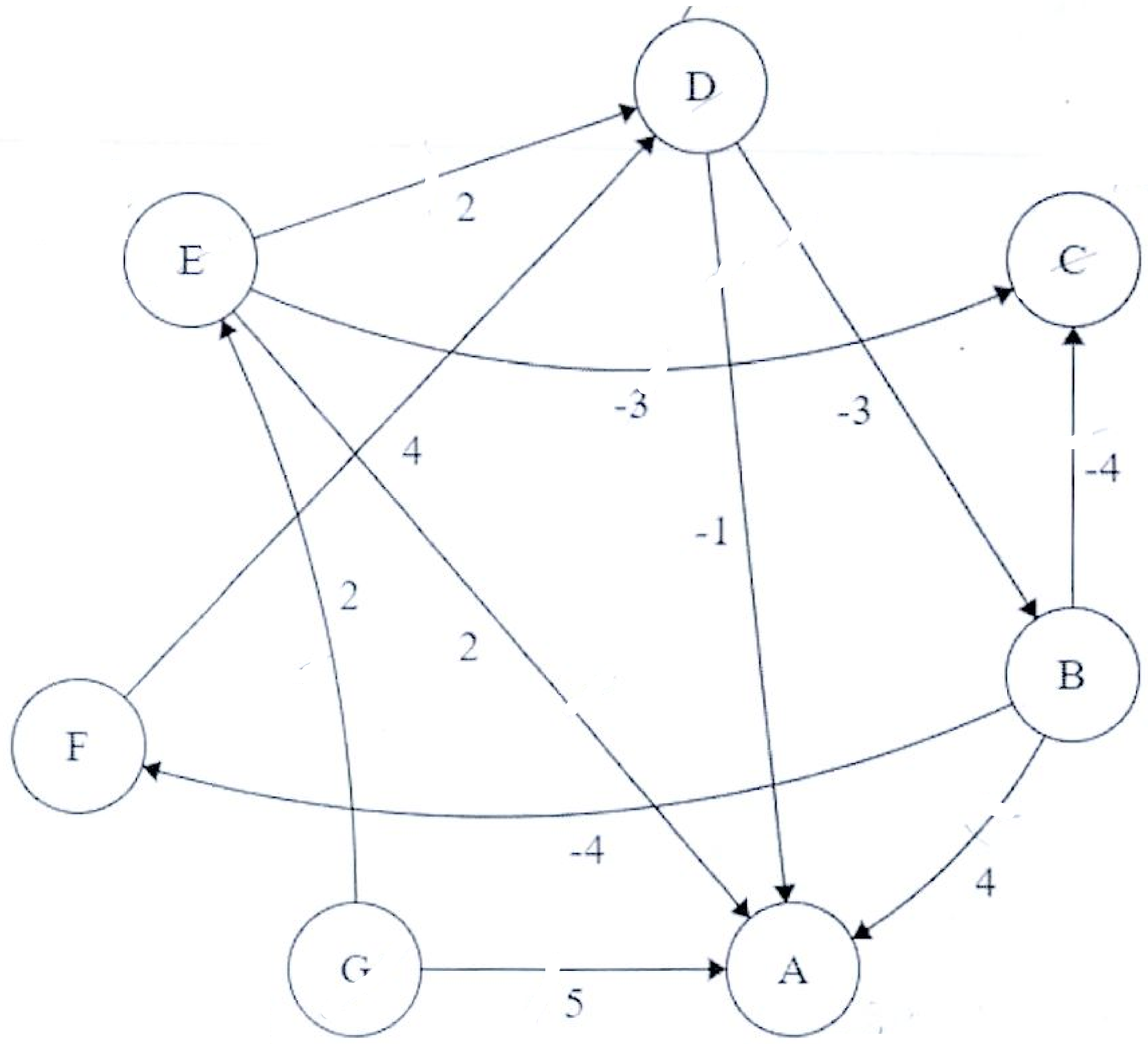
ג1. (8 נק') אלגוריתם קירוב עם חסם יחס 2 לבעיית כיסוי הקודקודים המקורית VC ישמור על חסם יחס 2 עבור בעיית כיסוי הקודקודים הממושקל WVC.

ג2. (8 נק') בהנחה שקיים אלגוריתם קירוב עם חסם יחס 2 לבעיית האופטימיזציה כיסוי הקודקודים הממושקל WVC, ניתן להפעיל את אלגוריתם הקירוב הזה כך שישמור על חסם יחס 2 עבור בעיית כיסוי הקודקודים המקורית VC.

חלק ב': ענו על כל 6 השאלות הבאות (6 נק' לכל שאלה, סה"כ 36 נק')

שאלה מספר 1:

נתון הגרף המכוון הבא, עליו הרצנו את האלגוריתם של בלמן-פורד, מנקודת מוצא G. איזו מהטענות הבאות נכונה?



א. האלגוריתם יחזיר no solution (תשובת false) כיוון שיש בגרף מעגל שלילי.

ב. ה-π של קודקוד F יישאר null בגמר הרצת האלגוריתם.

ג. האלגוריתם יחזיר עץ מסלולים קצרים ששורשו G וכל הקודקודים בגרף נמצאים בו.

ד. בסיום הרצת האלגוריתם, המרחק d לקודקוד A יהיה 5.

<u>שאלה מספר 2:</u>

בעיית CNF-EQ מוגדרת באופן הבא:

הקלט: שתי פסוקיות מסוג CNF.

יש לבדוק: האם שתי הפסוקיות מחזירות אותו ערך עבור כל השמה.

איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. הבעיה שייכת למחלקה P, כי ניתן לבנות טבלת אמת לשתי הפסוקיות ולהשוות את הטבלאות.

ב. הבעיה שייכת למחלקה Co-NPC.

ג. הבעיה שייכת למחלקה NPH, כיוון שניתן להראות רדוקציה ממנה אל SAT.

ד. הבעיה שייכת למחלקה NPC.

<u>שאלה מספר 3:</u>

נתון גרף G לא מכוון קשיר עם משקולות שיש בו 2 קשתות עם אותו משקל, וכל שאר המשקולות שונים זה מזה איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. אף תשובה לא נכונה.

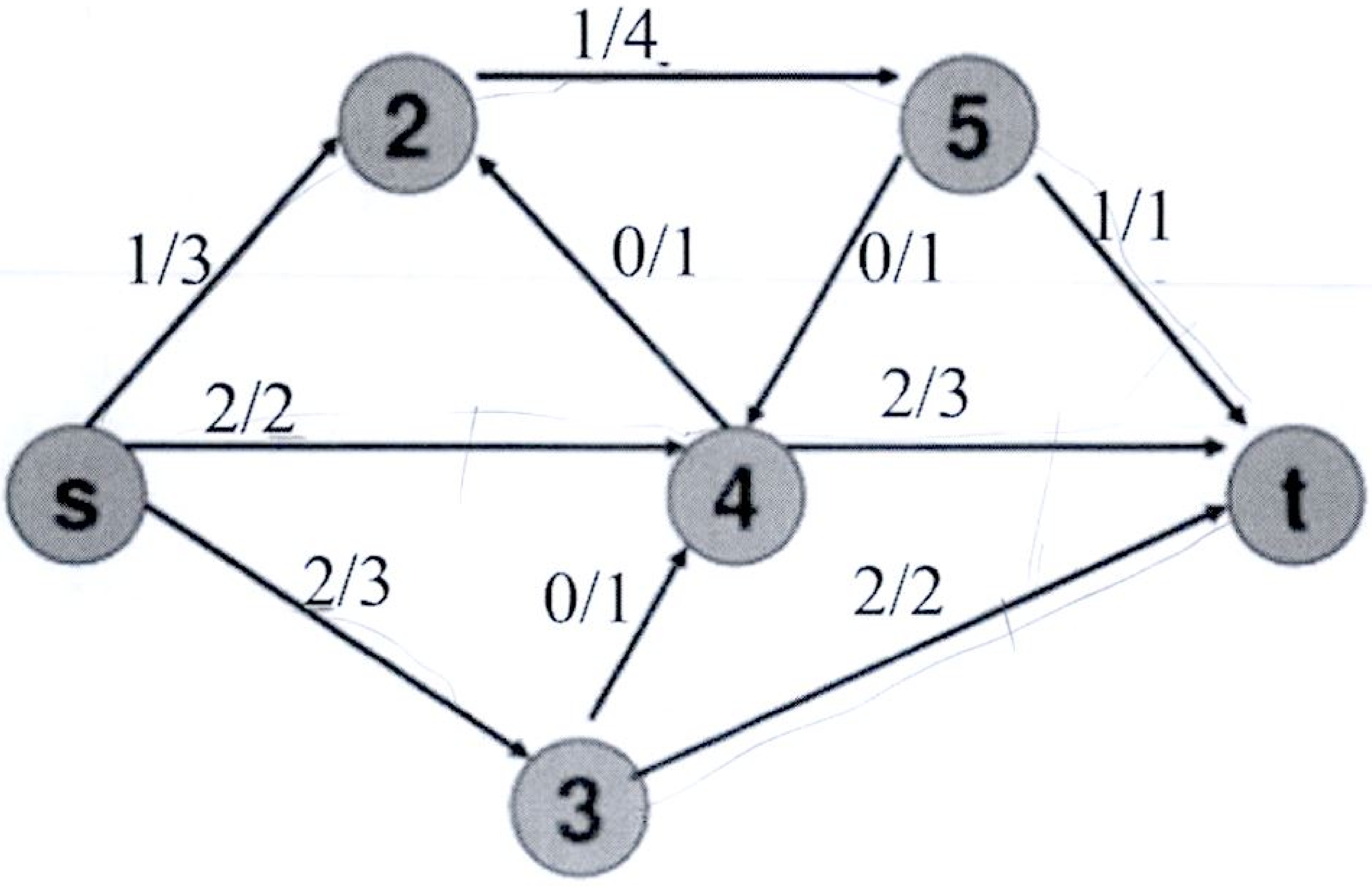
ב. ייתכן ולא יהיה לגרף עץ פורש מינימלי בכלל.

ג. בהכרח יהיו לגרף זה 2 עצים פורשים שונים.

ד. אם הקשת הזולה ביותר היא זו שמופיעה פעמיים, אזי בהכרח יהיה לגרף זה עץ פורש מינימלי יחיד.

<u>שאלה מספר 4:</u>

נתונה רשת הזרימה הבאה:



איזו מהטענות הבאות נכונה עבור רשת זו?

א. החתך המינימלי ברשת זו הוא עם קיבולת 8.

ב. הזרימה המתוארת ברשת זו אינה זרימה חוקית.

ג. הזרימה המתוארת ברשת זו אינה זרימה מקסימלית.

ד. הזרימה המקסימלית ברשת זו היא זרימה של 5.

שאלה מספר 5:
נתונה הבעיה האלגוריתמית הבאה:

בקטע ישר ארוך של כביש פזורים בתים. נתון שהבתים ממוקמים לאורך הכביש, במרחקים $a_1,\dots,a_n$ מתחילת הכביש. בנוסף נתון קלט מספר X. רוצים להתקין מספר מינימלי של תחנות ממסר לטלפונים סלולריים בנקודות מסוימות לאורך הכביש, כך שכל בית יימצא בטווח של X קילומטרים מאחת מתחנות הממסר הקרובה אליו (כלומר המרחק מכל בית לתחנת ממסר הקרובה צריך להיות לכל היותר X).

שימו לב – הקלט הוא קבוצה של n בתים, לכל אחד מהם רשום את מרחקו מתחילת הכביש.

מה ניתן לומר על בעיה זו?

א. ניתן לפתור את הבעיה תוך שימוש באלגוריתם חמדני, בזמן ריצה theta(nlogn).

ב. יש 2 תשובות נכונות מתוך יתר התשובות.

ג. לא מכירים, נכון להיום, אלגוריתם פולינומי עבור בעיה זו, אבל קיים עבורה אלגוריתם קירוב עם חסם יחס 2.

ד. הבעיה היא NPC, ניתן להראות רדוקציה מבעיית הסוכן הנוסע, כאשר מחפשים מסלול של הסוכן הנוסע שעלותו קטנה או שווה ל- X.

שאלה מספר 6:
נתונות שתי בעיות:

בעיה A שייכת למחלקה NP.

בעיה B שייכת למחלקה Co-NP:

איזה מהמשפטים הבאים **נכון בהכרח**:

א. יש רדוקציה פולינומית מבעיה A לבעיה B.

ב. אף אחד מהמשפטים אינו בהכרח נכון.

ג. יש רדוקציה פולינומית מבעיה A לבעיה המשלימה ל- B.

ד. קיימת בעיה C כך שמתקיים – $A \le_P C \le_P B$.