בס"ד, חשוון תשע"ט מגיש: יוחנן חאיק

<u>תרגיל מס' 7 בניתוח אלג' - רדוקציות ובעיות שלמות ב- NP</u>

1. בעיית האיזומורפיזם לתת גרף מוגדרת באופן הבא:
קלט: שני גרפים: G1 ו- G2. האם G1 איזומורופי לתת-גרף G3 של G2?
כאשר הגרפים $G3 = (V3,E3)$ ו- $G1 = (V1,E1)$ נקראים איזומורפיים (מסומנים $G3 \cong G1$) אם קיים מיפוי חח"ע ועל $\Pi: V1 \longrightarrow V3$ כך ש- $(u,v) \in E1$ אם ורק אם $(\Pi(u), \Pi(v)) \in E3$.
א. הוכיחו שהבעיה שייכת ל-NP
ב. הוכיחו שהבעיה היא NPC. רמז: בנה את הרדוקציה המתאימה מבעיית הקליק לבעיה הנדונה.

א. עבור האימות נדרוש ש $x = (G_1,G_2)$. $y = (G_3)$.
אלגוריתם האימות יעבור באופן הבא:
<u>1. בדיקה ש- $G_3 \subseteq G_2$.</u>
בדיקה כי $G_3(|V|) \le G_2(|V|)$
מעבר על מטריצת הסמיכויות של שני הגרפים, ובדיקה עבור כל $G_1(u, v) = G_2(u,v)$ (זמן ריצה $O(n^2)$
<u>2. בדיקה כי- $G_1 = G_3$ (איזומורפי)</u>
בדיקה כי $G_3(|V|) = G_1(|V|)$
בדיקה עבור שתי מטריצות הסמיכויות שבכל הסידור תואם –
(סכימה על כל $G_1(u,v)$ XOR $G_3(u,v) = 0$. אם יהיו שני ערכים שונים, נקבל תוצאה שונה מ-0)
זמן ריצה $O(2|V||E|)$

ב. נגדיר רדוקציה פולינומית $\text{CLIQUE} \le_p \text{ISO-GRAPH}$.
עבור כל מופע של בעיית הקליק, קיים לנו $G' \subseteq G$ שידוע לנו כי הוא מקיים את תנאי הקליקה.
נגדיר את הרדוקציה באופן הבא –
$G_2 = G$
$G_1, G_3 = G'$
מאחר ואנחנו משתמשים ב-G', ברור לנו כי הוא תת גרף של G.
כמו כן, אנחנו מגדירים את G_1, G_3, להיות שווים, ולפי הגדרתם מוכלים ב- $G \setminus G_2$.

<u>הוכחת נכונות</u>
כיוון ראשון.
עבור כל $w \in \text{CLIQUE}$, המכיל גרף G, ותת גרף $G' \subseteq G$, אם נשתמש באותו תת-גרף בעבור G_1, G_3, ברור לנו כי הם עצמם יהיו איזומורפים אחד לשני, ולו מהסיבה שהם בפשטות אותו גרף.
כמו כן, אנחנו יודעים כי $G' (G_1, G_3) \subseteq G (G_2)$, ולכן מתקיים.
כיוון שני.
עבור כל מופע של בעיית האיזומורפיזם בה $G_1 \subseteq G_2$, כאשר G_1 הוא גם קליקה, ברור לנו שגם G_2 חייב להיות קליקה, מאחר והם איזומורפים אחד של השני, כך שנוכל להחזיר אותם בחזרה לבעיית הקליקה על ידי שנאחר אותם להיות G', ואת G_2 נחזיר להיות G וכל התנאים יתקיימו במופע של קליק.
<u>מש"ל.</u>

2. נתונה הבעיה האלגוריתמית הבאה:
נתון גרף G(V,E) ונתון קבוע K. האם קיים בתוך הגרף G מעגל פשוט (שאינו מכיל תתי מעגלים) בגודל K בדיוק.
א. הוכיחו שהבעיה שייכת ל-NP.
ב. הראו שהבעיה קשה ב-NP באמצעות רדוקציה מבעיית המעגל ההמילטוני.
ג. נתונה הבעיה הבאה: נתון גרף G(V,E). האם קיים בתוך הגרף G מעגל כלשהו. נמקו לאן שייכת בעיה זו והוכיחו. הסבירו במה היא שונה מהבעיה שהוגדרה בתחילת השאלה?

א. עבור כל מופע של הבעיה $x(G, K) \in$ PLAIN-CIRCLE נדרוש מילת אימות y שתהיה רצף הקדקודים המכיל את המעגל הנתון.
אלגוריתם אימות:
1. בדיקה שמספר הקדקודים הנתונים ב-y שווה בדיוק ל-k. אחרת - False
2. בדיקה שהרצף y לא חוזר פעמיים לאותו קדקוד אחרת - False
3. בדיקה שעבור כל צמד קדקודים u,v קיימת קשת $(u,v) \in G(E)$, על פי הרצף הנתון, וכן שבין קדקוד ההתחלה לסוף קיימת קשת שתסגור את המעגל.
אם מתקיים החזר True
אחרת False

הוכחת זמן ריצה:
1. בדיקת מספר הקדקודים $O(|V|)$ (המקסימום הוא כאשר יש מעגל שמכיל את כל הקדקודים ואותו אנחנו מחפשים.
2. $O(|V|^2)$ – במקרה של מספר קדקודים מקסימלי, עלינו לבדוק עבור כל קדקוד שאינו מופיע בשאר הרצף.
3. $O(k+1)$ מעבר על כל זוג קדקודים ובדיקה במטריצת סמיכויות $O(1)$.
ומאחר ויש לנו אלגוריתם אימות הרץ בזמן פולינומי, $PC \in NP$.

ב. עבור כל מופע של מעגל המילטוני, נתון לנו גרף G, ותת גרף G' המהווה מעגל המילטוני העובר בכל הקדקודים פעם אחת בלבד (חוץ מבנקודת המוצא).
נגדיר רדוקציה $PC \leq_p HAM$ באופן הבא-
את G נשאיר כמו שהוא, כאשר את k נגדיר $k = |V|$, מאחר ואנחנו יודעים שיש לנו מעגל המילטוני העובר בכל הקדקודים, נגדיר אותו להיות ה-k. (זמן הבנייה יהיה פשוט העתקה של קלט המופע)

הוכחת נכונות:
כיוון ראשון -
עבור כל $w \in HAM$ נתון לנו כי הוא מכיל מעגל המילטוני, שהוא בוודאי מעגל פשוט, ועומד תחת הגבלת ה-k להיות מספר הקדקודים של הגרף.
כיוון שני-
עבור כל $f(w) \in PC$, יש לנו מעגל פשוט בגודל $k = |V|$, כך שהוא בוודאי גם כן מעגל המילטוני בגרף G.

ג. הבעיה שייכת לNPC.
שייכות לNP ניתן להוכיח כמו בסעיף הקודם.
הרדוקציה תהיה מהמעגל הפשוט, מאחר וגם אם יש מעגל שהוא אינו פשוט, הוא מכיל בתוכו תת-מעגל שהוא פשוט (בעיית מעגל פשוט הוא למעשה מקרה פרטי של מעגל בגרף)
הוא שונה מהבעיה הקודמת, מאחר ובאימות יכולים להיות לנו קדקודים שחוזרים על עצמם ברצף האימות.

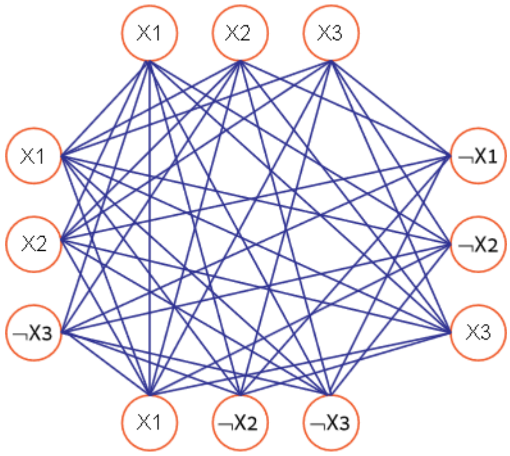
3. בהינתן נוסחת ה- 3-CNF-SAT הבאה:

$$\phi = (X_1 \vee X_2 \vee \neg X3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee \neg X3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X3) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X3)$$

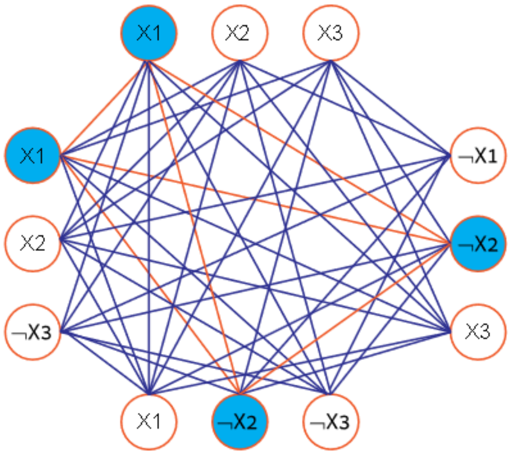
בנה את הגרף המתאים עפ"י השיטה שנלמדה בהרצאה ו/או בפרק 36 בספר

האם אתה מוצא קליקה המספקת את הגרף ולכן את הנוסחה הנ"ל?

אם יש פתרון ציינו מהו (מהם ערכי ה- Xi השונים). אם אין פתרון, הסבירו מדוע.



אם נעשה השמה של $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ נוכל לספק פה קליקה.



4. נתונה הבעיה האלגוריתמית הבאה:

נתונה קבוצת משימות T. לכל משימה i יש מספר שעות ti שנדרש כדי לבצע אותה. (לדוגמא, אם t1=0.5, יש צורך בחצי שעה כדי לבצע את משימה 1).

בנוסף נתונה קבוצה של מכונות. כל מכונה יכולה לבצע את כל סוגי המשימות, וכל המכונות מתחילות לפעול באותה השעה.

בנוסף נתון קבוע K וקבוע N.

המטרה: לבדוק האם קיים שיבוץ של משימות ל-N מכונות או פחות, כך שכל משימה משובצת במכונה אחת בדיוק, וכל מכונה תסיים את כל המשימות ששובצו אליה תוך K שעות.

א. הציעו במילים אלגוריתם נאיבי-אקספוננציאלי לפתרון הבעיה.

ב. הראו שהבעיה הנתונה שייכת ל-NP.

ג. הראו שהבעיה הנתונה היא NPC באמצעות רדוקציה מבעיית Bin packing.

א. עבור t משימות, נוכל פשוט לסדר אותם בסדר מסוים, ולראות האם הם עומדים בתנאי של NK שעות. במובן שזמן הריצה של זה יהיה O(N!).

ב. עבור כל מופע של בעיה $x(T,N,K)$, נוכל לדרוש קלט אימות T', שיכיל את הרצף הנכון של סידור הפעולות. אלגוריתם האימות יהיה כדלקמן:
1. נבדוק שרצף האימות מכיל את כל הפעילויות, ורק פעם אחת $O(n^2)$
2. נעבור על הרצף, ונתחיל למלא את המכונות, כאשר נגדיר את $n' = 1$ בפעם הראשונה שנעבוד על מכונה. אם נחרוג מהזמן K המוגדר לנו נוסיף 1 למספר המכונות ונתחיל מחדש $O(n)$.
2.1. אם $n' > N$ נחזיר False
3. נחזיר True.

זמן האימות הוא מוגבל על ידי $O(n^2)$.

הוכחנו כי $MISSION \in NP$

ג. נראה כי קיימת רדוקציה $MISSION \leq_p BIN\text{-}PACKING$
עבור כל מופע של $BIN(A,S,k)$, נוכל להעביר את המופע לאחד של בעיית סידור המשימות למכונות באופן הבא -
K הקבוע של מספר שעות למכונה יוגדר 1. כתבולה של כל אריזה בBP.
רשימות הפריטים A תעבור להיות רשימת משימות, כאשר משך כל משימה יהיה הגודל s_i השייך אליה.
N יוגדר להיות k המיכלים הדרושים לביצוע המשימה.

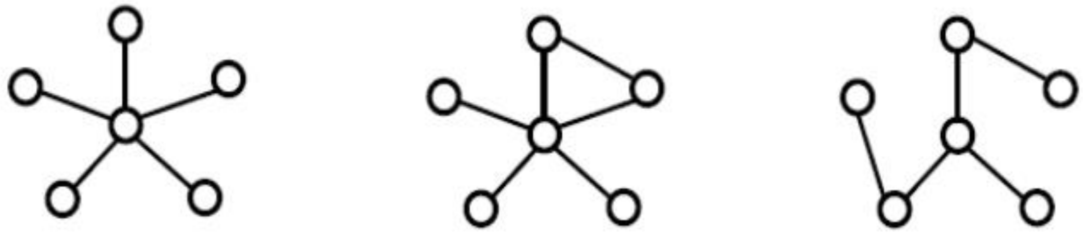
זמן ביצוע הרדוקציה כמובן יהיה תחת זמן פולינומי.

הוכחת נכונות $w \in BIN \leftrightarrow f(w) MISSIONS$
כיוון ראשון
כל מופע של $x \in BIN$, נותן לנו N פריטים אותם ניתן להכניס ל-k מיכלים בגודל 1. כלומר לאחר הרדוקציה יהיה לנו n משימות שונות שניתן לבצע באותו k מכונות כאשר $K=1$.
כיוון שני
נתונה לנו מילה $f(x) \in MISSION$. כלומר יש פה בעיית שיבוץ משימות כאשר ה$K=1$, אם נפרק את הרדוקציה בחזרה, נוכל לקבל את בעית סידור המיכלים שיתקיימו בדיוק באותו אופן.

ומשילוב ההוכחה הזאת וסעיף ב, ניתן להוכיח כי $MISSION \in NPC$

5. נתונה ההגדרה הבאה: גרף לא מכוון $G=(V,E)$ הוא כוכב, אם קיים $v\in V$ כך ש- $E=\{(v,u) \mid u \in V - \{v\}\}$. נאמר שגודל הכוכב הוא $|V|$.
(כלומר, כוכב בגודל $|V|$ משמעותו גרף שמכיל $|V|$ קודקודים, כאשר אחד מהם הוא מרכז הכוכב, וקיימות אך ורק קשתות שמחברות את מרכז הכוכב לכל אחד מהקודקודים האחרים).

לדוגמא, הגרף הימני והגרף האמצעי הם <u>לא</u> כוכבים, והגרף השמאלי הוא כוכב (בגודל 6).



נגדיר את הבעיה STAR באופן הבא:
קלט: גרף $G(V,E)$ לא מכוון, קבוע K.
פלט: האם קיימת בגרף G תת קבוצה של קודקודים, כך שאם נבנה גרף שיהיה מורכב רק מקודקודים אלו ומהקשתות ב-E שמחברות בין קודקודים אלו, נקבל כוכב בגודל K.
א. הגדירו את הבעיה STAR כשפה.
ב. הוכיחו שהבעיה שייכת ל-NP.
ג. הוכיחו שהבעיה היא NPC באמצעות רדוקציה מבעיית הקבוצה הבלתי תלויה.
ד. הוכיחו שאם $K=|V|$, הבעיה פולינומית.

א. $STAR = \{ G'(V',E') \subseteq G(V,E) \mid \exists\, u \in V' ,\forall\, (v \neq u) \in V' \rightarrow (u,v) \in E',\ |E| = |V'|-1\}$
ב. עבור אלגורית אימות לבעיה זו נדרוש שמילת האימות תהיה רק הקדקוד u במרכז הכוכב.
סדר הפעולות יהיה כדלקמן:
1. בדיקה ש $|E'| = |V'|-1$ אחרת החזר False – זמן ריצה $O(1)$
2. בדיקה כי כל הקדקודים מחוברים ל-u אחרת החזר False – זמן ריצה $O(|E|)$
שתי הבדיקות האלה גם יוודאו שהכל מחובר לקדקוד המרכז, ומאחר שמספר הקשתות הוא מדויק $|V|-1$ אז זה גם מוריד את האופציה של מעגלים בגרף – אין קשתות מחוץ לכוכב.
הוכחנו את נכונות הגרף ועשינו זאת תחת זמן ליניארי, כלומר $STAR \in NP$
ג. לא למדנו את בעית הקבוצה הבלתי תלויה...
ד. מאחר ועל פי מה שהגדרנו, ניתן לאמת את ה"כוכבות" שלו תחת הזמן הליניארי אם לא מדובר בתת גרף, אלא בכל הגרף הבעיה תהיה פולינומית

בהצלחה רבה!!!