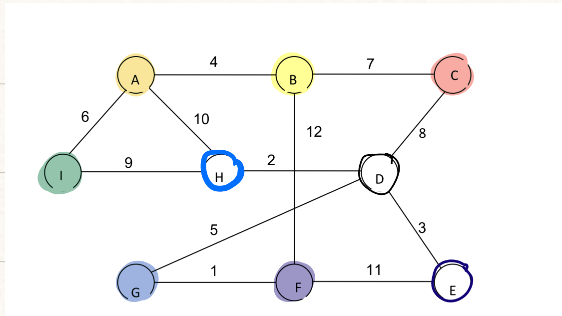
שאלה 1 ס״א. נשתמש באלגוריתם ומימוש של קבוצות זרות

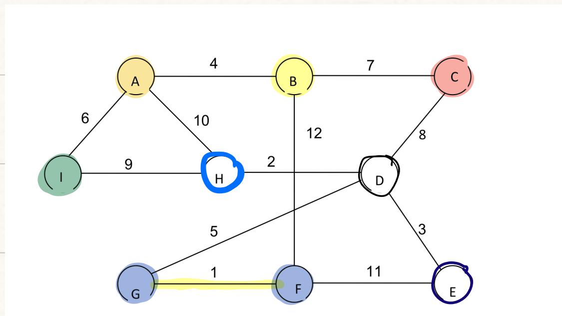
$A = \{ \}$



- נבדוק את GF

$A = \{GF\}$

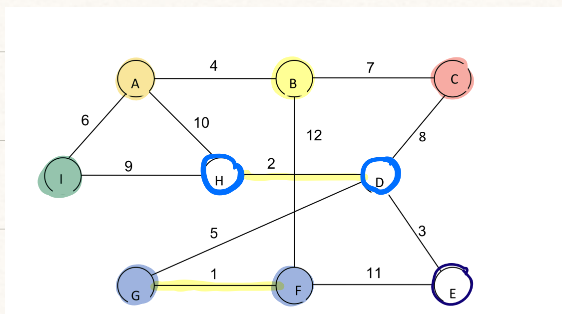
Union(G, F)



- נבדוק את HD

$A = \{GF, HD\}$

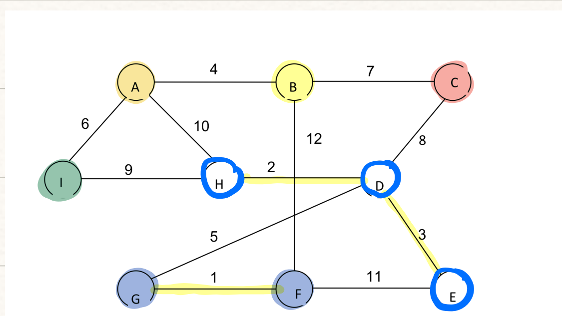
Union(H, D)



- נבדוק את DE

$A = \{GF, HD, DE\}$

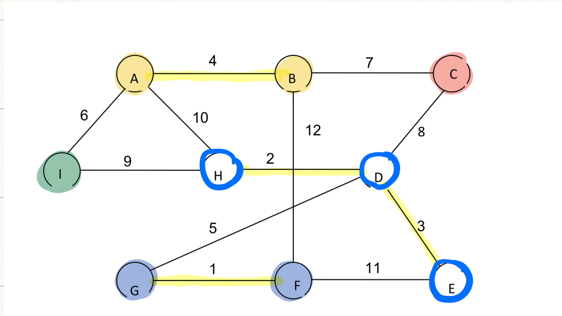
Union(D, E)



- נבדוק את AB

$A = \{GF, HD, DE, AB\}$

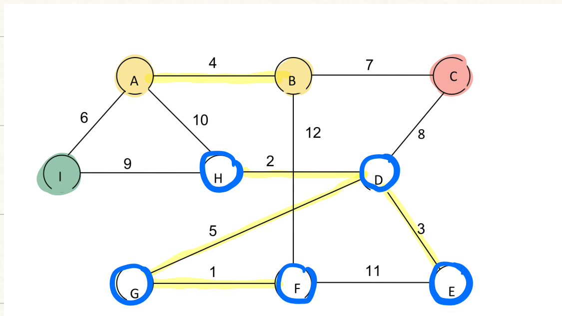
Union(A, B)



נבדוק את GD

$A = \{GF, HD, DE, AB, GD\}$

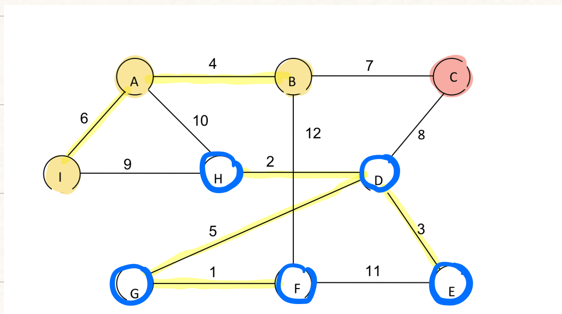
Union(G, D)



- נבדוק את IA

$A = \{GF, HD, DE, AB, GD, IA\}$

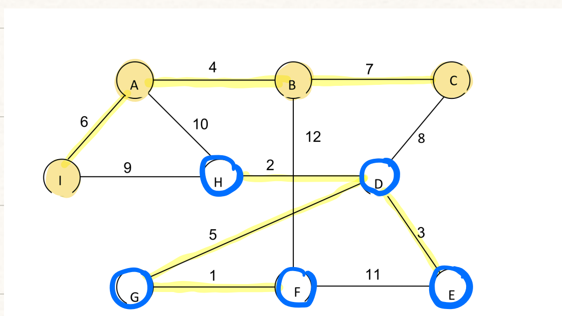
Union(I, A)



- נבדוק את BC

$A = \{GF, HD, DE, AB, GD, IA, BC\}$

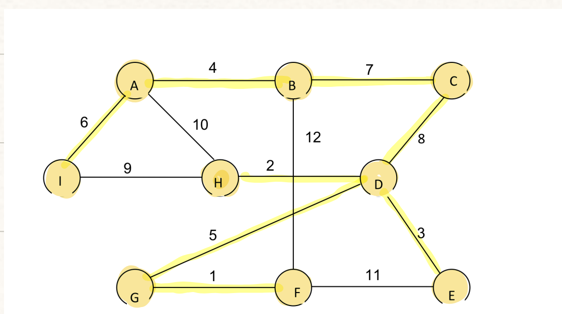
Union(B, C)



- נבדוק את CD

$A = \{GF, HD, DE, AB, GD, IA, BC, CD\}$

Union(C, D)



כעת קיבלנו: עץ פורש מינימלי

ונפסיק האלגוריתם כי כל פעם

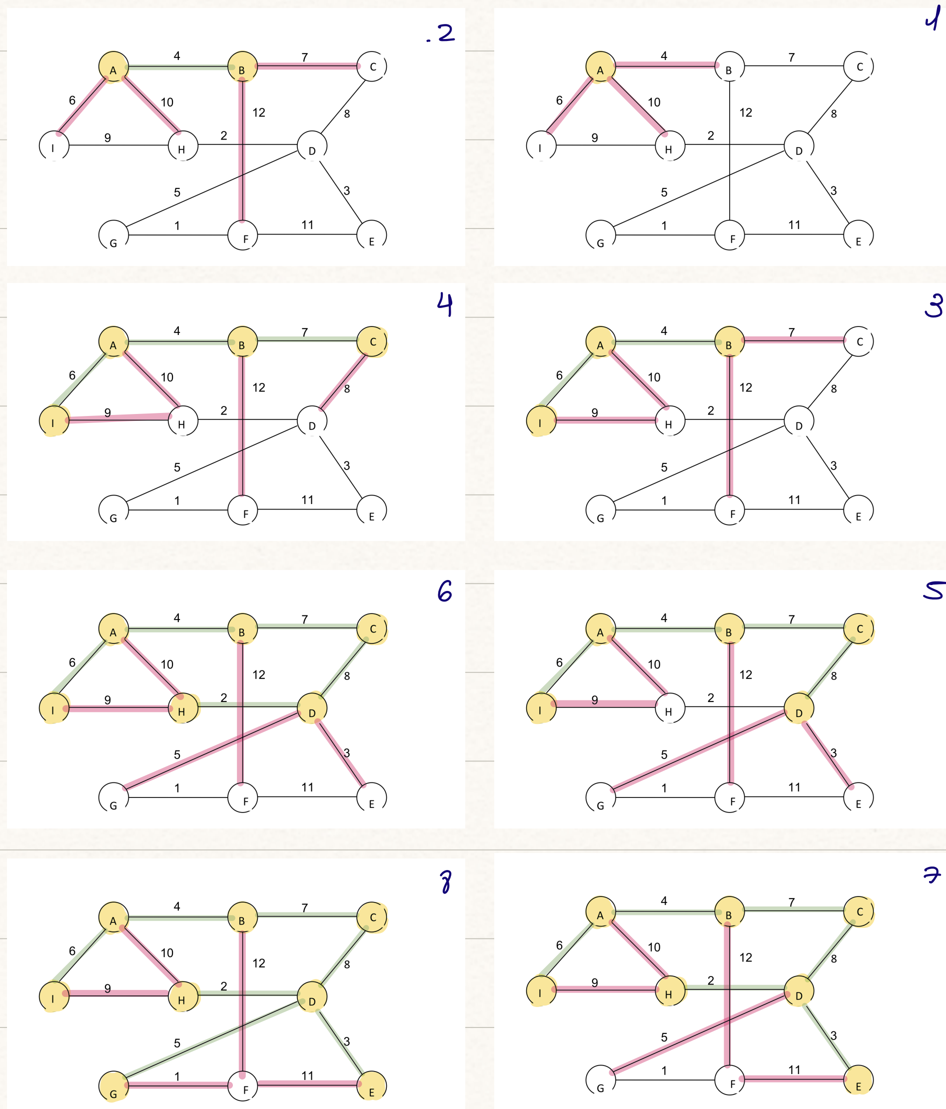
שנבדוק האם שני קודקודים

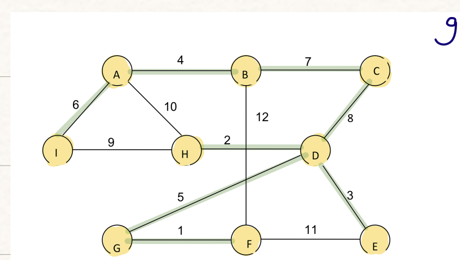
בקבוצה שונה נקבל תשובה שלילית

גם אלגוריתם של פרים

נסמן בצהוב קודקודים בקבוצה, בירוק קשתות בקבוצה

ובוורוד את הערימה הנוכחית שממנה נבחר את המינימלי.



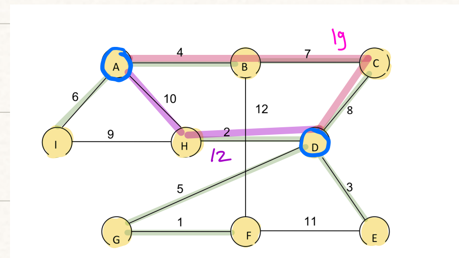


הנה עץ פורש מינימלי ע"י פרים :)

שאלה 2ב:

התלמיד השני צודק, זה לא מחייב ונראה דוגמא נגדית:

זה העץ הפורש המינימלי מהשאלה הקודמת:



נראה שבמסלול בין קודקוד A ל D

בעץ הפורש הוא $A \to B \to C \to D$

ומשקל המסלול הוא $4+7+8=19$ כאשר המסלול המינימלי בגרף המקורי הוא $A \to H \to D$ שמשקלו 12, אך עם הצלע H העץ הפורש לא היה מינימלי ולכן לא בחרנו בה.

שאלה 3ב:

מתבקש עץ פורש שמינימלי מבחינת כמות קשתות $\Rightarrow |V|-1$ ומקסימלי מבחינת המשקלים עליהם.

- נשתמש באלגוריתם של פרים עם ערימת מקסימום במקום ערימת מינימום כך שבכל פעם נבחר את הקשת המקסימלית אשר תוביל בסופו של דבר לספנים עץ מקסימלי ומספר הקשתות והוא מינימלי $\rightarrow$ כפי שהוכח בפרים.

זמן הריצה וגודל הזיכרון יהיה זהה לזה של פרים:

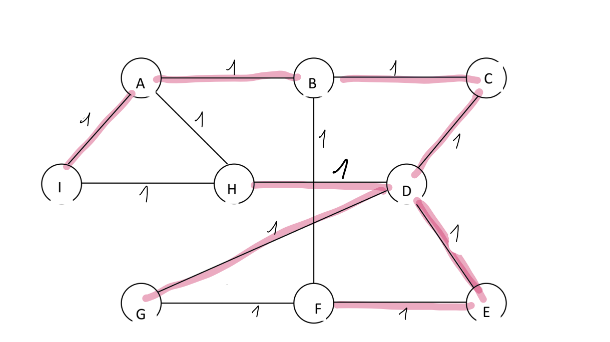
זמן ריצה - $O(|E|\log|V|)$

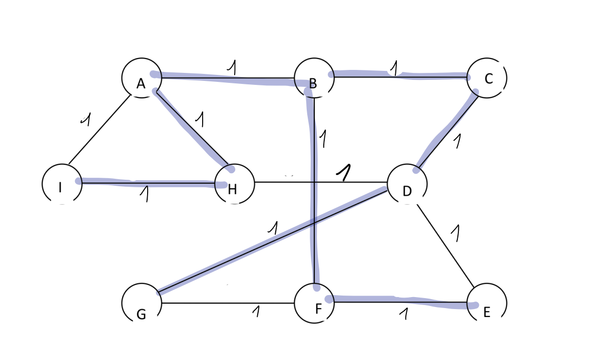
גודל זיכרון - כגודל הערימה (מערך) שבמקסימום שווה למספר הקודקודים - V $O(V)$

הוכחת נכונות: כמו אלגוריתם פרים שבכל פעם מוציא את המינימום מהערימה וכך סכום הערכים המינימלים יוצר סכום מינימלי וכך סכום הערכים המקסימלים יוצר סכום מקסימלי (מאותה קבוצת ערכים)

שאלה 4:

א. לא נכון, נפריך ע"י דוגמא.





הנה: גרף קשיר ולא מכוון והנה דוגמא לשני עצים פורשים מינימלים.

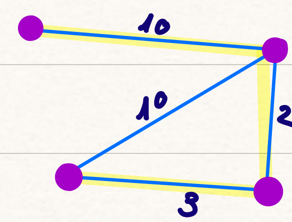
ב. נתון לנו גם $G(V,E)$ קשיר, לא מכוון בלי משקלות שונים לכל צלע e.

נניח שקיימים שני עצים T_1 T_2 שונים שנוצרו ע"י האלגוריתם (הגדרה נכונה בהרצאה)

```
Generic-MST(G=(V,E))
    A= Ø;
    while (A is not a spanning tree of G) do
            choose a safe edge e=(u,v)∈E
            A=A∪{e}
    return A
```

מפני ששני העצים שונים אז כמובן שבנקודה מסויימת באלגוריתם
כאשר נמצא צלע קלה ביותר שמחברת בין הצמודים בחתך
נבחר צלעות שונות עבור T_1 ו T_2 נניח ש $e_2 \in E_2$, $e_1 \in E_1$
אך זה סותר להגדרה של צלע קלה ביותר אשר קיימת צלע
יחידה כזו כאשר כל המשקלות בגרף שונים.
מסקנה: לכל גרף קשיר לא מכוון עם משקלות שונים קיים עפמ יחיד!

ג. לא נכון, זה שהקשתות במשקל שווה לא אומר שהן
המינימליות, נראה ע"י דוגמא.
במקרה הזה יש עץ פורש מינימלי יחיד!



שאלה ז:

א. $G(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון
גרף קשיר => יש מסלול מכל קודקוד לכל קודקוד
על מנת שיהיה עץ פורש צריך שלא יהיו בו מעגלים.
נעבור על כל מעגל בגרף ו"נפרק" אותו כך שהגרף
עדיין יהיה קשיר ללא המעגלים. וכך נוכל לבנות עץ פורש
מכל גרף קשיר.

ג. כן, העץ T ישאר עץ פורש מינימלי גם כאשר $w'(e)=w(e)+a$.

מפני שמספר הצלעות יישאר קבוע $V-1$ אז לסכום הצלעות של העץ יתווסף $a(V-1)$.

כמו כן, אם $x_1 \ge x_2$

אז $x_1+a \ge x_2+a$

כך שהעץ לא השתנה.

ד. כן, העץ T ישאר עץ פורש מינימלי גם כאשר $w'(e)=w(e)\cdot a$ מפני ש a קבוע חיובי

אם $x_1 \ge x_2$

אז $ax_1 \ge ax_2$

היחס נשאר זהה. והסכום הכולל יוכפל ב a.

שאלה 6: $G(V,E)$ גרף קשיר לא מכוון דו המשקולות הם ערכים שלמים בטווח $[1,|V|]$, כאשר ישנם ערכים ניתן להשתמש במיון מניה ואלגוריתם קרוסקל

זמן המיון $\rightarrow O(|E|+|V|)$

שאר האלגוריתם $\rightarrow O((|E|+|V|)\alpha(|E|,|V|))$

סה"כ זמן הריצה: $O((|E|+|V|)\alpha(|E|,|V|))$