תוכן עניינים

ניתוח אלגוריתמים וסיבוכיות

נושא הקורס הוא ניתוח אלגוריתמים. אנו נראה במהלך הקורס קבוצות שונות של אלגוריתמים מסוגים שונים. מה שיעניין אותנו יהיו האלגוריתמים עצמם ולא מבני הנתונים בהם אנחנו משתמשים. הרעיון של שימוש באלגוריתמים הוא למצוא פיתרון אופטימאלי לבעיה נתונה. הבעיות שיוצגו לנו הם בעיקר מהתחום הבדיד, להם אנחנו נצטרך למצוא יעד – מקימום או מינימום. ניתקל במשך הקורס בקבוצות של אלגוריתמים שכל אחד בא לפתור טווח מסוים של בעיות בדרך מסוימת

אלגוריתמים חמדניים Greedy Algorithm

הגדרה: "אלגוריתם שמקבל החלטות לפי נתונים קיימים, ללא תכנון קדימה".

אלגוריתם זה לא בוחן את ההשפעות על "מה יקרה אם", אלא מוצא איזה דרך שנראית מתאימה ועובד עליה עד הסוף. במקרים המתאימים, אכן ניתן להוכיח שמדובר על אלגוריתם שהוא אופטימלי. כמובן, שאלגוריתם זה לא פותר **כל** בעיה – אם נרצה לטפס לראש ההר ונראה דרך שהיא ישרה, אולי זה יהיה יותר נוח, אבל כנראה שלא נגיע כך לפסגה.

נראה מספר דוגמאות שיקיימו את האלגוריתם הזה -

עלינו לסדר תיק. לתיק יש תכולה של משקל מסוים W אותו אנחנו נדרשים למלא, ועלינו להחליט מבין כל החפצים המונחים לפנינו, אילו חפצים ייכנסו על מנת לקחת איתנו את המקסימום האפשרי. דרך הפתרון לבעיה זו, הצעה פשוטה היא, להתחיל בלהכניס את החפצים הקטנים יותר לתוך התיק, וכך גם אם לא נמלא את התיק עד סופו, נדע לפחות שהכנסנו כמה שיותר פריטים.

הפתרון הזה נראה יחסית פשוט, אבל יש לנו מספר שאלות עליו:

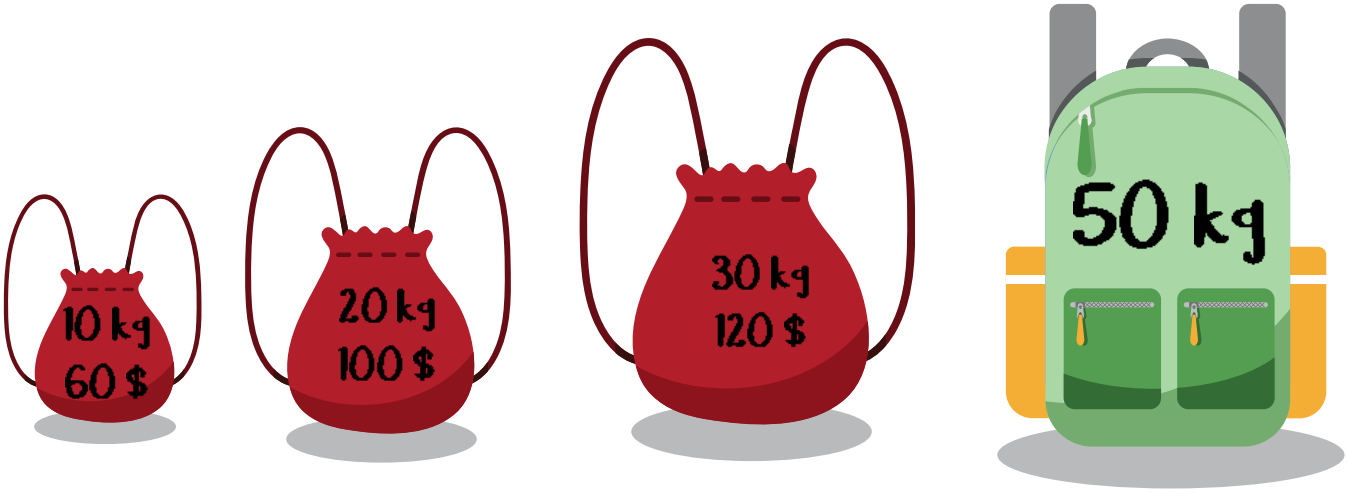
- מי אמר שהפתרון הזה הוא באמת הטוב ביותר?
- מי יכול להבטיח לנו שהפתרון הזה יהיה יעיל גם בפעם הבאה שננסה אותו?

ההצעה שאנחנו הבאנו (הכנסה של החפץ הקל יותר ראשון) נקרא "פתרון חמדני"- פתרנו את הבעיה באופן המהיר ביותר אך ללא שום התחשבות באפשרות שיש פתרון אחר יעיל יותר. בהמשך נראה שעבור לא מעט בעיות אותן ניתן לפתור באופן חמדני שכזה, אם נשנה את התנאים ולו במעט, לא נוכל למצוא את הפתרון הזה והוא לא יעבוד. באופן כללי ניתן לומר שהתהליך אותו אנחנו עוברים מורכב משני שלבים: 1. ביצוע הפתרון החמדני. 2. קבלה של תת-מבנה אופטימלי – באופן שדומה קצת לאינדוקציה, רק הפוך. אנחנו ביצענו את הפיתרון החמדני, וקיבלנו עוד חלק קטן יותר שגם עליו אנחנו יכולים לבצע פתרון חמדני דומה.

עכשיו ניקח את הבעיה שהצגנו קודם, שלב אחד קדימה. כעת במקום שיהיה לנו רק שדה של משקל של כל פריט, יהיה לנו גם חשיבות. בסולם מסוים האם יש לנו דרך למצוא איזה פתרון אופטימלי על פי משקל / חשיבות / שילוב של שניהם?

אם נרצה למשל, לקחת את סכום החשיבויות הגבוה ביותר, יכול להיות שאם נלך בשיטה שרצינו לפי המשקל, הפתרון לא יקיים בכלל את הדרוש, מאחר והוא לא יעמוד בתנאי הכללי.

ניתן להשתמש עבור זה גם בפתרון נאיבי – חישוב של "חשיבות סגולית" של כל פריט בשקלול של משקל ומספר חשיבות, והציון שייצא לנו יוכל כעת להוות איזה מדד להכנסה נכונה. בשביל להבין כיצד זה יעבוד בצורה נכונה, נציג את הבעיה בצורתה המוכרת והרשמית יותר -



בעיית תרמיל הגב

גנב נכנס לחנות עם שק שמוגבל במשקל מסוים. לפניו בחנות מונחים פריטים אותם הוא מעוניין לגנוב. עבור כל פריט יש משקל ומחיר, ומתוך כל פריט ניתן לקחת גם חלקים ממנו ולא חייבים את כולו בשלמותו.

<u>המטרה:</u> למלא את השק כך שערך הפריטים שהגנב לוקח יהיה מקסימלי[1].

קל לראות, שניתן לחשב באופן די פשוט, ולהגיע למסקנה שנכניס קודם את השק של 10 ק"ג ולאחר מכן את ה20, ולבסוף עוד 20 ק"ג מהשק הנותר. הפתרון הזה נעשה בצורה חמדנית על פי הנאים שהגדרנו לעיל – ראשית, הבאנו פתרון חמדני – הכנסנו את מה ששווה הכי הרבה, ואחר כך נותרנו עם תת-מבנה אופטימלי דומה – צריך להכניס 40 ק"ג לתוך התיק.

ושוב נשאלת השאלה – כיצד ניתן להוכיח שזה באמת פיתרון אופטימלי, ואין שום פיתרון שיהיה יותר טוב? (בהנחה שיכול להיות שנמצא פתרונות שהם שווים באיכותם, אך לא כאלה טובים יותר)

דבר נוסף שכדאי לשים לב – בשונה מבעיות אחרות שנתקלנו בהם, אין לנו אפשרו להציג את כל הקומבינציות האפשריות, מאחר ואנחנו יכולים להמשיך ולחלק את האפשרויות ללא שום עצירה, מה שיוצר לנו מרחב הפתרונות אינסופי.

נוכיח את נכונות האלגוריתם בצורה פורמלית:

נתונים n חומרים כך שלחומר ה-i, P_i יש משקל W_i ומחיר V_i ולכן מחיר סגולי C_i (ממויינים לפי המחיר הסגולי, כלומר החומר שעברו i=1 הוא בעל המחיר הסגולי הגבוה ביותר).
הפתרון החמדני נותן לנו רווח כולל V.

1. <u>תכונת הבחירה החמדנית</u>
   - נניח (בשלילה) שקיים חומר ששימוש דווקא בו יביא לנו פיתרון אופטימלי V_1-
   - אם החומר P_1 קיים גם בפיתרון הזה, אז $V = V_1$ וזו סתירה להנחת השלילה.

[1] כמובן שמאחר וניתן לקחת גם חלקים מהסחורה, השק בסופו של דבר צריך להיות מלא.

- אחרת: ניקח מהחומר P_1 כמות כלשהי שאינה גדולה מ- W_1 ונחליף אותה עם כמות חומר זהה מהחומר P_1. בהכרח קיבלנו פתרון עם רווח גדול יותר – סתירה. (במילים פשוטות יותר: הוצאת החומר בעל הערך הגבוה ביותר בהכרח מביא לנו אופציה שהיא פחות טובה – בחירה בחומר שהמחיר הסגולי שלו נמוך יותר)

2. <u>תת המבנה האופטימלי:</u>

לאחר שכבר בחרנו את החומר P_1, נשארנו עם תת-בעיה, עלינו להוכיח שגם אותה נוכל לפתור באותו אופן ולקבל פיתרון אופטימאלי.

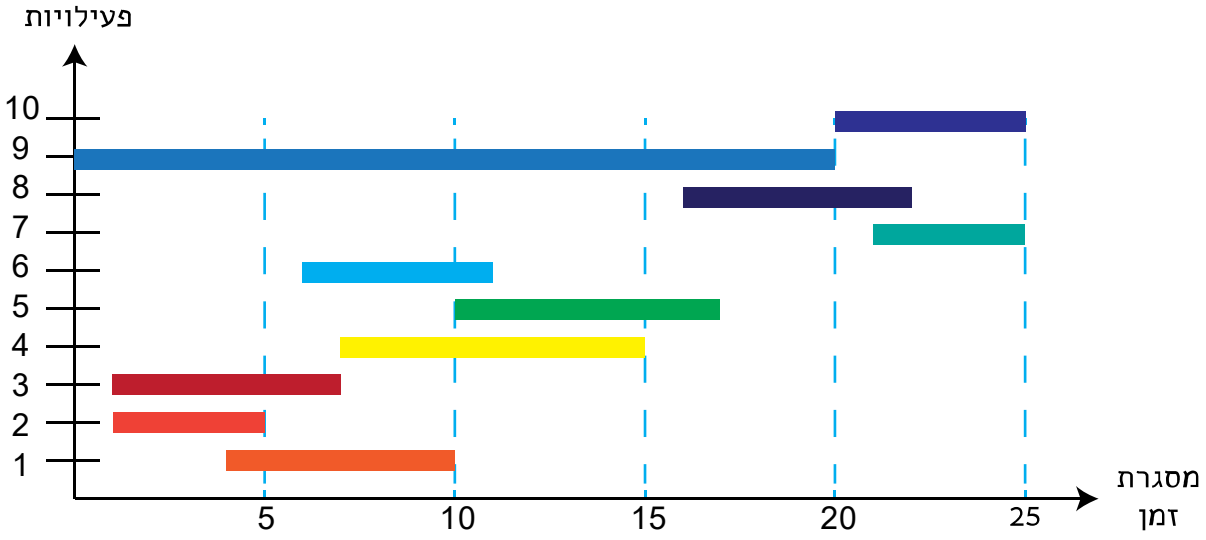
נניח שהפתרון לתת הבעיה ייתן רווח V

נניח (בשלילה) שקיים פיתרון אחר לתת הבעיה, שייתן רווח V'>V

לכן נצרף לפתרון הזה את P_1 ונקבל סה"כ פתרון טוב יותר עבור הבעיה המקורית.

(ובעברית: אם נמצא פתרון לתת הבעיה שהוא אופטימלי ושונה ממה שכבר הצענו, אז מעצם ההגדרה נוכל להחיל את הפתרון גם על הבעיה בכללות, והפתרון שהצענו הוא לא אופטימלי, אבל כבר הוכחנו שהוא כן אופטימלי ולכן יש פה סתירה).

בעיית בחירת הפעילויות



בעיה מוכרת וידועה – צריך לשבץ קורסים בתוך כיתה. עבור כל קורס יש את טווח הזמנים בו הוא צריך להיות פעיל. אנחנו רוצים למצוא את הדרך האופטימלית לשיבוץ הקורסים בכיתות. מן הסתם, אסור שתהיינה התנגשות בין שני שיעורים, ואנחנו מחפשים את הפתרון שייתן את התוצאה הטובה ביותר.

קודם כל, עלינו לוודא מה דרוש מאתנו על מנת שייחשב סידור אופטימלי - האם אנחנו מחפשים ניצולת מקסימלית של הכיתה, חוסר בטלה מינימלי (דבר שפה פחות משמעותי אך בתחומים אחרים משפיע יותר), או כל הגדרה אחרת שתבוא בשאלה. במקרה זה אנחנו מדברים על מספר פעילויות מקסימלי. כאשר אין הבדל מבחינת חשיבות בין שיעור של יחידת זמן אחת לבין 10 יחידות זמן.

הגדרה רשמית של השאלה תיראה באופן הבא:

נתונה קבוצה של n פעילויות המבקשות להשתמש באותו משאב אשר יכול לשרת רק פעילות אחת בו-זמנית. לכל פעילות יש זמן התחלה (s_i) וזמן סיום (f_i) באשר מתקיים $f_i>s_i$. כאשר $(T) \geq f_i \geq s_i \geq 0$ ונתון זמן מקסימלי לביצוע כל הפעולות (T), וכל הפעילויות מתבצעות בזמן החצי-פתוח [0,t).

בפשטות – כל עוד שתי פעילויות לא מתנגשות אחת עם השנייה, הכל בסדר. כמובן שפעילות יכולה להסתיים באותה שעה ה מתחילה פעילות חדשה.

בנוסף נגדיר את S = {1,2....,n} בקבוצת הפעילויות הקיימת, וכל תת קבוצה אפשרית תסומן באות גדולה מתחילת הABC.

השאיפה שלנו היא למצוא אלגוריתם / דרך פעולה שיביא לנו את מקסימום הפעילויות תחת תת הזמן האפשרי. נבחן מספר אפשרויות –

<u>משך שיעור מינימלי</u> – A = {7,6}

כדאי לשים לב, פה קודם כל הגדרנו את 7 שהוא הכי קצר, ורק לאחר מכן את 6 שהוא הקצר ביותר מבין אלו שנשארו לא בחפיפה.

<u>משך שיעור מקסימלי</u> – A = {9,10}

מתחילים עם שיעור באורך 20, ואז כבר לא ממש נשאר אופציות.

<u>זמן תחילת שיעור</u> – A = {9,10}

השיעור הראשון הוא 0-20 מה שתופס לנו כמעט את כל מרווח הזמן.

<u>זמן סיום השיעור</u> - A = {2,6,8}, B = {3, 4, 8} C = {1, 5, 7}

ברור לנו שזהו אלגוריתם הרבה יותר אופטימלי מכל מה שהצענו עד עכשיו. בדרך כלל אנחנו עלולים לחשב שהפתרון החמדני הוא דווקא האינטואיטיבי, אך כאן זה בהחלט לא אינטואיטיבי.

אנחנו יכולים גם להוכיח שהאלגוריתם הזה עובד – איך ניתן להוכיח זאת? ניתן לראות ששום פיתרון אחר מבין כל האלגוריתמים שהצענו לא הביא לתוצאה מוצלחת יותר, אך כמובן ש"לא ראיתי אינה ראיה", ואנחנו מחפשים דרך פורמלית יותר.

דרך הפתרון המלא לתכנון חמדני כולל שלושה שלבים:

1. מגדירים אלגוריתם שיקול חמדני ובודקים שהוא מוביל לפתרון אופטימלי עבור מספר דוגמאות שונות. אין צורך לבדוק את כל הקומבינציות האפשריות, אלא רק לראות שהרעיון נשמר.
2. (בסיס האינדוקציה החמדנית) מוכיחים שקיים פתרון אופטימלי (לפחות אחד) שמקיים את הפתרון החמדני (לפחות בפעם הראשונה).
3. (שלב מעבר האינדוקציה) מוודאים שלבעיה יש תת מבנה אופטימלי – מהפתרון שמקיים את (2) נגזר פתרון לתת הבעיה – שהוא אופטימלי לאותה תת-בעיה. אנחנו לוקחים את הקבוצה שהצענו

כפיתרון אופטימלי ומורידים את האיבר הראשון מתוכו (כולל כל הפעילויות המתנגשות איתו) ובודקים כעת עבור קבוצת הפעילויות הנותרת את הפתרון האופטימלי מתוך שארית הקבוצה A.

הוכחה:

ללא הגבלת הכלליות נניח שהפעילויות ממוינות לפי זמני סיום מוקדמים תחילה.

1. <u>טענה</u>: קיים פיתרון $A \subseteq S$ אופטימלי המקיים את השיקול החמדני. כלומר $1 \in A$
<u>הוכחה</u>: S סופית. לכן מספר הקבוצות $A \subseteq S$ סופי ולכן לבעיה קיים פתרון אופטימלי.
תהי A פתרון אופטימלי .
אם $1 \in A$ אז סיימנו.
אחרת, קיימת פעילות $i \neq 1$ כך ש $i \in A$ ובעלת זמן סיום הכי מוקדם שם.
אם $s_i \geq f_1$ אז פעילות 1 לא מתנגשת עם ן ולא עם שאר הפעילויות של A. לכן הקבוצה A כולל {1} מכילה פעילויות המתיישבות זו עם זו, ו- $|A \cup \{1\}| > |A|$ בסתירה לאופטימליות של A.
לכן בהכרח הם משולבים, ו A אופטימלית.
2. <u>טענה</u>: נגדיר 's, המכיל i שאינו 1 ומתיישב איתו (לא מתנגשים) – הגדרת תת בעיה מאותה סוג
תהי A' = A-1 באשר A היא מהטענה הנ"ל. אז A' אוטימאלית עבור S'.
<u>הוכחה</u> :(בשלילה) אם A' איננה אופטימלית עבור S' אז קיימת $B' \subseteq S'$ כך ש $|B'| > |A'|$. נגדיר B = B' ∪{1}. אזי B מכילה פעילויות המתיישבות זו עם זו שכן $B' \subseteq S'$ ו- S' מכילה רק פעילויות המתיישבות עם 1.
כעת $B \subseteq S$ ו- $|b| > |a|$ - סתירה.

נסתכל כעת על הקוד. נתון לנו מערך D באורך n. המכיל 3 שדות D.1[j] = Sj, D.2 [j] = Fj, D.3[j] = j, b[j] = 1

Greedy-Selector(D,n)

1. Sort D with respet to D.2
   with non-increasing ordr
2. Initialize array B of zero bits with length n
3. B[1]<-1
4. Last<-1
5. For j=2 to n do

   5.1 id D.1[j]>=D.2[last] then

   5.1.1 b[j]<-1

   5.1.2 last<-j

6. Initialize empty set A

7. for j =1 to n do

7.1.1 if b[j] ==1 then

7.1.1 A <- Au{D.3[j]}

8. return A

קבוצת שורות	זמן ריצה	הערות
1	Nlogn	מיון מיזוג או ערימה
2	N	
3	1	
4	1	
5	N	
6	1	
7	N	
8	1	
סה"כ	Nlog2n	

ניתוח ברמת הביטים – Nlogn זה מספר ההשוואות, אבל עלינו לבדוק כמה זמן זה יוצא גם ביחס לביטים

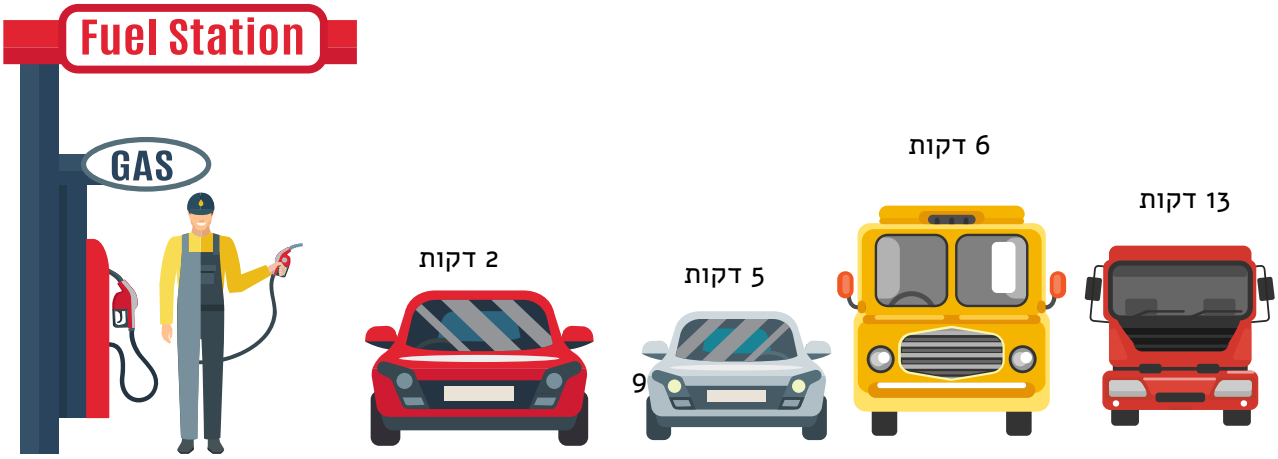
יהי M מקסימום של S1..Sn, F1...Fn, 1...n

גודל הייצוג של m בביטים log m = log (m+1) +1 $\lfloor \log(m) \rfloor$

קבוצת שורות	זמן ריצה	הערות
1	Nlogn*logm	הכפלה מספר ההשוואות בדרישה של כל השוואה
2	N	
3-4	Log(m)	
5	Nlog(m)+nlog(m)+n+nlog(m)	
6	1	
7	Nlog(m)+ n+ nlog(m)	
8	1	
סה"כ	Nlog(m)log(m)	

אלגוריתם נחשב יעיל כאשר גודל הקלט בביטים הוא פולונימיאלי ביחס לזמן הריצה

בעיית תזמון התדלוק



מספר רכבים עומדים בתחנת דלק, כאשר ניתן להכניס בכל פעם רק רכב אחד לתדלוק. כמובן שלכל רכב יש זמן תדלוק אחר.

<u>הבעיה:</u> כיצד ניתן למצוא את זמן התדלוק האופטימלי?

אנחנו שואפים שזמן ההמתנה הכולל יהיה מינימלי, ולכן גם פה אנחנו נלך על הSJF (Shortest Job First) שאנחנו מכירים וניתן לרכב שמתדלק הכי מהר להיות ראשון. האם זה באמת אופטימלי? כן. גם במקרה זה הפיתרון האינטואיטיבי הביא לו את התוצאה הטובה יותר, וגם נוכיח זאת פורמלית במבנה שלמדנו:

1. <u>תכונת הבחירה החמדנית:</u>
   יש להוכיח שאמנם קיים פתרון אופטימלי שבו הבחירה הראשונה היא החמדנית
   נניח בשלילה שקיים תזמון אופטימלי של זמני התדלוק, שבו המכונית הראשונה אינה זו עם זמן התדלוק המינימלי.
   אם נחליף את המכונית הראשונה עם הממונית שיש לה זמן תדלוק מינימלי, נקבל סך הכל זמן המתנה שאינו ארוך יותר.
   סתירה!
2. <u>תכונת תת המבנה האופטימלי:</u>
   יש להוכיח שבהינתן פתרון אופטימלי בעיה, אם נוותר על המכונית הראשונה (ונשאל את אותה בעיה בדיוק באופן חדש) נקבל פתרון אופטימלי לבעיה בלי המכונית הראשונה.

- נניח בשלילה שבהינתן תזמון אופטימלי למכוניות 1... n בפתרון של תזמון המכוניות 2...n אינו אופטימלי.
- אזי קיים פיתרון אחר שמשבץ את המכוניות 2....n באופן טוב יותר.
- נבחר את התזמון הבא:
  - נבחר את התזמון של מכוניתו1, ואחר כך את התזמון שלשר המכונית על פי האלגוריתם החדש (הטוב יותר, לכאורה) נקבל תזמון טוב יותר לקבוצת המכוניות 1...n
  - סתירה!

לו היה בנמצא אופציה כלשהי לסדר את כל המכוניות מלבד הראשונה בצורה אופטימלית, אזי ההוספה של אותו רכב (כמובן בהקשר של ההוספה שלו לכלל המערך של המכוניות האמורות לתדלק) אמור להיות עדיין אופטימלי, אבל יש פה סתירה.

תכנון דינאמי

התכנון הדינאמי הוא הנדבך הנוסף שאנחנו בונים על גבי התכנון החמדני. הבעיות שנתקלנו בהן עד עכשיו, דרשו מאיתנו למצוא איזה אלגוריתם שייתן לנו פתרון אופטימלי, ויעבוד בהמשך לאורך כל הדרך (תזכורת: היו לנו שתי דרישות: 1. הוכחת התכנון החמדני 2. הוכחת תת הבעיה האופטימלית). הבעיות שניתקל בהם כעת, הינם מסוג שתכנון שכזה לא יספק אותנו מאחר ולא יעמוד בשתי הדרישות הנ"ל.

הפתרון שנציע כאן, כשמו, הוא לפתור את הבעיות בצורה דינאמית – הווה אומר – לפתור את הבעיה הנוכחית בצורה אופטימלית, ואת הצעד הבא לחשב מחדש מה באמת יהיה הדרך הנכונה ביותר.

על מנת להדגיש – בתכנון החמדני, אנחנו מוצאים פתרון ורצים **רק** עליו עד לסוף הבעיה. בתכנון הדינאמי, אנחנו עוצרים **בכל** צעד ובודקים מה תהיה הפניה הנכונה להמשך.

בעיות שנדרשות לפיתרון מצורה דינאמית, הן למעשה בעיות רקורסיביות (גם החמדניות כאל, אך יש ביניהם הבדלים). כל פעם אנחנו מתמודדים עם בירה בין אפשרות אחת (או יותר) שתקיים לנו את הדרישות. הבעיה בלגשת לפיתרון בצורה רקורסיבית, היא זמן החישוב והמשאבים שזה ידרוש מאיתנו.

ניקח דוגמא פשוטה להבנת הבעיה – סדרת פיבונצ'י. אמרנו רקורסיה, אמרנו פיבונצ'י.

למקרה שמישהו הגיע לשלב הזה ועדיין לא יודע מה זו סדרת פיבונצ'י – רצף מספרים המתחילים מס וכל מספר מורכב מחיבור שני האיברים שלפניו.

עלינו למצוא את המספר השמיני בסדרה. כיצד נגיע אליו? נחבר את המספרים שש ושבע. איך נגיע אליהם? וכו' וכו'. מה שזה ייצור לנו זה שעבור הגעה לכל רכיב של מספר נרד עד לשורש הכי קטן ונרכיב את כל העץ. למשעה, נעשה את כל החישובים מספר פעמים - כל מספר שנרצה לקבל נרכיב את מרכיביו בלי קשר לזה שכבר עשינו את זה בעבר.

לעומת זאת, אם ניקח את מגדלי האנוי[2], אין לנו פתרונות חופפים – פתרון הבעיה מורכב מעשיית החלק הקטן יותר של הבעיה בצורה אחת ויחידה.

מסקנה: לא כל דבר רקורסיבי ייפתר על ידי פיתרון דינאמי.

יש לשים לב - הדרישה לתת מבנה אופטימלי היא זו שלא מתיישבת בתכנון הדינאמי, ולכן עלינו לבדוק מחדש עבור תת המבנה בכל פעם.

ארבעת השלבים לפתרון דינאמי הם:

1. אפיון המבנה של פתרון אופטימלי – שלב שהוא די דומה לפתרון החמדני.
2. הגדרה רקורסיבית של ערכו של פתרון אופטימלי – נוסחת נסיגה – הפתרון בדרך כלל יוצג לנו כאלגוריתם שמורכב מכל האופציות השונות אותם אנחנו יכולים לממש. הדרך הנוחה ביותר להראות את האופציות השונות תהיה נוסחת נסיגה.
3. חישוב ערכו של פתרון אופטימלי "מלמטה למעלה" – לצאת מסדר מעריכי לפולינומי. הבעיה העיקרית של נוסחת הנסיגה הרקורסיבית, היא מה שציינו כבר קודם – אנחנו צריכים לעשות המו

[2] https://he.wikipedia.org/wiki/מגדלי_האנוי (לא שבאמת צריך)

חישובים שמתבססים אחד על השני. השלב הזה נותן לנו לעשות כל חישוב רק פעם אחת, לרשום אותו בצד, ועל ידי זה לחשב את הצעדים הבאים על ידי גישה לתוצאה (O(1)) ולא חישוב מחדש שבוודאי ייקח יותר.

4. <u>בנית פתרון אופטימלי מתוך המידע שהושג</u> – לאחר שנקבל את התוצאה שהיא למעשה תביא לנו את הערך האופטימלי אליו אנחנו שואפים, נחשב את הדרך שתביא לנו את הפתרון (הווקטור שמרכיב את התוצאה האופטימלית)

הערה: ישנם מקרים, בהם ניתן לעבור לצורה פולינומיאלית (שלב 3) גם בלי להפוך את הבעיה מלמטה למעלה.

כפל סדרת מטריצות

כפל סדרת מטריצות, הינה הבעיה הראשונה איתה אנחנו מתמודדים ב"תכנות דינאמי". ניתן תזכורת קטנה כיצד הרעיון עובד – אנחנו רוצים להכפיל שתי מטריצות, נגדיר אותן כ A ו-B. כעת, על מנת שבכלל נוכל להתחיל את הכפל, אנחנו צריכים לוודא את התנאי המקדים – מספר השורות ב-A שווה למספר העמודות ב-B (או להיפך). אם תנאי זה לא יתקיים, אין לנו בכלל מה להתחיל.

אם אתם זוכרים ליניארית א', ברכותי! אתם יכולים לדלג להמשך תיאור הבעיה, כל השאר מוזמנים להתרענן.

איך מבצעים הכפלת מטריצות? מכפילים שורה בעמודה, שורה בעמודה (עם מבטא של רייסין זה הולך יותר טוב). מכפילים כל איבר מהשורה עם המקביל לו בעמודה השניה ומחברים את התוצאה.

דוגמא פשוטה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1*3\} + \{5*(-1)\} \\ \{2*3\} + \{(-4)*(-1)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

בצורה יותר כללית ניתן לומר, כי אם יש לנו שתי מטריצות שמוגדרות במימדים שונים A(p,q), B(q,r), אז נקבל מטריצה C(p,r).

עד כאן להכפלת מטריצה אחת, ועכשיו לבעיה האמתית שלשמה התכנסנו.

מה קורה אם יש שרשרת של מטריצות? קיבלנו רשימה של מטריצות שמשורשרות אחת אחרי השניה, ואנחנו רוצים להכפיל את כל הרשימה לכדי מטריצה אחת בלבד. כמובן נקודת המוצא היא, שהרשימות מסודרות באופן כזה, שבאמת ניתן לשרשר ולהכפיל אחת את השניה. ברור שניתן פשוט לעבור ולהתחיל להכפיל כל מטריצה עם הסמוכה לה, והכל יהיה בסדר.

אבל זה לא כזה פשוט כמו שזה נדמה. עבור כל הכפלת מטריצות יש לנו מספר מסוים של פעולות שצריך לבצע, אם ניקח את המטריצות שראינו קודם, A ו-B, מספר ההכפלות יהיה p*q*r. בדוגמה שהבאנו למעלה, מדובר על 2*2*1=4, שזה קליל, אבל אם אנחנו מדברים על מספרים גבוהים יותר זה מתחיל להיות בעיה. ולא רק המספרים גדלים, אלא גם הפער בין צורות שונות של הכפלה יהיה משמעותי. נגדיר למשל את המטריצות הידועות, כמטריצות מנוגדות אחת לשניה בצורה (משוחלפות): A(50,100) B(100,50). עכשיו יש לנו 2 אופציות להכפיל את המטריצות, ובכל אחת מהן לעשות את השרה המשותפת שונה. אם ניקח למשל, את 50 להיות המספר המשותף, נקבל 100*100*50=500,000 פעולות הכפלה שנצטרך לבצע, אך אם ניקח את ה100 להיות השורה המשותפת, נקבל 50*50*100 = 250,000. לא כיף אבל קטן בחצי (!) מכמות ההכפלות הקודמת ובוודאי שזה מאוד משמעותי.

נעלה רמה – רשימה של שלוש מטריצות <A1 A2,A3> באשר A1(10*100) A2(100*5) A3(5*50).

בשביל לחשב את הפתרון הזה, נצטרך לעשות שתי הכפלות שונות, קודם בין שתי מטריצות, ולאחר מכן בין התוצאה של הקודם למטריצה הנותרת (חשוב לציין, שהמטריצה תיווצר לנו אחרי ההכפלה, תהיה מתאימה למטריצה הראשונית הצמודה לה), מה שנותן לנו בעצם שתי אופציות להכפלות שאת כמות ההכפלות הסופית נחשב עכשיו:

((A1,A2)A3) = ((A1A2)+(A12A3)) = (10*100*5)+(10*5*50) = 5,000+2,500 = 7,500

(A1(A2A3)) = ((A1A23)+(A2A3)) = (10*100*50)+(100*5*50) = 50,000+25,000 = 75,000

השיטה הראשונה חסכה לי פי 10 הכפלות!

בוודאי שכל רשימה עם מספר שונה תיתן לנו אפשרויות שונות ומשונות שהפער ביניהן הולך וגדל, ואנחנו צריכים למצוא את הדרך האופטימלית להזין כמה שפחות הכפלות במהלך העבודה.

רק בשביל להבין את רמת הסיבוכיות של בדיקה מלאה של כל האופציות העומדות בפנינו, נעשה את החישוב הבא – נניח שיש לנו מערך של n מטריצות. נבחר מקום אקראי שנקרא לו k בתוך המטריצה, ונחלק את המערך לשני חלקים שיסומנו k, n-k. עבור כל הצבות הסוגריים האפשריות לבחירה מבין המערך הקיים נגדיר את P(n) להיות המספר של ההצבות האפשרי. כמובן שהסיפור הזה רקורסיבי, ולכל חלק שנבחר יהיה עוד תת חלק וכו'. ועכשיו, נזיז את הk למיקום אחר. שוב, נוצרו המון אופציות ותתי פרמוטציות חדשות. על מנת לסכם את כל האופציות, מקבלים את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$P(n) = \begin{cases} 1 & \text{אם } n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & \text{אם } n \geq 2 \end{cases}$$

בסופו של דבר, הפירוק של הנוסחה הזאת מגיע לרמה שנקראת **מספרי קאטאלאן**, שזה בעברית יפה "מלנתלפים" – $\Omega = 4^n/n^{3/2}$

הנוסחה הנ"ל גדלה בצורה אקספוננציאלית ולא נוחה בכלל לשימוש. אם ניקח למשל 10 בתור גודל המערך, יש לנו בערך 33,159 אפשרויות לבדיקה, ובהצלחה לנו עם זה, בואו נחפש דרך נוחה יותר.

אפיון המבנה של הפתרון האופטימלי

דיברנו על כך שהשלב הראשון בתכנות הדינאמי, הוא עצם ההגדרה של מה ייחשב לנו פתרון אופטימלי. אם כן, לפי ההגדרה שתיארנו קודם על הצבת ה-k בתוך המערך של המטריצות באופן שיית לנו את כמות ההכפלות המינימלית, וכן גם בתת הבעיה – המערך החדש מ1 ועד k אנחנו צריכים להציב בו נקודה מסוימת שתחלק את ההכפלות שלו בצורה אופטימלית, עד שנגיע בסוף להכפלה של שתי מטריצות שתהיה נכונה וקלילה ומשם נחזור לעשות את ההכפלות עצמן.

הפתרון הרקורסיבי

נגדיר כעת את הבעיה באופן הבא – יש להו את המערך A המכיל n מטריצות שיסומנו כל אחת <A1,A2...An>, נגדיר את התחומים הנדרשים לבדיקה של תתי הבעיות כ- I, j באשר $1 \leq i \leq j \leq n$. ונגדיר בהתאמה את m[I,j] להיות הדרך הזולה ביותר לבצע את ההכפלות הנ"ל.

כמובן שלפי ההגדרה, יכול להיות שנגיע למצב בו i=j, ובמקרה זה אין לנו הכפלות ופשוט מחזירים $m[i, j] = 0$. אך מה קורה כאשר $j > i$? אז אנחנו משמשים בהצבה חדשה של k שתהיה בטווח $i \le k \le j$ ונמצא עבורה מה יהיה הערך המינימלי. איך נעשה את זה? ניכנס לתוך כל חלק ונבדוק שם וחוזר חלילה.

בסופו של דבר כאשר נגיע למכלה הסקלרית בעצמה, העלות שלה תהיה פשוט העלות של הכפלת השורות בעמודות שמוגדרת כ $P_{i-1}P_kP_j$. עכשיו על מנת לחבר את כל התוצאה להחזרת תשובה אמיתית, הנוסחה תהיה בצורה הבאה:

$m[i, j] =$	Min{	$m[i, k]$	$+ m[k+1, j]$	$+ P_{i-1}P_kP_j$}
	התוצאה המינימלית המבוקשת	התוצאה האופטימלית עד לנקודת החלוקה	התוצאה האופטימלית לחלק השני	הוספת ההכפלה של שתי המטריצות המתקבלות

ואחרי שהבנו את שני חלקי הנוסחה הרקורסיבית נתאר אותה באופן שלם:

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{אם } i = j \\ \text{Min}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + P_{i-1}P_kP_j\} & \text{אם } i < j \end{cases}$$

נתונה שרשרת של מטריצות שעלינו להפיל אותם בזוגות. אנחנו צרכים למצוא את הדרך היעילה ביותר להכפיל אותם.

חישוב הערך האופטימלי "מלמטה למעלה"

ראינו כבר קודם שחישוב כל העלויות הוא יקר מאוד וברמה אקספוננציאלית, למרות שבסופו של דבר, מספר תתי הבעיות לא באמת עולה על n^2 . אמנם גם n^2 לא להיט, אבל באופן יחסי הוא הרבה יותר מוצלח מהנוסחה שהבאנו. אנחנו שואפים להתקרב לדבר הזה כמה שניתן. לצורך זה אנחנו בונים טבלה חדשה בגודל מערך המטריצות, על מנת לשמור שם את עלויות החישובים השונים, שטבלה זאת תקרא $m[i, j]$ וכל קריאה אליה תחזיר לנו את התוצאה האופטימלית עבור ההכפלה בטווח שבין i ל-j. בנוסף נבנה טבלה דומה שתיקרא s, ובה נשמור את הנקודות k עבורם מצאנו חלוקה שהיא אופטימלית לאותו טווח. כאשר אם נראה ש $s[1,6] = 3$, המשמעות היא שהחלוקה תהיה [1,3][4,6].

נראה את אלגוריתם ונבין איך הוא עובד:

```
Matric-Chain-Order(p)
  n = length[p]-1
  for i = 1 to n                                  // איפוס הטבלה כאשר מדובר על מפגשים של
        m [i, i] = 0                              // אותה מטריצה
  for l = 2 to n
        for i = 1 to n – l +1
          j = i + l -1                            // הגדרת שאר הטבלה הצורה משולשת
          m [i , j] = ∞                           // הכנסת ערכי מקסימום לכל התאים
          for k = i to j – 1
                q = m [i, k] + m [k + 1, j] + P_{i-1}P_kP_j   // בדיקת כמות ההכפלות עבור שני החלקים הנתונים
                if q < m [i, j]                   // בדיקה האם קיבלנו תוצאה שהיא אופטימלית
```

```
m[i, j] = q                    // הכנסה לטבלה של הערך המינימלי
s [i, j] = k                   // הכנסה לטבלה של מיקום החלוקה
return m and s                 // החזרת שתי הטבלאות
```

על מנת להבין איך פועל האלגוריתם, נשתמש בדוגמה שמופיעה בספר של קורמן, אך ננסה לבנות אותה לאט יותר.

קיבלנו 6 מטריות בגדלים הבאים:

מטריצה	ממדים
A1	30*35
A2	35*15
A3	15*5
A4	5*10
A5	10*20
A6	20*25

שלב ראשון

יצירת המטריצה m ואיפוס השורות הדומות:

j\i	1	2	3	4	5	6
6						0
5					0	
4				0		
3			0			
2		0				
1	0					

שלב שני

הכנסת ערכי מקסימום לטבלה:

j\i	1	2	3	4	5	6
6	∞	∞	∞	∞	∞	0
5	∞	∞	∞	∞	0	
4	∞	∞	∞	0		
3	∞	∞	0			
2	∞	0				
1	0					

שלב שלישי

נתחיל מהבסיס – $i = 1,\ l = 2,\ j = 1+2-1 = 2$

חישוב ה-q יהיה $q = m[1,1] + m[2,2] + P_0P_1P_2$

$q = 0 + 0 + 30*35*15$

$q = 15,750$

עכשיו, 15,750 הוא גבוה אבל הוא לא אינסוף, ולכן $m[1, 2] = 15,750$

למעשה כל האלכסון הראשון של כל מטריצה עם הצמודה לה, יחסית פשוט לחישוב:

j\i	1	2	3	4	5	6
6	∞	∞	∞	∞	5,000	0
5	∞	∞	∞	1,000	0	
4	∞	∞	750	0		
3	∞	2,625	0			
2	15,750	0				
1	0					

עכשיו נבדוק את האלכסון השני, שמוצא לנו את הפתרון האופטימלי עבור טווח של 3 מטריצות. כמובן שהאופציות הן רק שניים – או צמד המטריצות הראשון ואז להכפיל בנותר, או להיפך. נבדוק את האפשרויות עבור $m[1, 3]$:

$i = 1, j = 3, k = 1 \rightarrow m[1, 1] + m[2,3] + P_0P_1P_3 = 0 + 2,625 + 30*35*5 = 7875$

$i = 1, j = 3, k = 2 \rightarrow m[1, 2] + m[3, 3] + P_0P_2P_3 = 15,750 + 0 + 30*15*5 = 18,000$

ברור לנו שעכשיו נרשום כי $m[1, 3] = 7,875$.

נמשיך הלאה ונמלא את האלכסון הזה:

j\i	1	2	3	4	5	6
6	∞	∞	∞	3,500	5,000	0
5	∞	∞	2,500	1,000	0	
4	∞	4,375	750	0		
3	7,875	2,625	0			
2	15,750	0				
1	0					

שלב רביעי

מכאן זה כבר מתחיל להסתבך אבל זה רק עניין טכני. פשוט לוקחים את הגבול התחתון (i), ומתחילים ממנו ועד j-1 ובכל פעם מחשבים בהתאם. כמובן שבגלל שאנחנו עובדים מלמטה למעלה, עשינו לעצמנו עבודה הרבה יותר קלה.

נבדוק את הלולאה שרצה על $m[1, 4]$:

$m[1, 1] + m[2,4] + P_0P_1P_4 = 0 + 4,375 + 30*35*10 = 14,875$

$m[1, 2] + m[3,4] + P_0P_2P_4 = 15,750 + 750 + 30*15*10 = 21,000$

$m[1,3] + m[4,4] + P_0P_3P_4 = 7,875 + 0 + 30*5*10 = 9,375$

קל לראות, כי $m[1, 4] = 9,375$. באותו אופן נמשיך הלאה למלא את הטבלה עד הסוף:

j\i	1	2	3	4	5	6
6	15,125	10,500	5,375	3,500	5,000	0
5	11,875	7,125	2,500	1,000	0	
4	9,375	4,375	750	0		
3	7,875	2,625	0			
2	15,750	0				
1	0					

מבחינת זמן הריצה, אנחנו עושים את הבדיקה בגודל n2 על מערך בגודל n, מה שהופך את הסיבוכיות של כל הסיפור הזה ל $\Omega(n^3)$, וכמובן שאנחנו דורשים טבלה שתופסת מקום בגודל n^2 (גם אם אנחנו לא משתמשים בכולה, אנחנו מגדירים א זה כתטא).

למעשה, מה שלא ציירתי פה זה את הטבלה s. האלגוריתם עצמו דואג בכל פעם לעדכן את הטבלה בחלוקה המתאימה בה השתמשנו. כך שאם למשל עבור הדוגמה האחרונה בחרנו ב k=3 בתורה הפתרון האופטימלי עבור m[1,4], אז בטבלה s נכניס לשם את הערך 3.

בניית פיתרון אופטימלי

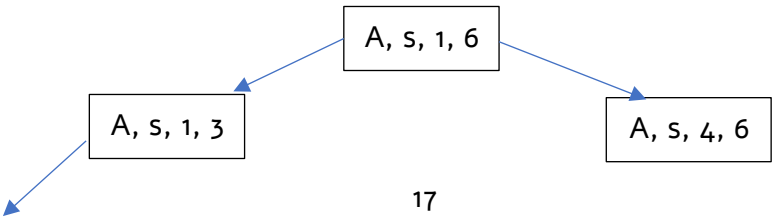
כל האלגוריתם שעבדנו עליו עד עכשיו, מתייחס בעיקר למציאת המינימום הכפלות שאנחנו צריכים לבצע, אבל עדיין לא אמרנו מה החלוקה הכי נכונה. בשביל זה אנחנו בודקים את הטבלה s.

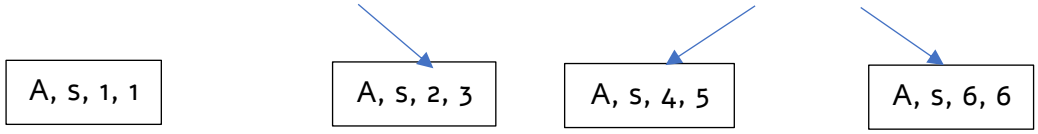
j\i	1	2	3	4	5
6	3	3	3	5	5
5	3	3	3	4	
4	3	3	3		
3	1	2			
2	1				

כמו שאמרנו קודם, כל מספר מבטא פה את ה-k עבורו החלוקה לאותו טווח היא אופטימלית עבור [i,k][k+1,j]. מה שזה נותן לנו, הוא את האפשרות לחשב באופן רקורסיבי את מערך המטריצות ולקבוע איפה לשים כל סוגריים. האלגוריתם של שרשור ההכפלות יקבל את מערך המטריצות A, הטבלה s, ואת הטווח שבודקים [i, j], ויוצג באופן הבא:

```
Matrix-Chain-Multiply(A, s, i, j)
  if j > I                                  // בדיקה שלא סיימנו לעבור על תתי הבעיה
        X = MCM(A, s, i, s[i,j])            // הכנסה רקורסיבית של שני החלקים לתוך מטריצה חדשה
        Y = MCM(A, s, s[i,j]+1, j)
        return Matrix-Multiply(X,Y)         // הכפלת המטריצות שהתקבלו
  else return Ai                            // אם התנאי לא מתקיים, אז הגענו למטריצה בודדת
```

נריץ עכשיו את האלגוריתם על המערך שקיבלנו, ונעקוב אחרי עץ הקריאות:





כאשר אנחנו מגיעים לרמה הזאת, אנחנו יכולים לחלק את הזוגות על פי הרמה שהגענו אליה:

$$(((A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6)$$

אז קיבלנו את התוצאה האופטימלית של ההכפלות, ואת הסדר הנכון של הכפלת המטריצות, והכל בא על מקומו בשלום.

בעיית תרמיל הגב בשלמים – הגרסה הדינאמית

בעיה זו הינה וריאציה של אותו תרגיל שראינו כבר קודם על בעיית תיק הגב[3]. ההבדל בדרישות כאן, שיש לנו התחשבות שהיא לא חד מימדית ולכן קשה יותר להגיע לפתרון שהוא נכון.

נתונים לנו n פריטים בצורה מסודרת בווקטור $[i_1...i_n]$. עבור על פריט i בווקטור יש משקל מסוים w_i וערך כספי v_i. הגנב הידוע מגיע עם תיק גב שיכול להכיל עד משקל W ורוצה לצאת עם ערך V מקסימלי.
ההגבלה: כל פריט יכול להילקח אך ורק בשלמותו.

קל לראות, שאם נתחשב רק באחת מהדרישות של משקל / ערך כאינדיקציה עיקרית לא נוכל להתקדם בצורה וודאית על מנת למלא את התיק בצורה נכונה.

הפתרון S יוצג לנו בצורה של וקטור בינארי, כאשר בכל אינדקס i יסומן אותו פריט האם נלקח או לא על ידי 1/0 (1 – נלקח, 0 – נשאר). באופן פורמלי, ניתן לומר שאנחנו רוצים שעבור הווקטור S יתקיים לנו $\sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i$ שיהיה מקסימלי[4] ובמקביל יקיים גם $\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i \le W$ (משקל הפריטים בתיק לא יחרוג מקיבולת התיק)

כמובן שאם S הוא הווקטור של כל הפריטים שכבר נלקחו, אזי $S' = S - \{i\}$, שעבורו תת הבעיה תהיה עבור $[i_1...i_{n-1}]$ ומשקל התיק יהיה $W-w_i$, והפתרון הכללי יהיה $V_i + V(S')$.

הסבר העיקרון של הפתרון שנביא: ננסה לעבור פריט פריט, ונראה על כל פריט, האם ישתלם לנו לקחת אותו או לא. כיצד נדע האם ישתלם לנו? על פי חישוב של כל האפשרויות הנגררות מכל אחת מהאופציות שעלולות להיבחר. באופן שיטתי נעבור על כל פריט ובסופו של דבר נוכל לראות את השלב הבא. עד כאן אפיינו את המבנה (שלב 1). רק בשביל לפרט בצורה שהיא יותר מוחלטת נגדיר כך:

ניקח את הפריט ה-n.
אם אנחנו מחליטים שאנחנו מכניסים אותו לתוך השק – תת הבעיה שתיווצר לנו תשתנה לסכימה הבאה: $\sum_{i=1}^{n-1} v_i\, x_i$ וכמובן שגם המגבלה תשתנה בהתאם ל $\sum_{i=1}^{n-1} w_i\, x_i \le W - w_n$.

---

[3] בפרק הקודם עסקנו בבעיית תיק הגב בחלקים, ובשיעורי הבית מופיעה וריאציה על תיק גב בשלמים, אך עם דרישות מצומצמות יותר.
[4] כאשר יהיה בווקטור 1 זה יביא לנו את ערך הפריט ו-0 בוודאי שלא יחזיר כלום.

אם נחליט שלא לקחת את האיבר ה-n אזי תת הבעיה תישאר לאותו הטווח, אך תת המבנה של המשקל לא יוגבל כמו הקודם, ויהיה $\sum_{i=1}^{n-1} w_i x_i \leq W$.

כמובן, כמו שכבר אמרנו קודם, יש לנו פה עץ ריקורסיה ענק בו נעשה את אותם חישובים מספר פעמים – אם נקח *i=3* ונרצה לבדוק אותו, נעשה את החישוב האם כדאי לקחת אותו ביחס לכל איבר אחר, וכן הלאה עד שנגיע לתוצאה הראויה. אם נעשה את כל הקומבינציות האלה, נגיע לסדר גודל של 2^n שהוא כמובן סדר גודל שאנחנו לא מסוגלים לחשב.

כעת ננסה לבנות לנו נוסחת נסיגה שנוכל לעבוד איתה:

עבור כל פריט נחשב את המיקום שלו בווקטור ואת המשקל שלו, בצורה הבאה –

$$C[i,w] = \begin{cases} 0 & \text{If } i = 0 \text{ or } w = 0 \\ C[i-1,w] & \text{If } w_i > W \\ \text{Max}\{V_i + C[i-1, W-w_i], C[i-1,w]\} & \text{If } i > 0 \text{ and } W \geq w_i \end{cases}$$

// אם אין מה להכניס, או שאין מקום בתיק
// אם חורגים מהמשקל, אז לוקחים את הפתרון הקודם
// כל מקרה אחר – בודקים מה יניב ערך גבוה יותר – הוספה של הערך הנוכחי למה שהצטבר, או להמשיך הלאה בלי לקחת את הפריט

עד כאן מימשנו את שלב נוסחת הנסיגה (שלב 2), ועכשיו עלינו לחשב את כל האופציות השונות. אבל בשביל שלא נעבור על כל דבר עשרות אלפי פעמים, אנחנו פשוט בונים מטריצה בה נשמור את כל הערכים אותם אנחנו מקבלים. נתחיל לבנות אותה מהחלק הפשוט יותר, ונעלה למעלה לחלקים היותר גדולים שירכיבו לנו בסוף את הפיתרון האופטימלי. יש פה הרבה עבודה שחורה ולא כיפית (בגדול) אבל זה דרך בטוחה ופשוטה יחסית לבצע את זה.

את המטריצה נבנה בצורה הבאה – מספר <u>השורות</u> יהיה n+1 שורה אחת עבור כל פריט שייכנס, וכן שורה אחת עבור 0 בו אף פריט לא נכנס (השורה הראשונה בנוסחת הנסיגה). מספר <u>העמודות</u> יהיה בצורה בדידה כל האופציות בו תיק הגב יתמלא, וגם תיק ריק – 0.

ניקח דוגמא מוחשית, ונראה איך מחשבים. נעשה פה כמה דילוגים, אבל הרעיון הכללי יובן על ידי זה.

עבור הדוגמה נגדיר n=5 W=10. W=[2,2,6,5,4] (וקטור המשקל לפי i) v = [2,3,5,4,6] (וקטור הערכים של i).

בעת בניית הטבלה נכניס באופן אוטומטי אפסים בשורה ובעמודה האפסיים:

i\w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0										
2	0										
3	0										
4	0										
5	0										

כעת, ננסה לחשב את C[1,5]. משמעות החישוב הוא – אם יש לנו רק 5 ק"ג פנויים בשק, האם שווה לנו לקחת את הפריט 1 או לא?

על פי נוסחת הנסיגה נחשב – C[1,5] = max (2 + C[0,3], C[0,5]).

במובן שבשלב זה, נוכל באופן אוטומטי, לראות שברגע שיש 0 באחד החלקים של הנוסחה התוצה תהיה גם היא 0, ולכן פיתוח הנוסחה ייראה כך: C[1,5] = max(2,0).
ולכן C[1,5] = 2. נמלא זאת בטבלה.

i\w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0					2					
2	0										
3	0										
4	0										
5	0										

נמשיך ונחשב (לכאורה את כל השורה ונקבל את התוצאה הבאה:

i\w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0										
3	0										
4	0										
5	0										

עכשיו נוכל לחשב את השורה הבאה – כל חישוב מתייחס לi-1 ולכן ברגע שנמלא שורה אחת נוכל לעבור לשורה הבאה ללא שום חשש.

נחשב עכשיו את C[2,7].
C[2,7] = max(3+C[1,5], C[1,7]).
את שני החלקים של נוסחת הנסיגה כבר יש לנו, ואין צורך לחשב. כיף! ולכן נמשיך ונפתח –
C[2,7] = max(3+2,2).
C[2,7] = max(5,2).
C[2,7] = 5.

ונמלא גם את שאר השורות עד לשורה האחרונה:

i\w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	0	0	3	3	5	5	5	5	8	8	10
4	0	0	3	3	5	5	5	7	8	9	10
5	0										

כמובן, שניתן לראות שכל חישוב בעצם מביא לנו את האופציה הטובה יותר מבין כל האפשרויות המוצעות לנו. על מנת להביא את התוצאה הטובה ביותר נבדוק עכשיו את C[5,10]

C[5,10] = max(6+C[4,6], C[4,10])

C[5,10] = max(6+5,10)

C[5,10] = max(11,10)

C[5,10] = 11.

נמלא את שאר הטבלה:

i\w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	3	3	5	5	5	5	5	5	5
3	0	0	3	3	5	5	5	5	8	8	10
4	0	0	3	3	5	5	5	7	8	9	10
5	0	0	3	3	6	6	9	9	11	11	11

עכשיו – התוצאה אליה הגענו, היא למעשה שהרווח האופטימלי שאנחנו מסוגלים להגיע אליו הוא 11.

הדבר היחיד שנותר לנו לבדוק (שלב 4), מה הסידור שיעניק לנו את הפתרון הנ"ל. בשביל זה יש שני דברים שכדאי לציין:

דבר ראשון, מה שכבר הזכרנו בעבר – יכול להיות שיהיו לנו שני פתרונות שיביא לנו את התוצאה המתאימה. השילוב הוא אפשרי ואם זה עומד בדרישות, הכל בסדר.

דבר שני, אנחנו צריכים לדעת לנתח את התוצאות שמופיעות בטבלה.

אם נסתכל על התוצאות, נבים שהדרך היחידה להשיג 11 הוא לקחת את הפריט החמישי. כל קומבינציה שלא תכלול את הפריט הזה, תגיע מקסימום ל10. באופן דומה אנחנו נחפש רק את הפריטים שאותם אנחנו חייבים לקחת בשביל להגיע לפתרון האופטימלי ונוכל לקבל את וקטור התוצאה S= [1,1,0,0,1] לוקחים את הפריט החמישי, הראשון והשני ומגיעים לתוצאה הרצויה[5].

תת סדרה משותפת ארוכה ביותר[6] Longest Common Subsequence

בכלליות, בעיית תת הסדרה המוצגת לפנינו, היא משהו שנתקלנו בדברים דומים בעבר. נתונות לנו שתי מחרוזות עם רצפים סדורים תחת אותה קבוצת א"ב, ועלינו למצוא תת סדרה מקסימלית בין שתי הסדרות.

---

[5] מי שיסתכל, יוכל לראות שה גם המשקל הנמוך ביותר מבין כל התוצאות האופטימליות שמביאות לנו את הערך 11, אבל מאחר שזה לא פקטור בבחירה שלנו, סתם נציין את זה ונמשיך הלאה.

[6] בהמשך נשתמש בראשי התיבות תמ"א. זה יותר קצר.

ההגבלה היחידה היא שמירה על הסדר הקיים, כאשר אנחנו יכולים להוריד כמה איברים שנרצה על מנת להגיע לתוצאה רצויה.

המוטיבציה לבעייה הזאת באה לידי ביטוי בחקר הדנ"א. סליל הדנ"א מורכב מארבעה סוגים של חלבונים ברצף מסויים. מדעני ביו-אינפורמטיקה עורכים השוואות רבות בין שני רצפים, כאשר הרצפים הם יחסית גדולים ומרחב האפשרויות לתתי סדרות אפשריות בין שתי סדרות הוא מרחב עצום. על ידי התכנון הדינאמי ניתן לפתור לפחות חלק מהבעיה בצורה שנראה בהמשך.

נגדיר כעת את מושגי היסוד לבעיה:
נתונה לנו שפה $S=\{s_1,s_2...s_n\}$ המכילה קבוצת אותיות ונתונות לנו שתי סדרות מתוך השפה $X=<x_1...x_n>$, וכן $Y=<y_1...y_n>$ באורכים כלשהם (לאו דווקא שווים/שונים). כאשר $X,Y \subseteq S$. תת סדרה תוגדר להיות בתור רצף $Z=<z_1..z_k>$ המוכל ב-S, ובנוסף, הינו תת-סדרה משותפת לX ולY כאחד. תת הסדרה חייבת לקיים את הסדר הנצא בכל אחת מהסדרות, כאשר אין מגבלה לעקיבה בין האיברים – הווה אומר – יכול להיות שמשתמשים באיברים עם דילוג ביניהם. לדוג' – Z = <2,4,6,7> הוא תת סדרה של X = <1,2,3,4,5,6,7,8,9>, בניקוי האיברים הצבועים באדום.
מעצם הגדרה זו, נגדיר גם כי בעבור כל קבוצה של אינדקסים (איברים בסדרה מסוימת) הממויינים בסדר עולה ממש החסום בין $i_1<i_2<...<i_k$ מתקיים כי $z_i = x_{ia}$ לכל האיברים שבטוח הסדרה Z. וכמו כן – מספר האפשרויות הקיים לתתי הסדרות עומד על 2^n. לא שצריך להסביר בשלם זה של התואר, אבל עבור כל איבר יש לנו אפשרות בינארית אם יהיה או לא יהיה בתת הסדרה, מה שיוצר לנו את הקומבינציה הזאת.
עוד מספר הגדרות רלוונטיות (ודי אינטואיטיביות):

- יהיו X,Y סדרות המוכלות בסדרה S, נאמר כי Z היא תת קבוצה משותפת של X ושל Y אמ"ם
  - Z היא תת סדרה של X
  - Z היא תת סדרה של Y

מתוך ההגדרות קל לראות כי יכול להיות מצב בו X=Z, שיתקיים רק בתנאי ש Z=X וגם Y=X. כמו כן, יכול להיות שZ תהיה סדרה ריקה – במידה ואין שום אות משותפת בין שתי הסדרות.

עכשיו נגדיר את הבעיה אותה אנחנו רוצים לפתור:

בהינתן 2 סדרות X,Y המוכלות ב-S בעיית **תת הסדרה המשותפת (תמ"א)** היא למצוא את תת הסדרה המשותפת Z בעלת האורך המקסימלי (מספר איברים מקסימלי).

נשתמש באותה שיטה שהגדרנו למציאת פיתרון דינאמי. ראשית נאפיין את מבנה הפיתרון הדינאמי, המכונה גם "הפתרון הנאיבי". יש לציין – כל הדרך הזאת אינה "סיעור מוחות" שאנחנו מתחילים לחשוב על רעיונות, ואז מתחילים לצמצם ולזקק אותם עד לרעיון הסופי, אלא שיטה ברורה ומסודרת להגיע אל הדרך הנכונה.

הפתרון הנאיבי

לא סתם החלק הזה נקרא פתרון נאיבי. אנחנו חושבים על הדרך הפשוטה ביותר (לכאורה) למצוא תתי רצפים קיימים – להשוות אחד אחד. ננסה את כל הקומבינציות האפשריות מבין אחת מתתי הסדרות, ונבדוק בסדרה השניה, האם תת הרצף קיים. במידה והוא קיים – נזכור את תת הסדרה ואת האורך שלה, עד שנגיע לאפשרות המקסימלית.

כמה זמן ייקח לנו לחשב את כל האפשרויות האלה? בקטנה! $O(m2^n)$, זה פיתרון רע. נניח שיש לנו שתי סדרות באורך 3, נצטרך לעבור 24 איטרציות. עבור 10 – 10,240. ואלו עוד מספרים קטנים. רצף דנ"א

מכיל מכיל סדרות הרבה יותר ארוכות. רק ננסה לחשוב על סדרות באורך 100. 2^{100} זה מספר שיגרום לנו להתחרט שנולדנו.

אז מה עושים עכשיו? פתרון דינאמי רקורסיבי.

הפתרון הרקורסיבי

ראשית, נגדיר את **הרישא** עבור כל סדרה $X = <x_1..x_n>$ להיות תת הסדרה $X_i = <x_1...x_i>$, כאשר $0 \le 1 \le n$. זאת אומרת – הרישא יכולה להיות כל הסדרה או כלום, וכל מה שבאמצע.

כעת נגדיר את הפונקציה LCS[7] (X, Y) המקבלת שתי סדרות ומחזירה לנו את Z שהיא תת הסדרה המקסימלית. כיצד הפונקציה תעבוד? בחלוקה של הסדרה לרישא ולזנב. לצורך ההדגמה, נגיד שירד נביא מהשמיים, ובאותות ובמופתים הפך מטה לנחש, נכנס לכיתה ואמר: "כה אמר ה', תת הסדרה $Z = <z_1...z_k>$ היא תת הסדרה המקסימלית!" ונעלם בעננת עשן. עכשיו, אנחנו רוצים לדעת האם הוא נביא אמת, או שעלינו לסקול אותו פעם הבאה שהוא מופיע.

ראשית נבדוק את הזנב של שתי הסדרות – X_n, Y_k. עבור צמד האיברים האחרון בכל סדרה, יש לנו בדיוק שלוש אפשרויות:

1. $\underline{X_n = y_m}$ – אם שני האיברים האחרונים בסדרות שווים, אזי מן הסתם $x_n = y_m = z_k$ כי הרי אם הם שווים אז הם שייכים לאותה תת סדרה. ומאחר שה שייכים לתמ"א, בוודאי שהאיבר הזה יהיה גם האיבר האחרון בסדרה Z. כמו כן, אם נמחק עכשיו מהסדרות את האיבר האחרון, אז גם מהסדרה ל התמ"א יימחק האיבר האחרון, ויש לנו פה תת מבנה שנשאר באותה צורה.
   במקרה כזה המשך האלגוריתם יהיה – LCS (x_{n-1},y_{m-1})
2. $X_n \neq y_m$ ($\underline{y_m = z_k}$ **וגם** $\underline{x_n = z_k}$ **או**) – למעשה יש פה אפשרות כפולה. האיברים האחרונים לא שווים זה לזה, אבל אחד מהם נמצא בתת הסדרה המשותפת. במקרה כזה אנחנו מבינים שיכול להיות שיהיו הסתעפויות. אמנם במבט ראשון אנחנו נוטים ללכת על זה שאנחנו רואים שקיים בתת הסדרה שקיבלו, אבל מאחר ויכול להיות תתי סדרות נוספות שיהיו באותו אופטימום, או אפילו יותר טובות, אנחנו בודקים את שני הכיוונים.
   במקרה כזה, נבדוק מה נותן לנו ערך מקסימלי בין שני הפיצולים של חיתוך הסיפא של כל אחד מהם.
3. $X_n \neq y_m$ **וגם** $x_n = z_k$ **וגם** $\underline{y_m = z_k}$ – אפשרות זאת בעצם ששום דבר לא מתאים.
   במקרה כזה המשך האלגוריתם יהיה – LCS (x_{n-1},y_{m-1}). אך בניגוד למקרה הראשון ה"מצביע" בסדרה Z יישאר באינדקס z_k.

כעת אחרי שקבענו את סדר הפעולות אותו נבצע, אנחנו יכולים לבנות את נוסחת הנסיגה הרקורסיבית. עבור זה נגדיר את התצורה הבאה – יהיו X,Y סדרות כאמור. נסמן ב C[i,j] את אורך הסדרות (מספר האיברים) של LCS (x_i,y_j),

$$C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{If } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ C[i-1,j-1]+1 & \text{If } i,j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \text{Max}\{C[i,j-1], C[i-1,j]\} & \text{If } i,j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

// תנאי העצירה – אחת הסדרות התרוקנה
// המקרה הראשון – סופרים 1 עבור התמ"א וממשיכים לבדוק הלאה
// המקרה השני – בודקים את שני הקצוות האפשריים עבור המקסימום

[7] Longest Common Subsequence

חישוב ערכו של פתרון אופטימלי "מלמטה למעלה"

חשוב להבין, התכנון הדינאמי הזה מממש בפועל את הנוסחה הרקורסיבית על ידי שימוש במטריצת זיכרון. באופן זה, אנחנו חוסכים את כל הכניסה עבור כל הסתעפות של כל החישובים פעם אחר פעם. מסיבה זאת, אנחנו מתחילים את החישוב מלמטה למעלה, שייתן לנו חיסכון בדרך הארוכה יותר.

על מנת לפתור בצורה אופטימלית, נשתמש במטריצה דומה מאוד לזו שעשינו לבעיית השק. נגדיר את המטריצה לגודל (n+1, m+1) כך שייתן לנו גם שורת אפסים עבור כל תת סדרה, ונתחיל למלא את השורות.

לצורך הדוגמא נגדיר את שתי הסדרות הבאות: Y = <B,D,C,A,B,A> X = <A,B,C,B,D,A,B,>, שיובילו אותנו ליצירת הטבלה הבאה:

I \ J		0	1	2	3	4	5	6
		Y_j	B	D	C	A	B	A
0	X_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0						
2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

עכשיו, נמשיך לבנות את i=1. האיברים הראשונים בY אינם שווים לx_1, ולכן נמשיך עד שנגיע ל C [1, 4]. את האיברים שאין בהם שיוויון בכלל נמלא בתור 0, וכשנגיע ל(1,4), ונראה שהוא שווה נזכור 1, ונבדוק עבור C[i-1,j-1], הווה אומר – C[0,3]. הפלא ופלא, יש לנו כבר את תוצאת הס שלו (תנאי העצירה שקבענו), נוסיף אותו לו שזכרנו, ונמשיך הלאה ל C[1,5]. אמנם כבר מצאנו שיש לנו אופציה מתאימה ב(1,4), אך מאחר שיכולים להיות מספר רצפים, שיקיימו את האופטימום, אנחנו ממשיכים לבדוק.

C[1,5] לכשעצמו, אינו שווה, אך בבדיקה של שתי הזנבות (שלמעשה הם בדיקה של האיבר השמאלי, והאיבר העליון בטבלה) נוכל למצוא את (1,4) שערכו 1, שהוא בוודאי גדול יותר מ C[0,5] = 0. ולכן נסמן גם את C[1,5] = 1. עכשיו, על מנת לעשות לנו חיים טיפה יותר קלים, אנחנו מסמנים חץ קטן, שיציין לנו מי האיבא אליו אנחנו מתייחסים – אם מדובר באיבר שבעצמו נותן תוצאה, כלומר, יש לנו התאמה, אז החץ יהיה באלכסון, בשביל לקיים את (i-1, j-1). אך אם אנחנו מתייחסים לאחד מהקצוות השניים, החץ יהיה למעלה או ימינה, בהתאמה לערך המקסימלי.

כעת, הטבלה שלנו תיראה באופן הבא:

I \ J		0	1	2	3	4	5	6
		Y_j	B	D	C	A	B	A
0	X_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1	1

2	B	0						
3	C	0						
4	B	0						
5	D	0						
6	A	0						
7	B	0						

נמשיך ונמלא את הטבלה. אין צורך שנעבור פה צעד צעד, ובסוף נקבל את טבלת הפלא הבאה:

I \ J		0	1	2	3	4	5	6
		Y_j	B	D	C	A	B	A
0	X_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2	2
3	C	0	1	1	2	2	2	2
4	B	0	1	1	2	2	3	3
5	D	0	1	2	2	2	3	3
6	A	0	1	2	2	3	3	4
7	B	0	1	2	2	3	4	4

בנית פתרון אופטימלי מתוך המידע שהושג

עכשיו, אחרי שהטבלה כבר מלאה, וכל החיצים מיושרים למקום הנכון, אנחנו יכולים פשוט לעבור מנקודה (i+1, j+1) שהיא הפינה המקסימלית, ולעבור עם החיצים עד שנקבל את התמ"א המבוקש. כמובן, שעל פי כל מה שאמרנו מקודם, אנחנו צריכים להתייחס בסופו של דבר רק לאיברים עם חץ אלכסוני, שהם האיברים השווים בין שתי הסדרות –

I \ J		0	1	2	3	4	5	6
		Y_j	B	D	C	A	B	A
0	X_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1	1
2	B	0	1	1	1	1	2	2
3	C	0	1	1	2	2	2	2
4	B	0	1	1	2	2	3	3
5	D	0	1	2	2	2	3	3
6	A	0	1	2	2	3	3	4
7	B	0	1	2	2	3	4	4

על פי כל האמור, תת הסדרה Z = <B,C,B,A> היא תת הסדרה המשותפת המקסימלית.

פסאודו אלגוריתם

לעיתים נידרש לכתוב פסאודו-קוד שיממש את כל מה שתיארנו. הקוד לפונקציה שתיארנו עכשיו נראה כך:

```
LCS (X,Y)
  m <- length[X]        // איפוס התחלתי למטריצה. קביעת ערכי הרוחב והגובה על פי אורך הסדרות
  n <- length[Y]
  for i <- 1 to m do    // הכנסת ערך 0 בשורה ובעמודה הראשוניים
        c[i,0] <- 0
  for j <- 1 to n do
        c[0,j] <- 0
```

החלק הראשון של האלגוריתם, התעסק באתחול של הטבלה, ועכשיו מתחילים את הבדיקה עצמה (אמנם הפרדתי פה בטקסט, אבל זה רק מתודי, הכל פונקציה אחת!). הבדיקה עכשיו עוברת בין שתי אותיות, אחת מכל תת מחרוזת ובודקת האם הם שווים. אם כן, מעדכנים שמצאנו התאמה, מסמנים "חץ" אלכסוני (האות D) וממשיכים לחפש נוספים. אם לא, בודקים איזה חיתוך של תת מחרוזת יוציא לנו תוצאה טוב יותר ומעדכנים את החיצים למעלה (U) או שמאלה (L).

```
for i <- 1 to m do
      for j <- 1 to n do
        if x_i = y_j                          // המקרה הראשון – שני האיברים האחרונים זהים
              c[i,j] <- c[i-1, j-1] +1        // כניסה מחודשת עם הרישא, וזכירה של ערך 1
              b[i,j] <- "D"                   // סימון חץ אלכסוני
        else                                  // המקרה בו האיברים האחרונים אינם שווים
              if c[i-1, j] ≥ c[i, j-1]        // הכנסת שני קצוות שונים לרקורסיה ובדיקת מקסימום
                c[i,j] <- c[i-1, j]
                b[I,j] <- "U"
              else
                c[I,j] <- c[I, j-1]
                b[i,j] <- "L"

Return c and b                                // החזרת תתי הסדרות לצורך בדיקת הערכים שלהם
```

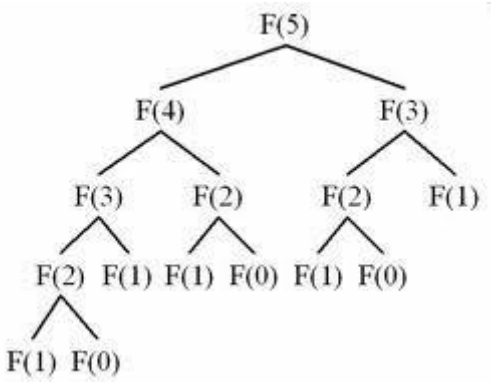
שיטת התזכור (הפתקאות) Memoization

שיטת ה"תזכור" או ה"פתקאות", היא דרך שונה לפתור בעיות בתכנון דינאמי. אם עד כמה עבדנו בצורה טבלאית מלמטה למעלה – מהערכים הנמוכים יותר של הרקורסיות, כלפי הערכים הגבוהים, בשיטת התזכור אנחנו עובדים דווקא הפוך – מלמעלה למטה.

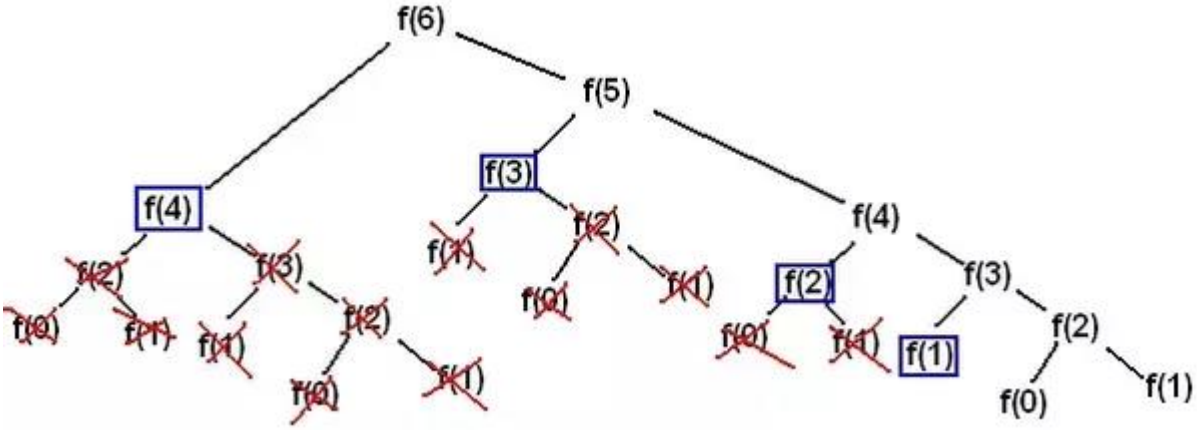
תהליך העבודה של האלגוריתם הזה עובד בצורה הבאה – ניקח את הטבלה שלנו, ונכניס בכל התאים את הערך ∞ (אינסוף). עכשיו נעבור על כל הרקורסיה באופן הרגיל מהחלקים הגדולים יותר כלפי מטה, ובאשר נגיע לאיזור בו יש לנו פיצול או כניסה עמוקה יותר, נבדוק את הטבלה. אם עדיין מופיע לנו ∞, אזי כנראה

שאין לנו חישוב לאותו ערך, ונרשה לעצמנו להכנס אליו. עכשיו יכול להיות שבכמה רמות שונות של הרקורסיה נכנס לאותו חלק, אבל פעם אחת מהקריאה השניה ופעם אחת מהקריאה השלישית, מצב זה בסופו של דבר יגיע לכדי התוצאה הדרושה רק פעם אחת. כי ברגע שהראשון יגיע לתחתית אותה אנחנו מחשבים, הענף השני של עץ הרקורסיה יגיע קצת אחריו, יראה שיש לנו ערך קיים שהוא מוחלט ואינו אינסוף, ויתחיל לשרשר כלפי מעלה את התוצאות הרצויות.

על מנת להבי ויזואלית את הערך של שיטת התזכור, ניתן לראות את עץ הרקורסיה הבא:



הקריאה מתחילה מ5 ומתפצלת ל-4 ול-3, וממשיך הלאה מטה-מטה. סך הכל יש לנו 15 קריאות לפונקציה. אבל, אם נוריד את כל הקריאות הכפולות (בהנחה שאחרי פעם אחת שהפונקציה נקראת יש לנו את התוצאה שלה) נוכל לקבל את העץ הבא:



אם ניקח על קריאה לפונקציה, יש לנו בעצם רק שני חישובים שאנחנו צריכים לעשות – ימינה ושמאלה. אם לכל קריאה כזאת נקבל רק את הערכים הסופיים, מספר הקריאות שנותר לנו כרגע הוא רק 9. כמובן שביחס לעץ המקור שהכיל 15 קריאות זה לא נראה משמעותי, אבל יש לזכור שהעץ הזה הוא קטן יחסית, רק קריאות מס-5. ביחסים גדולים יותר של עצי ריקורסיה נגיע לחיסכון משמעותי בחישוב.

נסתכל על האלגוריתם של השיטה, המחולק לשניים – אלגוריתם מילוי הערכים, ובדיקת הרקורסיה:

```
Memoized-Matrix-Chain(n)
  for i ←1 to n do
        for j i ← to n do
          m [i,j]← ∞                    // אתחול המטריצה
  return Lookup-Chain(1,n)
```

```
Lookup-Chain(i,j)
  if m[i,j] < ∞ then
        return m[i,j]                    // תנאי עצירה
  else
        if i=j then
          m[i,j] <- 0
        else
          for k <-1 to j-1 do            // רקורסיה + זיכרון
                q <- Lookup-Chain (i,k)+LookupChain(k+1,j) + p_{i-1}p_k p_j
          if q < m[i,j] then
                m[i,j] <- q
        return m[i,j]
```

זמן הריצה של הפונקציה הוא $O(n^3)$. זמן זה הוא פולינומיאלי, ועד עכשיו זה לא היה להיט. אבל ביחס לפונקציה מעריכית (כמו למשל ה- $O(m2^n)$ שחישבנו קודם) אין ספק שזה שיפור משמעותי.

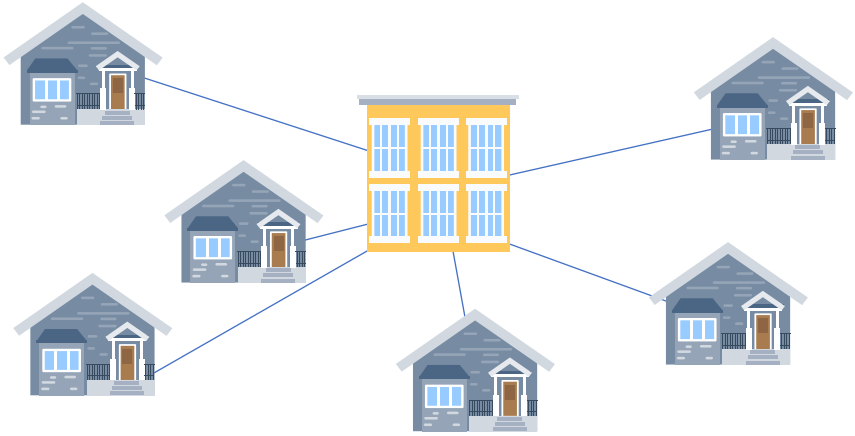
גרפים

עץ פורש מינימלי בגרף

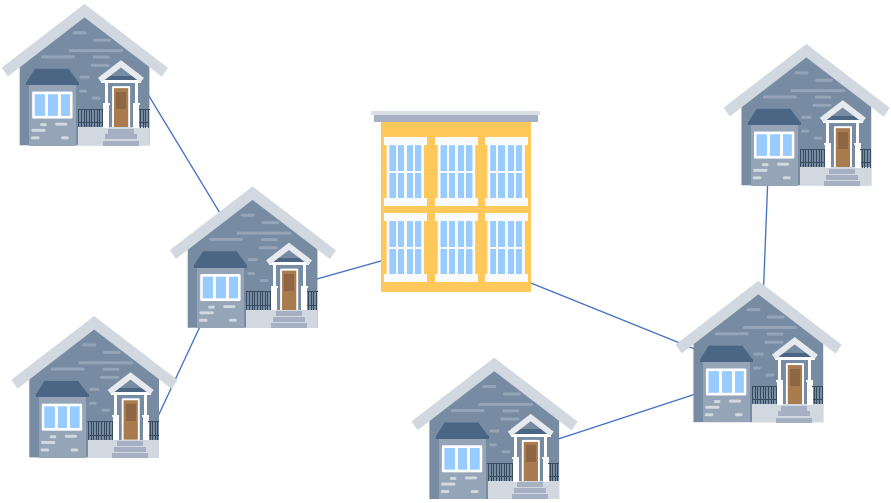
החלקים הקודמים של התכנון החמדני והדינאמי, הם הבסיס לניתוח האלגוריתמים. כעת אנחנו הולכים להתמקד בחלק השני של הניתוח, שהוא ניתוחים על עצים וגרפים. נתחיל עם עץ פורש מינימלי, ולאחר מכן נראה מסלולים קצרים, רשתות זרימה ועוד.

בבעיית העץ הפורש, ובחלק מהפתרונות האפשריים כבר נתקלנו בקורס מבנה נתונים ב', ולכן חלק זה יהיה יחסית מובן (למי שזוכר את הקורס לפחות), אך כעת נבין את הדברים יותר לעומק.

המוטיבציה לבעיית העפ"מ מתוארת בדרך כלל בתור שכונה שרוצים לפרוש בה קווי טלפון. אנחנו מחפשים דרך לעשות זאת בצורה יעילה ככל האפשר. הדרך ה"נאיבית" תהיה פשוט לשים את המרכזיה באמצע השכונה ולמשוך אליה את החוטים מכל הבתים מסביב. כמובן שזה יהיה הכי נח ומהיר, ואפילו יהיה הכי יציב – אם חוט אחד נקרע, הבעיה היא מקומית לאותו הבית ואין שום בית אחר שיושפע מזה, אך מצד שני, כמות החוטים שנצטרך לפרוש היא יחסית גדולה וזה לא ממש יעיל.



הפתרון השני, שיגיע אחרי מחשבה קצת יותר רצינית, היא לנצל את הקרבה של הבתים ולהעביר כבלים בין הבתים, כך שכל בית גם יעזור לשכן שלו להעביר את המידע הרצוי למרכזיה. כמובן, שהפתרון הזה עלול



לגרום לנו בעיה של קריסה גדולה בבעיה בכל בית, שתגרור את כל אלו התלויים בו. וכמו כן, ברמת האבטחה לא בטוח שכולם יאהבו לדעת שהידע שלהם עובר דרך השכן, אבל אנחנו מתעסקים פה ביעילות, ולכן האבטחה שלהם לא מעניינת אותנו בכלל.

עכשיו הבנו את הרעיון של החלוקה המינימלית הזאת, אבל איך נגיע לפרישה הטובה ביותר?

בשביל זה נגדיר את בעיית העץ הפורש המינימלי.

הקלט לטובת הבעיה: **גרף G=(V,E)** [גרף (G) המורכב מקדקודים (Vertices) המקושר בקשתות (Edges)] **לא מכוון**[אין משמעות או הפרש משמעותי בין שני הקדקודים המקושרים ביניהם] , **קשור** [כל הקדקודים מחוברים ביניהם ואין אף אחד בודד] **ופונקציית משקל w: E->R** [יש ערך מוגדר לכל צלע].

הפלט הדרוש: תת גרף T = (V,E) קשיר ללא מעגלים (עץ) עבורו הערך $w(T) = \sum_{(u,v)\in E'} w(u,v)$ מינימלי מבין כל תתי הגרפים הקשירים ללא מעגלים אפשריים.

אנחנו מחפשים להוציא מהגרף הנתון בסופו של דבר, עץ קשיר ללא מעגלים שמשקל הצלעות בו יהיה מינימלי. כמובן, שמספר הצלעות בעץ יהיה n-1. זה מהסיבה הפשוטה, שאם יהיה לנו n קדקודים בעץ, הדרך היחידה לקשר בין כולם ללא מעגל הוא צלע אחת פחות מאשר מספר הקדקודים (ניתן להוכיח זאת באינדוקציה שמתחילה משני קדקודים, אותם ניתן לחבר רק באמצעות צלע אחת. וכן על זה הדרך).

ראשית, נעבור על האלגוריתם הכללי, שרק מסביר את הרעיון של "איך אנחנו מגיעים לפתרון", ולאחריו נציג שני אלגוריתמים יותר פרטניים – קרוסקל ופרים, שמתמודדים עם הפתרון בצורה יותר קונקרטית. שני האלגוריתמים מתבססים על רעיונות שכבר למדנו במבנה נתונים, ולכן יהיו לנו מוכרים ופשוטים יחסית.

האלגוריתם הכללי למציאת עפ"מ

על מנת להבין את האלגוריתם, יש לעבור תחילה על מספר מושגים:

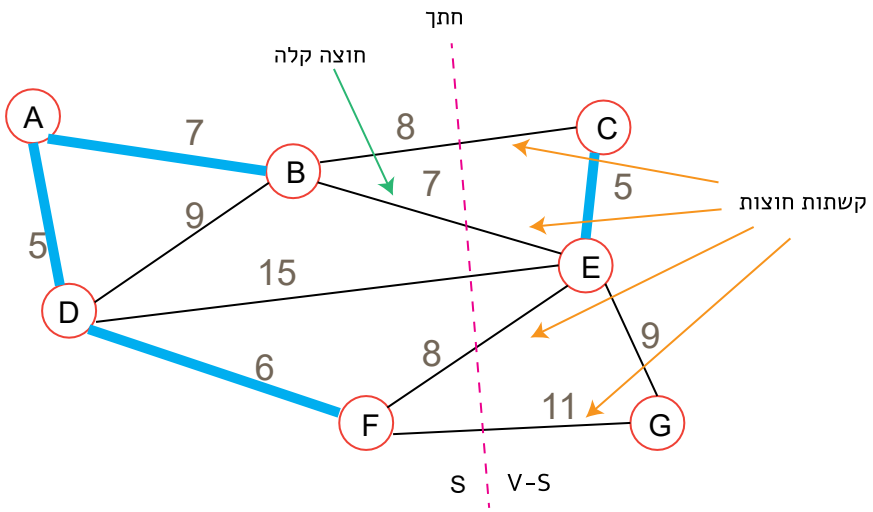
<u>חתך –</u> קו שעובר בתוך הגרף, ומחלק את הגרף לשני חלקים – S, V-S . החתך לא חייב להיות ישר, והוא יכול פשוט לעבור ו"לשלוף" קדקודים להיות שייכים לחלק מסוים. כמובן שה"חתך" הוא רק מושג רעיוני – אפשר להגדיר סתם רשימת קדקודים שתהיה תחת חלק מסוים בחתך גם אם זה לא נראה כאפשרי. הדבר החשוב לזכור – כל הקדקודים בגרף שייכים לאחד משני החלקים – או S, או V-S.

<u>קשת חוצה –</u> לאחר שחילקנו את הגרף לשני חלקים, באופן טבעי יהיו לנו קשתות (לפחות אחת) שיעברו על החתך לעבר הקדקודים בצד השני. הקשתות האלו נקראות "חוצות". כמובן שחייבות להיות קשתות כאלה, מהסיבה הפשוטה שאם אין אף קשת שעוברת על החתך, אז החתך לא חותך שום דבר.

<u>חוצה קלה–</u> הקשת החוצה בעל המשקל הנמוך ביותר.

<u>חתך מכבד –</u> אנחנו מתעסקים בתהליך למציאת עפ"מ בתת גרף שאנחנו מכנים אותו A. אותו A יהיה אחר כך עץ, אבל הוא יכונה כך גם בכל שלב בתהליך. למעשה, בחירת צלע מינימלית תתואר כך: A = A U |(u,v)|. לענייננו – חתך ייקרא "מכבד" אם לאחר החיתוף אף אחת מהצלעות החוצות לא שייכת לA.

בציור הבא, נוכל לראות גרף עם חיתוך. סימנתי את כל המושגים שראינו עכשיו על הגרף. הצלעות בצבע תכלת, הן הצלעות המשוייכות כבר ל-A, מה שכמובן הופך את החתך הקיים פה לחתך מכבד -



עכשיו, לאחר שהבנו את כל המושגים, נוכל להסתכל על האלגוריתם עצמו:

```
GeneralMST(G,w)
A ←ϕ
While A does not form a spanning tree
   do find an edge (u,v) that safe for A
         A← A U |(u,v)|
return A
```

האלגוריתם הכללי עובד בשיטה שכבר ראינו לא מעט בקורס הזה, שניתן להגדיר תחת קבוצות הפתרונות "טא-דא!". או במילים אחרות – אין פה שום פיתרון אמיתי. אנחנו מתחילים מA כאשר הוא ריק, והלולאה מוגדרת כ"כל עוד זה לא מה שרצינו, תמשיך לעשות מה שאנחנו רוצים". בכוונה אני כבה מקצין את זה, כי ההגדרה הכתובה באלגוריתם "find an edge (u,v) that safe for A", היא בדיוק השאלה – מה הצלע הבאה שניקח לA? התשובה לשאלה הזאת, מוגדרת בשני האלגוריתמים הבאים שיפרטו איך למצוא צלע "בטוחה".

אבל, אם ניקח את ארבעת המושגים שהסברנו עליהם מקודם, נוכל לומר באופן כללי, שהתהליך הוא כזה:

1. חותכים את הגרף (באופן מכבד, כמון).
2. בוחנים את הקשתות החוצות.
3. לוקחים את החוצה הקלה.
4. מבצעים שוב, עד שיש לנו את העץ.

אין צורך אמיתי להוכיח את הדבר הזה, כי מדובר במשהו די אינטואיטיבי – אם ניקח תמיד את הצלעות הקטנות, ברור שנגיע לתוצאה טובה (היתה הוכחה לזה בכיתה שנמצאת גם בצילומי האוניברסיטה הפתוחה בעמ' 110, אם יזדמן לי אשלים את זה).

בגדול, האלגוריתמים הבאים, כמו שנאמר כבר, מפרטים קצת יותר, והופכים את ה"טא-דא!" מקסם למדע.

האלגוריתם של קרוסקל (Kruskal)

אלגוריתם זה פורסם לראשונה בשנת 1956 על ידי ג'וזף קרוסקל, ומסתמך על מבנה נתונים לקבוצות זרות.

כזכור – כאשר אנחנו מדברים על קבוצות זרות יש לנו שלוש פעולות בסיסיות:

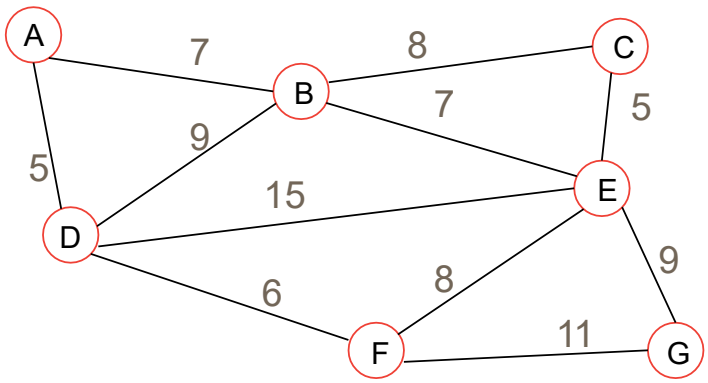
1. **Make-Set(x)** – יצירת קבוצה.
פעולה זו מתבצעת רק פעם אחת בכל רצף האלגוריתם, ומהווה בעצם בנאי של הקבוצות. הפעולה מקבלת ארגומנט יחיד שיתקיים כאיבר היחיד כרגע בקבוצה, איבר זה גם יישאר הנציג של הקבוצה להמשך, כל עוד לא יוכרח אחרת. יש לציין, אין חשיבות לאיבר הראשון, והוא לא אמור לקיים איזה חוקיות מסוימת, אלא פשוט האיבר הראשון הופך בצורה אוטומטית לנציג.
2. **Find-Set(x)** – מחזירה מצביע ל**נציג** של הקבוצה המכילה את האיבר x. המצביע לא מוביל לאיבר עצמו שהוכנס לפונקציה, אלא לנציג בלבד. (אם בשני זימונים שונים על שני איברים שונים הערך המוחזר מהפונקציה יהיה זהה, אנו מבינים שמדובר על כך שהאיברים נמצאים באותה קבוצה, וכן להיפך – שתי קבוצות שונות יחזירו שני נציגים שונים)
3. **Union(x,y)** – מקבלת שני פרמטרים (**לאו דווקא נציגים**) ומאחדת בין שתי הקבוצות השונות של האיברים. האיחוד בין שתי הקבוצות מתבצע על ידי קריאה כפולה לFind-set בעזרת שני הערכים המוכנסים לפונקציית האיחוד.

הרעיון בבסיס האלגוריתם – ראשית, נמיין את כל המשקלים הנתונים לנו מהצלעות. לאחר מכן, נפעיל את האלגוריתם לקבוצות זרות, על פי סדר הצלעות מהקטן לגדול.
הייחוד של הפעולות הללו, הוא שאם נקבל שני איברים השייכים כבר לאותה קבוצה, אין לנו צורך לחבר ביניהם, וכך נשמור על הדרישה לגרף ללא מעגלים.

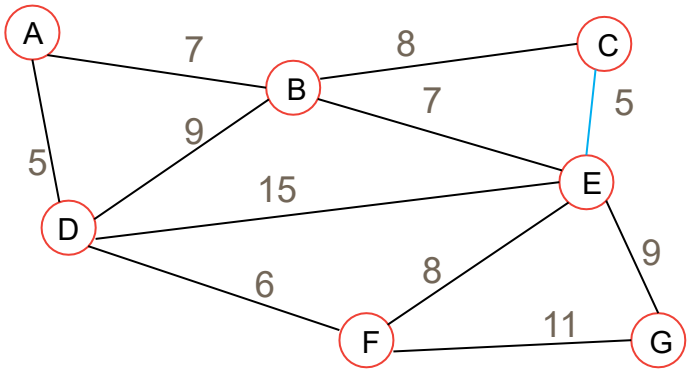
פסאודו קוד של האלגוריתם ממומש באופן הבא:

```
KRUSKAL(G):
A = Ø                                   // סימון העץ המוחזר בתור עץ ריק
foreach v ∈ G.V:
  MAKE-SET(v)                           // יצירת סטים בודדים מכל האיברים
foreach (u, v) ordered by weight(u, v), increasing:
  if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v):         // בדיקה האם הקדקודים שייכים כבר
      A = A ∪ {(u, v)}                  // לאותו עץ. במידה ולא, מאחדים אותו
      UNION(u, v)                       // עם העץ המוחזר
return A
```

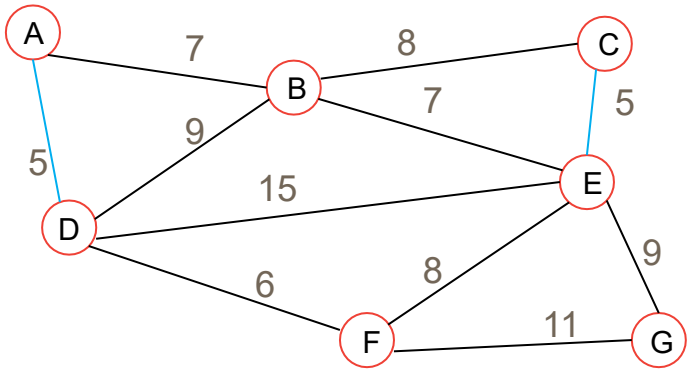
נעבור כעת על דוגמת מימוש על מנת לראות את כל השלבים באופן ברור:



זה הגרף הראשוני הנתון לנו. 7 קדקודים עם לא מעט צלעות. נתחיל בשתי הצלעות הקטנות ביותר:

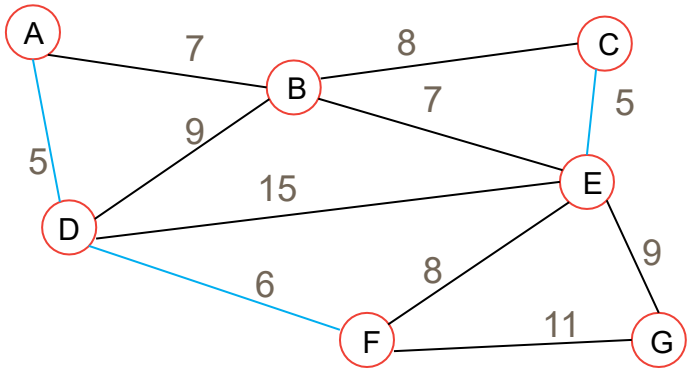


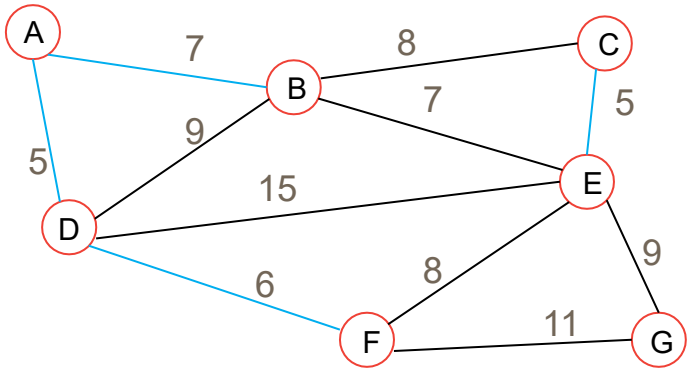
כמובן, שאין הבדל מהותי איזה צלע ראשונה ניקח מבין השניים כאשר הם בעלי אותו משקל. התחלתי בצלע (c,e). הצלע הבא בעלת אותו משקל היא (a,d) ונסמן גם אותה כשייכת לעץ הפורש המינימלי:



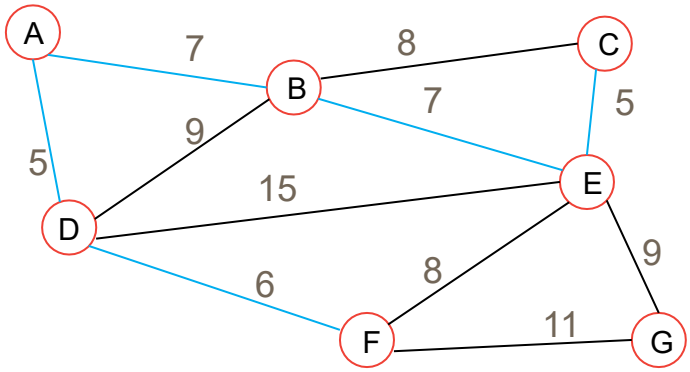
יש לזכור, כאשר אנחנו "מסמנים" צלע, אנחנו קודם כל מריצים Find-Set על כל אחד מהקדקודים, על מנת לוודא שהם כבר לא מחוברים ביניהם במקום אחר, אם המצב אכן כך – ניתן לחבר אותם.

נעבור הלאה:

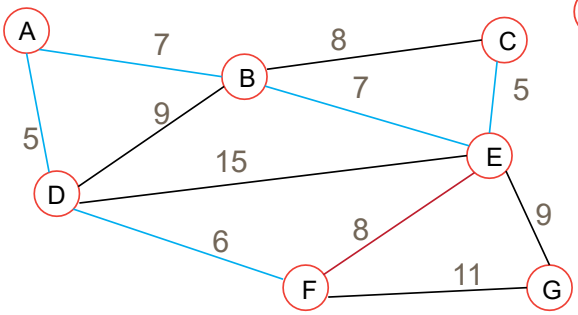


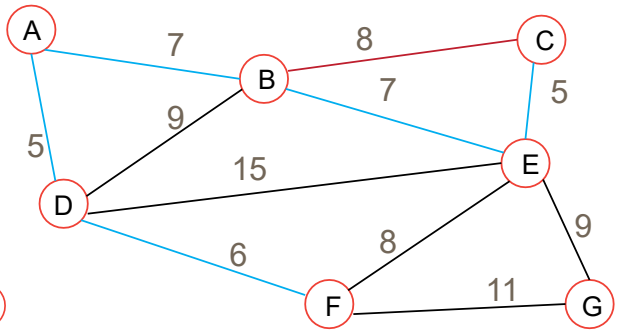


החיבור הבא ייתן לנו את הצלע השניה במשקל 7, שכבר תחבר לנו את החלקים השונים לעץ אחד. עדיין לא הסתיימה העבודה:

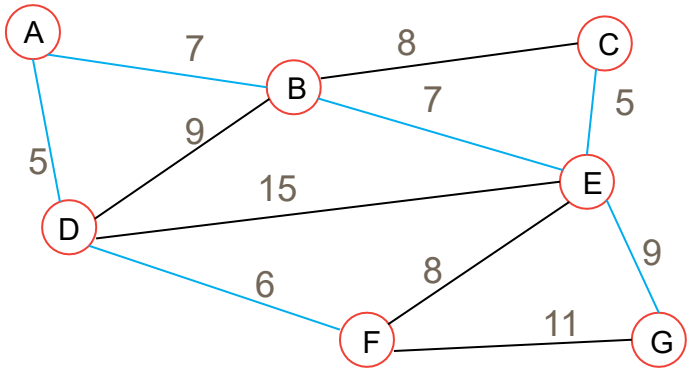


עכשיו הגענו לחלק החשוב – מכניסים את שני השמיניות ובודקים אותם. אבל ניתן לראות, שאם נצרף הצלעות במשקל שמונה, נסגור פה מעגל:

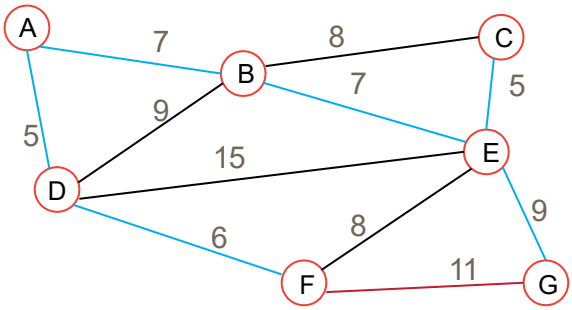


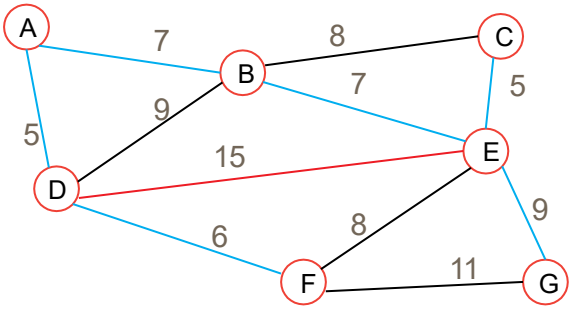


לכן, כמובן, לא נשתמש בצלעות האלה ונמשיך הלאה:

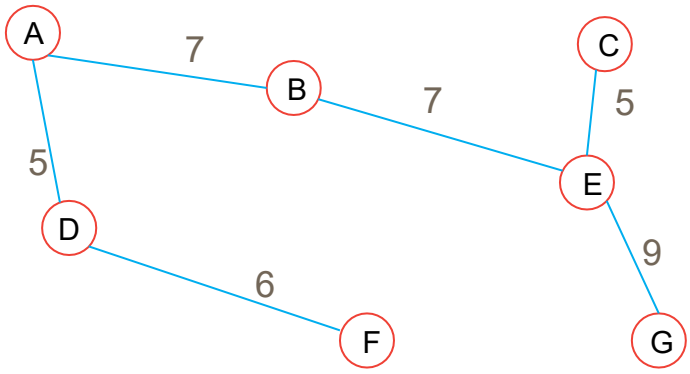


עכשיו אנחנו יכולים לעצור. מדוע? ציינו כבר קודם שיש לנו 7 קדקודים. עד כה חיברנו 6 צלעות לגרף הפורש. וכידוע – על מנת שעץ יהיה קשיר וללא מעגלים, עליו להיות עם צלע אחת פחות מכמות הקדקודים. ניתן גם לראות בגרף הזה, שכל ניסיון להוסיף צלע ייצור לנו מעגל שהוא פסול:





ועכשיו, אחרי שסיימנו להריץ את האלגוריתם, ניתן להחזיר את העץ החדש, וסיימנו את העבודה:



העץ הזה הוא העץ המינימלי ביותר שניתן להוציא תחת הגרף המקורי. האלגוריתם עבד בצורה חמדנית, על ידי לקיחת הצלע בעלת המשקל הקטן ביותר האפשרי בכל פעם. וניתן להוכיח בקלות שכל הוספה של צלע אחרת לעץ לא תיתן את האופטימליות הקיימת בו עכשיו.

מבחינת זמני ריצה:

1. מעבר ב Make-Set על כל הקדקודים O(|v|)
2. מיון הצלעות לפי המשקל – O(ElogE)
3. מעבר על הצלעות לבניית העץ O(E) (יכול להיות שקיבלנו כבר עץ מינימלי)

סה"כ O(V+ElogE + E) שזה שווה בסדר גודל לO(ElogE)

עד כאן האלגוריתם של קרוסקל.

האלגוריתם של פרים

האלגוריתם של פרים פותח לראשונה בשנת 1930 על ידי וויטיך ירניק, וקיבל את מעמדו בעקבות העבודה של רוברט פרים בשנת 1957. אלגוריתם זה אינו חמדני באופן מובהק וגם אינו אינטואיטיבי, אך יש בו יעילות. בשונה מקרוסקל, הוא גם אינו מתמקד בצלעות אלא דווקא בקדקודים.

האלגוריתם הזה גם הוא דומה לאחד שראינו בעבר, אך יש בו הבדלים דקים.

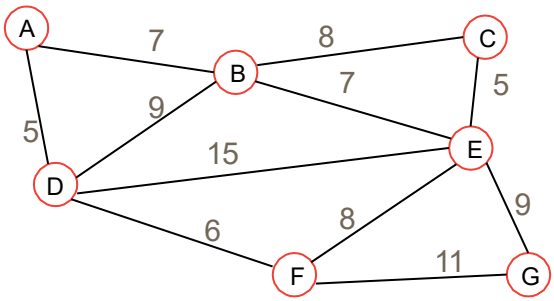
רעיון המימוש: עבור כל קדקוד, נוסיף שני שדות: key - שיציין את הערך המינימלי המוביל אליו באותו רגע. π – שישמור מצביע לאותו הקדקוד שkey מתייחס אליו.

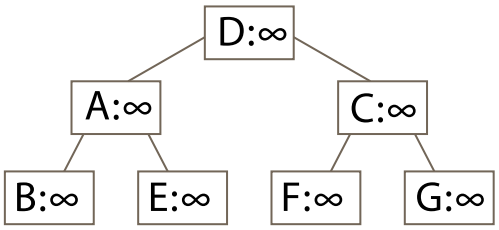
בתחילת הריצה, נאפס את המפתחות של כל הקדקודים ל ∞, על מנת שבטוח נכניס לשם ערכים מינימליים בהמשך, וניצור תור-קדימויות-מינימלי של הקודקודים ע"פ הערך Key שלהם.
נבחר קדקוד (r) באופן שרירותי שממנו אנו מתחילים לבנות את העץ, ועבור r נסמן את ה-Key להיות שווה ל-0 (הגיוני), ואת ה-π להיות שווה ל-NIL (או NULL).
מובן ש-r יהיה הקדקוד המינימלי שה"תור-קדימויות-מינימלי" שבנינו יוציא לי. כי ה-Key שלו שווה ל-0.
כעת נתחיל להוציא איבר אחר איבר מהתור-קדימויות, כאשר כל פעם ייצא לי הקדקוד u שמשקל הצלע שמחברת אותו לאחד מהקדקודים שכבר נמצאים על העץ שאני בונה, הוא מינימלי ביחס למשקל שאר כל הצלעות היוצאות מהקדקודים שכבר מחוברים לעץ (כלומר ערך ה-Key שלו הוא מינימלי מבין ערכי ה-Key של כל הקדקודים שנמצאים עדיין בתור).
בכל פעם שאני מוציא איבר מהתור קדימויות הוא כמובן נמחק ממנו, ואוטומטית מתחבר לעץ. כך שהתור יכיל רק את הקדקודים שעדיין לא נמצאים על העץ.
עבור אותו קדקוד u שהוצאתי, אעבור על כל הקדקודים שעדיין נמצאים בתור-קדימויות ושמתחברים אליו ע"י צלע מסויימת. עבור כל קדקוד כזה v, במידה ומשקל הצלע (u,v) שמחבר אותו ל-u, קטן יותר מה-Key של v, נעדכן את ה-Key להיות אותו משקל, ואת ה-π להיות הקדקוד u שזה עתה הוצאתי מהתור (וחיברתי אותו לעץ).
נשים לב שהערך Key של קדקוד כלשהו vשנמצא בתור-קדימויות, יכול להתעדכן כמה וכמה פעמים.
כאשר בסוף כל שלב (שהתחיל בהוצאת הקדקוד u מהתור-קדימויות) הוא יציין את המשקל המינימלי מבין הצלעות שמחברות אותו (את הקדקוד v) לעץ החלקי שכבר נבנה, ושזה עתה השתנה כאשר חיברנו אליו את הקדקוד u.
קדקודים מסויימים, ערך ה-Key שלהם יכול להיות שווה ל-∞. וזה בא לציין שאין צלע שמחבר את הקודקודים האלו לעץ החלקי שכבר נבנה.

פסאודו קוד עבור האלגוריתם ייראה כך:

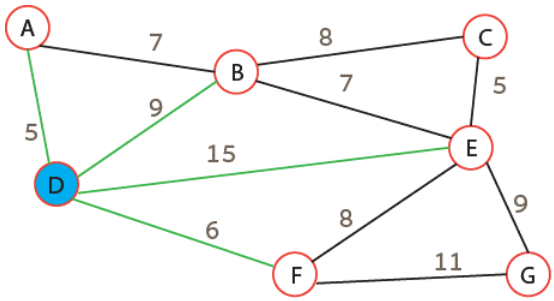
```
MST-PRIM(G,w,r)
Q ← V
for each u∈Q
    do key[u]=∞                          // הכנסת ערך מקסימלי לקדקודים
key[r]←0                                 // בחירת הקדקוד הראשון בערך 0
Π[r]=NIL                                 // קביעת המקור שלו כריק
while Q≠∅
    do u←EXTRACT-MIN(Q)                  // הוצאת המינימום מהתור
    for each v∈Adj[u]                    // בדיקת השכנים הנוכחיים
        do if v∈Q and w(u,v)<key[v]      // הכנסת הערך הנמוך יותר לשכן
            then Π[v]←u                  // קביעת המקור לקדקוד בעל הערך ביניים הנמוך
                key[v]←w(u,v)            // קביעת המשקל עבור הצלע המתאימה
```

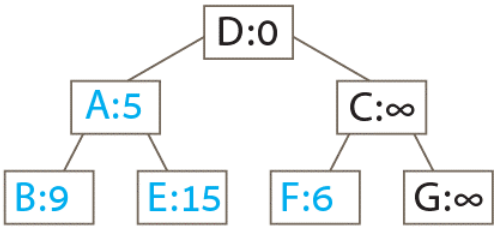
נבדוק את האלגוריתם על אותו גרף שראינו קודם:



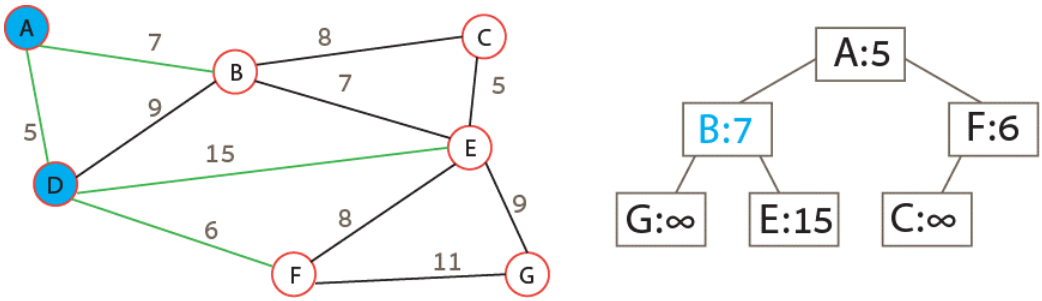


מתחילים באותו גרף, כאשר בצד אנחנו מכינים את התור קדימויות. כאן מימשנו אותו באמצעות ערימה. מכניסים בכל הערכים את הערך אינסוף, ובוחרים קדקוד אקראי. התחלתי כאן מD, רק בשביל שנוכל לראות שנקודת ההתחלה לא משנה כלום.



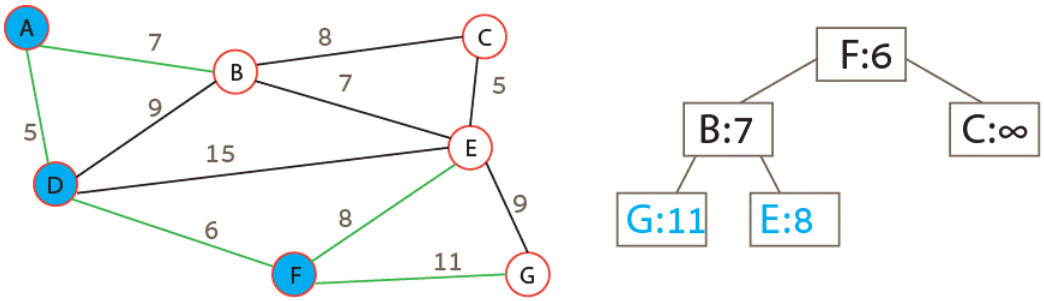


את הערך D סימנו ב-0, מאחר והוא נקודת המוצא. את כל הצלעות היוצאות ממנו, סימנו עם הכיוון אליו אנחנו הולכים, ועדכנו את אותם ערכים בקדקודים בהם פגענו. כעת אנחנו מוציאים את D מהתור, עושים heapify (וידוי קטן: אני חלוד קצת בערימות, יש מצב שזה לא מושלם. אבל הרעיון יובן בכל אופן), בודקים מה נמצא בראש הערימה וממשיכים הלאה:

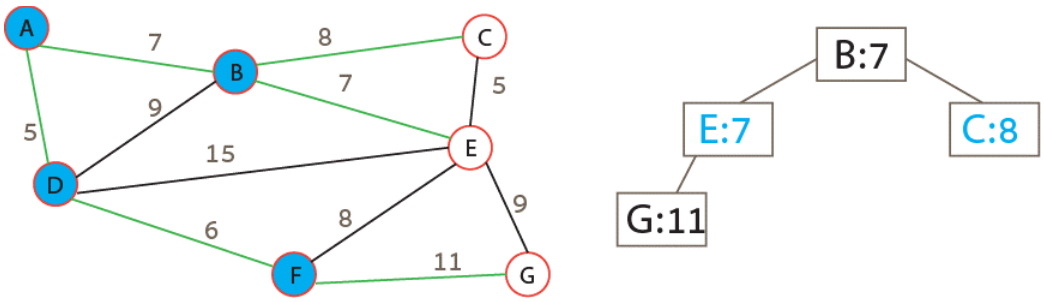


A עלה לראש הערימה, ולכן אנחנו בודקים אותו. לפתע אנחנו מגלים (אמוג'י נדהם) שבקדקוד B אנחנו יכולים לעדכן ערך נמוך יותר מהקיים בו! אנחנו משנים את הערך שלו, ובהתאמה גם משנים את החץ המוביל אליו, להיות החץ היוצא מ-A.

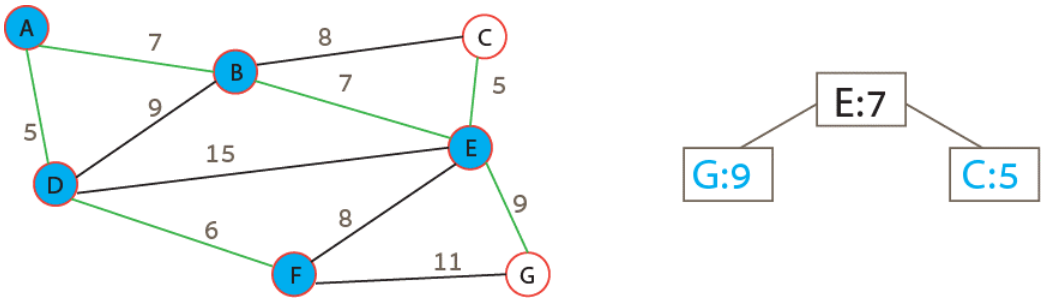
כנ"ל heapify, וממשיכים הלאה:



בודקים כעת את קדקוד F. ישר אנחנו רואים, שהערך של E צונח באופן דרסטי מ15 ל-8, ומעדכנים את החץ המתאים. כמו כן, אנחנו נתקלים בקדקוד חדש G. מוציאים את F, מערבבים וממשיכים:

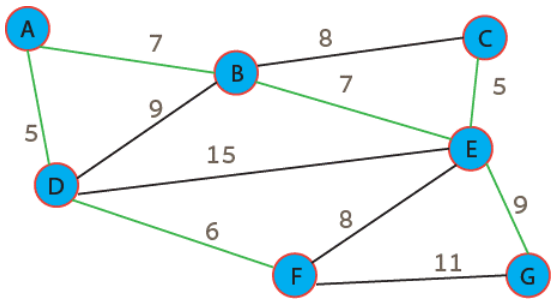


בודקים כעת את הקדקוד B, שבאורח פלא מעדכן שוב את E שיורד להיות בערך 7. בנוסף, נתקלים בקדקוד C, ועכשיו יש לנו ערכים אמיתיים בכל הקדקודים. מערבבים שוב את הקלפים:

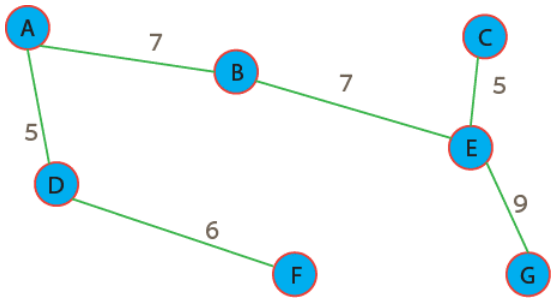


הקדקוד E מעדכן לנו פה גם את C וגם את G, ומוריד להם את הערך.

תכלס עכשיו, אנחנו כבר סיימנו. יש לנו 6 צלעות. גם אם נבדוק את שני הקדקודים שנשארו לנו, שלא בדקנו באופן פרטני, לא נשנה את התוצאות, אבל נבדוק בכל אופן על הסיכוי הקלוש שיקרה משהו:



אפשר לעשות פרצוף מופתע. אין שינוי. מה שנשאר עכשיו הוא לנקות את כל הצלעות המיותרות ולקבל את העץ הבא:



שהוא בדיוק אותו העץ שקיבלנו גם עם קרוסקל.

עכשיו נבדוק את זמן הריצה, שגם כאן מתחלק לשלושה חלקים:

1. קביעת הערכים הראשוניים – O(V)
2. הוצאת מינימום וסידור הערימה – O(logV)
3. בדיקת שכנים וחזרה E פעמים – O(ElogV)

סה"כ סדר גודל O(ElogV)

כעת נשאלת השאלה המתבקשת – מה יותר טוב? קרוסקל O(ElogE) או פרים O(ElogV).

אמנם, אנחנו שואפים להגיע לעץ שצלעותיו יהיו תמיד פחותים יותר מסך קדקודיו, ולכן אנחנו נוטים לומר שקרוסקל בסופו של דבר יעיל יותר. אבל, זה יהיה רק במקרה הטוב או קרוב לו, שמספר הצלעות הוא נמוך יחסית. במקרים אחרים, בהם מספר הצלעות יהיה מרובה, אזי דווקא פרים הוא זה שייתן סדר גודל מתאים יותר ביעילותו.

שאלות הרחבה

על גרף לא מכוון, קשיר ומשוקלל G=(V,E) הורץ אלגוריתם למציאת עפ"מ והוחזר העץ T. כעת הסירו מהגרף קשת (u,v) והתקבל גרף חדש G'. עלינו למצוא עפ"מ חדש T', ביעילות מירבית.

על פי דברי אבירם זילברמן, שאלה זו היתה באחד המבחנים בשנים קודמות. חלק גדול מהתלמידים ענו על שאלה זאת עם התשובה הקלאסית "נריץ על העץ החדש את האלגורית של פרים". מה שהוביל אותם לקבל 0, ואותנו לשיעור החשוב – אל תענה את התשובה הראשונה שעולה לך לראש!

אמנם האלגוריתם של פרים הוכח כיעיל יחסית לקרוסקל, אבל זה לא אומר שום דבר בקשר למקרה הזה. מאחר וכבר יש לנו עץ שאנחנו יודעים שהוא מינימלי, הורדה של צלע מהגרף המקורי, אולי תשנה את הגרף במקצת, אך בטוח לא באופן משמעותי, כי יש לנו קדקודים שלא קרובים לאיזור ההשמטה שבטוח לא יושפעו מזה. יותר מזה – אם הצלע שהורד לא היה חלק מהעפ"מ T המקורי, לא יהיה בו שום שינוי.

אם כן – איך נקדם פה?

נעבוד באופן הבא – נבחן את הצלע שהוצאה (u,v) – עבורה יש לנו 2 אפשרויות:

1. היא לא חלק מהעץ T המקורי – שום דבר רע לא קרה ואפשר להמשיך הלאה בסבבה.
2. היא חלק מהעץ T המקורי.
במקרה כזה, אנחנו יוצאים מנקודת הנחה שהעץ T התחלק לשני עצים חדשים. בנוסף אנחנו יכולים להבין שכל קדקוד מהצל שייך לחלק עץ אחר.
מה שנעשה – נריץ על כל חלק של העץ BFS, כאשר בT_1 נצבע את הקדקודים שאנחנו מגיעים אליהם בכחול, וב T_2 נצבע את הקדקודים באדום.
לאחר שעברנו על שני העצים, נעבור על כל הצלעות – הצלעות יחולקו ל-3 אפשרויות – צלע שכולה כחולה, צלע שכולה אדומה – בשני המקרים האלו, אין לנו מה לעשות ואלו צלעות אינטגרליות של העץ T, וכל הצלעות שנותרו בעצם יחברו שין שני החלקים של העץ וכל קצה יהיה צבוע בצבע אחר. נבחר מתוך הצלעות האלו את הצלע המינימלית שתחבר לנו את שני חלקי העץ, והצלחנו.

כמובן, שהתגובה הראויה לשאלה כזאת היא "למה נראה לכם שאני עכשיו אחשוב במבחן על BFS?" והתשובה היא "שיהיה לנו בהצלחה!".

נתון גרף G(V,E) לא מכוון, ממושקל וקשיר.
צ"ל: עץ פורש *מקסימלי*

פתרון: נציע גרסה שונה של קרוסקל-

1. נמיין את הקשתות ב-G בסדר יורד לפי משקלי הקשתות.
2. בכל איטרציה, במקום לבחור את הקשת בעלת המשקל הנמוך ביותר (כמו באלגוריתם המקורי), נבחר את הקשת בעלת המשקל הגבוה יותר.

הפתרון לכאורה, נדמה להיות די אינטואיטיבי, כמנהגם של אלגוריתמים חמדניים, אך ברגע שאנחנו נצטרך להוכיח את נכונות האלגוריתם אנחנו נתחיל להסתבך. אנחנו לא יכולים להסתמך באופן פשוט על כך ש"קרוסקל עובד, אז גם זה יעבוד", כי למעשה השינויים שעשינו באלגוריתם הם רחבים מכדי לבטל אותם.

מבחינת ההוכחה, כמובן שמאחר ואנחנו למעשה משתמשים בשיקול חמדני, נוכל להשתמש בדרך ההוכחה המתאימה, אך אנחנו רוצים להוכיח על בסיס הקרוסקל, אבל בצורה נכונה, וללא נפנופי ידיים.

הוכחה: נניח בלי הנחת הכלליות, שכל המשקלים הינם חיוביים (מטעמי נוחות גרידא. אם באמת יש משקלים שליליים, נשנה את הכל בהתאמה, והופ! יש לנו חיוביים. די לשאול שאלות!). כעת, נבנה גרף חדש ונכנה אותו G^- שזהה לחלוטין מבחינת המבנה שלו לגרף G. ההבדל היחיד בין הגרפים, הוא שכעת נגדיר את המשקלים להיות בדיוק הפוכים מאשר המשקל המקורי שלהם. כל המשקלים יהיו כעת שליליים.

עכשיו, נריץ את אלגוריתם קרוסקל על הגרף G^-.

טענה: קבוצת הקשתות שתיתן ריצת האלגוריתם על הגרף G^-, תהיה העץ פורש מקסימום של גרף G אם"ם, קבוצת הקשתות היא העץ הפורש מינימלי.

נוכיח את הטענה הזאת משני הכיוונים.

הוכחה: נניח בשלילה, כי קבוצת הקשתות המתקבלת בG^- היא בעלת משקל מינימלי, ונניח כמו כן, שקיימת קבוצת קשתות בG שהמשקל הכולל שלה הוא מקסימלי. אם כן, ננסה להפוך את הסימנים של משקלי הקשתות בקבוצה, ואזי נקבל קבוצת קשתות חדשה, שלמעש משקלה קטן ממשקל קבוצת הקשתות שנמצאו על יד אלגוריתם קרוסקל. **סתירה.**

מצד שני – נתנונה קבוצת קשרים בG שמשקלה מקסימלי. נניח בשלילה שקיימת קבוצת קשתות שונה, אשר בגרף G^-, נותנת עץ במשקל מינימלי קטן יותר מהמקביל שלו. ולכן קבוצת הקשתות עם המשקל המקסימלי בG היא קבוצת הקשתות המינמלית בG^- שאותה בחר אלגוריתם קרוסקל. כלומר מצאנו קבוצת קשתות בעלת משקל קטן יותר ממה שקרוסקל מצא, וזה הרי לא ייתכן. **סתירה.**

נתון גרף G(V,E) לא מכוון, קשיר וממושקל
צ"ל תת גרף פורש מינימלית

שוב, דבר שראינו כבר קודם – לא להיחפז ולענות תשובות. אוטומטית אנחנו יכולים לטעון, שתת גרף מינימלי בעצם שקול לעץ פורש מינימלי. אבל, עלינו לבחון את כל מרחב התשובות האפשרי. הטעות האינטואיטיבית שלנו היא, שאנחנו ישר חשבנו על כך שכל המשקלים חיוביים, במקרה כזה, אכן תת הגרף המינימלי יהיה העץ פורש מינימלי. אך במקרה בו חלק מהמקלים הם בעלי ערך שלילי, יכול להיות שהעץ לא יהיה הערך המינימלי של תתי הגרף האפשריים. למה? כי נוכל להוסיף קשתות בעלי משקל שלילי שייצרו גם עיגולים – אך אין שום חוק מונע מבעדנו לעשות באופן הזה.

אם כן, האלגוריתם יהיה כדלקמן:

1. ראשית, נבצע סריקת קרוסקל על הגרף.
2. לאחר מכן, נוסיף לתת הגרף את כל הקשתות בעלי המשקל השלילי שנשארו מחוץ לעץ.

באופן כזה נוכל להבטיח כי תת הגרף יהיה פורש (בעזרת הקרוסקל), וכן שיהיה מינימלי (על ידי שימוש בכל הקשתות השליליות).

הוכחה:

1. בוודאי שתת הגרף הוא פורש.
2. צ"ל שתת הגרף הוא גם מינימלי.

נניח בשלילה כי קיים תת גרף G^- שמשקלו קטן יותר ממשקלו. הרי שיש קשת הנמצאת בG^- שלא נמצאת בG. משקל הקשת בוודאי לא שלילי – מאחר שחלק מהאלגוריתם הוגדר לקחת את כל הקשתות בעלי המשקל השלילי – הקשת e' בוודאי בעלת משקל חיובי.

ננתק את הקשת e' מהגרף הפורש G', אם קיבלנו תת גרף פורש- סתירה.

אחרת – יש תת גרף שאינו פורש המחולק לשני חלקי קשירות – על החתך שנוצר. אם e' היא קשת יחידה על החתך, אזי היא חייבת להיות בכל עץ פורש של הגרף, ובוודאי גם על העץ הפורש, ולכן שייכת גם ל'G וזה סתירה.

אם יש קשת נוספת על החתך e'', אם e''<e' לא יכול להיות נכון. אם זה היה נכון, בוודאי כבר היה נכנס תת הגרף המקורי, ואז זה סתירה למינימליות של 'G.

אחרת – אם e''>e', אזי e' חייבת להיות בעץ הפורש מינימום של G, והרי סתירה.

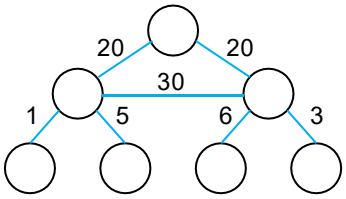
נתון גרף לא מכוון ומשוקלל G(V,E)
צ"ל עץ בעל משקל מינימלי המכיל |V|-1 קדקודים.
נתון האלגוריתם הבא:
1. מצא עפ"מ של G.
2. מצא עלה שהסרתו גורמת להקטנת המשקל של העץ באופן מקסימלי.
3. החזר את העץ ללא העלה הנ"ל.
הוכח או הפרך את האלגוריתם.

אנחנו רוצים לבדוק אפשרות של לקחת גרף, להוריד לו קדקוד אח, ולמצוא את העפ"מ באותו רגע. כמובן שאנחנו יכולים לקחת כל קדקוד ולבדוק בכל רגע האם יש שינוי, ואת זה אנחנו בודקים.

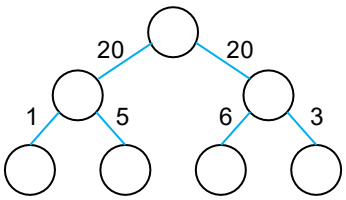
האלגוריתם המוצע, טען שאם ניקח את אותו עץ שהוחלט כמינימלי, ונוריד ממנו את הערך הגבוה ביותר הקיים בו, נקים את הדרוש. האם זה נכון?

לא.

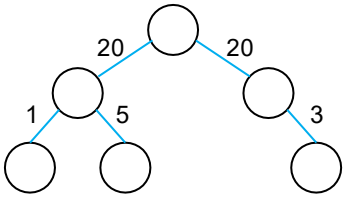
נפריך על ידי הדוגמה הבאה –



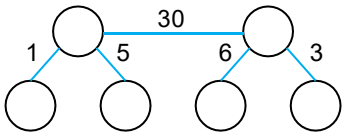
אם ניקח את העץ הפורש המינימלי, נישאר עם העץ הבא:



המשקל הכללי של העץ ברגע הוא 55. ואם עכשיו נוריד את העלה בעל המשקל הגדול ביותר נגיע ל49.



אבל למעשה, התשובה הנכונה יותר תהיה להוריד את הקדקוד ולהוריד את הערך הכללי ב-10:



שללנו את הטענה!

מסלולים קצרים ביותר

בעיית המסלולים הקצרים ביותר, הינה בעיה שכשמה כן היא, מחפשת את המסלולים הקצרים ביותר. היישומים של הבעיה נוגעים לכל אפליקציות הניווט שמשתמשים בהם היום[8], אך גם למסחר בבורסה, שילוח בינלאומי (UPS ודומיהן שצריכים להעביר את כל החבילות מאמזון עד אלינו בדרך המהירה ביותר) ועוד.

כמובן שבכל המקרים האלה, לקחת את כל הדרכים האפשריות ולבדוק את כל הקומבינציות האפשריות יהיה לא יעיל בעליל, 2^n בלי למצמץ בכלל. אנחנו כמובן צריכים למצוא את הדרך היעילה ביותר, עד כמה שאפשר, ולשמור על העסק שיישאר ברמה פולינומיאלית.

גרסאות שונות עבור הבעיה

דיברנו על "מסלולים קצרים ביותר", אך לא אמרנו מהיכן לאיפה. מסתבר שיש ארבע גרסאות שונות לבעיה, שכל אחת מהן נפתרת בשיטה מעט שונה. כמובן, שהכל מתבסס פחות או יותר על אותו פתרון, אבל היישום בפועל משתנה בהתאם לבעיה.

<u>מסלולים קצרים ביותר ממקור יחיד –</u> זה מקרה הבסיס איתו מתחילים. האלגוריתמים שנציג, כל אחד עם מגבלותיו ויכולתיו, פותר את הדרך למצוא את הדרך הקצרה ביותר מנקודה נתונה (שתיקרא בדרך כלל s), לכל שאר הקדקודים. כמו שכבר אמרנו, אנחנו מחפשים דרך קצת יותר מתוחכמת מפשוט לבדוק את כל האופציות.

<u>מסלולים קצרים ביותר למקור יחיד –</u> בעיה זו אינה פשוט נפתרת על ידי בדיקה של כל קדקוד בנפרד, כמו שהיינו עלולים לחשוב, ונרחיב עליה בשאלות ההרחבה.

<u>מסלול קצר ביותר בין שני קדקודים –</u> אם נדרש למצוא את המסלול הקצר ביותר בין u ל-v, כל שיהיה עלינו לעשות, הוא להגדיר את u כנקודת ההתחלה, ולהריץ עליו את האלגוריתם הידוע, ופשוט לבחור את המסלול המתאים. כיום לא ידוע על שום פיתרון אחר שפשוט מוצא את המסלול המבוקש מאיתנו, שזמן הריצה שלו יהיה משמעותית נמוך יותר מהפתרון המלא.

<u>מסלולים קצרים ביותר בין כל זוגות הקדקודים –</u> בבעייה זו, עלינו למצוא את סך **כל** המסלולים עבור כל זוג קדקודים הקיימים בגרף. כמובן שגם פה השיטה תהיה להריץ את האלגוריתם הרגיל שוב ושוב, עד שנמצא את כל המסלולים האפשריים. עלינו לזכור, שמירב הבעיות פה מתייחסות לגרפים שהם מכוונים, כך שאם מצאנו מסלול ספציפי בין שתי נקודות, מצאנו רק כיוון אחד, ואין לנו שום הבטחה שהכיוון השני יהיה באותו מסלול אם בכלל.

הגדרות כלליות עבור הפרק

הגרפים שיוצגו לנו, יהיו תחת ההגדרה הרגילה של G(V,E) עם פונקציות משקל $w:E \rightarrow R$, שהמשקל כמובן יהיה קנה המידה בו נשתמש לבעיות השונות (מרחק, זמן נסיעה וכו').

---

[8] תיאור נחמד וקליל על השימוש באפליקציות ניווט –
https://www.facebook.com/InnovationAuthority/photos/a.578866995492520/2008101869235685/?type=3&theater

המסלול אותו אנחנו עוברים יוגדר ב $P=<v_0,v_1..v_n>$ שהוא כמובן וקטור המורכב מהקשתות האפשריות.

המשקל הכללי שנקבל בסוף יוגדר ב $w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1} - v_i)$.

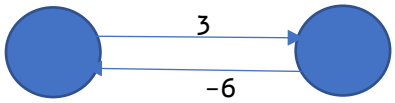
המסלולים יוגדרו בסוף האלגוריתם באופן הבא:

$$\delta(u,v) \begin{cases} \min\{w(p):u \rightarrow\rightarrow v\} & \text{אם יש מסלול מ-u ל- v} \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

עץ המסלולים הקצרים ביותר שנמצא בסוף כל אלגוריתם, שהוא אותו עץ המושרש ב-s, הוא תת-גרף מכוון $G'(V',E')$, כאשר $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, וכן יהיה חייב למלא את שלושת התנאים הבאים:

1. V' היא קבוצת כל הקדקודים ב-G שניתן להגיע אליהם מ-s. (יכול להיות שהגרף המקורי G מכיל מספר קדקודים שלא ניתן להגיע אליהם)
2. G' יוצר עץ מושרש ששורשו s.
3. עבור כל $v\in V'$, המסלול הפשוט היחיד מ-s אליו בגרף G' הוא המסלול הקצר ביותר אליו גם בגרף המקורי G. (זה נשמע טריוויאלי, אבל נוכיח את כל הדרוש בשביל להפוך את זה לרשמי).

הערה: בחלק מהגרפים עלולים להגיע לנו גם צלעות בעלי משקל שלילי, נתקלנו בדומים כאלה בעבר, אבל כאן כאשר אנחנו רואים צלע כזאת היא עלולה להוביל אותנו למצב בו יהיה לנו מעגל שלילי. מקרה כזה הוא קצת בעייתי, מאחר ובעצם הוא "הורס" לנו את החישוב ללפחות שני קדקודים שנמצאים באותו מעגל. אם למשל נתון לנו חלק הגרף הבא:



כל סיבוב שנעבור במסלול הזה, יוריד לנו את התוצאה הסופית ב3. נעבור עליו אינסוף פעמים, והתוצאה תהיה $-\infty$. כך גם כל חלק מהמשך המסלול שיוצא מאחד משני הקדקודים האלה, ירד גם הוא ל$-\infty$. אמנם זה נשמע מגניב להגיע ממקום למקום בזמן שהוא מינוס אינסופי (וזה גם כח-על לא רע בכלל!), זה לא באמת ישים כשאנחנו מחפשים דרך ממקום למקום.

מבנה הפתרונות המוצעים

אנחנו נדבר על שלושה אלגוריתמים שונים, שעובדים כל אחד בדרך טיפה שונה. נציג את ההבדלים ביניהם בטבלה הבאה:

שם האלגוריתם	מבוסס על פתרון	משימה	אילוץ	סדר גודל
דייקסטרה	חמדני	ממקור יחיד לכל היעדים	משקלות לא שליליים	O(E+LogV)
בלמן-פורד	חמדני	ממקור יחיד לכל היעדים	משקלות בלשהם (גם שליליים)	O(VE)
פלויד-וורשאל	דינאמי	מכל המקורות לכל היעדים	משקלות בלשהם	$O(V^3)$

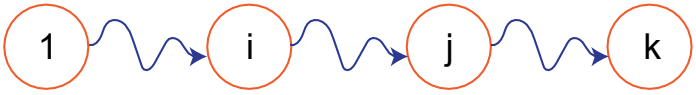
המסלול להבנת האלגוריתמים המוצעים, עובר במספר לֶמוֹת. גם חלק גדול מהלמות מרגישות מאוד אינטואיטיביות וטריוויאליות, אבל נוכיח אותן עד כמה שאפשר, על מנת שלא נצטרך לעשות קפיצות לוגיות, ולהכריז שהאלגוריתם "פשוט עובד"[9]. הלמות ימוספרו 25.x כל אחת על פי מקומה, על שם הפרק בספר של האוניברסיטה הפתוחה.

למות להוכחה -חלק א'

25.1 – תת מסלול של מסלול-קצר-ביותר הוא מסלול קצר ביותר.

בהינצן גרף מכוון ומשוקלל $G(V,E)$ עם פונקציית משוקלל $w:E\to R$, ויהי המסלול הקצר ביותר $p=\langle v_1,v_2\ldots v_k\rangle$, המסלול הקצר ביותר בין v_1 ל-v_k. אזי עבור כל i, j המקיימים $1\le i\le j\le k$, יהי $p_{ij}=\langle p_i..p_j\rangle$ המסלול הקצר ביותר בין שתי הנקודות v_i, v_j.

<u>הוכחה:</u> ברור שזה נראה מאוד טריוויאלי, אבל גם כשלמדנו את הלמה הזאת במבנה נתונים ב' עבור BFS נדרשנו להוכיח אותה ולא להסתפק רק במה שנראה לנו במבט ראשון. גם פה אנחנו נשתמש באותה צורת הוכחה שהשתמשנו אז, על מנת להחיל את הקביעה הזאת גם כאן, בגרף שהוא מכוון ומשוקלל.



נסתכל על הגרף הבא שמתאר לנו את המסלול הכללי p החל מ-1 ועד ל-k, המקיים לנו מסלול קצר ביותר, או באופן רשמי יותר $\delta(1,k)$. על פי הגדרת הטענה, נוכל לראות שבעצם אנחנו יכולים לחלק את המסלול לשלושה חלקים – $p = \langle v_1,v_i\rangle + \langle v_i,v_j\rangle + \langle v_j,v_k\rangle$. נניח כעת בשלילה, שלתת המסלול $p_{ij}<p_i..p_b>$ קיים מסלול, שנקרא לו p'_{ij} שהוא קצר יותר מהנתון. אזי, המסלול p אינו קצר ביותר בין שתי הנקודות! כי אם ניקח את $p' = \langle v_1,v_i\rangle + p'_{ij} + \langle v_j,v_k\rangle$ יתקיים לנו כי $p' < p$. ויש פה סתירה לטענה, ומש"ל.

25.2 המשפט הזה אינו למה, אלא מסקנה מהלמה הקודמת.

יהי גרף $G(V,E)$ מכוון, ממושקל וכו'. ונתון לנו מסלול קצר ביותר בין s ל-v, הניתן לפירוק באופן הבא: $s\to\to u\to v$ (הכוונה היא, שאנחנו יודעים שבאותו מסלול, הקדקוד הלפני-אחרון הוא u. אזי אנחנו יכולים לדעת בוודאות, כי המסלול בין $s\to\to u$ הוא המסלול הקצר ביותר.

<u>הוכחה:</u> כן. גם את זה צריך להוכיח. אמנם הוכחנו ב25.1 את התכונה הכללית הזאת, אבל פה אנחנו רוצים להוכיח שהטענה שאנחנו מביאים עומדת בתנאי הלמה הקודמת. בשביל להוכיח זאת, אנחנו נשתמש בפירוק המתמטי הבא:

$$\delta(s, v) = w(p) \to w(p') + w(u,v) \to \delta(s,u) + w(u,v)$$

מה שאנחנו אומרים כאן באופן פשוט הוא הדבר הבא: אנחנו יודעים שהמסלול הקצר ביותר הוא p. אנחנו גם יודעים שהמסלול הקצר ביותר הנ"ל, הוא בעצם מורכב מהפירוק של תת-מסלול כלשהו, באיחוד עם הקשת בין u ל-v. עכשיו אנחנו משתמשים בלמה, וטוענים שתת המסלול 'p הוא בוודאי תת מסלול קצר ביותר, וזה מה שרצינו להוכיח. מש"ל.

---

[9] על פי דברי פרופ' קרנר, אין צורך לדעת את הוכחת כל הלמות עצמן למבחן, אך ראוי להכיר אותן כלומדים את האלגוריתם.

25.3 יהי גרף $G(V,E)$ מכוון וממושקל וכו'. אזי עבור כל קשת $(u,v) \in E$, מתקיים $\delta(s,v) \le \delta(s,u)+w(u,v)$.

<u>הוכחה:</u> זה לא מה שהוכחנו ב25.2? כן. עכשיו נגדיר זאת כתכונה עקרונית:

משקל המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v, הוא בוודאי אינו גבוה יותר מכל מסלול אחר שעובר בין שני הקדקודים (אמנם יכול להיות שהוא שווה למסלול אחר, אבל זה לא מעלה ולא מוריד). בפרט, המשקל של אותו מסלול, גם אינו עולה על כל מסלול אחר העובר עד הקדקוד הסמוך לו, ואז עובר אליו (זה כמובן, על פי מה שאמרנו מקודם). מש"ל

טכניקת ההקלה Relaxation

כל האלגוריתמים שנביא בהמשך משתמשים בטכניקה שנקראת "הקלה". אנחנו מחפשים כידוע את הדלתא δ המייצגת את המשקל הנמוך ביותר האפשרי בין שני קדקודים, משקל זה הוא כמובן קבוע מראש ואנחנו מחפשים לחשוף אותו. על מנת להגיע לדלתא האופטימלית, אנחנו נשמור עבור כל קדקוד ערך d שייצג את המרחק המינימלי אותו אנחנו יכולים לחשב עד לאותו רגע, בשאיפה שבסופו של דבר הערך הנתון לנו ב-d, אכן יהיה ה-δ. בנוסף, אנחנו נשמור גם את ערך "הקודם" π בו נשמור את הקדקוד המינימלי דרכו הגענו לקדקוד הנוכחי.

על מנת שהרעיון יעבוד בצורה נוחה, בתחילת כל אלגוריתם, אנחנו נאתחל את השדות להיות אופטימליים עבורנו, ונשים בהם ערכים שבוודאי ישתנו בעת המעבר על הגרף. פונקציית האתחול מוגדרת כך:

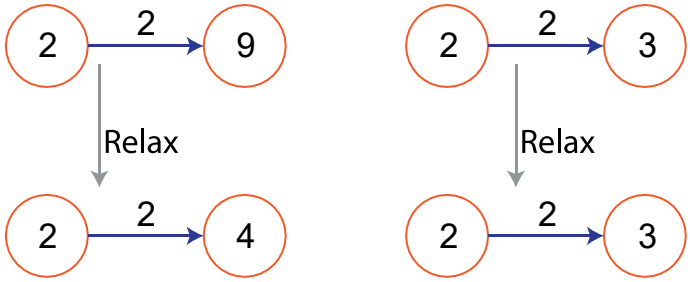
```
Initialize-Single-Source(G,s)        // הפונקציה מקבלת את הגרף ואת נקודת ההתחלה
  for each vertex v ∈ V[G]           // עבור כל הקדקודים בגרף:
      d[v] = ∞                       // אתחול מרחק ההגעה מקדקוד ההתחלה לאינסוף
      π= NIL                         // אתחול הקודם לערך ריק (מאחר ואנחנו לא יודעים מי מגיע אליו)
  d[s] = 0                           // אתחול המרחק הראשוני של נקודת ההחלה ל-0
```

ניתן לראות, כי ערך הקודם של נקודת ההתחלה s תישאר ריקה, וזאת באמת מאחר ואין לו קדקוד קודם. תהליך ההקלה עצמו, בודק עבור כל שני קדקודים הנשלחים לפונקציה, האם הוספת המסלול ביניהם תשפר לנו את המרחק או לא. כמובן, שבמעבר הראשון שמגיעים לכל קדקוד, אנחנו כבר נתחיל לעבוד ולהוריד את האינסוף לאיזשהו ערך קבוע, אבל אנחנו עלולים לחזור לכל קדקוד מספר פעמים ולא תמיד פעולת ההקלה תפעל כנדרש.

האלגוריתם מוצג באופן הבא:

```
Relax(u,v,w)                         // מקבלים שני קדקודים ואת משקל הקשת ביניהם
  if d[v] > d[u] + w(u,v)            // בדיקה האם המרחק יקטן בעקבות שימוש בקדקוד הקודם
      d[v] = d[u] + w(u,v)           // במידה וכן – 1. נעדכן את המרחק
      π[v]= u                        // 2. נעדכן את הקודם
```

לאחר ביצוע שני האלגוריתמים האלה, כל אחד לפי השימוש שלו, אנחנו נקבל בסוף את המרחק המינימלי עבור כל קדקוד, וכן את המסלול שנוכל לעקוב אחריו בעזרת ה-π.



ניתן לראות דוגמא של פעולת ההקלה עבור שתי אפשרויות שונות. נניח כי שני הקדקודים כבר מאותחלים בערך מסוים. כעת, כאשר אנחנו בודקים בגרף השמאלי, אנחנו יכולים לראות שהשימוש בקדקוד u עם המשקל 2 יניב לנו תוצאה הרבה יותר אופטימלית עבור v ולכן נעדכן אותו. מה שאין כן בגרף הימני, בוא הערך הקיים הוא נמוך יותר ומשאירים הכל שיעמוד על מקומו.

למות להוכחה – חלק ב'

המשך הלמות קשורות באופן ישיר לפעולות האתחול וההקלה, כאשר רובן מתייחסות לגרף מכוון משוקלל לאחר אתחול.

25.4

יהי גרף $G(V,E)$ גרף מכוון ומשוקלל. ובתוכו קשת $(u,v) \in E$. אזי, מייד לאחר פעולת ההקלה על אותה הקשת, מתקיים $d[v] \le d[u] + w(u,v)$.

<u>הוכחה:</u> בפשטות, זה מה שאנחנו עושים בפעולת ההקלה, אך נוכיח זאת באופן פורמלי: אם לפני בדיקת ההקלה, המצב הקיים היה $d[v] > d[u] + w(u,v)$, אז בוודאי שנכנסו לתנאי וכעת $d[v] = d[u] + w(u,v)$. אם עוד לפני פעולת ההקלה, התקיים כי $d[v] \le d[u] + w(u,v)$, אז בכלל לא נכנסו לפעולה והמצב הקודם מקיים את הדרוש (כמובן, שזה כולל את האופציה בה הגענו ל-v ממסלול אחר והוא שווה למסלול הכולל את u).

25.5

יהי גרף $G(V,E)$ מכוון ומשוקלל לאחר פעולת אתחול. אזי עבור כל קדקוד $v \in V$, מתקיים כי $d[v] \ge \delta(s,v)$. ואינווריאנטה (אי-שינוי) זה מתקיים לאורך כל סדרה של צעדי קלה בכל אלגוריתם של יהיה. יותר מזה, אם ייווצר מצב בו $d[v] = \delta(s,v)$, אזי הערך של $d[v]$ לא ישתנה יותר.

<u>הוכחה:</u> נוכיח עבור כל המצבים האפשריים, כי אכן דבר זה נכון:

עבור התחלת הפעולות – לאחר שאתחלנו את כל המערכת, כל המרחקים בקדקודים שאינם s יאותחלו לאינסוף, ובוודאי שזה יהיה קטן/שווה לתוצאה הסופית – אם לא נוכל להגיע לקדקוד מ-s זה יישאר כך, ואם לא כל דבר אחר קטן מאינסוף. לעניין s – אנחנו מאתחלים אותו ב-0. מה שכבכל הנראה יהיה נכון. הסיבה היחידה שדבר זה עלול להשתנות, זה אם נגלה מעגל שלילי שמוביל בחזרה ל-s. במקרה כזה $\delta(s,s) = -\infty$, שגם הוא ידוע בתור קטן מ-0.

לגבי המשך הצעדים – ניתן להוכיח זאת בשלילה.

נצא מנקודת הנחה שאכן האינווריאנטה נשמרת. אך לאחר שהגענו לקדקוד הראשון ועשינו עליו הקלה הגענו למצב בו $d[v] < \delta(s,v)$. במקרה כזה, הגענו לתוצאה המתמטית הבאה:

$d[u] + w(u,v) = d[v] < \delta(s,v)$
וידוע לנו, כי לאחר פעולת ההקלה מתקיים כי $d[v] \le \delta(s,u) + w(u,v)$ על פי למה 25.3 שהוכחנו קודם.

אך אם מה שהנחנו עד כה נכון, אז גם $d[u] < \delta(s,u)$ אבל זה לא ייתכן, כי פעולת ההקלה איננה משנה את u אלא רק את v, ואנחנו מדברים על הקדקוד הראשון שאנחנו בוחרים לשנות, ויש כאן סתירה!

השלב הסופי – אנחנו רוצים להוכיח שברגע ש $d[v] = \delta(s,v)$ אזי $d[v]$ לא מתעדכן יותר. זה עתה ראינו שלא יכול להיות מצב בו $d[v] < \delta(s,v)$ תנאי זה חל באופן קבוע, כמו שהוכחנו. ולכן גם $d[v]$ אינו יכול יותר להתעדכן לעולם. מש"ל.

25.6

יהי גרף $G(V,E)$ מכוון, ממושקל ומאותחל. אזי, אם יש קדקוד v שאין שום מסלול המחבר אליו את s, אנו מקבלים אוטומטית כי $d[v] = \delta(s,v)$ והשוויון הזה נשמר באופן קבוע לכל אורך הפעולות שנעשה על הגרף.

<u>הוכחה:</u> על פי מה שהוכחנו בלמה 25.5, תמיד יתקיים כי $d[v] \ge \delta(s,v) = \infty$, ובוודאי ש-$d[v]$ לא יכול להית גדול יותר מזה, ולכן $\delta(s,v) = \infty = d[v]$.

25.7

יהי גרף $G(V,E)$ מכוון, ממושקל ולאחר אתחול. ויהי $s \to \to u \to v$ מסלול קצר ביותר בG. אם לאחר מספר צעדי הקלה הגענו למצב בו $d[v] = \delta(s,v)$, לפני קריאה חדשה עבור פונקציית ההקלה, אזי גם $d[u]=\delta(s,u)$ מתקיים בהתאם לפני הקריאה.

<u>הוכחה:</u> על פי הלמה 25.5, מרגע שהגענו למצב האופטימלי, המצב הזה כבר לא משתנה.

על פי למה 25.4, $d[v] \le d[u] + w(u,v)$
על פי המסקנה 25.2 $d[v] = \delta(s,u) + w(u,v) \to \delta(s,v)$

ובחזרה ללמה 25.5, גם $d[u]$ מפסיק להתעדכן מאותו רגע, וזה נשאר באופן קבוע שווה לדלתא.

עצי מסלולים קצרים ביותר

שתי הלמות הבאות באות ללא הוכחה, כי זה ארוך מאוד ומתיש (יאיי!). ומתייחסות לעצי המסלולים הקצרים ביותר. בהגדרות של הפרק דיברנו על כך שבסופו של דבר אנחנו מנסים ליצור עץ שבסיסו יהיה הקדקוד s, ויכיל את כל המסלולים הקצרים ביותר מאותו קדקוד לכל קדקוד אחר בגרף. על מנת לראות שאכן כך הדבר, באות שתי הלמרות (האחרונות) וסוגרות לנו את הפינה.

25.8

יהי גרף $G(V,E)$ מכוון ומשוקלל, בעל קדקוד מקור s, וללא מעגלים בעלי משקל שלילי. אזי, לאחר אתחול הגרף, תת גרף הקודמים G_π יוצר עץ מושרש ב-s. וכל סדרה של צעדי הקלה תשמר תכונה זו כאינווריאנטה.

הסבר: מאחר ואנחנו מתחילים את כל האלגוריתם בקדקוד s, ומאחר וכל הקדקודים מאותחלים ב-π להיות NIL, אז כל צעד הקלה יכול לעדכן את הקדקודים השונים רק כלפי ה-s. לא משנה כמה נתקדם באלגוריתם, כשנחזור אחורה נגיע תמיד לאותו מקום.
מסיבה זאת דרשנו שלא יהיה מעגלים שליליים, שאנחנו יכולים להסתבך בהם ולא להגיע לשום מקום.

25.9

יהי גרף $G(V,E)$ מכוון ומשוקלל, בעל קדקוד מקור s, וללא מעגלים בעלי משקל שלילי. אזי, לאחר אתחול הגרף, וביצוע מספר צעדי הקלה הגענו למצב בו לכל קדקוד בגרף $d[v] = \delta(s,v)$, אזי תת הגרף G_π הוא עץ מסלולים קצרים ביותר המושרש ב-s.

אין פה עוד הרבה מה להוכיח, אבל נסתכל על 3 התכונות שציינו קודם, ונראה שאכן הכל מתקיים:

1. V' היא קבוצת כל הקדקודים ב-G שניתן להגיע אליהם מ-s – כל קדקוד שיכיל ערך סופי כלשהו ב-d[v], אזי ברור לנו שניתן להגיע איו, כי אכן הגענו אליו. אם יש קדקוד שנשאר ב $d[v] = \infty$, אז כנראה שלא ניתן להגיע אליו ישירות מ-s.
2. G' יוצר עץ מושרש ששורשו s – התחלנו מ-s ולכן בוודאי שהוא יהיה מושרש בו – על פי למה 25.8.
3. עבור כל $v \in V'$, המסלול הפשוט היחיד מ-s אליו בגרף G' הוא המסלול הקצר ביותר אליו גם בגרף המקורי G – על פי כל התכונות שראינו עד עכשיו, המסלול שנבחר יהיה הקצר ביותר ויקיים את כל האמור.

עכשיו אחרי שאנחנו יודעים את כל הלמות, ניתן לעבור לאלגוריתמים עצמם.

האלגוריתם של דייקסטרה

אלגוריתם זה בוסס במאמרו של אדסחר דייקסטרה (זה לא טעות, הוא הולנדי) בשנת 1959 ומהווה בסיס למציאת המסלולים הקצרים ביותר.

כמו שציינו כבר קודם, האלגוריתם עובד אך ורק על גרפים בעלי משקל חיובי, ולכן מרחב השימושים שלו מצומצם יותר, אבל מאחר וזמן הריצה שלו יותר טוב מהאחרים, כדאי להשתמש בו כשאפשר.

הסבר האלגוריתם

יש לנו מספר קבוצות אותם אנחנו מנהלים תוך כדי מימוש האלגוריתם: S – קבוצת הקדקודים בהם כבר קבענו את המסלולים הקצרים יותר. הווה אומר, עבוד כל קדקוד $v \in S$ הגענו כבר לתוצאה המקיימת את הנתון הדרוש לנו $d[v] = \delta(s,v)$. בנוסף V יכיל כרגיל את כל הקדקודים בגרף, ונפעיל גם תור קדימויות Q, שיכיל את כל הקדקודים שעוד לא טיפלנו בהם, כלומר V-S. הקדימות תוגדר להיות כמובן, הקדקוד בעל המשקל הנמוך ביותר מבין הנוכחים.

האלגוריתם לוקח את הקדקוד בראש תור הקדימויות, מעביר אותו ל-S, ואז מבצע הקלה עבור כל הקדקודים הסמוכים אליו (כל זאת בהנחה המוקדמת שאכן יש לנו טבלת סמיכויות מתאימה).

נראה את המימוש של האלגוריתם בצורה מפורטת:

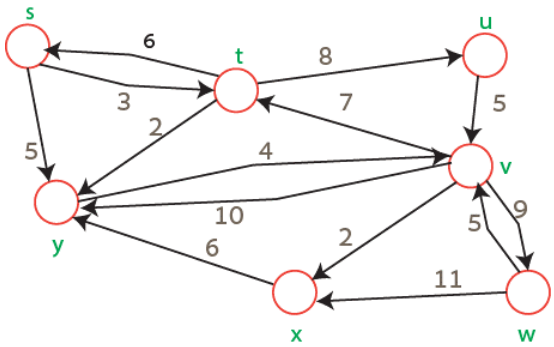
```
Dijakstra (G, w, s)                    // מקבלים רשימה, משקלות, נקודת התחלה
  Initialize-Single-Source(G,s)        // אתחול הגרף
  S = ϕ                                // אתחול הקדקודים המטופלים כקבוצה ריקה
  Q = V[G]                             // אתחול התור בהכנסת כל קדקודי הגרף
  while Q ≠ ϕ                          // לולאה רצה עד שתור הקדימויות ריק
```

```
u = Extract-Min(Q)                // הוצאת ראש התור
S = S ∪{u}                        // צירוף ראש התור למטופלים
for each vertex v ∈Adj[u]         // מעבר על כל השכנים של הקדקוד
  Relax(u,v,w)                    // ביצוע הקלה
```

שימו לב, שפעולת ההקלה לא נועת את הקדקוד בפני שינויים. דבר זה נותן לנו את האפשרות לחזור לאותו קדקוד עם פעולת הקלה של שכנים נוספים, מה שייתן לו את האופציה להגיע בסופו של דבר לערך האופטימלי של $d[v] = \delta(s,v)$.

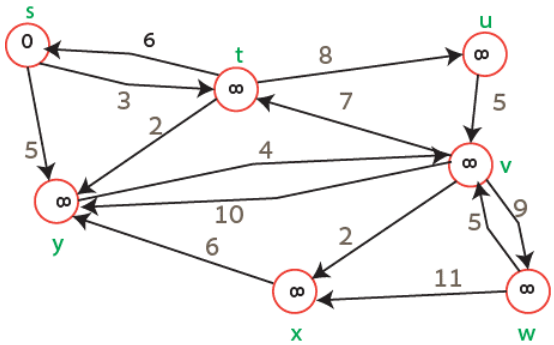
נריץ בעת דוגמה של האלגוריתם ונראה את סדר הפעולות:

ניקח את הגרף שהרצנו עליו את פרים וקרוסקל, ונעשה לו התאמות בשביל שיתאים לשימוש כאן:

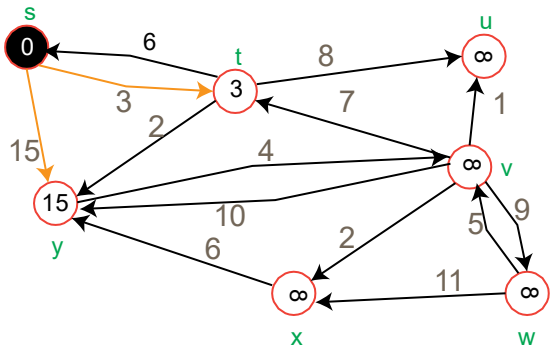


אנחנו לוקחים גרף שהוא מכוון וממושקל, כאשר כל האיברים חיוביים, ויש לנו כמה מעגלים, סתם בשביל הספורט.

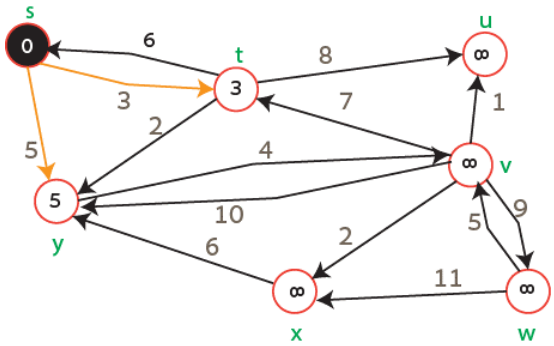
קודם כל – נעשה אתחול לכל הגרף:



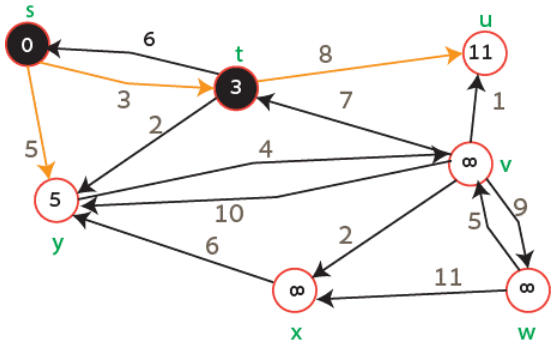
קדקוד s יקבל את הd להיות 0, וכל השאר הם במרחק אינסוף. תור הקדימויות שייבנה, כמובן יהיה מאוד פשוט, מאחר שיש רק ערך אחד שהוא קבוע ואמיתי, וכל השאר די לא רלוונטיים. הבדיקה הראשונה של תור הקדימויות בוודאי תניב שהוא לא ריק ונוכל להתחיל –



לוקחים כמובן את הקדקוד s, צובעים אותו בשחור, ומתחילים לעבור על השכנים שלו ומעדכנים אותם על ידי פעולות הקלה.

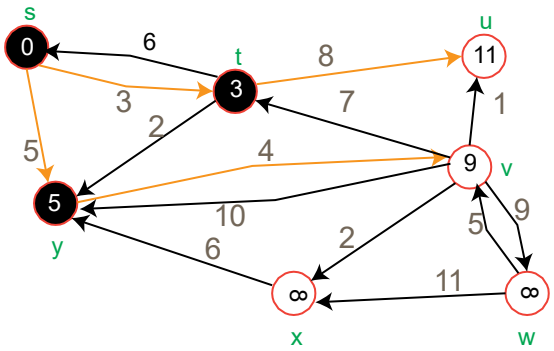


השלב הבא הוא לקחת את הקדקוד t, מאחר ו d[t] = 3.

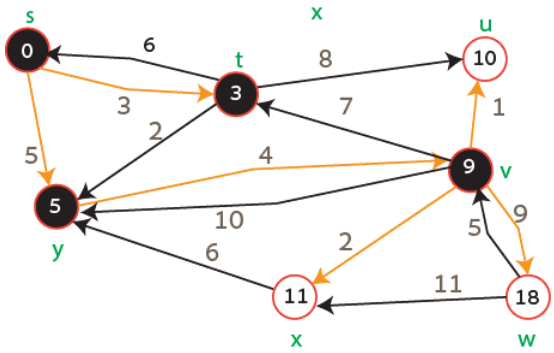


ראשית, אנחנו מעדכנים את u, שמים בו ערך 11. ועכשיו בודקים את השכן השני של t, הלוא הוא y.
אממה? s→y = s→t→y = 5. מה יקרה עכשיו? על פי התנאי בהקלה המחפש רק אפשרויות של קטן ממש, הערכים לא ישתנו וכאן הכל יישאר אותו דבר.

הלאה –



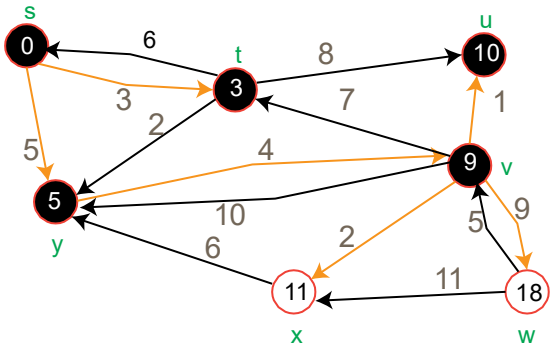
לוקחים את קדקוד y, ומעדכנים את השכן היחיד שלו v. שום דבר לא חשוד פה.



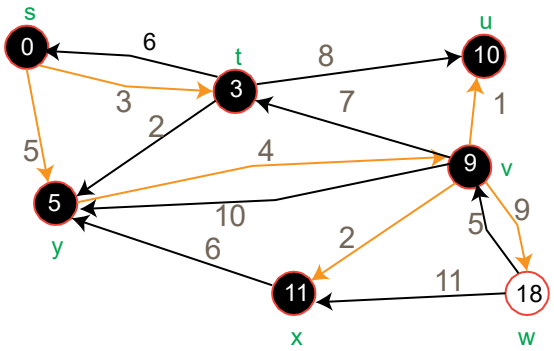
הקדקוד הבא בגודלו הוא v, d[v] = 9. והוא עושה מספר דברים – קודם כל, הוא מעדכן את u. מסתבר שלעבור שלושה קדקודים יוצא מהר יותר מאשר שניים, כולנו נדהמים אבל לא מאבדים עשתונות ומעדכנים את שני הקדקודים הנותרים.

האם סיימנו? לא!

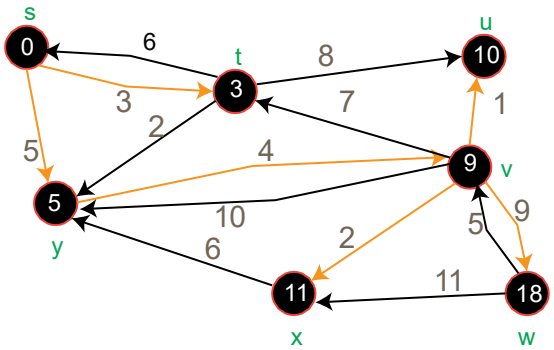
עד שלא נעבור על כל הקדקודים בפעולות הקלה, לא נוכל להיות בטוחים שהגענו לדלתא של כל הקדקודים. ולכן נמשיך הלאה ונבדוק את הקדקוד הבא u.



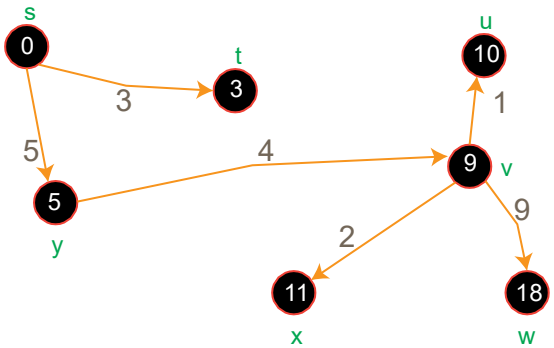
זה היה קצר. שום מסלול לא ממשיך ממנו.



גם קדקוד x לא מעדכן אף אחד, כי 6+11 לא ממש קטן מ-5.



עכשיו סיימנו לעבור על כל הקדקודים, תור הקדימויות ריק, ואנחנו יודעים בוודאות שאנחנו יכולים למצוא את המסלולים הקצרים ביותר מ-s.



סיימנו.

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה (25.10 על פי הספר):

אם מריצים את האלגוריתם של דייקסטרה על גרף מכוון ומשוקלל $G(V,E)$ עם פונקציית משקל אי-שלילית w ומקור s, אזי עם עצירת האלגוריתם, $d[u] = \delta(s,u)$ עבור כל הקדקודים $u \in V$

הוכחה: יוכח בהמשך.

מסקנה (25.11):

אם מריצים את האלגוריתם של דייקסטרה על גרף מכוון משוקלל $G(V,E)$ עם פונקציית משקל אי-שלילית w ומקור s, אזי עם סיום ההרצה, תת-גרף הקודמים G_π הוא עץ מסלולים קצרים ביותר המושרש ב-s.

הוכחה: כנ"ל

ניתוח זמן ריצה

אמרנו שזמן הריצה של דייקסטרה הוא יחסית מהיר. אך עד כמה? זה תלוי בעיקר במימוש של תור הקדימויות. כמובן שאם נחזיק סתם מערך לינארי ונעבור עליו בכל פעם לא נקבל תוצאות טובות (בהנחה שהוא לא ממוין, כל הוצאה תהיה O(V), ומאחר שיש לנו V פעמים שאנחנו עושים את כל הסיבוב הזה, נקבל $O(V^2)$.

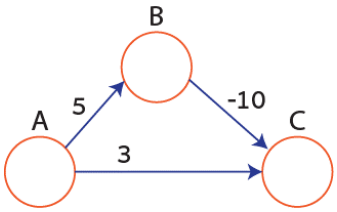
ננסה לעשות את זה באמצעות ערימת-מינימום שנחשבת יעילה ופשוטה, ואז כל הוצאה של קדקוד תהיה O(LogV). וכמובן שגם פה נעשה את זה |V| פעמים. בנוסף, יש לנו את בניית הערימה שתהיה O(V) – יש לזכור שהבניה של כל הערכים שהם אינסוף מלבד s שהוא 0, לא ממש אמור להיות מסובך. עכשיו נותר רק לעשות את פעולת ההקלה. ההקלה אינה רק פעולה פשוטה של השמה שנעשית ב(1)O, אלא יש לנו פה פעולה של פעפוע של הערימה שנעשה ב(O(LogV, פעולה זו נעשית לכל היותר |E| פעמים – במקרה הגרוע בו בכל קשת נצטרך לעדכן את הקדקודים. אם כן יש לנו שתי אפשרויות שניתן לצמצם תחת (O((E+V)LogV, שהוא בדרך כלל O(ELogV) מאחר ובדרך כלל יש יותר קשתות מקדקודים.

ניתן גם לשפר את הזמן הזה על ידי ערימת פיבונאצ'י, שהוא הרבה יותר מסובך וארוך ולא נלמד אותו, אבל אסימפטוטית הוא מביא זמן ריצה יותר טוב.

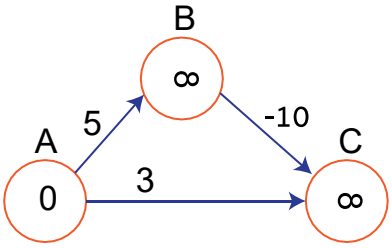
בעיית המשקלים השליליים

הזכרנו את זה קודם, וזה בטח עוד יעלה, אבל למה דייקסטרה לא מסוגל להתמודד עם משקלים שליליים?

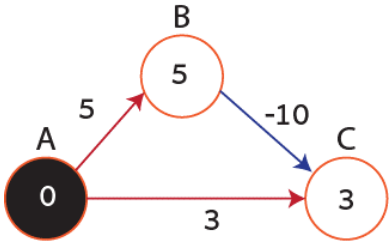
האלגוריתמם של דייקסטרה, נוגע פעם אחת בכל קדקוד. ראינו אלגוריתם, שעוד לפני שאנחנו מתחילים לעשות משהו, אנחנו מעבירים את הקדקוד המטופל מרשימת הממתינים לרשימה של הקדקודים השחורים-המטופלים. כך שאם פתאום נגלה דרך טוב יותר לאחד הקדקודים שכבר טיפלנו בו, לא תהיה לנו שום דרך לעדכן את הקדקוד. נראה דוגמא שתסביר את זה טוב יותר:



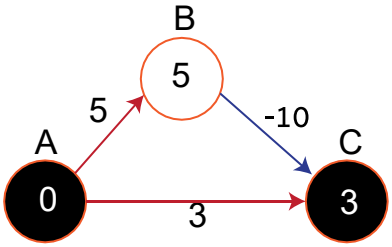
נריץ את האלגוריתם על הגרף הבא באופן הרגיל. ראשית, נאתחל את כל הקדקודים בגרף על פי הדרישה – 0 לקדקוד הראשון, ואינסוף לכל השאר:



עכשיו, אנחנו יכולים להתחיל לעבוד. נבחר את הקדקוד, בעל המסלול הקצר ביותר, ונעדכן את הקדקודים הסמובים אליו:



בשלב הזה, אם היינו הולכים לקדקוד B, היינו יכולים להמשיך על הקשת היוצאת ממנו, ולסמן בקדקוד C את הערך של המסלול להיות 5-. אבל – אל פי האלגוריתם, אנחנו בוחרים דווקא במסלול שמוביל ל-C, מאחר שהערך שלו נמוך יותר. נעבור אליו –



קדקוד C לא מוציא ממנו שום קשת, ולכאורה היינו עוברים לקדקוד B, אבל מאחר ועברנו כבר שני קדקודים, שהם במקרה n-1 קדקודי בסך הכל, אנחנו עוצרים את האלגוריתם ומחזירים את הגרף איך שהוא עכשיו. כמובן שזה טעות, ואם היינו ממשיכים לבדוק, היינו מגלים את הטעות, אבל בשביל זה לא משלמים לנו.

הבדלים בין דייקסטרה לפרים

במעבר ראשון על האלגוריתם של דייקסטרה, ישר קופץ לנו לעין שזה מאוד דומה לאלגוריתם של פרים. שניהם עושים אתחול לאינסוף, שניהם משתמשים בתור קדימויות וגם הריצה שלהם בסך הכל די דומה. אך יש לשם לב למספר הבדלים.

האלגוריתם של פרים מיועד בעיקרו, ואכן מבצע זאת בהצלחה, למציאת עץ פורש מינימלי. הכוונה היא שאנחנו מחפשים פה עץ שיחבר את כל הנקודות ומשקלו הכולל יהיה מינימלי. יש לזה שימושים רבים אם נרצה למצוא דרך לפרוש קווי חשמל באופן שיהיה יעיל ביותר תחת איזור מסוים, אך אין לנו שום ערובה לכך שבין שתי נקודות כלשהן אנחנו נמצא את הדרך הקצרה ביותר.

האלגוריתם של דייקסטרה מחפש את המסלולים הקצרים ביותר בין כל הקדקודים לקדקוד מסוים שיוגדר. השימוש של זה יעיל לניווט, או בניית דרכים מנקודה מסוימת, יכול להיות ואף הגיוני שהגרף שנקבל לא יהיה בעל המשקל המינימלי, אך זו נקודת הסתכלות שלא מעניינת אותנו. אנחנו מחפשים פה את הפתח לאופטימיזציה עבור קדקוד בודד.

בנוסף, פרים עובד אך ורק על גרפים בלתי מכוונים, ודייקסטרה עובד על מכוונים ולא מכוונים כאחד.

האלגוריתם של בלמן-פורד

האלגוריתם של בלמן-פורד פותר את הבעיה הכללית יותר של המסלולים הקצרים ביותר. בעוד שדייקסטרה הוא יחסית מהיר, חלות עליו ההגבלות של ערכים לא-שליליים, ואם אנחנו נרצה להכניס כאלה למשוואה, נגיד אם נכניס לחישוב גם גובה שיכול להיות שלילי, דייקסטרה יוציא לנו תשובה הגיונית, כמו שכבר ראינו.

דבר נוסף שמייחד את בלמן-פורד הוא, שהאלגוריתם בודק ומחזיר תשובה בוליאנית האם יש לנו מעגל שלילי שמחזיר לנו בעצם תשובה לא מדויקת. הוא לא פותר את הבעיה או מציין איפה היא קיימת (למרות שזה משהו שאפשר לבדוק), אלא רק אומר האם זה קיים בגרף הנתון.

הסבר האלגוריתם

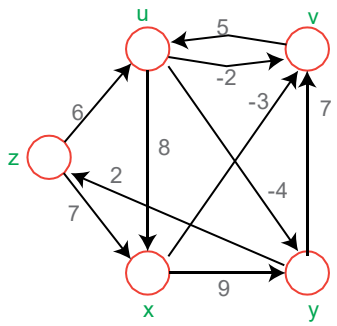
בשונה מדייקסטרה שעושה הקלה רק לשכנים של הקדקוד ולוקח בכל פעם את הקדקוד בעל המשקל הנמוך ביותר, בלמן-פורד פשוט רץ על כל קדקוד, ובתוכו נכנס לכל הקדקודים המקושרים אליו בסדר לקסיקוגרפי ומבצע הקלה, בעצם זה לולאה מקוננת.

לאחר הסבב הזה, מתבצע סבב נוסף של בדיקה האם יש מעגל שלילי אינסופי, אם כן אז מחזירים FALSE.

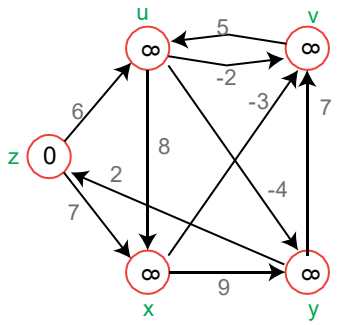
והנה האלגוריתם:

```
Bellman-Ford(G,w,s)                          // מקבלים את הגרף, רשימת המשקלות ונקודת המקור
  Initialize-Single-Source(G,s)              // אתחול הגרף
  for i = 1 to |V[G]|-1                      // ריצה כמעט עד הקדקוד האחרון
      for each edge (u,v) ∈ E[G]             // מעבר על כל הקדקודים המקושרים
        Relax(u,v,w)                         // הקלה
  for each edge (u,v) ∈ E[G]                 // בדיקה של כל הצלעות
      if d[v]>d[u]+w(u,v)                    // אם תנאי זה מתקיים – יש מעגל שלילי אינסופי
        return FALSE
  return TRUE                                // במידה וכל המעבר חוזר ללא שגיאות מחזירים אמת
```

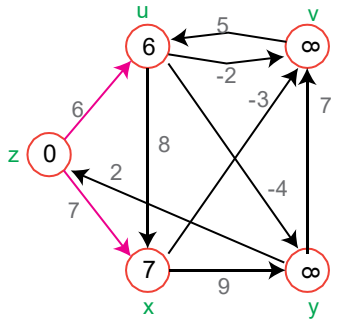
עבור הדוגמה נשתמש באותה אחת שנעשתה גם בספר:



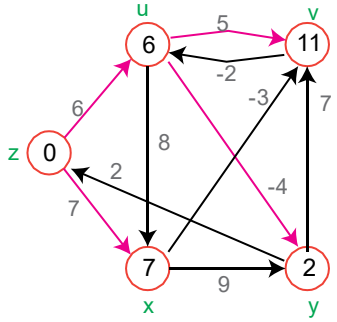
זה הגרף הבסיסי איתו אנחנו מתחילים, ניתן לראות שיש בו מעגלים, ויש בו משקלים שליליים, אך אין בו מעגל שלילי.



בתחילת הריצה אנחנו עושים אתחול. הקדקוד z נקבע להיות נקוד המקור ולכן מאותחל ל-0. כל השאר מאותחלים לאינסוף.



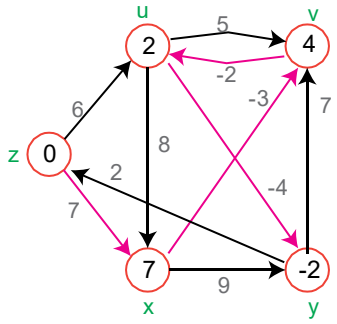
מתחילים את הריצה מהקדקוד ההתחלתי, צובעים את הקשתות הרלוונטיות, מעדכנים את הערכים וממשיכים הלאה על פי סדר אלפבתי.



עבור הקדקוד u, נבדוק את צמד הקשתות היוצאות ממנו – (u,v)(u,y). זה יעדכן לנו הערכים בקדקודים האלה.

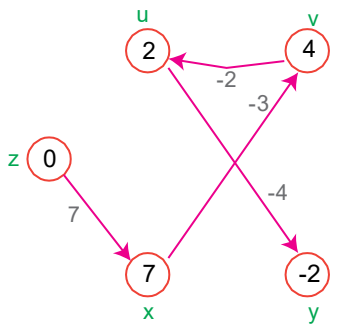
למעשה עכשיו אנחנו כבר עוברים הלאה לקדקוד v. הקשת היוצאת ממנו (v,u) בודקת האם 6 <11-2 .

מאחר ולא, לא נעשה שום שינוי וממשיכים הלאה.



בשלב זה, שהוא השלב הסופי, מתרחשים לא מעט אירועים. אנחנו בודקים את הקדקוד x. ואת הצלעות היוצאות ממנו (x,y)(x,v). הקשת (x,v) שהמשקל שלה שלילי גורם לנו לעדכן את הקדקוד v להיות 4. עכשיו אנחנו צריכים לבדוק שוב את הצלעות היוצאות מ-v. אם עדכנו אותו, הרי יכול להיות שזה ישפיע על קדקודים אחרים שמקושרים אליו. ואכן, (v,u) שגם הוא בעל משקל שלילי מעדכן את u, ומשנה אותו מ-11 ל-2. הקדקוד y, על אף הערך השלילי הקיים בו, לא באמת מעדכן שום ערך – לו הקשת (y,z) היתה מעדכנת את z להיות נמוכה יותר מ-0, זה היה גורם לכל הגרף להיות בעל משקלים אינסופיים שליליים.

בסופו של דבר, אנחנו מסיימים את ההרצה ומקבלים את העץ הבא:



שבוייח.

ניתוח זמן ריצה

האתחול עצמו מתבצע בזמן $\Theta(V)$, פשוט עוברים על כל הקדקודים.

כל אחד מהמעברים על הקשתות נעשה תחת חסם עליון של גישה לכל הקדקודים – $O(VE)$

הוכחת נכונות האלגוריתם

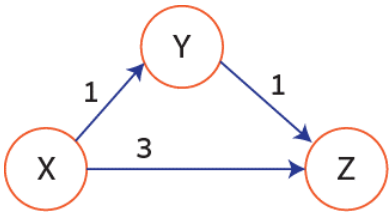
יעודכן בהמשך. עוד לא הגענו לזה בשיעור.

שאלות הרחבה

נתון גרף G(V,E) מכוון וממושקל.
טענה: אם נוסיף קבוע חיובי k>0 לכל משקל קשת בגרף, עץ המרחקים הקצרים מקדקוד כלשהו גרף לא ישתנה. הוכח או הפרך.

לא נכון.

אמנם ראינו תרגיל בשיעורי הבית של עץ פורש מינימלי, בו הוספנו משקל אחיד אך התוצאה לא השתנתה. אך כאן ניתן לראות באמת את ההבדל בדרישה בין שני האלגוריתמים. בעוד שבמציאת עפ"מ, ברגע שמעלים את כל הערכים הכל שתנה באותו כיוון, כאן הוספה של ערכים יכולה להיות הרסנית. מדוע? אם יש לנו מסלול שעובר בין כמה קדקודים שונים, כאשר יש מסלול ישיר, אך יקר יותר, הוספת המשקל עלולה לגרום לתיעדוף של אותה קשת מאשר המסלול האחר.



ניקח לדוגמה את הגרף הבא. ברור שנעדיף ללכת מהמסלול שעושה סיבוב, אך שוקל רק 2, לעומת הישיר שעולה 3 (דרך קצרה שהיא ארוכה וכל זה), אבל אם נוסיף k=2, פתאום הקשת (x,z) תשקול 5, לעומת המסלול x→y→z שישקול 6.

נתון גרף G(V,E) מכוון וממושקל.
טענה: אם נוסיף קבוע שלילי k<0 לכל משקל קשת בגרף, עץ המרחקים הקצרים מקדקוד כלשהו גרף לא ישתנה. הוכח או הפרך.

למעשה, מדובר במעט באותה שאלה כמו קודם, רק בכיוון אחר. ברור שברגע שאנחנו מכניסים פה משהו שלישי, אנחנו שוללים את האפשרות להשתמש באלגוריתם דייקסטרה. אם ננסה להשתמש באלגוריתם דייקסטרה על גרף שיש בו קשתות במשקל שלילי, הוא יחזיר תשובות לא נכונות.

אבל גם אם נישאר בערכים חיוביים, אם נסתכל בדיוק על אותו גרף מהשאלה הקודמת, אבל לאחר הוספת הk=2. נקבל מסלולים קצרים חדשים, ואם נוריד את מה שהוספנו (k= -2), אז נחזור לתשובה אחרת, ולכך גם זה לא מתקיים.

נתון: גרף מכוון וממושקל G(V,E) עם פונקצית משקל w→e∈E. כמו כן, נתון קדקוד s∈V. כתוב אלגוריתם יעיל ככל האפשר שמוצא מסלולים קצרים ביותר מכל קדקוד בגרף ל-s.

כשהתחלנו לדבר על המסלולים הקצרים ביותר, העלינו את הגרסאות השונות לבעיה, ובעיה זאת היתה אחת מהן. כמובן שהפתרון לבעיה הוא יחסית פשוט – יש לנו אלגוריתם שעושה בדיוק את זה, רק בכיוון ההפוך. המשימה שלנו היא, להגדיר את השינויים הנדרשים על מנת שיצליח לפתור את הבעיה הזאת, והחלק החשוב והלא-פחות-מסובך, להוכיח את הנכונות של מה שעשינו.

הרעיון של האלגוריתם שנציע הוא כזה – אם אנחנו רוצים למצוא את כל הדרכים המובילות לקדקוד אחד, כמובן שלא נבדוק את הקדקודים עצמם – אם הם מגיעים ומה הדרך הקצרה ביותר, כי זה ייקח לנו יותר מידי זמן. מה שנעשה הוא בעצם השיטה הישראלית לנסיעה ברחוב של "אין כניסה". ניסע ברברס. או במילים אחרות –

1. נהפוך את כל כיווני הקשתות – מה שייצור לנו מצב, בו הקדקוד s, במקום להכניס אליו את המסלולים יוציא אותם לעבר הכיוון ההפוך.
2. נריץ אלגוריתם למציאת מסלולים קצרים ביותר מ-s. (דייקסטרה או בלמן פורד, על פי תנאי הגרף)
3. ניקח את העץ שהתקבל, ונהפוך את כל הכיוונים להיות הכיוון המקורי (שזה אלגוריתם בפני עצמו, אבל נתעלם מזה ברגע).

כל שנותר לנו עכשיו, הוא רק להוכיח את הנכונות של מה שעשינו. לצערינו, נפנופי ידיים לא ממש מתקבלים בהבנה בקורס, ואמירות של "נו, זה עובד" לא עובדות.

מה שננסה הוא להוכיח בשלילה (כמה מפתיע) שזה לא נכון, ויש מסלולים קצרים יותר. ונראה שאם באמת הטענה מתקיימת סתרנו את נכונות האלגוריתם בו השתמשנו.

הוכחה:

נניח בשלילה שהאלגוריתם שהצענו לא נכון, ולא מביא את המסלולים הקצרים ביותר מכל קדקוד לקדקוד s.

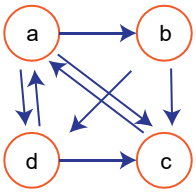
יהיה $P_1(v,s)$ מסלול מהקדקוד v∈V אל s שהאלגוריתם שלנו חישב, והוא באמת אינו הקצר ביותר. ויהי P_2 המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v.

נהפוך את כיווני הקשתות של $P_1(v,s)$ ונקבל את $P_1(s,v)$. נהפוך את כיווני הקשתות ב-P_2, ונקבל את P'.

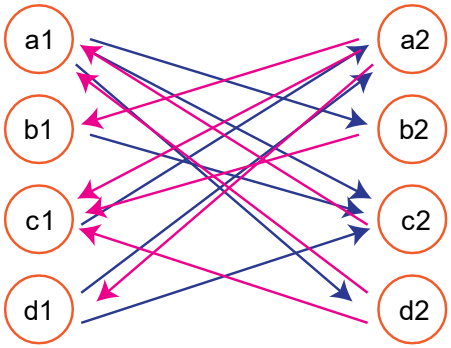
בעת נאמר ש-P' מסלול קל יותר במשקלו מהמסלול $P_1(s,v)$, כי שינינו רק ביוווני מסלול ולא משקלים, ואם האלגוריתם שכתבנו הביא תוצאה לא נכונה, אז לא מדובר על אותו מסלול. ואם כך, אז יש מסלול $P_n(s,v)$ אחר יותר קל, וזה הרי לא ייתכן, כי אנחנו עבנו עם האלגוריתם של בלמן-פורד/דייקסטרה, וידוע לנו שהם עובדים. ויש פה סתירה. מש"ל.

נתון גרף G(V,E) מכוון וממושקל ונתון קדקוד s בגרף.
עלינו למצוא מסלולים קלים ביותר מקדקוד s לכל קדקוד אחר בגרף, כך שהמסלולים יהי בעלי אורך זוגי (בהתייחס למספר הקשתות שבדרך.)

על מנת לפתור את הבעייה הזאת, נשתמש בבניית עזר. נכפיל את קדקודי הגרף, ונשתמש בדיוק באותם קשתות, כאשר מה שאנחנו צריכים לדאוג הוא שבתוך כל חלק של הכפלה לא יהיו קשתות פנימיות, אלא כל קשת תעבור תמיד מצד לצד, באופן הבא:



אם זה היה הגרף המקורי שלנו, אנחנו מפרידים לשני קצוות, ומעבירים את כל הקשתות **פעמיים**, פעם אחת מכל צד לכל קשת. זה ייראה ככה (קצת בלאגן, אבל הרעיון אמור להיות מובן):



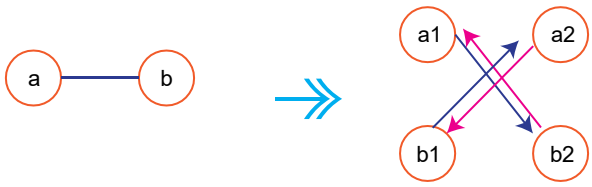
עכשיו, נריץ את האלגוריתם שהחלטנו להשתמש בו, ונקבל בתור מסלולים רצויים רק את אלה שמסתיימים בצד השמאלי (לצורך העניין, אם a יוגדר להיות נקודת המקור, אז אנחנו מחפשים מסלולים שמתחילים בקדקוד a1 ומסתיימים באותו צד). מסלולים שכאלה בוודאי יהיו בעלי מספר קשתות זוגי, מאחר ואין לנו קשתות פנימיות בתוך הקבוצות, אלא רק קשתות חוצות. נשאר לנו רק להראות שבאמת כל המסלולים ב-G נמצאים ב-G', ולהיפך, להראות שההכלה פה היא מלאה ולא הוספנו ב-G' מסלולים שלא היו קיימים ב-G.

מה שאנחנו צריכים להוכיח בעצם, זה שיש לנו את כל המסלולים באורך של קשת אחת, ואת כל המסלולים בעלי 2 קשתות (כמובן, שברגע שנוכיח את זה, אז כל המסלולים יכולים להיות מחולקים באותו רגע לזוגי ואי-זוגי).

עבור על קשת ב-G, יצרנו 2 קשתות – אחת $G'_{1\to2}$ והשניה $G'_{2\to1}$ כך שבעצם כיסינו את כל המסלולים באורך 1. עבור כל מסלול ארוך יותר – מאחר שכיסינו את כל המסלולים באורך 1, הרי שמסלול באורך 2

הוא פשוט הרכבה של שני מסלולים באורך 1. ואם יש לנו את כל המסלולים באורך 1, אז גם המסלולים האלה מכוסים. וכן על זה הדרך ושלום על ישראל.

הערה: ניתן להריץ את אותו רעיון גם על גרף לא-מכוון. ההסתכלות על כל קשת לא-מכוונת בודדה תהיה פשוט כשתי קשתות מכוונות בכיוון מנוגד. לצורך הדוגמה:



בעצם את הקשת הלא-מכוונת שכפלנו 4 פעמים, 2 כיוונים * 2 חלקי גרף.

נתון גרף G(V,E) מכוון וממושקל, עם קדקוד s, ונתונה לנו קבוצת קדקודים V'⊆V (קדקודים "מיוחסים").
כתוב אלגוריתם יעיל ביותר שמוצא מסלולים קצרים ביותר היוצאים מ-s לכל הקדקודים, ועוברים לפחות על קדקוד אחד מ-V'

הדרך הפשוטה לחשוב על זה, זה ניווט למקום מסוים, עם דקירה של נקודות בדרך – לנסוע לאולם חתונות ולעבור בדרך בכספומט/ דוכן פלאפל (תלוי כמובן לאיזה אולם נוסעים).

במובן מסוים, השאלה הזאת מאוד דומה לשאלה שהיה גם קודם. ואכן, דרך הפתרון מאוד דומה, אך יש לעמוד על ההבדלים והאפשרויות השונות. גם כאן אנחנו נשתמש באותה הכפלה אך בגנון שונה – כאן אין לנו בעיה בקשתות פנימיות בתוך שתי הקבוצות השונות, מה שמשנה לנו כאן, זה רק המעבר לקדקוד ששייך ל"קולים". לכן נגדיר את הקשתות באופן הבא – הקשתות החוצות בין שתי הקבוצות יהיו רק כאלה שעוברות לקדקוד מיוחס. המסלול שיתקבל הוא רק מסלול שנמצא בקבוצה השניה, מאחר וברור לנו שהוא נגע בלפחות אחד מהקדקודים הדרושים, ומה שקורה אחר כך כבר פחות חשוב לנו. כמובן, שיכול להיות שאנחנו נמצא מסלול קצר שלא ייכנס לתוך הקבוצה, אך הוא לא עומד על כל הדרישות שלנו.

הערה: גם את השאלה הזאת ניתן להרחיב – אם נדרש למצוא מסלול שעובר בקדקודים האלה אך לא מסיים בהם, נכפיל את הגרף 3 פעמים, כך שהקישור בין הגרף השני לשלישי יהיה כל קשת שיוצאת מאחד הקדקודים המיוחסים לעבר קדקוד אחר, ובחזרה.

הרחבה נוספת שראינו בתרגול – אם יש דרישה למינימום קשתות בספר מסוים, וגם שיהיה מספר קשתות זוגי – מכפילים את הגרף למספר הדרוש בשביל המינימום +1 (כי כל הכפלה מביאה לנו רק קשת אחת, אז אם רוצים שש קשתות באמצע, אנחנו נצטרך שיעברו בין שבעה קדקודים שונים). לאחר מכן מוסיפים עוד הכפלה אחר כך (או מחזירים לאחת ההכפלות הקודמות) על מנת שייתן לנו את האפשרות למעברי זוגיים הלוך וחזור.

ואידך, זיל גמור.

נתון: גרף לא מכוון G(V,E) ותת קבוצה w ⊆ V. נתונים שני קדקודים s,t ∈V.
תאר אלגוריתם יעיל ביותר למציאת מסלול p(s,t), המבקר במספר מינימלי ככל האפשר של צמתים מ-w.

דבר ראשון, נשים לב שהגרף לא ממושקל. כך שאין לנו איזה מסלול מסוים שכבר עכשיו נקבע לנו ואנחנו צריכים לבדוק אם הוא הקל ביותר.

מה שנעשה הוא להגדיר את המשקל בעצמנו. באופן דומה למה שראינו בתרגילים הקודמים, אנחנו נמיין את הקדקודים לשחור (קדקוד בטוח), ואדום (קדקוד לא בטוח), ואת הקשתות ל-4 סוגים שונים:

1. קשת בטוחה – שחור לשחור – אותו נמשקל כ-0.
2. קשת לא בטוחה – אדום לאדום – יקבל 2.
3. קשת בעייתית 1 – משחור לאדום (כניסה לאיזור w) – יקבלו משקל 1.
4. קשת בעייתית 2 – מאדום לשחור (יציאה מ-w) – בדומה לקודם, יקבל משקל 1.

כעת נריץ את האלגוריתם לזיהוי מסלולים קצרים ונקבל את הדרוש.

הוכחת נכונות: למעשה, המשקלים שהבאנו לכל קשת, יתנו לנו בסופו של דבר את מספר הקדקודים האדומים בהם נעבור, ולכן, המסלול הקל ביותר יהיה בהכרח גם המסלול בעל הקדקודים האדומים הנמוך ביותר. משל.

אלגוריתם פלויד וורשאל

האלגוריתם של פלויד-וורשאל הוצג בשנת 1962 על ידי רוברט פלויד וסטיבן וורשאל (כל אחד בנפרד. מוחות גדולים וכו'). וכמו שנאמר כבר מקודם, הוא מבוסס על התכנון הדינאמי, ומצליח למצוא מסלול קצר ביותר מכל קדקוד לכל קדקוד אחר, והוא מצליח להתמודד בצורה לא רעה גם עם משקלות שליליים.
המיוחד בו לעומת האלגוריתמים עד עכשיו, הוא שפלויד-וורשאל מקבל לא את הגרף, אלא את טבלת הסמיכויות של הגרף – מטריצה בגודל n*n המתארת באופן פשוט את המעברים מקדקוד לקדקוד.

הסבר האלגוריתם

עבור הטיפול באלגוריתם אנחנו מכינים לנו שתי מטריצות, בגודל n*n כל אחת. מטריצה אחת תכונה D ותכיל בסופו של דבר את המשקל מכל קדקוד לחברו, והמטריצה השניה תיקרא $\prod$ (פאי) ותכיל את האיבר הקודם במעבר בין שני קדקודים.

המקרה הבסיסי בו נמלא את המטריצות, הוא המעבר הישיר בין כל שני קדקודים – השורות יבטאו את המוצא של הקשת והעמודות את היעד. אם לא נמצא מסלול שכזה, נשאיר את הערך בין שני הקדקודים כ-∞ (כמובן, שאם אין דרך באמת להגיע אל אותו קדקוד אנחנו גם נישאר באינסוף), ונסמן גם את המרחק בן כל קדקוד לעצמו בתור 0. בהתאמה נמלא גם את מטריצת הקודמים $\prod$, ונכתוב על הקשר בין שני קדקודים את הקודם שלו – בשורה הראשונה נכתוב כל קדקוד שיש קשת היוצאת אליו מ-1 וכן הלאה כל שורה (שימו לב: המספור הוא מ-1 ולא מ-0).ובכל הקדקודים שאין לנו מעבר מקדקוד מסוים, נסמן את הקודם בתור NIL, כמובן שהאלכסון של כל צלע לעצמה תהיה – NIL.

לאחר שהגדרנו את השלב הראשוני, כל איטרציה תעבור על האפשרויות הקיימות בין שני קדקודים או יותר, כאשר בכל פעם נוסיף רק קדקוד אחד למעגל הבדיקות, אך נבדוק את כל האופציות שמתווספות לנו על ידי זה – כלומר, אם אני עכשיו בודק את D^3, אני לא בודק רק את קדקוד 3, אלא את כל המעברים הנוגעים ישירו, או בעזרת קבוצת הקדקודים {1,2,3}. במידה ואנחנו מוצאים איזשהו קשר בעזרת הקדקוד הנוסף, שהוא נמוך יותר ממה שכתוב לנו כרגע (בתור התחלה, הכל יהיה נמוך יותר מ-∞), וכמו כן, נעדכן את מטריצת הקודמים, ונכתוב שבמסלול (i,j) אנחנו עוברים בקדקוד k כלשהו.

למעשה, אם אנחנו לוקחים את קבוצת הקדקודים V= {1,2...n}, נבחר איזה תת קבוצה של קדקודים {1..k} בהם ידוע לנו שעובר המסלול p, שהוא המסלול הקצר ביותר בין (i,j) כלשהם בגרף. עכשיו נבחר בכל פעם

את הקדקוד ה-k, ונבדוק האם הוא חלק מהמסלול הקצר ביותר אותו אנחנו מחפשים (קצת בדומה למה שעשינו בתכנון הדינאמי של בעיית תיק הגב). עבור השאלה הזאת, האם k שייך למסלול, יש לנו בדיוק שתי אפשרויות, כן ולא:

- אם k לא שייך למסלול הקצר ביותר, אז בעצם המסלול הקצר ביותר לא שייך רק לתת הקבוצה {1,2..k), אלא גם ל {1,2...k-1}, כי הרי k לא חייב להיות חלק מהקבוצה
- k שייך למסלול הקצר – נחלק את המסלול שמכיל את k לשני חלקים p1,p2 כאשר k עומד בתווך. שוב ניתו לראות, שגם p1 וגם p2 קיימים בקבוצה של {1,2..k-1}.

הנוסחה הרקורסיבית מוגדרת בצורה הבאה:

$$d^{(k)}_{ij} = \begin{cases} w_{i,j} & \text{אם } k = 0 \\ \mathrm{Min}(d^{(k-1)}_{ij},\ d^{(k-1)}_{ik} + d^{(k-1)}_{kj} & \text{אם } k \geq 1 \end{cases}$$

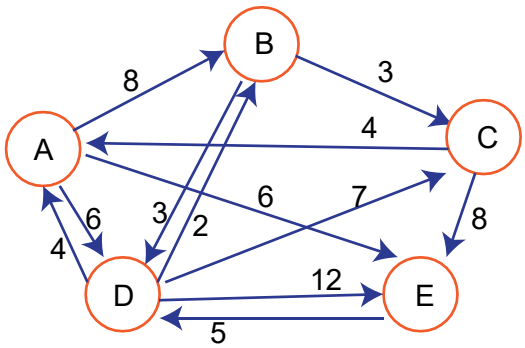
// מקרה הבסיס

// כל מקרה אחר, בודקים אם אנחנו עושים שימוש בקדקוד k //

נסתכל כעת על הקוד:

```
Floyd-Warshall(w)                                   // אנחנו מקבלים את טבלת הסמיכויות
  n = rows[W]                                       // מגדירים את המעבר למספר השורות
  D(0) = W                                          // הגדרת אתחול הבסיס
  for k = 1 to n                                    // לולאה ראשית – הוספת כל קדקוד לבדיקה
      for i = 1 to n                                // לולאות מקוננות לבדיקת המסלול
        for j = 1 to n
            d(k)ij = min (d(k-1)ij, d(k-1)ik+ d(k-1)kj)   // הנוסחה הרקורסיבית שהגדרנו
  return D(n)
```

נדגים את הריצה של האלגוריתם על הגרף שמובא לנו בשיעורי הבית (כי יש גבול, ואם כבר אני מריץ לפחות שיצא לי משהו מזה).



נתון הגרף הבא, אין בו משקלות שליליים, אבל זה לא אומר שהאלגוריתם לא יעיל פה. קודם כל – נבנה את שתי המטריצות:

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & 6 \\ \infty & 0 & 3 & 3 & \infty \\ 4 & \infty & 0 & \infty & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(0)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & NIL & 1 & 1 \\ NIL & NIL & 2 & 2 & NIL \\ 3 & NIL & NIL & NIL & 3 \\ 4 & 4 & 4 & NIL & 4 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

החלק הזה היה פשוט קריאה מהגרף (או טבלת סמיכויות, במידה ויש לנו), והכנסת הערכים במטריצה המתאימה – ניתן לראות את ההתאמה, בכל תא ב-D שיש ערך השונה מאינסוף, יש תא מתאים ב-π, המכיל את השורה שאנחנו נמצאים בה.

נעבור ל$D^{(1)}$:

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & \infty & 6 & 6 \\ \infty & 0 & 3 & 3 & \infty \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(1)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & NIL & 1 & 1 \\ NIL & NIL & 2 & 2 & NIL \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

סימנתי את האיברים אותם ניתן לעדכן – שניים מתוכם פשוט הכנסנו להם ערך שהוא לא אינסוף, אולם (4,5) ירד מ-12 ל-10. כבר משהו יותר טוב. איך נדע לזהות על איזה מסלולים וקדקודים אנחנו צריכים להסתכל בשביל לראות האם הם השתנו? העמודות מציינות את הקדקודים אליהם ניתן להגיע מכל קדקוד – למשל, העמודה הראשונה מראה לנו שיש מסלול ישיר מ-3 ומ-4.

נמשיך ל$D^{(2)}$:

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ \infty & 0 & 3 & 3 & \infty \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(2)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ NIL & NIL & 2 & 2 & NIL \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

לא היו פה הרבה עדכונים, אבל הורדנו אחד מהמסלולים בקצת.

נמשיך ל$D^{(3)}$:

$$D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 3 & 11 \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(3)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & NIL & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ NIL & NIL & NIL & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

אין צורך באמת לפרט כל שלב. אם היה לנו פו משקלות שליליים, יש סיכוי שהיו פה קצת יותר עדכונים, מוזמנים לנסות בזמנכם החופשי.

נעבור ל$D^{(4)}$:

$$D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 3 & 11 \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(4)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & NIL & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

למעשה, אין פה הרבה עדכונים, כי בחלק גדול מהמקרים אנחנו מגיעים לתוצאה שהיא שווה בדיוק למה שיש לנו – למשל (c,b) שעבר קודם c→a→b ויכול עכשיו לעבור דרך c→a→d→b ולקבל את אוותו משקל, לא רלוונטי לנו כי אנחנו מחפשים קטן ממש.

נבדוק אחרון את $D^{(5)}$:

$$D^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 & 6 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 3 & 11 \\ 4 & 12 & 0 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^{(5)} = \begin{bmatrix} NIL & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & NIL & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & NIL & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & NIL & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & NIL \end{bmatrix}$$

קצת מפתיע, אבל אין פה שום עדכון לאף תא. הווה אומר סיימנו את התהליך, ויש לנו את המטריצות הסופיות. עכשיו מה?

רק נזכיר – אנחנו חיפשנו את המסלולים הקצרים מכל קדקוד לכל קדקוד. שתי המטריצות שקיבלנו למעשה מחזיקות לנו את כל המידע הדרוש, ואנחנו צריכים רק לדעת כיצד להוציא אותו. לצורך כך נשתמש באלגוריתם רקורסיבי להדפסת מסלול בין שתי נקודות:

```
Print-All-Pairs-Shortest-Path(∏, i, j)        // הפונקציה מקבלת את מטריצת הקודמים והנקודות הדרושות
  if i=j                                      // אפשרות א' - כאשר מדובר בהכנסה של אותו קדקוד
    print I                                   // מדפיסים רק את הקדקוד
  else if πij = NIL                           // אפשרות ב' – לא קיים מסלול בין הקדקודים
      print "no path from" I "to" j "exists"
  else PAPSP(∏, i, πij)                       // אחרת – מכניסים רקורסיבית צעד קודם של המסלול
       print j                                // בסיום הריצה – מדפיסים את הקדקוד הסופי
```

נריץ על יבש את האלגוריתם, ונחפש את המסלול הקצר ביותר של (4,3)

(4,3) כניסה – הקדקודים לא שווים, ועל פי המטריצה יש לנו מסלול ביניהם. ולכן מכניסים לאלגוריתם את הקודם שרשום לנו במטריצה – 2

(4,2) כניסה – הקדקודים לא שווים (וברור שקיים לנו מסלול, אחרת לא היינו מגיעים לפה מלכתחילה), נכנסים שוב עם הקודם של (4,2) – 4

(4,4) כניסה – הקדקודים שווים! הגענו לתחילת המסלול! מדפיסים את i ← 4
חוזרים לקריאה הקודמת –

(4,2) המשך – מדפיסים את j ← 2
חוזרים לקריאה הקודמת –

(4,3) המשך – מדפיסים את j ← 3
יציאה.

המסלול שהודפס הוא 4→2→3.
סיימנו.

הערה: כיצד נדע האם יש לנו מעגלים שליליים בתוך הגרף? אמרנו שיש לנו שני אלכסונים חשובים – האלכסון של המטריצה D בו כל קדקוד לעצמו אמור להגיע במשקל 0 – הדרך היחידה בה דבר זה ישנה, הוא אם יש לנו מעגל שלילי, מה שייצור לנו מצב בו מעבר מקדקוד לעצמו, לא יהיה 0 אלא יהיה סך המשקל השלילי של המעגל.
בנוסף, מטריצת הקודמים אמורה להישאר בNIL באלכסון המרכזי, אם נראה שיש לנו מעבר מאותו קדקוד לעצמו, דרך קדקוד אחר, ככל הנראה מדובר בו על מעגל שלילי, אחרת אין סיבה לעדכן את הנתון הזה.

ניתוח זמן ריצה

את האלגוריתם הזה די קל לנתח – יש לנו 3 לולאות מקוננות, הן רצות במקסימום על כל הקדקודים בכל פעם – $n*n*n = n^3$. זמן הריצה של פלויד וורשל הוא $\Theta(n^3)$.

ההדפסה עצמה לוקחת לנו במקרה הכי גרוע n, אם יש לנו משהו מנוון לגמרי שאנחנו צריכים להכנס לכל הקדקודים בדרך. אם נרצה להדפיס ממש את כל המסלולים הקיימים, נצטרך שוב לעבור n איברים בכל פעם, שגם זה יוצא לנו n^3 ($n_{\text{זמן ריצה של האלגוריתם}}*n_{\text{איברים של מוצא}}*n_{\text{איברי יעד}}$), מה שמשאיר את זמן הריצה באותו סדר גודל מבחינה אלגוריתמית.

תפוסת מקום בזיכרון

האלגוריתם המקורי תופס לנו לא מעט מקום בזיכרון – יש לנו שתי מטריצות, כל אחת בסדר גודל של n*n, וזה עבור רק שלב אחד, ויש לנו n שלבים כאלה, וזה לא מעט מקום. ניתן לשפר זאת אם נשתמש בל פעם רק בשתי איטרציות של מטריצות, ובכל פעם שאנחנו מתקדמים לדאוג למחיקהה של מידע מיותר (אם אנחנו ב$D^{(3)}$ אין לנו צורך במטריצות של $D^{(1)}$. יותר מזה, על ידי חישוב נכון, ניתן לשכתב בכל פעם על אותם מטריצות את הנתונים וכך לחסוך לנו בניה ומחיקה של מטריצות בכל פעם.

רשתות זרימה

נושא רשתות הזרימה נראה דומה מאוד לגרפים. קדקודים, צלעות ומה שביניהם, אך השימושים שלהם שונים לגמרי.

עד עכשיו, המשקלות שקבלנו והשתמשנו בהם בגרפים, היוו ערך שלם ממנו אנחנו לא יכולים לרדת או להשתמש בחלקו, ואילו כעת ברשתות הזרימה, אנחנו מתייחסים למשקל כערך עליון. מה הכוונה? רשת זרימה, כשמה כן היא, מבטאת לנו את היכולת להעביר "משהו" ממקור s(source) ליעד t (termainl\sink), כאשר כל מה שאנחנו מעבירים זורם דרך קדקודים שמקשרים ביניהם. לצורך הדגמה לעולם האמיתי, בדרך כלל מדברים על אפשרויות להעביר מוצרים ממפעל שנמצא בעיר אחת, לבין המחסן שנצא בעיר אחרת. אך מאחר שלמפעל אין דרך לעבור ישירות מהמקור ליעד, הוא עובר דרך תחנות ביניים. הבעיה מתחילה ברגע שהמעברים בין התחנות לא יכולות להיות באותה איכות. למשל- המפעל יכול להוציא 50 ארגזים ביון, אבל בדרך היוצאת ממנו הוא יכול להעביר רק 30 ארגזים ביום – בוודאי שאין צורך שהמפעל יעבוד ויכין ארגזים שתם ייערמו לו. באופן דומה, תכנון מערכת מים או תקשורת, המתבססים על צינורות והעברה בקיבולים שונים, אנחנו תמיד חסומים מלמעלה על ידי מעבר הקיבול הנמוך ביותר. מה שחשוב לשים לב, וגם נחזור עליו בהמשך, שהקדקודים שאנחנו משתמשים בהם, אין בהם שום קיבול. כל מה שנכנס חייב גם לצאת באותו רגע, ואנחנו לא יכולים להגיד לקדקוד שישמור לנו על מה שהגיע עליו.

המטרה שלנו ברשתות הזרימה – למצוא אלגוריתם שמביא לנו את הדרך האופטימלית למעבר מהמקור ליעד, וכל זאת תחת חסם פולינומי.

מושגים כללים לרשתות זרימה

<u>רשתות זרימה</u> – גרף G=(V,E) מכוון שבו כל קשת (u,v) היא בעלת קיבול (capacity) c לא-שלילי ושונה מ-0. אם $c(u,v) \notin E$, אז אנחנו קובעים כי $c(u,v) = 0$, כלומר אין קיבולת (אין זרימה) בין שני הקדקודים האלה. כמו שאמרנו קודם, אנחנו מגדירים את נקודת ההתחלה "המקור" כ-s, ואת הסיום "בור" כ-t. בדרך כלל, מדובר על כך שכל הקדקודים על אותו הגרף מחוברים ביניהם שכולם קשורים, או יכולים להיות קשורים למסלול העובר בין s ל-t, מה שכמובן אומר שהגרף קשיר, ובתאמה, יחס הקדקודים צלעות יקיים את הכלל $|E| \geq |V-1|$.

<u>קיבולת נוכחית</u> – בתחילת התרגילים, אנחנו נקבל גרף עליו מסומנים הקיבולות השונות במצב המקסימלי שלהם. ברגע שנתחיל לעבוד "ולהזרים" בקשתות השונות, נצטרך לסמן זאת על הקשתות. הסימון יופרד בקו אלכסוני במתכונות הבאה – מקס' קיבולת/זרימה נוכחית. לדוגמא 7/11 מבטא שיש לנו אפשרות להזרים עוד 4 יחידות באותה הקשת.

<u>זרימה</u> – העניין לשמו התכנסנו הערב. זרימה היא פונקציה ממשית ברשת שהוגדרה למעלה $f: V \times V \rightarrow R$ (f במשמעות flow), שיכולה לעבור בין כל קדקוד וקדקוד בגרף, ועל מנת שתחשב זרימה, היא חייבת לקיים שלוש תכונות חשובות –

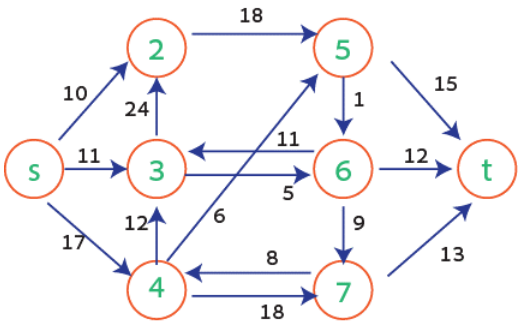
1. **אילוצי קיבול** (Capacity Constrains) – לכל $u,v \in V$, $f(u,v) \leq c(u,v)$ – החלק הזה די אינטואיטיבי. אף קשת לא יכולה שיזרום אצלה יותר מהקיבול המוגדר למקסימום.
2. **סימטריה נגדית** (Skew Symmetry) – לכל $u,v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$. זה כבר פחות אינטואיטיבי, ומשתמשים בזה לא מעט, אז באסה. אם יש לנו זרימה (חיובית) בין שני קדקודים (u,v), ואנחנו רוצים עכשיו להעביר הפוך בין (v,u), אנחנו יכולים פשוט להוריד את זה מהזרימה ולתת את זה לצד השני. לפעמים השימוש באפשרות הזאת, חורג מהגדרת המקסימום, אבל זה

תקין מאחר שאם אתה לא מזרים 2 יחידות לקדקוד אחד, אתה חייב להעביר אותם לאנשהו, ואז אתה יכול "להגדיל" את הקיבולת. (ולמי שמחפש דוגמא מהחיים – נגיד שאשה, או גבר, אנחנו לא שוביניסטיים, מוצאת בגד שהיא רוצה לקנות במחיר יותר זול ממה שהיא ציפתה, אז היא בעצם חסכה את הכסף הזה שהיא לא הוציאה על הבגד, וזה לגיטימי לקנות נעליים).

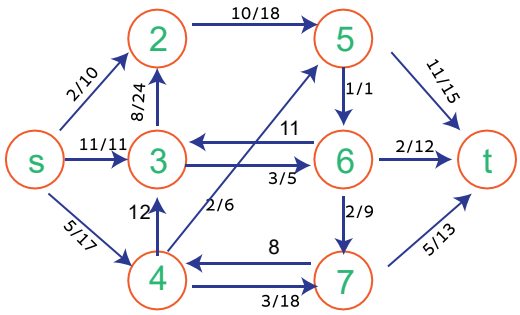
3. **שימור הזרימה** (Flow Conservation) – לכל $u \in V - \{s,t\}$, אנחנו דורשים כי $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$. דבר זה נגזר בעצם מכל מה שתיארנו קודם. מאחר ולקדקוד אין קיבול, ואנחנו מתייחסים לכל זרימה יוצאת כזרימה הפוכה לנכנסת, עלינו לוודא שסך כל הזרימות המקושרות לקדקוד מסויים ייסכמו ל-0. מכלל זה אנחנו מוציאים את קדקודי המקור והיעד, מאחר והם זורמים רק לכיוון אחד – המקור רק מוציא זרימה, והיעד רק מקבל.

<u>זרימה נטו</u> – $|f| = \sum_{v \in V} f(u,v)$ מוגדרת כסך כל הזרימות בין שני קדקודים מסוימים, כאשר בדרך כלל את אחד הערכים יחליף המקור או היעד, ויבטא את סכך הזרימה עד מקום מסוים, או ממקום מסוים לבור. בנוסף, קיימת גם ה<u>זרימה נטו חיובית</u>, המתייחסת כמובן, רק לזרימה החיובית בין הקדקודים, ללא התחשבות בקיזוזים וזרימות סימטריות.

ניקח כדוגמא את הרשת הבאה:



רשת הזרימה הזאת היא הרשת המקורית לפני שהתחלנו להעביר בה. קדקוד s מוציא זרימה בשלוש דרכים, וקדקוד t מקבל זרימה בשלוש דרכים שונות. לאחר שנתחיל להעביר בו את הזרימה, הרשת עלולה להיראות באופן הבא:

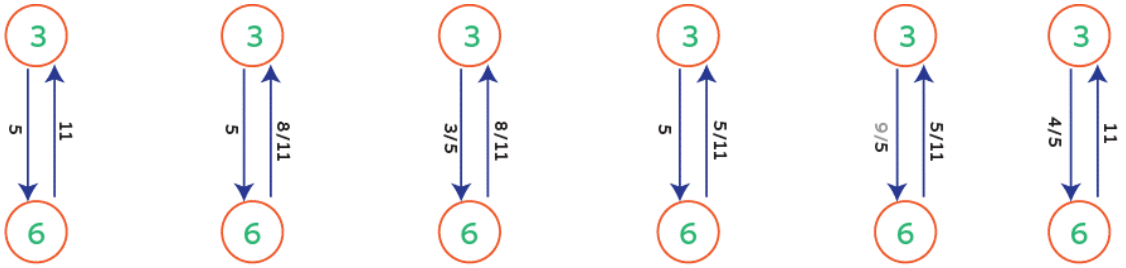


כמובן, שזה רק חלק מהמעבר, ויש פה עוד אפשרויות לשפר, אבל ניתן כבר לראות שאנחנו מקיימים את החוקים הנדרשים – אף קדקוד לא מעביר יותר מהקיבולת שלו. חוק שימור הזרימה נשמר אף הוא, מאחר וכל קדקוד מוציא בדיוק מה שהוא מקבל – ניקח לדוגמא את קדקוד 5.

$f(5,6) = 1$, $f(5,t) = 11$, $f(5,2) = -10$, $f(5,4) = -2$. סך הכל $f(5,5) = 0$.

<u>קיזוזים</u> – קיזוזי זרימה, זה המהלך שאנחנו יוצרים על בסיס הסימטריה הנגדית ושימור הזרימה. אם יש לנו מעבר דו-כיווני בין שני קדקודים, וזרימה באחד או יותר מהקדקודים האלה, יש לנו כמה אפשרויות

לייצג את הזרימה הדו כיוונית הזאת. ניקח לדוגמה זרימה בין שני קדקודים באופן הבא – הקשתות בין הקדקודים 3, ל-6, מכילות אפשרויות לזרימה דו כיוונית. ואכן, ברשת הזרימה שתיארנו, יש זרימה בקשת (3,6). מה יקרה אם נרצה להוסיף זרימה גם בכיוון השני? נראה את התיאור הבא –

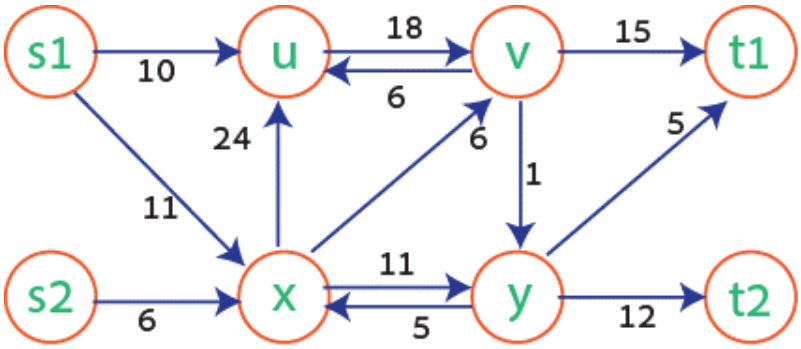


נתחיל משמאל לימין, ונציג את הקיזוזים האפשריים. משמאל נתחיל במצב הרגיל, יש לנו על כל קשת רישום של הקיבול המקסימלי שלה. כעת יש לנו זרימה בקשת (6,3) של 8. כמובן שאין עם זה בעיה וכלום לא אמור להשתנות. בשלב השלישי, אנחנו מזהים אפשרות לקיזוז – יש לנו מער מצד אחד של 8 ומצד שני של 3. כמובן שדבר כזה קצת מיותר, מאחר ואנחנו מדברים על מעברים שקורים לכאורה בו זמנית. אין שום סיבה שתוציא החוצה מקדקוד 3 את מה שנכנס אליו, ותחזיר בחזרה לאותו קדקוד. מה שנעשה, הוא דבר די אינטואיטיבי ופשוט נפחית מקשת (6,3) את הזרימה ההפוכה לה, וכך נוכל לקזז את שתי הזרימות בשביל לקבל מצב של זרימה רק בכיוון אחד. השלב הבא, הוא החידוש היותר גדול – נגיד ואנחנו רוצים עכשיו להעביר בקשת (3,6) 9 יחידות. אוטומטית אנחנו ישר קופצים (או לפחות אמורים לקפוץ) ולהגיד שזה סותר את החוק הראשון של הזרימות – לא מדברים על זרימות שהן גדולות יותר מקיבולים! איך נוכל לעשות זאת בכל אופן? על ידי שימוש בחוק השני. אנחנו רואים שיש לנו זרימה של 5 ב(6,3), ועל פי מה שלמדנו, אנחנו יכולים "להחזיר" את הזרימה אחורה וכך לשנות את הזרימה הזו ל-0, ובצד השני להעביר רק 4/5, ועדיין זה ייחשב לנו כאילו אנחנו מעבירים 9! (יש פה עוד איזה קיזוזון ביניים שלא הכנסתי, תעשו את זה בראש).

מקורות ובורות מרובים

עד עכשיו דיברנו על מקור ובור יחיד. אך מה קורה כאשר יש לנו יותר מקורות או יותר בורות, או יותר משניהם? בלי פאניקה.

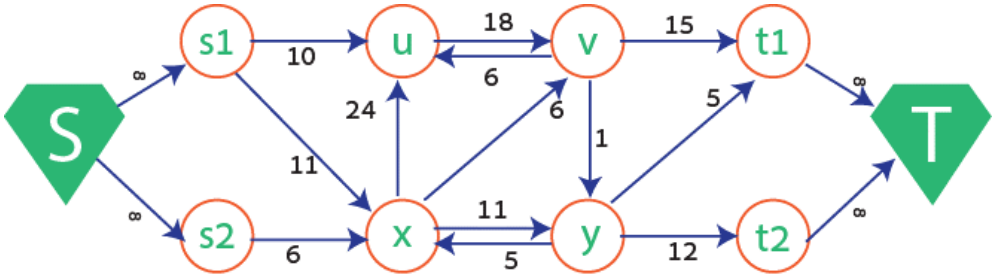
נגיד שיוצג לנו הגרף הבא:



ברור שדרך הפתרון שהצענו עד עכשיו, לא רלוונטית פה, מאחר ואין לנו דרך להזרים רק ממקור אחד. אנחנו צריכים שהכל יעבוד במקביל ובצורה מסונכרנת. איך נעשה את זה? בניית עזר!

נוסיף מקור חדש "מקור-על" (SuperSource), כח-העל שלו יהיה להזרים לכל המקורות את המקסימום האפשרי. נוסיף גם בור חדש "בור-על" (SuperSink), שכח-העל שלו יהיה בהתאמה לקבל את המקסימום. ביחד הם יילחמו בפשע, כי אולי הם לא הקדקודים שיש לנו, אבל הם בהחלט הקדקודים שאנחנו צריכים. נמשיך.

מכל אחד מהצמד החדש נעביר קשת למקורות או מהבורות אל הבור-על, ונגדיר את הזרימה להיות אינסוף באופן הבא –



עכשיו כאשר נזרים את המקסימום מ-S, הוא יוכל לספק לנו את שתי המקורות המקוריים במקסימום שהם יכולים לספוג, שזה בדיוק מה שהם מוציאים. ואותו דבר יקרה גם בצד השני, כמה שלא יגיע לבורות המקוריים יוכל להמשיך הלאה לבור-העל, אבל כמובן שהוא לא יוכל להעביר יותר מאשר הקשתות מובילות אל הבורות. ועכשיו כולם רגועים. כתוביות. סצנת אפטר-קרדיטס.

עבודה עם זרימות

בגדול, כאשר מסתכלים על זרימות, אנחנו מדברים על חתכים שונים של הרשת (נרחיב בהמשך), המחלקת אותה לשני חלקים שבדרך כלל מכונים X,Y. כאשר מתייחסים לקדקוד אחד מתוך הקבוצות, מדברים על x,y ששייכים כמובן כל אחד בהתאמה לקבוצה הגדולה שלו. הזרימה של כל קבוצה, היא סך הזרימות של כל הקדקודים תחת הקבוצה ההיא, כך שאם נחפש את הזרימה של שתי הקבוצות נגדיר זאת באופן הבא: $f(X,Y) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in} f(x,y)$, שזה בעצם אומר, שאנחנו לוקחים כל קדקוד בכל קבוצה ובודקים את סך הזרימות המשותפות ביניהן.

באופן דומה ניתן גם להשתמש בסימון שלקבוצה גדולה כדי לציין ריבוי מסלולים, למשל f(u,V) מציין את כל המסלולים היוצאים מ-u לקבוצה מסוימת.

ישנם מספר "זהויות" ביחסים בין הזרימות, אותם חשוב להבין על מנת שנוכיח איתם את האלגוריתמים והשיטות לשימוש ברשתות זרימה.

למה 27.1

תהי G= (V,E) רשת זרימה, ותהי f זרימה ב-G.

אזי **עבור X⊆V מתקיים f(X,X) = 0**. – מאחר שאמרנו שיש לנו את שימור הזרימה, הדורש שבכל קדקוד הזרימה לעצמו תהיה 0, אזי ברור לנו שגם אם ניקח קבוצת קדקודים, מה שיווצר לנו זה חיבור ענק של אפסים, וכמו שאנחנו יודעים מהבחירות, שום דבר חיובי לא יוצא מחיבור אפסים. בלי פוליטיקה.

עבור X,Y ⊆ V מתקיים f(Y,X) = -f(X,Y) שוב בדומה למעבר על קדקוד בודד, גם כאן קבוצת קדקודים שיתהפכו, יביאו בסופו של דבר את הנגדי של אותה זרימה.

עבור $X,Y,Z \subseteq V$ כאשר $X \cap Y = \phi$ מתקיים, $f(X \cup Y,Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$
$f(Z,X \cup Y) = f(Z,X) + F(Z,Y)$. כלומר, אם יש לנו שתי קבוצות קדקודים זרות, אז הזרימה המשותפת שלהם לקדקוד אחר ולהיפך, שווה לחיבור של כל מלקת זרימות בנפרד. דבר זה מתקיים כמובן רק בקבוצות קדקודים זרות, כי אם היה חלק משותף, אז האיזור המשותף באיחוד היה מבטל אחד את השני על חלק מסוים והתוצאה היתה שונה.

שיטת פורד פולקרסון

בהינתן לנו רשת זרימה כלשהי, אנחנו שואפים למצוא את הזרימה המקסימלית האפשרית בה. השיטה של פורד פולקרסון, לפחות בגרסה המקורית שלה, היא אחת מאלגוריתמי ה"טא-דא!" שכולנו כל כך אוהבים. הרעיון של השיטה, הוא לעבור בשיטה איטרטיבית על מסלולים ולשפר בכל פעם קצת עד שמגיעים לתוצאה הטובה ביותר. כן – תעשו עד שזה בסדר. ובצורה קצת יותר מקודדת:

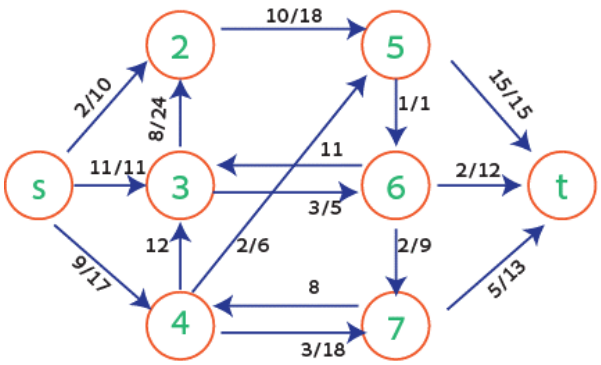
```
Ford-Fulkerson-Method(G,s,t)          // מקבלים רשת עם נקודת התחלה וסיום
  initialize flow to 0                // הזרימה הראשונית היא כמובן 0
  while there exists an augmenting path p   // כל עוד קיימת דרך שמשפרת את הזרימה
        augment flow f along p        // השתמש בדרך, ושפר את הזרימה
  return f
```

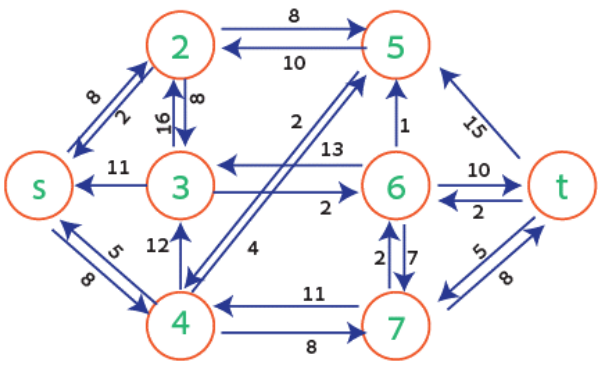
השיטה הזאת כל כך כללית, ולא אומר ביצד לבצע באמת את הדרך, עד שמקפידים לכנות אותה "שיטה" ולא "אלגוריתם" שמבטא משהו מסודר ועקבי. על מנת להבין בצורה מלאה איך אנחנו עובדים, נצטרך להסביר את מושג ה"שיור".

<u>רשתות שיוריות</u> – עבור כל רשת זרימה שנקבל, המכילה את הזרימה ביחס לקיבול באותו רגע, קיימת לנו רשת מראתית, המבטאת כמה עוד אנחנו יכולים להזרים בין שני הקדקודים. איך בונים את הרשת השיורית? נסתכל קודם על <u>קשת שיורית</u> – עבור כל שני קדקודים החולקים ביניהם זרימה כלשהי, אנחנו יכולים לקבוע שתי קשתות שמבטאות את ההזרמה המלאה בה אנחנו יכולים להשתמש – ראשית, הזרימה לאותו כיוון עם השארית בה עוד לא השתמשנו, ולכיוון השני, אנחנו יכולים לשלוח את הזרימה השלילית בה אנחנו משתמשים. לדוגמא:

הזרימה בקשת (2,5)מוגדרת כ10/18. השארית של הזרימה ב-(2,5) היא האפשרות להזרים עוד 8 באותו כיוון. אך מעבר לזה, על פי חוק הזרימה הסימטרית, אנחנו יכולים גם להעביר זרימה ב- (5,2)בכמות שווה בגודלה למה שזורם -10. ולכן הקשת מתפצלת לשניים (הכנס כאן תמונה מהמערכון של אסי וגורי) ומתוכה יוצא זרימה ענקית לשני הכיוונים.

בהתאמה – הרשת השיורית, תהיה מימוש של **כל** הקשתות והאפשרויות להזרמה **בכל** הגרף. נסתכל שוב על הגרף הקודם, ועל הרשת השיורית השייכת לו:

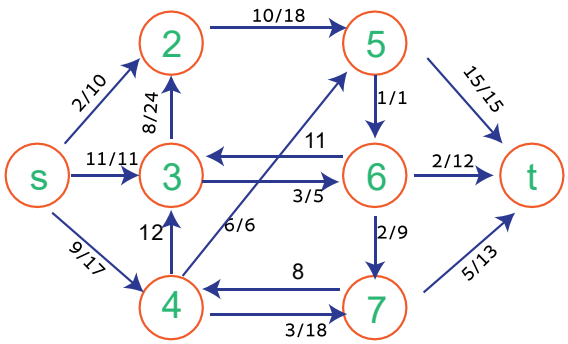


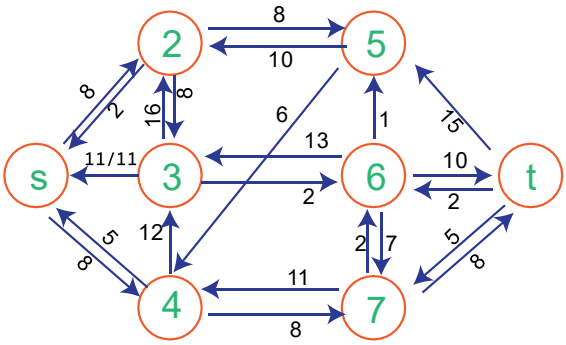


יש כמה דברים שחשוב לראות ברשת השיורית – הקשת השיורית הרגילה אותה ראינו בדוגמה, כמו למשל (2,5) שהתפצלו לשאריות לכל כיוון. מה שמעניין יותר, הוא היחס לזרימה ריקה, ולזרימה רוויה. הקשת (5,6) מכיל אפשרות לזרימה של יחידה בודדת, שבאה לידי ביטוי בזרימה, כך שהקשת "רוויה", בהתאמה, הקשת היחידה המופיעה ברשת השיורית של אותו מקום, היא רק האפשרות להחזיר את הזרימה לקדקוד המקורי.

מצד שני, אם נסתכל על (4,3) נראה שהקיבול הוא 12, אך לא עובר שום דבר באותו צינור. אז אם אין לנו זרימה בפועל, כמובן שאין לנו מה להחזיר לקדקוד השני, ולכן הקשת נשארת בדיוק כמו שהיא.

אחרי שבנינו לנו את הרשת השיורית, אנחנו מחפשים איזה מסלול p שיוביל לנו בין s ל-t, ויכול להוסיף לנו לזרימה עוד קצת, מסלול כזה נקרא <u>מסלול שיפור</u>. למשל אם ניקח את המסלול הבא – s→4→5→t אנחנו יכולים לשחק עליו קצת ולהוסיף לזרימה. כמה יכול להתווסף לנו על המסלול הזה? נבדוק את הזרימה של כל הקשתות במסלול, וייצא לנו: 12,4,4. מכאן אנחנו מסיקים, שאם נבחר במסלול הזה, אנחנו יכולים לשפר את הזרימה ב-4 יחידות. נשנה את הרשת המקורית בהתאם וננסה שוב:





ברשת השמאלית אנחנו רואים את הזרימה שהוספנו למסלול, וברשת השיורית, אנחנו מגלים כעת, שלמעשה "חסמנו" עכשיו את הדרך ליעד מכיוון אחד, מה שאומר, שכל המשך השיפורים יכולים להיות רק משתי הקשתות האחרות. ברגע שנגיע למצב בו כבר לא ניתן להוסיף לזרימה הנכנסת ל-t, נדע שסיימנו לשפר והגענו לזרימה המקסימלית.

את הבחירה של מסלולי השיפור, אנחנו עושים בעזרת חתכים. באופן דומה למה שהגדרנו בגרפים, גם כאן אנחנו מגדירים חתך כאוסף קדקודים, כאשר הם מוגדרים בדרך כלל כ-S,T כאשר T=V-S, כך שבוודאי שתי הקבוצות זרות זו לזו. החלוקה מתבצעת כמובן על סמך המקור והיעד של הזרימה שעל פיהם יוחלט איזה חתך יהיה S, ואיזה יהיה T. כמו כן, בהתאמה לגרפים, אנחנו מברים גם כאן על הקשתות החוצות, רק שברשת הזרימה, מה שיעניין אותנו הוא דווקא הזרימה העוברת בין שני החתכים. אנחנו סוכמים את כל

הזרימות הקיימות בקשתות, כאשר אם יש לנו זרימה מנוגדת, אנחנו מחשבים אותה כזרימה שלילית, והתוצאה תהיה הזרימה נטו של החתך.

זרימה מקסימלית חתך מינימלי

השאיפה שלנו במושג החתכים, הוא למצוא את החתך שמביא לנו את הזרימה המקסימלית. איך נמצא אחד כזה? נחפש את החתך המינימלי. מה ההיגיון? מאחר שאמרנו כבר שאנחנו מדברים פה על זרימות וכלי קיבול, אנחנו יכולים להבין בצורה הפשוטה ביותר, שגם אם יש לנו המון קשתות בעלי זרימה גבוהה, וכמה בודדות עם זרימה נמוכה, אם נהיה חייבים ללכת דרך קשת בעלת זרימה נמוכה, ייווצר לנו צוואר בקבוק, וכמות הזרימה תרד.

משפט הזמח"מ אומר כך:

אם f היא זרימה ברשת זרימה G(V,E) עם מקור s ובור t, אזי התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. **f היא זרימה מקסימלית ב-G.**
2. **הרשת השיורית G_f אינה מכילה שום מסלולי שיפור.**
3. **קיים חתך (S,T) ב-G שעבורו c(S,T) = |f|.**

עד כאן המשפט. עכשיו מה הוא אומר? דבר ראשון – התנאים שקולים! אנחנו לוקחים כל תנאי ומוכיחים בעזרתו את התנאי הבא, ועושים זאת בצורה מעגלית, כלומר, אם אחד מהתנאים הללו לא מתקיים, אף אחד מהתנאים לא מתקיים.

עכשיו, נתחיל עם התנאי הראשון, שהוא דבר שעומד בפני עצמו – **יש לנו f שהוא זרימה מקסימלית ב-G**. הזרימה של הרשת מוגדרת לנו ואנחנו יוצאים מנקודת הנחה שהזרימה היא אכן מקסימלית, ועל ידי נתון זה נוכיח את התנאי השני –

$1 \Rightarrow 2$ - נניח בדרך השלילה, שאכן f מבטא א הזרימה המקסימלית ברשת, אבל ב-G_f קיים מסלול שיפור כלשהו p, אזי, סכום הזרימות יגדל וכבר לא יהיה f אלא יהיה f+f' (כאשר f' הוא מסלול הזרימה הנוסף). ובמקרה כזה, אז יש לנו סתירה להנחת היסוד.

$2 \Rightarrow 3$ - נניח כי אכן אין שום מסלולי שיפור ב-G_f, הכוונה היא שאין לנו בעצם מסלול שמוביל מ-s ל-t. אם היה לנו מסלול כזה, היינו ממשיכים לשפר עליו. עכשיו נגדיר את שתי הקבוצות באופן הבא – S יהיה כל הקדקודים אליהם ניתן להגיע מ-s, ו-T יהיה כל השאר, שכמובן מתחבר גם ל-t. מה שזה ייתן לנו שהזרימה בין שני החתכים, יכולים להיות רק אלו בעלי הזרימה המקסימלית. למה? כי כל מעבר אחר בתוך הקבוצות הללו סגור בתוך עצמו, ומה שעובר זה רק הזרימה שיוצאת מ-s, כי זה מה שהגדרנו, וברגע שהוא עובר ל-T, הוא יכול להמשיך הלאה עד הבור.

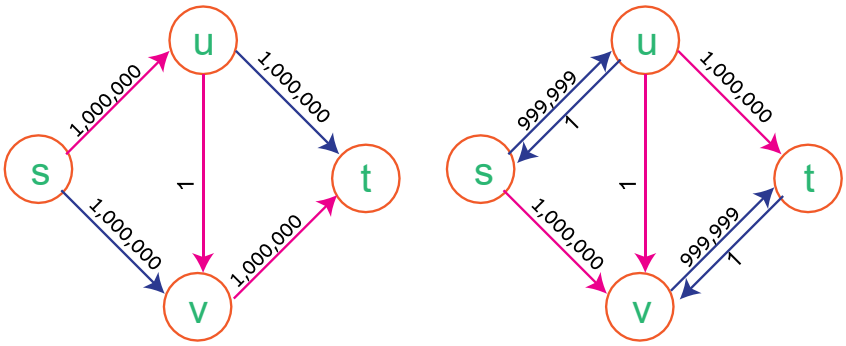
$3 \Rightarrow 1$ - ברגע שהגדרנו ב-3 חתך שהוא מוגדר כחתך המינימלי, אנחנו נשענים על טענה שאומרת שהזרימה המקסימלית חסומה מלמעלה על ידי כל החתכים שיהיו. וברגע שמצאנו חתך שחוסם עוד קצת אנחנו נשענים עליו להיות הזרימה המקסימלית.

אלגוריתם פורד פולקרסון הבסיסי

האלגוריתם הזה, הא בעצם הרחבה של השיטה שראינו קודם – כלומר, זה בדיוק אותו דבר רק כתוב טיפה יותר פורמלי. המשמעות של האלגוריתם הוא להמשיך ולקחת עוד מסלולים, על מנת למצוא את החתך המינימלי של הרשת ולהגיע על ידי זה לזרימה המקסימלית:

```
Ford-Fulkerson(G,s,t)
  for each edge (u,v) ∈ E[G]                          // איפוס הזרימה ברשת
        f[u,v] = 0
        f[v,u] = 0
  while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
        c_f(p) = min {c_f(u,v) : (u,v) is in p}       // מגדירים את הזרימה של המסלול לפי הקשת המינימלית
        for each edge (u,v) in p
          f[u,v] = f[u,v] + c_f(p)                    // הוספת הזרימה מהמסלול לזרימה נטו
          f[f,u] = -f[u,v]
```

הבעיה של האלגוריתם הזה, למרות היותו מפורט יותר מהקודם, הוא בכך שלא מספיק שלא כתוב לנו כיצד למצוא את המסלול אותו אנחנו משפרים, אין בו קביעה ברורה של כמה לשפר בכל פעם. עד כמה זה קריטי? נגיד ויש לנו גרף שמסודר בצורה כמעט מושלמת, אבל יש בו קשת אחת שגורמת לזרימה לצנוח בצורה מטורפת. בחירה לא נכונה בקשת הזאת, תוביל לזרימה שהיא לא פחות ממבאסת. נדגים את העניין עם הגרף הבא:



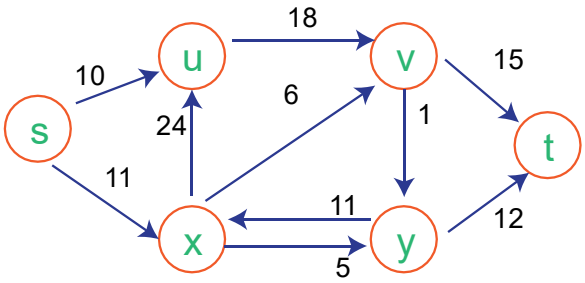
מימין יש לנו גרף באופן שתיארנו. בלי לחשוב יותר מידי, אנחנו יכולים לראות שאנחנו מעבירים פה 2 מיליון בקלות. אבל נגיד הגיע מישהו והחליט לבדוק מה קורה אם הוא מעביר מהצלע האמצעית. ואז ברשת השיורית, הוא מבין שהוא יכול להחזיר עוד פעם 1 על אותה קשת. וכבה הוא מעביר 2 מיליון יחידות ב-2 מיליון איטרציות ומבזבז לכולנו את הזמן. ולכן יש לנו פה בעיה עם זמן הריצה שחסום על ידי $O(|f^*|)$ – שזה אומר שאנחנו חסומים על ידי כמות הזרימה שאנחנו אמורים להעביר. עכשיו, אמנם זה קבוע, אבל אם אה יכול להרביץ את הכל בשתי איטרציות, ובמקום זה עושה 2 מיליון, אז עדיף לפרוש לדוקים.

אז הבנו שצריך למצוא שיטה יעילה ועקבית למעבר על הזרימות. מה יהיה יעיל?

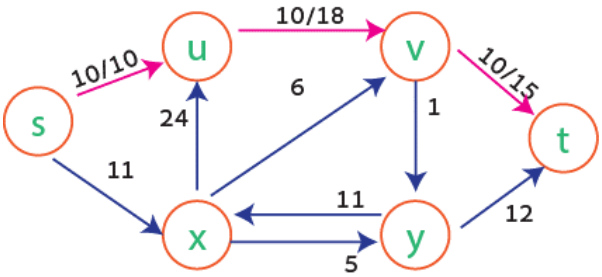
אלגוריתם אדמונדס-קארפ

למעשה אין שום הבדל בין פורד-פולקרסון לאדמונדס-קארפ, מלבד הערה קטנה. את שורת הלולאה while, לא עוברים "לפי העין", אלא מריצים על הגרף חיפוש לרוחב (BFS), אותו למדנו במבנה נתונים ב', שיוציא לנו את המסלולים הנפרשים מהנקודה s לכיוון t (כי הרי אמרנו, שכל קדקוד יגיע בסוף לבור), ונבחר את המסלולים שנוצרו החל מהדרגה הנמוכה ביותר. אם יש לנו מסלול שעושה את הדרך עם שתי קשתות בלבד, נשתמש קודם בו, ואחרי זה נתמודד עם השאר בסדר עולה. כמובן, שאין זה מחייב שהמסלול הקצר ביותר יהיה גם היעיל ביותר, אבל זה בהחלט יוריד את הסבירות לפגוש פתאום את הקשת המבאסת בסיבוב שמורידה את מסלול הזרימה ל-1.

עכשיו אפשר לעשות דוגמת הרצה על הגרף –

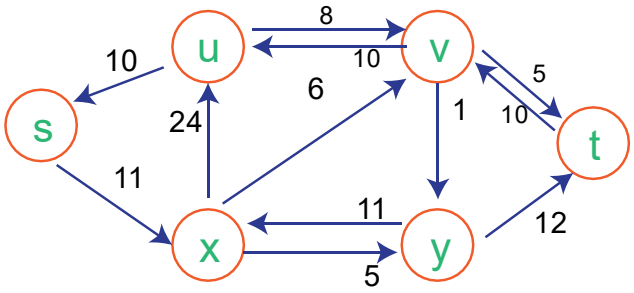


זה גרף שהוא טיפה שונה ממה שהצגנו בהתחלה, אבל הוא מספק את הסחורה. ראשית נריץ עליו BFS, ונוציא את כל המסלולים השונים שאנחנו יכולים להוציא מזה. עכשיו אנחנו מתחילים להריץ את האלגוריתם של פורד פולקרסון על פי סדר הדרגה ובאופן לקסיקוגרפי. כמובן שכאשר אנחנו מקבלים את הגרף כמו שהוא, אין לנו צורך ברשת שיורית, מאחר וכל עוד אין זרימה, כל הגרף נשאר בדיוק אותו דבר. נתחיל:

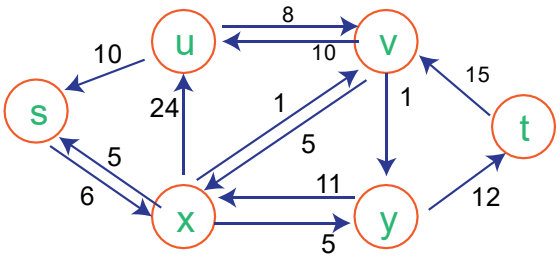


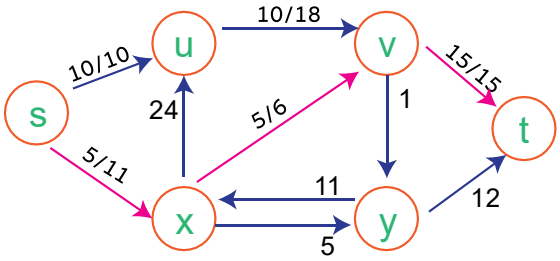
המסלול הראשון שנבחר(s→u→v→t) מזרים לנו 10, מאחר והמינימום של המסלול הוא ב(s,u). הזרימה הזאת ממשיכה גם הלאה עד שמגיעים לבור. עכשיו אנחנו צריכים לעבור ולעדכן את הרשת השיורית. נכפיל כל קדקוד שעברנו עליו ולא רווי עד הסוף, ונסדר את הערכים, ואת הקשת (s,u) נשאיר ב-10 מאחר והיא רוויה (מוזרמת עד הסוף), אבל נשנה לה את הכיוון, כי עכשיו אנחנו יכולים להשתש רק בזרימה הסימטרית שלו.

הרשת השיורית תיראה עכשיו ככה:



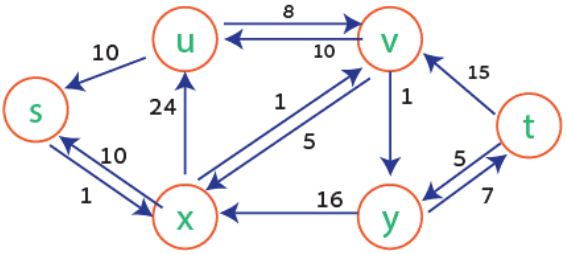
ברגע יש לנו עוד שתי מסלולים באורך 3 קשתות, נבדוק את הראשונה שבהן:

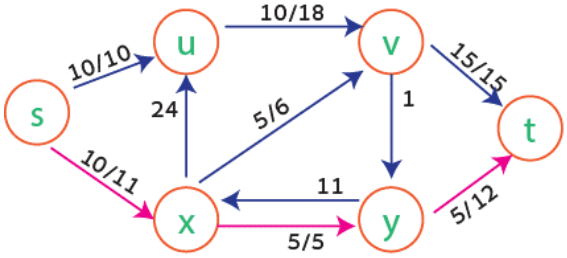




משמאל מופיעה לנו רשת הזרימה, בה בחרנו את המסלול s→x→v→t. מאחר וקודם הזרמנו ב-(v,t) 10/15, עכשיו הוא זה שמגביל לנו את הזרימה, ולא (x,v) שהקיבול שלו יחסית נמוך. נזרים כמה שאפשר, ונעדכן את הרשת השיורית. עכשיו נראה שאת הקשת (v,t) אנחנו מעדכנים באופן מיוחד. מאחר שהעברנו את המקסימום האפשרי לאותה קשת, אנחנו משתמשים ברשת השיורית בקשת החוזרת בלבד, מה שבעצם מסמן לנו שיש לנו התקדמות – ברגע שברשת השיורית לא יהיו קשתות נכנסות, נדע שסיימנו את האלגוריתם.

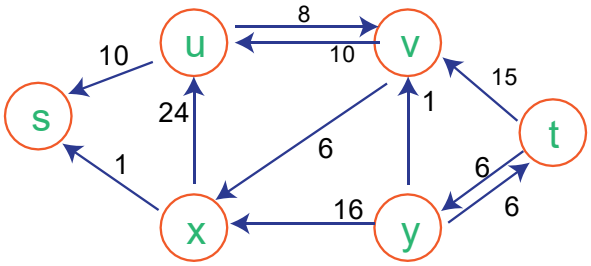
נעבור הלאה:

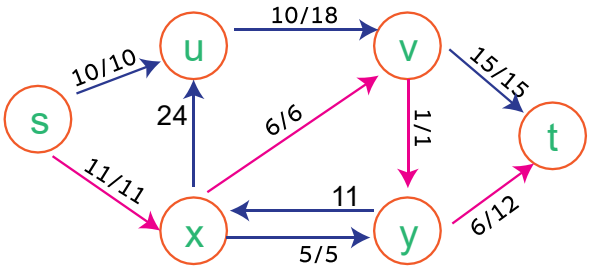




למעשה עכשיו, סיימנו את המסלולים בדרגת 3.

מבחינת הקשתות הנכנסות ל-t, אנחנו יכולים למצוא את (y,t) שיש לו עוד 7 יחידות להעביר, והוא גם היה עושה זאת בשמחה, הבעיה היא שלקדקוד y, נגמרו כמעט כל המקורות, מלבד (v,y) שגם ככה הקיבו שלו הוא 1. אבל אל ייאוש, אפילו אם אנחנו יכולים להעביר רק אחד, אנחנו נעשה זאת! השאלה היא באיה דרך. אנחנו מזהים הזדמנות מעולה, שהיא לגמרי במקרה גם מה שאנחנו צריכים לעשות לפי האלגוריתם, ועושים את הדבר הבא –





תכלס, גם אם היינו רוצים, אין לנו לאן להתקדם, העברנו מהמקור ליעד בדיוק 21 יחידות של מה שזה לא יהיה שרצינו. ברגע שהגענו למצב כמו ברשת השיורית הנוכחית, בו החיצים מופנים לאותו כיוון, ואין לנו יכולת להמשיך עבוד עליה, לטוב או לרע – עלינו לעצור.

ניתוח זמן ריצה

אלגוריתם אדמונדס-קארפ משתמש בBFS שחסום מלמעלה על ידי $O(VE)$ – במקרה בו יש לנו גרף עמוס, נצטרך לעבור על כל הקשתות שעל כל הקדקודים. בנוסף, הוא עובר אחר כך על כל הקשתות מה שמכפיל את זמן הריצה בעוד V, ומעלה את הכל ל – $O(VE^2)$.

בעיית הזיווג המקסימלי בגרף דו צדדי

אחד הדברים המעניינים בבעיות רשת זרימה, הוא שעל אף שהבעיה נדמית כמשהו יחסית מאוד מצומצם, ניתן להשליך אותו על הרבה סוגי בעיות אחרות בתחום בקומבינטוריקה, כל שאנחנו צריכים הוא לעשות מעין המרה (רדוקציה) לבעיות וליצור אותם מחדש כבעיית רשת זרימה, ועל ידי זה להצליח לפתור אותם בקלות. יחסית.

מציאת הזיווג המקסימלי היא בעיה קלאסית שמשתמשים בה- נתון לנו גרף לא-מכוון דו צדדי $G(V,E)$, כל חלק של הגרף מסומן בתור L לשמאל ו-R לימין, כבה סתם רנדומלי. כל הקשתות בגרף עוברות רק מצד אד לשני ללא כל קשתות פנימיות בתוך הקבוצות עצמן. כמובן, שיכול להיות שכל קדקוד מחובר לצד השני עם יותר מקשת אחת. אנחנו צריכים למצוא מהו הזיווג המקסימלי – כלומר, מה מקסימום החיבורים הבודדים שאנחנו יכולים לעשות בין שני הצדדים. ה"זיווג" M (Matching) שאנחנו דורשים, הוא שברגע שיש שני קדקודים שמוגדרים כמחוברים, אין אף קדקוד אחר שיכול להתחבר אליהם שוב.

היישום של בעיה זו הוא לא רק זיווגים, אלא בעצם כל חלוקה כלשהי של משימות למכונות וכדו, אנחנו צריכים לבדוק קודם כל מה המקסימום שאנחנו יכולים להגיע.

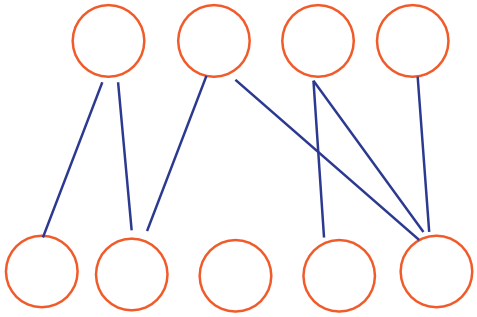
לכאורה, זה דבר שנדמה כאילו אינו קשור לרשתות זרימה, אבל אם נתעמק בזה, נשאל שאלה אחרת – האם רשת זרימה חייבת לעבור ממקור ליעד יחידים? לכאורה כן, אבל לא הגדרנו את זה באופן מוחלט. מה קורה אם יש לנו יותר ממקור אחד או יותר מיעד אחד, האם אנחנו עדיין מסוגלים להתמודד עם זה?

התשובה היא כן, והראינו את זה קודם במקורות ובורות מרוסים, דרך הפיתרון היא אחת שכבר פגשנו בחלק מהקורסים השונים – בניית עזר.

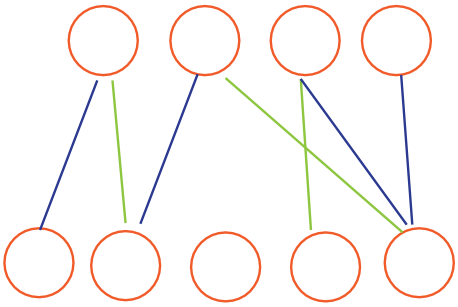
אם נתונים לנו מספר מקורות שונים, כמובן שלא נוכל פשוט להזרים הכל בבה ולראות מה קורה, מאחר ואנחנו נתנגש ונסבך את עצמנו יתר על המידה, אבל אם נגדיר קדקוד מקור דמיוני s', נוכל לשים אותו לפני כל שאר המקורות, ואז לחבר אותו אל כולם, ולהתחיל את הזרימה ממקור יחיד. באופן ומה אנחנו יכולים גם ליצור בור דמיוני t', ולהזרים אליו את כל המקורות השונים.

לאחר שחיברנו את הקדקודים של בניית העזר, אנחנו צריכים להגדיר גם איך אנחנו פותרים בעזרתם את השאלה. בשביל זה אנחנו "נקבל" (מלשון "למשקל") את הרשת באופן הבא – כל קשת מקורית העוברת בין שני צדדי הגרף הדו-צדדי תקבל קיבול מקסימלי של 1. כל קשת העוברת לבניית העזר, תקבל גם הם ערך 1. איך זה יעזור לנו? ברגע שקשת תיתפס על ידי שני קדקודים, אי אפשר יותר להשתמש בה מאחר והיא רוויה. הקשתות החדשות של בניית העזר, ברגע שהם יוגדרו כ-1, יוכלו להזרים רק יחידה 1 בכל פעם, וכך להביא לנו בעצם את הדרוש לנו (הוכחה לבעיה דומה לזה, נמצאת בשאלות ההרחבה, וכדאי להסתכל למקרה שידחקו אתכם לפינה עם הוכחה כזו).

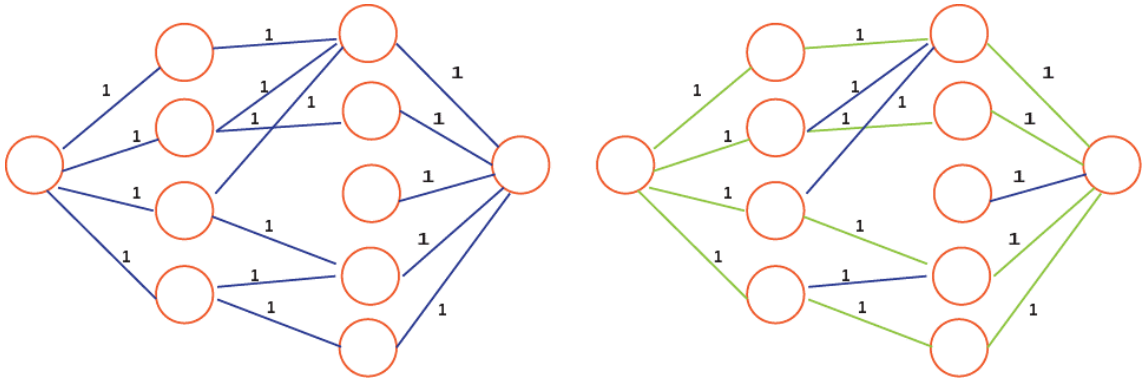
נתסכל על תצורת הגרף הבאה:



לא קשה לראות פה שהזיווג המקסימלי הוא 4, אבל אם יבוא אותו אחד שהזרים 2 מיליון יחידות בבודדת, הוא עוד עלול ליצר זיווג פחות מזה באופן הבא:



על ידי בחירה מוטעית, נגיע למקומות לא רצויים. את הבנייה נראה באופן הבא (אני מסובב את זה לצורך הנוחות)-



רשתא הזרימה נתנה לנו את האפשרות לפתור את זה בצורה יעילה ומוכחת.

שאלות הרחבה

נתונה רשת זרימה G(V,E) שבה הקיבולים על הקשתות הם מספרים שלמים וזוגיים, מלבד קשת אחת (u,v) שהקיבול שלה אי-זוגי. כמו כן, נתון לנו שהזרימה המקסימלית ברשת היא אי-זוגית.

האם הקשת (u,v) רוויה?

באופן אינטואיטיבי, ברור לנו שהמשפט הזה נכון. אם יש לנו זרימה שעוברת רק בקיבולים זוגיים, אין לנו שום סיבה לחשוב שפתאום בסוף יקפוץ לנו מספר אי-זוגי. אבל איך מוכיחים את זה בצורה פורמלית?

כמו שאמרנו קודם, אנחנו יכולים להתבסס על הכלל של "זרימה מקסימלית – חתך מינימלי". לכל גרף יש מספר חתכים שונים. כל חתך משפר במקצת את הזרימה או לא משפיע עליה בכלל. בחתך המינימלי של הרשת ברור לנו שאנחנו נקבל שכל הקשתות הינם רוויות, ואנחנו כבר יכולים להגיד שבכל הנראה כם

הקשת האי זוגית נמצאת שם. אבל אנחנו מחפשים משהו שהוא יותר מ"בכל הנראה". מה שנעשה הוא הוכחה בשלילה – נניח שהקשת המדוברת, האי זוגית, אינה רוויה, ונוריד את ערך הקיבול שלה ב-1. אם אכן הקשת לא נמצא על החתך המינימלי אין סיבה שנרגיש את זה. עכשיו, אם הורדנו ערך אי-זוגי ב-1, הוא נהפך להיות זוגי. עכשיו, ברגע ששינינו את הקשת היחידה שאינ זוגית להיות זוגית, כל הקשתות אמוורות להיות זוגיות.

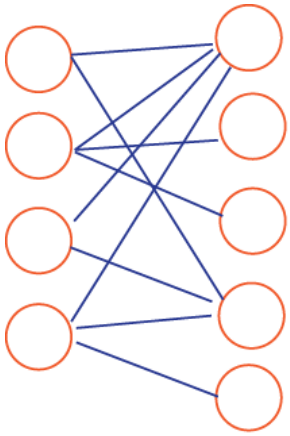
ידוע כי הזרמה אמורה להיות מתאימה לחתך, אבל אם החתך הוא בוודאות זוגי, גם הזרימה היא זוגית, ויש כאן סתירה.

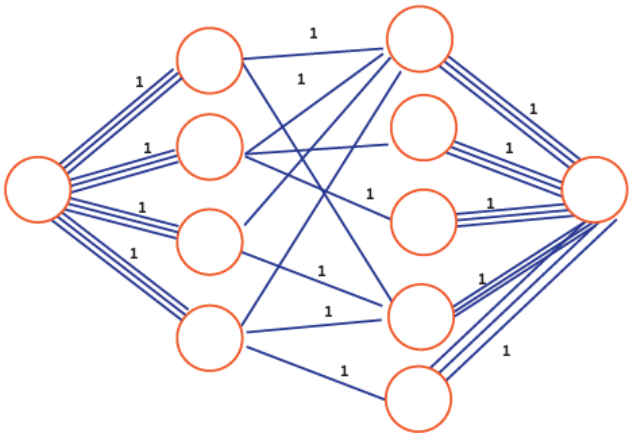
נתון גרף לא מכוון דו-צדדי G(V,E).
תאר אלגוריתם יעיל ככל האפשר המוצא ב-G תת גרף בעל מספר מירבי של קשתות, שבו לכל קדקוד דרגה לכל היותר ברמה 3.

כמובן שאנחנו מדברים פה על בעיה שהיא דומה לזיווגים. ישנו ענף בתורת הגרפים הנקרא Bipartite Graphs, הגרפים הדו-צדדים. דירנו עליהם בלוגיקה, והזכרנו גם את העניין, אי שם בפרק. הרעיון הוא למתוח את הגרף ככה שהקשתות יעברו רק בין שתי הקבוצות, הימנית והשמאלית, ולא בתוך הקבוצות עצמם. בבעיית הזיווגים הרגילה, רצינו שתעבור קשת בודדת בין שני קדקודים, ועכשיו אנחנו דורשים שיהיו מקסימו קשתות עד לרמה 3.

לבעיה זאת אנחנו עושים רדוקציה, ומתאימים אותה לבעיה איתה אנחנו יכולים להתמודד. את כל זה כבר עשינו קודם, וגם פה נעשה בדרך דומה, אבל נצטרך לדאוג גם להוכיח את נכונות הטענה שאנחנו פותרים את הבעיה בעזרת הגרפים.

איך נהפוך את הגרף הדו-צדדי לרשת זרימה? נגדיר קדקודים דמיוניים בבניית עזר s,t ומכל אחד מהם נעביר שלוש קשתות לכל קדקוד מהגרף, ולכל אחת מהן נגדיר קיבול 1, וגם לקשתות הפנימיות נגדיר קיבול של 1, באופן הבא:





כעת מתחילים את השגרה של הזרמה ברשת, ומה שייצבע אכן יקיים את התנאים.

הערה: אם יש שאלה כזאת במבחן, אין צורך לכתוב פסאודו אלגוריתם, אלא לתאר מה עושים, ולצייר בצורה כללית איזה דוגמא. מבחינת ההוכחה, זה כבר צריך להיעשות בצורה מלאה כמו שנעשה תיכף.

כעת, יש לנו להוכיח שני דברים שנגזרים מהבעיה שהוצעה לנו: 1. מדובר בתת גרף בעל מספר מירבי של קשתות. 2. הדרגה המקסימלית של הקדקודים היא 3.

נתחיל בלהוכיח שאכן דרגת המקסימות היא 3.

קודם כל אינטואיטיבית – כשאנחנו מזרימים זרימה מקסימלית ברשת שיצרנו, מה המקסימום שיכול להכנס לכל קדקוד? 3. וזה גם מה שיכול לצאת, מאחר ויש לנו שלוש קשתות בדיוק, שמזרימות, אם ימצאו שלוש קשתות להזרים אליהם הקדקוד זה יספק, ואם לא, אז כמה שנצליח. אבל בכל אופן לא יכולל היות שם יותר מ-3.

עכשיו פורמלית – נוכחי שדרגת המקימופ היא 3. לכל קדקוד ב-L (החלק השמאלי, כאמור) יש 3 קשתות נכנסות עם קיבול כולל של 3. ולכם הזרם המקסימלי שיכול לצאת הוא 3, כלומר **לכל היותר** 3 קשתות אדומות. הווה אומר – דרגת המקסימום ב-L היא 3.

לכל קדקוד ב-R יש 3 קשתות יוצאות עם קיבול כולל של 3. ולכן הרימה המקסימלית היוצאת היא 3, ומאחר שגם בזרימה המקסימלית יכול להיות לנו לא יותר מ-3, אז דרגת המקסימום הוא 3. מש"ל

הוכחנו שהמקסימום הוא 3. אבל איך נוכיח שאכן מדובר בתת גרף בעל מספר מירבי של קשתות.

כמובן שנוכיח זאת בשלילה.

נניח בשלילה כי יש פתרון אחר המכיל יותר קשתות (כלומר קיבענו את המקסימום, אבל לא את המינימום זרימה שתהיה). במקרה כזה, הכוונה היא שיש לנו חתך מינימלי שהוא גדול יותר, והזרימה המקסימלית עוברת בו. וזה סתירה לכך שמצאנו את הזרימה המקסימלית ברשת. (כלומר, אם קיבענו את המקסימום זרימה באופן שהוא חד משמעי, אז בוודאי שהזרימה שנקבל היא בדיוק מה שרצינו – זרימה מירבית עד דרגה 3) מש"ל.

הערה: את בניית העזר לא חייבים לעשות עם שלוש קשתות של קיבול 1, אלא ניתן להעביר קשת בודדת עם קיבול 3. הסיבה היחידה שאבירם עשה כך, כי הוא אמר שיותר נוח להבין ככה כשרואים את הבניה. ברמת המבחן – אם עושים את זה עם קשת אחת זה לגמרי עונה, ואם רוצים לענות בצורה יותר ברורה ולנפנף קצת בידיים, אפשר לעשות 3 קשתות.

מחלקות סיבוכיות

חלק זה של הקורס, הוא לכאורה נפרד מכל ה שלמדנו עד עכשיו, אך במבט מעמיק יותר הוא תלוי בכל מה שלמדנו, ונשתמש בכל הידע שרכשנו בחלקי ניתוח האלגוריתמים השונים. בכל אלגוריתם שהצענו, בדקנו וניסינו לשכלל את זמני הריצה, כך שירדו מזמני ריצה מעריכיים לזמן ריצה אלגוריתמי. בעוד שבקורסים קודמים כמו מבנה נתונים, חיפשנו זמני ריצה בקירוב ליניארי, ראינו שאלגוריתמים שפועלים על קלטים ושאלות מסובכות יותר, ניתנות להכרעה בזמן של n^2 או אפילו n^3, ומה שהיה נחשב לזמן ריצה גבוה מידי, הפך לזמן סביר.

(נזכיר רק דבר שדיברנו עליו בלא-מעט קורסים קודמים – עד כה שמחשבים משתכללים במרוצת השנים ונעשים מהירים יותר, ואין מה להשוות מחשבשל היום אל מול מחשב של לפני 20 שנה, כל השינויים האלו נעשו בסדר גודל, ואם ניקח אלגוריתם שהוא לא יעיל, גם המחשבים המהירים ביותר יקרטעו בדיוק באותו אופן כמו הישנים)

כעת אנחנו מסווגים את האלגוריתמים השונים למחלקות סיבוכיות. כל מחלקה מייצגת מספר (אינסופי) של אלגוריתמים, שהמשותף להם הוא זמן הריצה ביחס לקלט. כלומר, אם יש לנו קלט באורך של n ביטים, נרצה שזמן הריצה יהיה למשל n^2. מחלקה זו נקראת מחלקת הסיבוכיות P.

כמובן, שהכל היה יותר נוח, אם היינו יכולים למצוא אלגוריתם פולינומי עבור כל בעיה שתצוץ. הבעיה היא, שאין לנו, או לפחות עד היום לחלק מהבעיות לא נמצא בכלל אלגוריתם פולינומי. למשל, "בעיית הסוכן הנוסע" המוכרת היא בעיה מהסוג NP-קשה (שאנחנו בכלל לא יודעים מה זה, אבל זה לא נשמע מבטיח). עיקר הבעיה היא – האם סוכן מכירות שצריך לסוע למספר נקודות שונות על המפה, שחלקן מקושרות אחת לשניה (גרף ממושקל), יכול למצוא מסלול אופטימלי שיעבור בכל הערים ויחזור לעיר המקור בזמן כמה שיותר קצר. אנחנו יודעים להגיד שהבעיה אינה פולינומית, אבל אנחנו לא מסוגלים אפילו לקבוע חסם תחתון כלשהו שאנחנו יכולים להגיד בוודאות שהאלגוריתם לא יעבור אותו, החסם שאנחנו מחפשים לעשה ייתן לנו את התשובה לשאלה האם $P \neq NP$, שרוב החוקרים סבורים שזה אכן נכון אך ללא חסם תחתון שיכריע שהם אכן לא שווים, לא ניתן לקחת את זה כקביעה מוחלטת.

ישנם גם אלגוריתם כמו למשל "בעיית העצירה" של אלן טיורינג מ-1936 המציעה את הבעייה הבאה – האם ניתן לבנות מכונה M, שבעבור **כל** תוכנית, **וכל** קלט שלא נכניס ביחד למכונה, נוכל לקבל תשובה האם התכנית תעצור או לא. נגיד שנריץ את המכונה על מספר תוכניות, יכל להיות שבהתחלה זה יעצור, אבל הוא יתחיל להתקע עבור תוכנית וקלט מסוימים, עד שנחליט לעצור אותו בעצמנו. עד כמה שזה יישמע מגוחך, האם אנחנו יכולים להגיד בוודאות שאנחנו עצרנו את התכנית, או שמא בדיוק באותו רגע המכונה נעצרה מעצמה? בגדול, טיורינג הציע באופן מתמטי ובצורה שלא משתמעת לשני פנים שזו בעיה שלא ניתנת לחישוב.

בפרק זה אנחנו מתעסקים בעיקר בבעיות NPשלמות, שמעמדן אינו ידוע. למה הכוונה "אינו ידוע"? מעבר לשאלת $P \neq NP$, כל האלגוריתמים המוגדרים כשייכים למחלקה ה-NP שלמה, קשורים אחד לשני באופן, שאם מישהו ימצא אפילו לאחד מהאלגוריתמים האלה פתרון פולינומי, ישר כל מה שמקושר למחלקה הזו יוגדר כאלגוריתם פולינומי, ולהיפך – אם נמצא חסם תחתון לאחד מהאלגוריתמים – הכל יוכר כלא-שייך לP. ונחזור לזה בהמשך.

הערה קטנה שחשובה להפנמה – אמנם אנחנו מדברים על זמנים פולינומים שהרבה יותר מוצלחים ממעריכיים, אבל אם ניקח את n^{100} ולעומתו את 2^n אנחנו יכולים להציב ש n=3, ואז דווקא המעריכי יהיה

הרבה יותר סביר? אבל כמו שכבר אמרנו, האלגוריתמים הפולינומיים הגדולים ביותר שראינו הם n^4, ולדבר על חזקה של 100, או מספר גבוה אחר, זה בעצם עשרות לולאות שתקועות אחת בשניה, וברור שאף אח ששפוי בדעתו לא יעשה דבר כזה (ככה אנחנו מקווים לפחות), ולכן אנחנו מתייחסים למקרים הסטנדרטיים האלה.

נגדיר עכשיו כמה מושגים פורמלים, על מנת שנוכל לתאר את הבעיות השונות:

בעיה מופשטת (Q): תיאור של בעיה בצורת קשר בינארי של מופעים I (Instances) ופתרונות S (Solutions). למשל, עבור בעית מסלולים קצרים שראינו בעבר, נגדיר את SHORTEST-PATH כבעיה מופשטת. עבור המופעים השונים של הבעיה, יש לנו אינסוף גרפים על פי הגדרתם G(V,E), כל גרף שמגיע עם סט מסוים של קדקודים וקשתות שונות מגדיר לנו מופע חדש לבעיה, וכל שני קדקודים מהווים העלאת השאלה מחדש. הפתרון עבור כל מופע שכזה, יהיה רצף קדקודים/קשתות שיגדירו לנו מסלול. כמובן, שיכולים להיות עבור מופע אחד של גרפים שני קשרים שונים או יותר, במידה ויש לנו יותר מפיתרון אחד. בהתאמה, יכול להיות נקבל קבוצה ריקה – במידה ואין מסלול קצר בין הקדקודים הרצויים. הגדרה של בעיה כזאת היא מאוד רחבה, וקצת קשה לקבל עליה מושג או לעבוד איתה.

בעיית הכרעה: כלל הבעיות שהתשובה שלה מסתכמת בכן/לא.
הבעיות המופשטות הביאו לנו עבור כל שאלה נתונים שהם הרבה יותר רחבים מאשר מה שאנחנו דורשים פה. כמובן, שעבור קבוצה ריקה, שתי הבעיות יוכרעו אותו דבר, אבל אם אני מחפש רק תשובה לשאלה "האם יש מסלול בין שני קדקודים?", לא מעניינים אותי כל המופעים השונים, וכל הקדקודים האפשריים, אני מחפש תשובה בוליאנית, יש מסלול? תעצור, תגיד "כן" נמשיך האלה. מבחינה פורמלית, אנחנו אומרים שאנחנו ממפים את כל הפתרונות לקבוצה {0,1}. מבחינת תשובה שתהיה לי קונקרטית יותר לבעיה המופשטת של מציאת מסלול קצר, אנחנו יכולים להמיר את השאלה לצורה הכרעתית – נגדיר את המופע של הבעיה כ i = (G, u, v, k), כאשר k יהווה את החסם העליון שעליו אנחנו נשאל את השאלה "האם יש מסלול קצר יותר מ-k?", כאשר על מנת למצוא את המסלול הקצר ביותר, נשאל את השאלה הזאת שוב ושוב ונצמצם את הk למינימום האפשרי.

בעיית אופטימיזציה: בעיות שמחפשות מקסימום או מינימום של טווח מסוים. למעשה, הניסוח של המסלול הקצר ביותר, הוא בעייה שכזו, ודרך הטיפול בה היא כמו שתיארנו.

מבחינת מחלקת השלמות ב-NP, אין הבדל מבחינתנו בין הבעיות השונות, אך נעדיף תמיד להגיע לבעיות הכרעה, ואם נוכל לפתור בעיית הכרעה כלשהי, המרחק בינה לבין פתרון אופטימיזציה, שזה פשוט כמה איטרציות.

קידוד

כאשר מחשב מקבל בעייה, הוא לא מקבל אותה באופן מילולי. אם ננסה להכניס "יהי גרף שושקה" זה לא אומר כלום למכונה. הדיבור מול מחשב הוא בשפה בינארית {0,1}, וכל הבעיות מגיעות מותאמות כמחרוזת בינארית איתה ניתן לעבוד. המעבר מהבעיה לאופן מוכר למחשב (לאוו דווקא בינארית), נקרא קידוד e (Encoding), והוא יוצר לנו את הבעייה הקונקרטית מולה אנחנו מתמודדים. כמובן שישנם קידודים שהם לא יעילים, כמו למשל קידוד אונארי, שמבטא כל מספר במחרוזת אחדות מתאימה (10 = 1111111111) מה שהופך את הקידוד ללא יעיל בהחלט, אבל אנחנו מדברים על קידודים של בינארי, הקסה וכדו' שהמעבר מאחד לשני הוא יחסית פשוט.
כאשר מחשב מקבל מופע i של בעיה, אנחנו מגדירים את ה-n עליו אנחנו מדברים בתור n = |i|, וזמן

הפיתרון מגדיר לנו את המחלקה אליה אנחנו משתייכים. כלומר, בעיה שמוגדרת כסיבוכיות פולינומית, תפתור את הבעייה בזמן $O(n^k)$ ביחס לאורך הקלט.

כמובן, שהבעיה בתלות בקידודים, הוא ששימוש בקידוד לא נכון (כמו האונארי) עלולה להעביר לנו בעיה בצורה שרק המעבר עליה יהיה ארוך ולא יעיל – אם בעיה אונארית מוצגת לנו ב-n תווים, בעיה באורך דומה אך בייצוג בינארי תוכל לייצג לנו בעיה שהיא הרבה יותר ארוכה, למעשה בעיה שהיא $\Theta(2^n)$[10]. אבל אנחנו יוצאים מנקודת הנחה שאנחנו מדברים על ייצוג בינארי (או דומה לו), שהוא יעיל מבחינת הריצה עליו.

עכשיו אנחנו יכולים להגדיר את המחלקה P באופן הבא – $f:\{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ הפונקציה הבינארית המוגדרת, ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי, אם קיים אלגוריתם זמן-פולינומיאלי A, אשר בהינתן קלט $x\in\{0,1\}^*$ מופק פלט $f(x)$. כמו כן, אנחנו מגדירים קשירות פולינומיאלית בין שתי פונצקיות באופן הבא, אם יש לנו שתי פונקציות המסוגלות לעבד קלט מסוים ולהמיר אותה לתצורה אחרת וחזור (כלומר f_{12}, f_{21}, שממירות מאחת לשניה) תחת זמן פולינומיאלי, ונתונות לנו שתי בעיות בשני קידודים שונים כך שאם נפעיל את הפונקציות עליהם, נוכל לעבור מקידוד אחד למשנהו, כלומר אם נפעיל על e1 את הפונקציה f_{12} נגיע ל-e2 ($f_{12}(e1) = e2$) וכנל בחזרה, אזי הפונקציות קשורות פולינומיאליות. מה זה משנה לנו? מאחר ואם אנחנו מסוגלים לפתור את אחת הבעיות עצמן תחת זמן פולינומיאלי, אנחנו יכולים לומר שגם הבעיה השניה נפתרת בזמן פולינומיאלי (גם אם אין לנו את הפתרון עצמו).

למה 36.1

תהי Q בעיית הכרעה מופשטת על קבוצת מופעים I, ויהיו e1, e2 קידודים קשורים פולינומיאלית על I. אזי $e1(Q)\in P$ אם"ם $e2(Q)\in P$.

כלומר, הלמה הזאת מנסה לומר שאין לנו הבדל מהותי בין שני קידודים שונים של אותה בעיה, כל עוד אפשר לקשור אותה בצורה פולינומיאלית – אם ניתן לעבור מקידוד אחד לשני בזמן פולינומיאלי, אז כל קידוד שלא יהיה לבעיה הולך ביחד, כלומר, לא יכול להיות שבבסיס 10 נמצא פתרון, אבל בבסיס 2 לא נצליח למצוא פתרון.

<u>הוכחה</u>: נוכיח רק כיוון אחד, מכיוון שאנחנו מסתמכים על הסימטריות בין שני הקידודים השונים. נניח שניתן לפתור בעיה e1(Q) (בעייה Q כלשהי, תחת קידוד מסויים) תחת זמן של $O(n^k)$, עבור איזשהו קבוע k. נוסף על כך, נניח שכל מופע i של הבעיה ניתן להמיר מהקידוד e2(i) ישירות ל e1(i) תחת החסם $O(n^c)$, שגם c הוא קבוע כלשהו. אזי על מנת לפתור את הבעיה e2(Q) כל שנצטרך הוא להמיר ל e1 ואז לפתור בקידוד הנ"ל. הזמן הכולל של זה יהיה $O((n^c)^k)$, ומאחר ששתי החזקות הם קבועים, ההרכבה שלהם תישאר פולינומיאלית. מש"ל.

מסגרת של שפות פורמליות

תכלס, עשינו את זה כבר קודם, בלי ממש להכריז על זה. אבל מאחר ואנחנו מתייחסים בעיקר לבעיות הכרעה של כן/לא, מאו נוח לנו לעבוד עם שפות פורמליות. נגדיר שפה, נתאר מה נכנס אליה, ואז נוכל לדעת האם מילים (בעיות) מסוימות נכנסות תחת השפה או לא.

---

[10] מאחר ואורך ייצוג בינארי של מספר n כלשהו שווה $n = \log k$ (בקירוב), אז ההמרה של הרצף לצד השני היא הרבה יתר ארוכה.

נעבור מהר על המסגרת שנשתמש בה, בהנחה שכונו כבר מכירים את הסיפור הדזה מאוטומטים:

$\sum$- אלפבית – קבוצה סופית של סימנים – לדוגמא: הא"ב העברי, השפה הבינארית {0,1} וכו'.

L – שפה – קבוצה כלשהי של מחרוזות מתחת שפה מסויימת, למשל – L = {10, 101, 11...} הם שפה תחת האלפבית הבינארי.

ε – מחרוזת ריקה.

ϕ - שפה ריקה.

$\sum^*$ - סימון כל המחרוזות האפשריות תחת הא"ב המוגדר.

על השפות ניתן לבצע פעולות של איחוד, חיתוך, משלים (כל מחרוזות הא"ב שלא נמצאות בשפה) ועוד.

מבחינת בעיות ההכרעה שהצגנו, נגדיר את כולך לשיכות לא"ב הבינארי $\sum = \{0, 1\}$, ונגדיר את השפה בכל המופעים השייכים לא"ב המחזירים 1 – $L = \{x \in \sum^* : Q(x) = 1\}$. למשל, השפה המקיימת את בעיית המסלול הקצר תתואר באופן הבא:

PATH({<G,u,v,k>: G(V,E) הוא גרף בלתי מכוון,
$u,v \in V$
וכן הוא מספר שלם $k \geq 0$
k קיים מסלול בגרף בין שני הקדקודים שאורכו לכל היותר})

ההגדרה של השפה בצורה הזאת מגדיר לנו באופן הברה יותר מדויק מה נכנס לשפה ומה לא, כאשר מה שמוגדר כמקבל, הוא כל הבעיות שבעבורן האלגוריתם A יוציא לנו כפלט תוצאה 1 – כלומר, יש לנו מסלול בגרף שקטן מאורך k המוגדר.

מציאה של הכרעה כזו היא בוודאות תחת זמן פולינומיאלי – מריצים BFS על הגרף, בודקים את שני הקדקודים, ואם אנחנו מוצאים שזה מתחת לרף שהצבנו, אנחנו מאושרים. ואם לא, אז כמו בחיים נוריד את הרף עוד קצת או משהו בסגנון.

תחת המסגרת של השפות הפורמליות, אנחנו יכולים עכשיו להגדיר גם את המחלקות באופן דומה:

עבור מחלקת הסיבוכיות P הפולינומיאלית, נגדיר אותה כשפה המתקבלת תחת זמן פלינומיאלי, באופן הבא:

P ={ L ⊆ {0,1)* : קיים אלגוריתם המכריע את שפת הבעייה תחת זמן פולינומיאלי}

כדאי לשים לב שהשפה L המוגדרת פה, היא בדומה לשפה PATH שהגדרנו, ומייצגת אוסף מופעי בעיות.

אימות פולינומיאלי

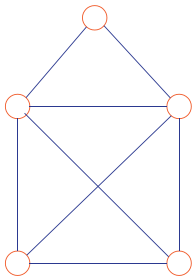
אלגוריתם אימות בהגדרתו, הוא קבלה של בעיה x שאיננו יודעים מה התוצאה שלה, ומחרוזת y, שמראה לנו עבור קלט מסוים את הפלט הרצוי לבעיה. לנו נותר רק לאמת שאכן, זה מתקיים. מה הכוונה? אם נקבל מופע של PATH עם כל ההגדרה המלאה שלו, כולל גרף וקדקודים, ואת ה-k הרצוי, אבל לפני שאנחנו מתחילים לחפש את המסלול, ניגש אלינו בחור חשוד ופשוט מביא לנו רצף של קדקודים. אנחנו יכולים כעת לבדוק פשוט את הרצף שהוא הביא לנו, ועל ידי זה לראות אם זה נכון.

כמובן, שעבור האלגוריתם של מציאת מסלול קצר, אנחנו לא ממש תרמנו הרבה, מאחר שגם ככה הוא מוגדר כשפה פולינומית. זה כן מתחיל לעניין אותנו כאשר מדובר על אלגוריתם שאנחנו לא יודעים איך והאם בכלל אפשר לפתור אותו תחת זמן פולינומי. לדוגמא-

מעגלים המילטוניים

גם בבעיית הגרפים ההמילטוניים נתקלנו בעבר, אבל נזכיר את זה בקצרה – בהינתן גרף G(V,E) האם אפשר למצוא מסלול שיעבור בכל הקדקודים רק פעם אחת, ואז יחזור לקדקוד המקור?

עבור גרפים קטנים קל יותר למצוא מעגל המילטוני[11], אחד המוכרים שבהם הוא בית עם גג ואיקס. כזה-



מי שלא יודע לצייר את זה, שיחזור לכיתה ה'. כמובן שכל שיש יותר קדקודים וצלעות הבעיה נהיית הרבה יותר מסובכת. אם יתנו לנו גרף בלי שום ידע מוקדם, איך נמצא מסלול המילטוני? נבחר קדקוד, ונעבור לשכן שלו, ונחפש מסלול מתאים. ברגע שנתקעים חוזרים אחורה ומנסים שוב. כמה זמן ייקח זה ייקח לנו? המון! O(n!) בלי למצמץ אפילו.

לצורך המשך הדיון, נגדיר את בעיית המעגל ההימלטוני בצורה הבאה:

HAM-CYCLE = {<G> : G הוא גרף המילטוני}

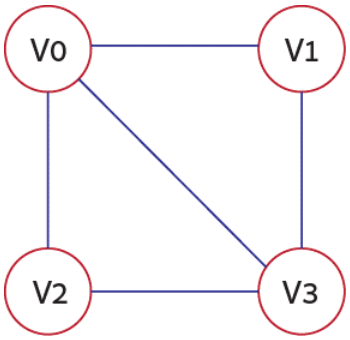
אבל, נגיד שירד נביא מהשמיים – אותו נביא מתת הסדרה המשותפת של התכנון הדינאמי, עכשיו אנחנו כבר יודעים שהוא נביא אמת והכל סבבה, ובקול סמכותי הוא אומר לנו רצף קדקודים שלכאורה פותר לנו את הבעיה. כמובן שאנחנו בודקים זאת ישר – האלגוריתם שנבדוק עבור האימות יבדוק קודם כל שאכן כל הקדקודים שרשומים לנו, אכן מכסים את כל הקדקודים בגרף, ובהמשך נבדוק עבור כל מעבר בין קדקודים אם אכן יש ביניהם קשת מחברת. סך הכל האימות ייקח לנו זמן של $O(n^2)$ – צריך לזכור שאין פה ריצה בעיניים על גרף מצויר, אלא על מימוש בצורה של מטריצת סמיכויות או רשימות מקושרות, ולכן הריצה מתארכת. כך או כך, מצאנו מופע של HAM-CYCLE שהצלחנו לאמת שהוא אכן שייך לשפה תחת זמן פולינומיאלי. הידד.

נפרט כאן קצת יותר, על מנת לראות את משמעות האימות בזמן פולינומיאלי.

בעבור הדוגמא ניקח את הגרף הבא:

---

[11] שימו לב, מעגל מסתיים באותה נקודה שהתחלנו, ומסלול המילטוני אינו חייב לסיים באותה נקוד ובלבד שיעבור בכל המסלולים. (כמובן שזה קצת קל יותר, אבל לא בהרבה)



לא קשה לראות שמדובר בגרף המילטוני, ולמצוא מסלול מתאים שסוגר פה מעגל. מה שנעשה עכשיו, הוא להגדיר לכל קדקוד בגרף ייצוג בינארי, באופן הבא:

V_0	00
V_1	01
V_2	10
V_3	11

אם נרצה עכשיו לבטא תיאור של קשת מסוימת, נוכל פשוט להשתמש בקידוד של שני הקדקודים ברצף, וזה ייתן לנו את הקישור של שני הקדקודים בער הקשת. למשל, הקשת (V_2,V_3) יכולה להיות מתוארת כ 1011. אם נרצה עכשיו, נוכל ליצור לנו מחרוזת מוסכמת שהחלק הראשון שלה יכיל את מספר הקדקודים הקיימים בגרף, וזנבה מתאר ברצף את כל הקשתות הקיימות בו. המחרוזת תיראה כך:
0010000100100011011111011. בכוונה צבעתי את החלק הראשון, בשביל שיופרד לנו בראש משאר המחרוזת, למרות שבאמת אין בזה צורך.

בעזרת השיטה שתיארנו עכשיו, אנחנו יכולים ליצור את כל הגרפים הקיימים בכלל, ובפרט את כל הגרפים ההמילטוניים. כל זה טוב ויפה, אבל כל זה היה מופע בודד (ליתר דיוק – מילה x) של גרף המילטוני, איך ממשיכים מפה הלאה? בשביל לאמת את המילה שתתקבל לנו, נגדיר את המחרוזת הבאה: 00011110.
שתגדיר לנו את רצף הקדקודים שעלינו לעבור. אמנם זה נראה קצת מוזר במבט ראשון – איך אתה אומר שהאימות הוא פולינומיאלי ביחס לקלט המילה שלנו, אם בעצם האימות שקיבלנו היה כל כך קטן? מאחר ועכשיו אנחנו מגדירים מה אנחנו צריכים לעשות – קודם כל אנחנו בודקים שהקדקודים מספקים אותנו – הווה אומר יש לנו בדיוק את אותם קדקודים שמתוארים לנו במילה. בנוסף כל צמד קדקודים אמור להוות תת-מסלול. אנחנו צריכים לבודק כל צמד אם אכן יש קשת כזו. איך נעשה את זה? נבדוק במילה של הגרף האם יש לנו צמד קדקודים מתאים, בכל פעם נעבור על כל המילה, בסופו של דבר נגיע לזמן פולינומי של מעבר על המילה בשביל לאמת אותה.

מחלקת הסיבוכיות NP

לאור מה שראינו עם המעגלים ההמילטוניים, אנחנו יכולים כעת להגדיר את המחלקה הבאה, מחלקת NP (Nondeterministic Polynomial time) בתור מחלקת השפות אותן ניתן לאמת תחת זמן פולינומיאלי.
אנחנו לא יודעים כמה זמן באמת ייקח לנו אלגוריתם אופטימלי בשביל לפתור את הבעיות האלה, ככל הנראה תמיד זה יהיה אלגוריתם מעריכי כלשהו, אבל בשביל **לאמת**, אני חוזר – **לאמת** ולא **להכריע**, אנחנו מסוגלים לעשות זאת תחת זמן פולינומיאלי.

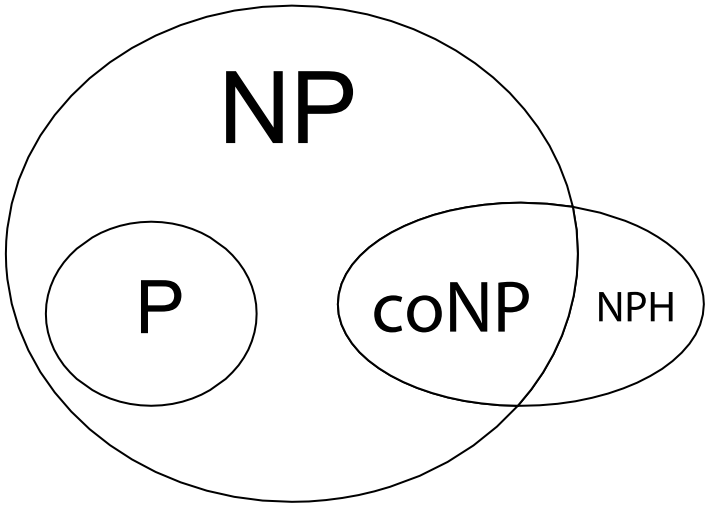
מבחינה פורמלית, נגדיר את השפה ככזו שמקבלת בעיית הכרעה כלשהי, ומחרוזת אימות, ובערת אלגוריתם אימות A, אנחנו יכולים לקבוע האם מדובר בבעיה ששיכת ל-NP או לא. ובעוד יותר פורמלית –

$L = \{x\in\{0,1\}^* : A(x,y) = 1$ כך ש- $|y| = O(|x|^c)$ קיים אישור y המקיים$\}$

עד פה הצלחנו להוכיח באותות ובמופתים, שהשפה HAM-CYCL שייכת ל-NP. אפשר גם לומר בוודאות, שאם יש לנו שפה $L\in P$, אז בוודאי שהיא שייכת גם ל-NP. כי אם ניתן **להכריע** אותה תחת זמן פולינומיאלי, זה למעשה אלגוריתם האימות שלנו עבור כל השפות ב-P. כל אלגוריתם אימות יוגדר להיות האלגוריתם שפור את הבעיה בעצמה.

אם כן, אנחנו יודעים בוודאות ש $P\subseteq NP$, אך עומדת לנו השאלה, שכבר 50 שנה נשאלת ועדיין לא נענתה – האם P=NP? ככל הנראה לא מדובר בשוויון מלא, אלא רק בהכלה, וזה דבר שדי מוסכם, גם אם לא מוכח בין כל החוקרים כי $P \neq NP$. מי שיצליח להוכיח לכל אחד מהכיוונים יזכה לתהילת עולם ו-100 בקורס.

בגדול חלוקת מחלקות הסיבוכיות בצמה, לא מוסכמת לגמרי על כל החוקרים, אך מה שדי מקובל על רובם (ופרופ' קרנר בכללם) הוא הדיאגרמה הבאה:



המחלקה P כלולה התוך הNP. בתוך המחלקה NP יש לנו גם את המחלקה co-NP, שעליה נדבר בהמשך, ומחוץ להכל יש לנו את ה-NPH או NP קשות, שגם אותם נראה בהמשך. כמובן, שאין מה להסתכל על יחס של גודל, כי בעצם ההגדרה של השפות, כל אחת מהמחלקות היא אינסופית, אבל לפחות זה מהו שיכול לתת לנו איזה כיוון ראשוני של מה מוכל בתוך מה.

שאלות הרחבה

הוכח כי אם $L_1 \in P$, וגם $L_2 \in P$, אזי $L_1 \cup L_2 \in P$

מה שמבקשים מאיתנו להוכיח, זה דבר שאמרנו קודם בדרך אגב, וכבר נדרשנו להרבה הוכחות דומות בקורסים קודמים והוא – סגירות לאיחוד. אנחנו נדרשים להוכיח שאם נאחד שתי שפות השייכות למחלקה P, אז גם השפה שתיווצר לנו, שייכת למחלקה P.

<u>הוכחה:</u> נתון לנו כי $L_1 \in P$, כלומר על פי ההגדרה, קיים אלגוריתם פולינומי A_1 המכריע את השפה L_1. כלומר לכל מילה $x\in \{0, 1\}^*$, A_1 יכול להגיד האם $x \in L_1$ וכל זה תחת זמן פולינומיאלי.

ואותו כנ"ל – $L_2 \in P$, כלומר על פי ההגדרה, קיים אלגוריתם פולינומי A_2 המכריע את השפה L_2. כלומר לכל מילה $x\in \{0, 1\}^*$, A_1 יכול להגיד האם $x \in L_2$ וכל זה תחת זמן פולינומיאלי.

בשאלות מסוג זה, אנחנו צריכים לספק שלושה תוצרים: 1. **L_3** – הגדרת שפה חדשה בצורה ברורה, כולל האלגוריתם המתאים שיפתור אותה. 2. **הוכחת נכונות** – הוכחה שהאלגוריתם שהצענו אכן עומד ברישות. 3. **הוכחת זמני ריצה** – על מנת לוודא שעדיין נשארנו תחת זמן פולינומיאלי.

1. כעת נגדיר שפה חדשה $L_3 = L_1 \cup L_2$.

בעבור השפה החדשה, נגדיר אלגוריתם חדש A_3, שעובד באופן הבא:

בהינתן מילה $x \in \{0,1\}]^*$

1. A_3 מריץ את אלגוריתם A_1 על x.
   אם A_1 מחזיר 1, נחזיר 1 ונסיים.

2. אחרת, נריץ את A_2 על x.

   אם A_2 מחזיר 1, נחזיר 1 ונסיים.
3. אחרת – נחזיר 0.

2. **הוכחת נכונות** – נניח ש $x \in L_3$, כלומר $x \in L_1 \cup L_2$, כלומר $x \in L_1$ או $x \in L_2$.

אם כך, יוצא לנו שאם $x \in L_1$ אזי בשורה הראשונה באלגוריתם, אנחנו נחזיר 1 (אמת). ואם $x \in L_2$ אז בשורה השניה באלגוריתם, אנחנו נחזיר 1.

עכשיו נראה מה קורה אם $x \notin L_3$. במקרה כזה, מובן לנו שהוא גם לא משתייך לאיחוד השפות, או לכל אחת מהן בנפרד. במקרה זה בשתי השורות הראשונות כלום לא יקרה, אך ברגע שנגיע לשורה השלישית , לא נותרו לנו כבר בדיקות לעשות, ונחזיר את הערך false.

3. **זמני ריצה** – נתון לנו שזמני הריצה של שתי השפות L_1, L_2 הם פולינומיאליות ושייכות למחלקה P. כך שגם אם נצטרך להריץ את שני האלגוריתמים אחד אחרי השני, זה יצא לנו זמן פולינומי כפול 2. מה עדיין מגדיר לנו את זה כזמן פולינומיאלי, מש"ל.

הערה: ניתן להוכיח בדיוק באותו אופן גם את הסגירות לחיתוך של המחלקה P. כל שעלינו לעשות, הוא לקחת בדיוק את אותה הוכחה שכתבנו עכשיו ולהתאים לסימונים מתאימים לחיתוך – אם נרצה להוכיח שמילה כלשהי שייכת לחיתוך השפות L_1 ו-L_2, נכתוב את האלגוריתם באופן שיבדוק בשתי השורות הראשונות שהמילה משתייכת לכל שפה בפני עצמה, ורק במידה ויש לנו את שני האישורים נוכל להחזיר אמת עבור המילה. כל יתר ההוכחה ישתנה בהתאם בשינויים קלים. ובזה באנו על מקומנו בשלום.

הוכח כי אם $L \in P$, אז $\overline{L} \in P$

פה אנחנו נדרשים להוכיח סגירות למשלים תחת זמן הכרעה פולינומי. ההוכחה הנ"ל הינה יחסית קלה, כי מאחר שאנחנו יכולים להריץ את האלגוריתם של השפה בזמן פולינומיאלי, ולהכריע שהמילה שקיבלנו אכן שייכת לפה, אז המרחק בין זה לבין להוכיח שהיא לא קיימת בשפה (כלומר קיימת בשפת המשלים) הוא בדיוק אותו זמן פולינומיאלי, פלוס שורה אחת – החזרה הפוכה של התוצאה.

מבחינת הנכונות – אם המילה קיימת בשפה המקורית, כלומר $x \in L$, אזי ההחזרה ההפוכה תוציא לנו שהמילה לא קיימת במשלים, ואם נקבל שהמילה לא קיימת בשפה L, אזי בהכרח היא קיימת בשפה המשלימה.

זמן הריצה – כמו שאמרנו יהיה גם הוא פולינומי, בדיוק כמו השפה המקורית.

הוכח כי אם $L_1 \in NP$, וגם $L_2 \in NP$, אזי $L_1 \cup L_2 \in NP$

בשאלה זו לא מבקשים להוכיח לנו את P, שהוא יחסית פשוט, אלא איחוד של NP. מה השוני הגדול? ההגדרה של אלגוריתם אימות ב-NP, הוא כזה שאני מקבל אלגוריתם בודד, ובעבור את מחרוזת האימות המתאימה. אך כאן יש לי שני אלגוריתמים ושתי מחרוזות אימות. כמובן שצריך לעשות פה איזה שינוי שהוא קצת יותר גדול.

נתחיל בנתונים:

$L_1 \in NP$, כלומר קיים איזה אלגוריתם זמן-פולינומיאלי A_1 שבעבור כל מילה $x \in \{0,1\}^*$, קיים אישור y_1, כך ש $|y_1| = Poly(|x|)$, כך ש $x \in L_1$ אם"ם $A_1(x,y_1) = 1$.

וכן $L_2 \in NP$, כלומר קיים איזה אלגוריתם זמן-פולינומיאלי A_2 שבעבור כל מילה $x \in \{0,1\}^*$, קיים אישור y_2, כך ש $|y_2| = Poly(|x|)$, כך ש $x \in L_2$ אם"ם $A_2(x,y_2) = 1$.

כעת נציע אלגוריתם A_3 למימוש השפה L_3. אנחנו צריכים להראות שיש אלגוריתם שבעבורו לכל מילה x נוכל להגיד האם המילה היא בשפה או לא. מה שנאמר הוא כדלקמן – אם $x \in L_2$ אז זה אומר שהוא נמצא ב-L_1 או ב-L_2. כלומר קיים אישור כלשהו למילה שהוא $y_1 \backslash y_2$. דבר זה הוא נתון, ולכן לא ניתן לשינויים. באותו אופן אנחנו יכולים לבדוק עבור כל מילה את שתי האופציות, ואם המילה שייכת לאחת משתי השפות על ידי האימותים המתאימים – אזי המילה שייכת ל-L_3.

1. **<u>L_3</u>** – בהינתן מילה $x \in L_3$, נריץ את A_1 עם האישור המתאים y_1. אם $A_1(x, y_1) = 1$ – מה טוב. נחזיר 1 ונסיים. אחרת, נריץ את A_2 עם האימות y_2. אם $A_2(x,y_2)= 1$ נחזיר 1. אחרת, נחזיר 0 ונסיים. עד כאן תיאור האלגוריתם.

2. **<u>הוכחת נכונות</u>** – הנכונות של זה בדיוק כמו בהוכחה הקודמת של איחוד השפות הפולינומיאליות, או שנקבל אימות בעבור אחת מהשפות, או שלא נקבל אימות משום שפה.

3. **<u>זמן ריצה</u>** – מאחר ואנחנו עושים פה אימותים על אלגוריתמים שהם זמן-פולינומיאלים, נישאר תחת אותה הגדרת זמן, ולא נעבור למסגרת אחרת שהיא מעריכית.

הוכח שלכל $L \in NP$ קיים אלגוריתם מעריכי שמכריע אותה

אנחנו יודעים שלכל שפה NP קיימת לכל מילה x איזה אלגוריתם אימות, התלוי ב-y, שרץ בסך הכל בזמן פולינומיאלי, כלומר $|y| = Poly((x)$. אם נניח ש $|x| = 10$ אז אלגוריתם האימות יכול להיות $|y| = 10^2$. לא תמיד מדובר ביחסים האלה, לפעמים זה יותר ולפעמים פחות, אך זה מספיק לצורך הדוגמה.

המשמעות של זה היא, שבהינתן מילה x, אותה אנחנו צריכים להכריע ללא שום ידע מוקדם, ואנחנו אלו שנחליט אם המילה שייכת לשפה או לא, אז אנחנו יכולים לראות שיש לו חסם מינימלי על הגודל והוא זמן הריצה של אלגוריתם האימות. אבל אם צריכים לחפש את אותו מסלול, או כל אימות אחר בעצמנו, היינו צריכים לחפש את כל האופציות הקיימות, כלומר $2^{|y| = Poly(|x|)}$. וזה בהכרח אלגוריתם בזמן ריצה מעריכי. מש"ל

שלמות ב-NP ורדוקציות

דיברנו עכשיו על שתי המחלקות שמהוות לכאורה את שתי הקצוות של הסיבוכיות – P, NP. אמנם אנחנו לא יכולים לקבוע בוודאות מוחלטת שמדובר על שתי מחלקות שונות, אבל נזרום על הטענה לפיה P≠NP. עכשיו אנחנו נתעסק בשתי מחלקות נוספות, שהם הבשר האמיתי של הסיבוכיות. והמבחן.

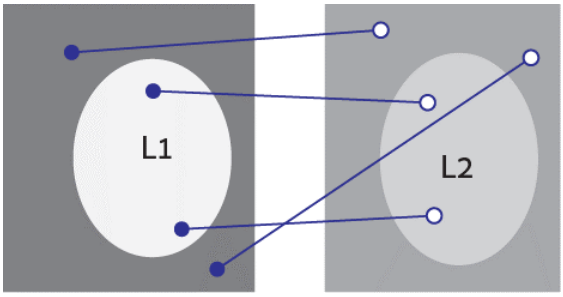
בדיאגרמה שהבאנו קודם, חילקנו את אחד מהעיגולים לחלק שנמצא בתוך המחלקה NP, ולחלק שנמצא מחוץ לו. ההבדל בין שתי המחלקות מבחינה פורמלית, הוא שהמחלקה של ה-NPH זה הבעיות הקשות שנמצאות מחוץ לNP, וה-NP השלמות נמצאות בתוך ה-NP. ההגדרה הזאת נראית די מתחמקת כי פשוט כתבתי את אותו הדבר פעמיים, אבל יש לה חשיבות.

שתי המחלקות הללו נחשבות לבעיות "קשות" להכרעה, אך לכל הבעיות וההאלגוריתמים המוכלים בהם, ניתן למצוא קישור שתופר את הכל ביחד. דבר זה יוצר לנו מצב מיוחד בבעיות ה-NP שלמות, שלא ברור לנו בדיוק האם הם יותר שייכות ל-NP או ל-P. על פי ההגדרה, מאחר וכל הבעיות קשורות אחת בשניה, וכמובן שאנחנו מדברים פה על אינסוף בעיות, אם נצליח להוכיח ולו לאחת מהבעיות שניתן לפתור אותן בזמן פולינומי, אזי כל המחלקה ה-NP שלמה עוברת במכה אחת להיות מוגדרת תחת מחלקת P. יותר מזה – זה גם יפתור לנו את שאלת החיים, היקום וכל השאר – אם P=NP? אם נעביר את הNP השלמות, נוכל לומר בצורה ברורה שגם P=NP.

את קישור הבעיות למחלקה, נעשה בדרך שנקראת רדוקציות, שנסביר עכשיו.

רדוקציות

רדוקציה, היא ניסוח מחדש של פונקציה, באופן שמסייע לנו לפתור בעיה שלא היינו מסוגלים אליה. מה הכוונה? נניח ויש לנו שתי שפות L_1,L_2, ואנחנו יודעים לפתור רק את L_1, אבל לא מצליחים לפתור את L_2. אם נצליח למצוא איזו המרה (רדוקציה) שעובדת בזמן פולינומיאלי באופן מלא – כלומר כל דבר שיתקבל ב-L_1 גם יהווה הכרעה לבעיה המתאימה ב-L_2, וכל בעיה שמוחזרת שאינה שייכת לשפה L_1 גם לא תהיה שייכת ל-L_2, אז אנחנו יכולים לסמן כי $L_2 \leq_p L_1$ חשוב לשים לב פה לכיוונים והכל – מה שאנחנו אומרים פה שהשפה L_1 שמכילה את אינסוף הבעיות שלה גדולה ביחס פולינומיאלי מ-L_2, כלומר, במקרה הכי טוב נצליח ממש להוכיח שאם נבדוק אותה שפה ההכלה היא דו כיוונית, אבל בשונה משקילות קידודים שראינו קודם, אין לנו דרישה של הכלה דו כיוונית, אלא אם יש לנו הכלה מלאה מצד אחד לשני זה כבר מספיק לנו.



האיור מדגים לנו את הדרך שאנחנו צריכים ממש להראות ש**לכל** פונקציה ב-L_2 קיימת הפונקציה המתאימה לה בתוך או מחוץ לשפה.

לדוגמה: מישהו מסתבך כיצד לפתור את הנוסחה הבאה $bx+c = 0$. אבל אחרי הרבה זמן, הוא מחליט פשוט להשתמש בנוסחה למציאת X ממעלה שניה – $ax^2+bx+c=0$, כי הוא זוכר את הנוסחה בעל פה. ועל ידי זה לפתור את הבעיה הזאת. כמובן שההמרה הזאת מאוד בעייתית, למה? כי בשביל שהנוסחה תוציא לו אותו דבר, הוא צריך להציב פה $a=0$, ואם הוא ילך על הנוסחה הרגילה למציאת ה-x הוא יצטרך לחלק ב-0. אז זה לא הפתרון. פתרון שכן יהווה רדוקציה, הוא לפתור את זה באופן הבא – $x = -c/b$. כאן בטוח לא תהיה בעיה, כי אם ה $b=0$ גם ה-x נעלם מהנוסחה המקורית, והצלחנו לספק את הרדוקציה.

מבחינה פורמלית, אנחנו מגדירים את הרדוקציה באופן הבא – השפה L_1 ניתנת לרדוקציה בזמן פולינומיאלי לשפה L_2 (הביטוי שרשמנו מקודם, $L_1 \leq_p L2$ מבטא את בניית הרדוקציה) אם קיימת פונקציה $f:\{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ כך שעבור כל מילה $x \in \{0,1\}^*$ מתקיים:

$x \in L_1$ אם ורק אם $f(x) \in L_2$[12].

כלומר הפונקציה של רדוקציה צריכה להיות כל כך מוחלטת, עד כדי שנוכל לבדוק מילה שתיכנס אליה, ואם הפלט לא יצא שייך לפה L_2 הוא גם לא יהיה שייך לשפה L_1.

למה 36.3

אם $L_1, L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$ הן שפות המקיימות $L_1 \leq_p L_2$, אזי $L_2 \in P$ גורר $L_1 \in P$.

הסבר: הלמה הזאת מניחה לנו את הקשר-זמן-ריצה בין הפונקציות לאחר הרדוקציה. אנחנו טוענים שאם המעבר בזמן פולינומיאלי, העביר לנו שפה אחת, לא ידועה, לשפה אחרת שהיא ידועה כפולינומית, אז גם השפה הראשונה היא שפה פולינומית. שימו לב! אנחנו מדברים על גרירה חד כיוונית. כלומר, אם ידוע לנו שהשפה L_2 אינה פולינומית, או לחילופין ידוע לנו שהשפה L_1 שיצאנו ממנה היא בעצמה פולינומית, זה לא אומר שום דבר לגבי השפה השניה.

ההוכחה כמובן, די פשוטה, אם אנחנו מגדירים רדוקציה זמן פולינומיאלית, והאלגוריתם שאנחנו מגיעים אליו גם הוא פולינומי, אז יש לנו פה פשוט הרכבה, ואנחנו יכולים להגדיר את השפה המקורית כבעלת פיתרון פולינומיאלי. ובשפה פורמלית יותר:

<u>הוכחה:</u> יהי A_2 אלגוריתם זמן-פולינומיאלי המכריע את L_2, ויהי F אלגוריתם רדוקציה שרץ בזמן פולינומיאי ומחשב את פונקצית הרדוקציה f (עד כאן זה הבסיס הנתון לנו).

אנו נבנה אלגוריתם זמן-פולינומיאלי A_1 המכריע את L_1 (תכלס, נגדיר "אלגוריתם" שפשוט מבצע את כל הפעולות של הרדוקציה + ההכרעה מA_2). נכונות האלגוריתם נובעת מהתנאי הקודם על שייכות המילים לשפות ולרדוקציות, באופן שמכריח אותנו שהכל ירוץ תחת זמן פולינומיאלי, והרי לנו חיבור פולינום. מש"ל.

שלמות ב-NP

למעשה, מה שהרדוקציה נותנת לנו, הוא קישור בין פונקציות שונות ברמה שאינו משנה משמעותית את זמ הריצה – מאחר והמחלקה היעילה ביותר שאנחנו מדברים עליה היא פולינומית, אז הקישור של רדוקציה לכל המחלקות האחרות לא מעלה ולא מוריד. מה שהוא כן עושה, זה לקשור את כל הפונקציות ביחד

[12] זה תנאי לנכונות הרדוקציה, ונשתמש בו בהמשך – נקרא לו פשוט 36.1.

לחבילה אחת, או בניסוח אחר, להראות שבעיה מסוימת קשה לפחות כמו בעיה אחרת, אבל רק ברמה פולינומיאלית, אז תכלס שניהם אותו דבר.

את מחלקת הבעיות השלמות ב-NP, נגדיר בעזרת האיחוד הנ"ל, באופן הבא:

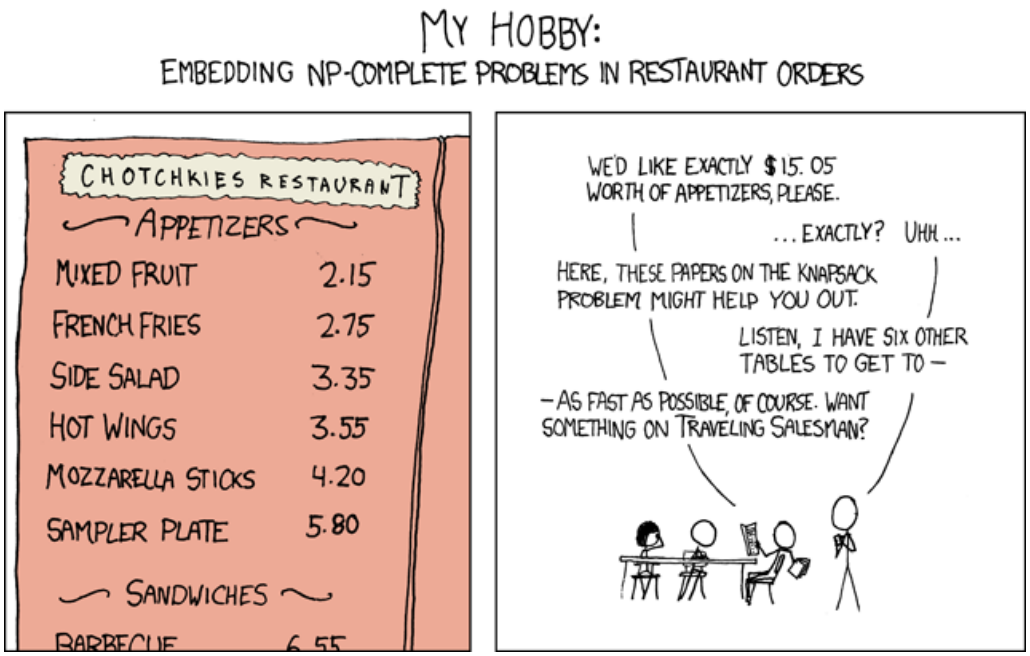
שפה $L \subseteq \{0,1\}^*$ היא שלמה ב-NP, אם מתקיימים שני התנאים הנ"ל:

1. $L \in NP$
2. $L' \leq_p L$ עבור כל $L' \in NP$.

נתחיל מהתנאי השני. מאחר ודיברנו על כל עניין הרדוקציה, ואנחנו בעצם כובלים את הבעיות אחת לשניה, אז הבעיות השלמות הן אלה שאפשר לכבול עליהם את כל מה שנמצא ב-NP. כדאי לזכור, שבמחלקת ה-NP קימים גם כל הבעיות של P, מה שכמובן גם מסביר את הקשר בין הNP שלמות לשאלת הP=NP. אם כל הבעיות מתחברות לNP שלמות בעזרת הרדוקציה, אז הכרעה מוחלטת שתראה ניתן להעביר הכל לזמן פולינומי, תעביר גם את אלו שהיו קשורות, אך היו מוגדרות בתור NP. בגלל הקשר ההדוק הזה, רוב המחקר נע על הציר של בעיות אלו, ולא על ניסיון להראות אם יש/אין שיוויון.

התנאי הראשון מגדיר לנו את הקבוצה כמוכלת בתורך הקבוצה NP. יכול להיות מצב שנמצא בעייה שניתן לעשות אליה רדוקציות שמקיימות את התנאי השני, אבל אם לא ניתן לבעיות אלו אלגוריתם אימות, הם ייצאו מ-NP ויעבור למחלקה של ה-NPH (הקשות ב-NP).

עד עכשיו הסברנו מה זה בעיית NP שלמה, והבהרנו שאנחנו צריכים ליצור את כל הבעיות כנדבך אחד על גבי השני. אבל עכשיו נתקענו בבעיית ה"Kit-Kat". חטיף הקיט-קט (שהוא בעצם כיף-כף, אבל לפני שעלית גנבו אותו לעברית), הוא חטיף וופל מצופה שוקולד. שהוופל שלו עשוי מחטיפי קיט-קט גרוסים. שהם היו עשויים מחטיפי קיט-קט גרוסים וכן הלאה (או בצורה פשוטה יותר – רקורסיה). בכל הנראה הקיט-קט הראשון היה עשוי באמת מוופל, ואנחנו עכשיו מחפשים את הקיט-קט הקדמון, המקור והאב הקדמון לכל חטיפי הוופל המצופים שוקולד. נתחיל עם אלגוריתם אחד שמוכח שהוא קשור להיות NP-complete, ואת שאר הבעיות נגדיר על גביו.



http://xkcd.com/287/

ספיקות מעגלים

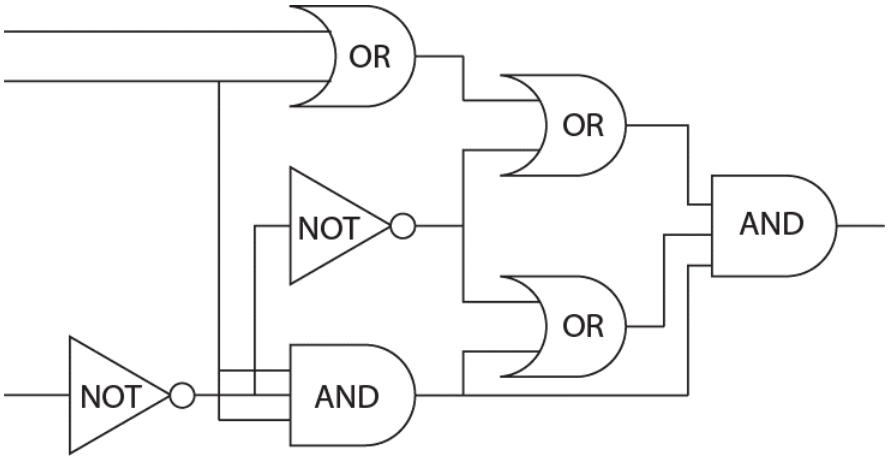
בעיה זו הינה הבעיה הראשונה שהוכחה כשייכת למחלקת השלמות ב-NP, על ידי סטפן קוק ב-1971, ולכן נהוג לקרוא את זה על שמו "משפט קוק". את הבעייה עצמה נציג בצורה פשוטה, אבל לא ניכנס לעומק ההוכחה, כי היא ארוכה, מסובכת ופחות רלוונטית

בעיית ספיקות המעגלים, מתייחסת למעגלים לוגיים באופן שלמדנו עליו ב"ספרתיות". כמובן, שהיישום של זה נוגע לאלקטרוניקה ועוד, ובהמשך ניתלה על הבעיה הזאת וניצור עוד בעיות שיתקיימו תחת המטריה של NPC.

הבעיה מוגדרת כך: בהינתן מעגל צירופי בוליאני, המורכב משערי AND, OR, ו-NOT. האם המעגל ספיק?

מבחינה פורמלית, נתחשב בקידוד המוכר של שערים לוגיים שלמדנו בספרתיות. עבור כל קבוצת שערים לוגיים המחוברים ביניהם, יש לנו שלוש אפשרויות לתוצאה: 1. הפלט יהיה תמיד T, 2. הפלט יהיה תמיד F, 3. הפלט יהיה תלוי בהשמת הערכים בחוטים.

נראה דוגמא למעגלים לפי האפשרויות השונות-



בהינתן לנו מעגל לוגי, כמו בדוגמא למעלה, איך נוכל למצוא את התשובה לבעייה? נצטרך להתחיל להציב ולבדוק מה התוצאה. כמובן, שאם אנחנו מציבים וממשיכם לקבל שהתוצאה היא T, זה לא אומר שהמעגל תמיד ספיק – תמיד יכול להיות שדווקא הבדיקה האחרונה היא זו שתניב לנו תוצאת F. כמובן שבדיקה של כל האפשרויות היא מעריכית – $O(2^n)$ ביחס ביחס לכמות השערים. מצד שני, גם אם נבדוק את כל הפרמוטציות האפשריות ונקבל F, אנחנו חייבים להגיע עד הסוף בשביל לוודא שהמעגל לא מסופק. למה זה רלוונטי? כי אם יש מעגל שכל הזמן מוציא 0/1 אז אפשר פשוט לבטל את כולו ולהחליף בחוט בודד באותו הערך.

מבחינת בעיית הסיפוקים, מה שמעניין אותנו בסוף זו רק השאלה הבולייאנית של האם המעגל ספיק או לא-ספיק. התשובה לא צריכה להיות "הוא ספיק בשלוש מתוך חמש מאות מקרים", אלא אם מצאנו השמה שפועלת, אפשר לעצור.

את השפה הפורמלית, נגדיר בצורה הבאה: CIRCUIT-SAT = {<C> : C הוא מעגל צירופי בוליאני ספיק}

על מנת להוכיח שהשפה קיימת ב-NP שלמה, נוכיח את שני התנאים:

1. בעיית ספיקות המעגלים שייכת למחלקה NP (למה 36.5) – זה שהאלגוריתם שפותר את הבעיה הוא מעריכי, ברור לנו כבר באופן די מוחלט. השאלה היא האם קיים אלגוריתם אימות, שבעבורו

נוכל לאמת בזמן פולינומיאלי את ספיקות המעגל. כמובן, שהתשובה היא כן, אם נקבל את המעגל C וביחד איתו קוד אימות שמתאר לנו את ההשמה המתאימה, ברור שנוכל לאמת את זה במהירות פולינומיאלית, ואולי אפילו לינארית, אם נצליח לעבור בצורה פשוטה. נזכיר רק, שאלגוריתם האימות לא יכול לשלול לנו קיום, אלא רק להוכיח נכונות של המעגל תחת השפה של ספיקות המעגלים.

2. בעיית ספיקות המעגלים היא NP-קשה (למה 36.6) – התנאי השני, האומר שניתן לעשות **לכל** בעייה ב-NP רדוקציה לבעייה הנתונה, מגדיר לנו את הבעיה (במקרה שלנו, ספיקות המעגלים) כבעיה "קשה". נראה אחר כך מה המשמעות של ה, אבל מבחינתנו, יכולות להיות בעיות קשת שהם לא ב-NP, כלומר יכול להיות בעיות שאין לנו אפשרות אפילו לאמת אותן בזמן פולינומי. רק הקשירה של שתי התנאים, הופכת את הבעיה ל-NP שלמה. ולעניין שלשמו התכנסנו, יש הוכחה ארוכה ומייגעת עליה דלגנו בשיעור, אז רק תסמכו על קורמן (ומרן פרופ' קוק) שזה נכון.

הנובע משתי הלמות הנתונות לנו, הוא המשפט החשוב-עד-למאוד 36.7 – בעיית הספיקות של מעגלים היא NP-שלמה.

הוכחות שלמות ב-NP

הוכחנו בצורה ברורה (לכאורה) שכל בעיה ב-NP יכולה לעבור רדוקציה $L \leq_p$ CIRCUIT-SAT. הוכחנו את זה כל כך לכאורה, שקשה מאוד לחשוב שאנחנו צריכים להוכיח את זה מחדש עבור כל בעיה. השיטה שלנו להוכחת הנכונות עבור שאר הבעיות, תהיה בעזרת הלמה הבאה:

למה 36.8

אם L היא שפה כך ש- $L' \leq_p L$ עבור איזושהי $L' \in NP$, אזי L היא NP-קשה.
יתר על כן, אם $L \in NP$, אזי $L \in NPC$.

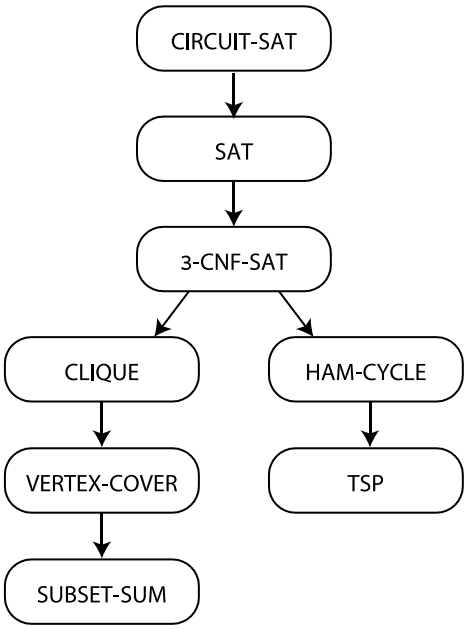
הלמה הזאת תוקפת את הוכחת השלמות ב-NP מזוית שונה. אנחנו אמרנו שהרדוקציה היא חד ערכית, כלומר את כל אינסוף הרדוקציות שעשינו (או לפחות הוכחנו שאנחנו מסוגלים לעשות), עבור ההוכחה הראשונה, אין להם שום משמעות מבחינת בעיות המקור. אבל אם נצליח לעשות רדוקציה משפה שהיא שלמה לשפה אחרת, אז אנחנו קושרים את השפות במרחק של מעבר פולינומיאלי. אבל אנחנו מקבלים עם זה בונוס בצורה טרנזטיבית. אם כל השפות ב-NP יכולות לעבור באינדוקציה לשפה L' כלשהי, תחת זמן פולינומיאלי, ואם אנחנו יכולים להוסיף לזמן הזה עוד מעברון קליל לבעיה אחרת – אז גם לשפה L אנחנו מסוגלים להגיע תחת רדוקציה זמן-פולינומיאלית! והנה הגדרנו את השפה כ-NP קשה. אם נצליח למצוא גם אלגוריתם אימות, ולמקם את הבעיה ב-NP, קיבלנו פה NP שלמה לתפארת.

נסדר עכשיו את השיטה בצורה מסודרת. על מנת למצוא שפה שהיא NP-שלמה, עקוב אחר השלבים הבאים:

1. הוכח כי $L \in NP$. (אם נעשה את כל השלבים על שפה שהיא בכלל לא ב-NP, אנחנו סתם עובדים על ריק, ולכן, זאת תהיה הבדיקה הראשונה שלנו.
2. בחר שפה NP-שלמה ידועה L'. (למשל ספיקות מעגלים)
3. תאר אלגוריתם המחשב פונקציה f הממפה כל מופע של L' למופע של L.
4. הוכח שהפונקציה f מקיימת $x \in L'$ אם ורק אם $f(x) \in L$, עבור כל $x \in \{0,1\}^*$. שזה תנאי הרדוקציה 36.1 שהגדרנו במקומו (במילים אחרות – הוכחת נכונות).
5. הוכח שהאלגוריתם המחשב את f רץ במן פולינומיאלי (הוכחת זמן ריצה).

עכשיו אנחנו נתחיל לבנות תילי-תילים של הוכחות לבעיות שכולם נשענות על ספיקות המעגלים. בכל פעם, ניקח איזה פן אחר של הבעיה ונתמודד איתו בעזרת השיטה שהגדרנו.

עץ ההוכחות שנעבור נראה כך:



כאשר כל הוכחת בעייה ב-NPC תוכל להוביל אותנו אל עבר הבעיה הבאה, כך שיהיה קשר הדוק בים כל ההוכחות.

ספיקות נוסחאות

השלב הבא שנתמודד איתו הוא ספיקות נוסחאות. ברמת הרעיון הפשוט קל לראות את הקשר ספיקות מעגלים לנוסחאות, אנחנו מדברים על אותו עולם דיון רחב. אבל מאחר שבנוסחאות הלוגיות, אנחנו משתמשים סימנים יותר מורכבים, אנחנו צריכים להוכיח באופן ברור את כל הרדוקציה.

עבור הגדרת הבעיה SAT נשתמש בהגדרות הבאות -ראשית נגדיר את המופע של SAT בתור ϕ המרכב מהסימנים הבאים:

1. משתנים בוליאנים : $x_1, x_2 \ldots$
2. קשרים בוליאניים: כל הקשרים שאנחנו רגילים אליהם ומכירים מהקורס בלוגיקה - $\vee$ (OR), $\wedge$ (AND), $\neg$ (NOT), $\rightarrow$ (גרירה לוגית), $\leftrightarrow$ (אם ורק אם)
3. () סוגריים.

בדומה לספיקות המעגלים שראינו קודם, אנחנו מחפשים גם פה בעבור נוסחה נתונה, האם ניתן לקבוע איזה הצבה שהנוסחה תוציא ערך אמת. נגדיר בצורת שפה פורמלית באופ הבא:

SAT = {<ϕ>: ϕ היא נוסחה בוליאנית ספיקה}

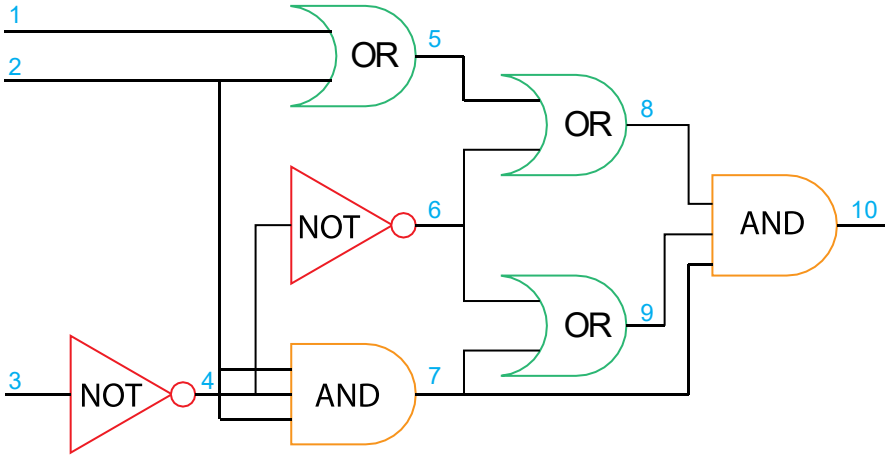
כמובן שגם פה הדרך הנאיבית לפתור נוסחה שכזו הוא פשוט להציב בה השמות עד שנגיע לתוצאה הרצויה. וכמובן שגם פה 2^n וכל הסיפור הידוע והמוכר. לא צריך לכתב את זה שוב.

<u>משפט 36.9:</u> ספיקות נוסחאות בוליאניות היא NP שלמה.

על מנת להוכיח את זה, נרתה להוכיח שני דברים (חשוב לזכור את זה כי כל שאלה שתגיע על הוכחת נוסחה כלשהי נצטרך לעבוד באותו אופן) הדבר הראשון – SAT ∈ NP. כמו שהזכרנו מקודם, אם זה לא ב-NP זה בטוח לא NP שלמה, ואין לנו מה לעבוד לחינם. הדבר השני הוא (ובאן מתחיל החידוש) נראה כי CIRCUIT-SAT $\leq_P$ SAT בלומר, נעשה את הרדוקציה מבעית המעגלים לבעית ספיקת הנוסחאות, נוודא שהרדוקציה עובדת בזמן-פולינומיאלי, ועל ידי זה נוכל לומר שהבעיה שלנו היא NP שלמה.

נתחיל עם השייכות ל-NP. כל שאנחנו צריכים להוכיח הוא שבהינתן אישור שאנחנו יכולים לאמת – במקרה הזה, השמה של כל המשתנים באופן שיוביל אותנו לקבל ערך "אמת", ביצוע יהיה בזמן פולינומיאלי. ובכן, מה שנצטרך לעשות הוא לעבור על כל הנוסחה, ולהחליף כל משתנה בערך המתאים לו מהמילה שקיבלנו לאימות. לאחר שנחליף את כל המשתנים, נצטרך לבדוק שאכן ההשמה היתה מוצלחת וקיבלנו 1. כל זה יכול להתבצע בזמן פולינומיאלי, ולכן SAT ∈ NP.

עכשיו נדבר על הרדוקציה CIRCUIT-SAT $\leq_P$ SAT – אנחנו רוצים ליצור מעבר שנוכל לבטא על ידו את בעיית ספיקת המעגלים, בצורה של ספיקת נוסחאות בוליאניות. עקרונית ניתן לבנות כל שער בצורת אינדוקציה אט אט ולכסות את כל המעגל הקיים לנו, הבה שאם נעשה ככה, אנחנו עלולים להתקע במעגלים ארוכים ומסובכים. לכן, הדרך שנעשה את זה, הוא במקום לנסות וליצור את הנוסחה המדויקת ביותר, שעולולה לסבך אותנו, נפרק פשוט כל חלק לתת-נוסחה בוליאנית. לדוגמא נסתכל על המעגל שלקחנו בדוגמא בחלק הקודם, ונמספר את הכניסות ואת היציאות של כל מעגל הספיקות באופן הבא:



צבעתי אותו גם יפה, שיהיה לנו קצת יותר נוח להסתכל על כל השערים. עכשיו, אופן הרדוקציה תהיה כדלקמן – ניקח שער מסוים, לצורך העניין, נתחיל מהקצה, ונבדוק איך אנחנו יכולים להמיר את זה לנוסחה לוגית. יש לשים לב, תוצאה של 1 שתתקיים במוצא השער תלויה באופן מובהק במה שנכנס. וכן להיפך, ולכן את הקשר בין כל שני צדדים של שער נבטא לכל אורך הרדוקציה בתור קשר ↔ אם ורק אם. ולכן, נחזור לשער הפלט, ונגדיר את הנוסחה שלו באופן הבא: $x_{10} \leftrightarrow (x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)$. את על הנוסחה הזאת נסגור בסוגריים, ונעבור הלאה לשער הבא, כאשר כל חלק וחלק נחבר עם קשר AND מאחר ואנחנו בהחלט דורשים שכל התנאים האלה יתקבלו בכל חלקי הנוסחה. לאחר שנפרק את כל המעגל לנוסחאות נקבל את המופע הבא:

$$\begin{aligned}\phi = x_{10} &\wedge (x_4 \leftrightarrow \neg x_3)\\ &\wedge (x_5 \leftrightarrow (x_1 \vee x_2))\\ &\wedge (x_6 \leftrightarrow \neg x_4)\end{aligned}$$

$\wedge\ (x_7 \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2 \wedge x_4))$
$\wedge\ (x_8 \leftrightarrow (x_5 \vee x_6))$
$\wedge\ (x_9 \leftrightarrow (x_6 \vee x_7))$
$\wedge\ (x_{10} \leftrightarrow (x_7 \wedge x_8 \wedge x_9))$

אחרי שהבנו את הרעיון של בניית הנוסחה מתוך בעיית ספיקת המעגל, אנחנו יכולים להבין שהבנייה של דבר כזה היא לא יותר מזמן פולינומיאלי, נניח ויש לנו n שערים ו-m חוטים, גם אם נגיד שהם איכשהו מחוברים ומסובבים אחד בשני כמו אוזניות חוטיות שמכניסים לכיס, עדיין לא נצטרך לעבור יותר מ-n^2.

עכשיו אנחנו צריכים לוודא שהקשר של הרדוקציה הוא אכן אמין – כלומר, שאם המעגל C המקורי ספיק, גם הנוסחה ϕ ספיקה. נאמר כי מאחר ויש לנו השמה טובה עבור C, אז כל תיל מתוך בפני עצמו מושם גם הוא בצורה איכותית, ולכן גם החיבור בין כולם נשאר מספק באותו אופן. וגם להיפך, אם הנוסחה שכתבנו מספקת לנו תוצאה 1, אז ההחזרה של הנוסחה לצורה של מעגלי ספיקה בוודאי שיתואר באופן שיחזיר גם הוא אחד. מש"ל.

(תכלס ההוכחה הזאת די צולעת, כי אנחנו פשוט אומרים שאם עשינו את השלבים נכון, הכל עובד לכל הכיוונים. מה שאנחנו צריכים לשים לב באמת, זה שאם נגדיר את הרדוקציה בצורה נכונה ולא יהיו לנו חורים לא מטופלים, ההוכחה של הנכונות של הרדוקציה לא צריך להיות באמת הרבה יותר מזה.)

ספיקת נוסחאות 3-CNF

אחרי שהוכחנו בתופים ובמחולות שהשפה SAT ∈ NPC, אנחנו יכולים להתפנות ולהתחיל לבנות עליה הוכחות נוספות. אנחנו רוצים לבנות איזה נוסחה שיהיה קל לראות עליה האם היא ספיקה, ולכן משתמשים בשפות CNF, למי שלא זוכר – CNF זה בדיוק ההיפך מ-DNF. ומי שזה עדיין רק מצלצל מוכר, נסביר שה-CNF הוא צורת שרשור של פסוקיות (תתי נוסחאות לוגיות) המקיימות לאורך כל הנוסחה את התצורה האחידה של חיבור פסוקיות שבתוכם כל הליטרלים מחוברים בקשר OR, ושרשור של מספר פסוקיות עם קשר AND ביניהם. לדוגמא: $(X \vee Y) \wedge (Z \vee W)$ היא צורת CNF מסדר שני. הסיבה שאנחנו מחפשים דווקא CNF מסדר שלישי (המכונה אצלנו 3-CNF), היא מאחר שCNF מדרגה ראשונה ושניה שייכים למחלקה P, ורק מ 3-CNF ומעלה, אנחנו מתחילים להגיע לנוסחאות שהן NP-שלמות.

מה היא בעצם תצורה של 3-CNF? הוספת מגבלה נוספת על הפסוקיות, שכל אחת מהן תכיל בדיוק שלושה ליטרלים. לא משנה כמה פסוקיות יש לנו בנוסחה הסופית, כל עוד אנחנו שומרים על הכלל הזה, אנחנו בסדר.

ננסה להוכיח שבעיית ספיקות הנוסחאות הבוליאניות 3-CNF היא NP-שלמה.

אין צורך אפילו לכתוב את ההוכחה שבעיה זו שייכת ל-NP, מאחר וזה בדיוק אותה הוכחה של SAT, בסך הכל אנחנו מדברים על מקרה פרטי של SAT. אבל בכל זאת, מה שכן נדרש עלינו הוא להוכיח רדוקציה $\text{SAT} \leq_P \text{3-CNF}$ ועל ידי זה נקבע את הבעיה בתור NP-שלמה.

את אלגוריתם הרדוקציה, נבצע באופן שונה למה שעשינו, אך הוא מתחבר גם לצורת ספיקת המעגל (במובן מסוים).

סדר הרדוקציה יהיה כזה:

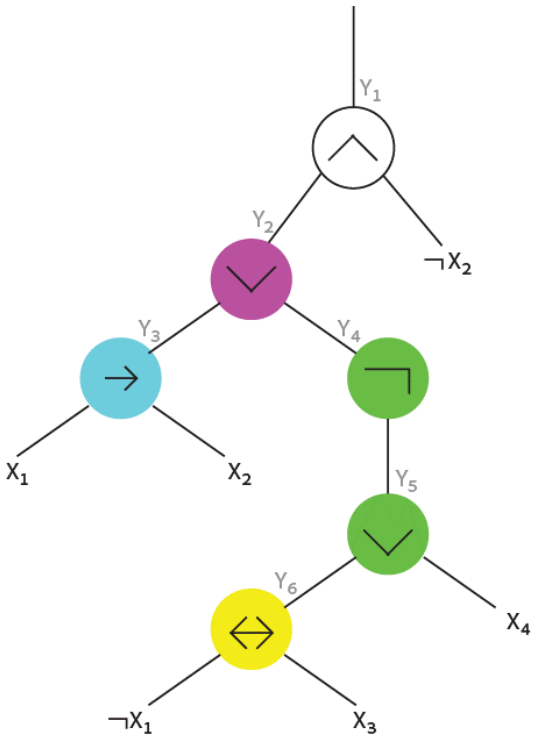
1. **עץ פיסוק בינארי** – בשלב הראשון, נבנה עץ "פיסוק" בינארי, בו הקשרים יהיו קדקודי העץ, והליטרלים יהיו העלים, כאשר כל כניסה לסוגריים בין קשרים תפריד אותנו לשני תתי-עץ.
2. **רדוקציה של ספיקת נוסחאות** – לאחר שיש לנו את העץ, אנחנו עושים לו רדוקציה דומה לזו שעשינו עם ספיקות הקשרים, וניצור לנו את כל הפסוקיות הקיימות.
3. **טבלת אמת** – השלב הבא הוא קצת שחור ולא כיפי, עבור כל פסוקית נבנה טבלת אמת, ונבדוק מתי התוצאה של הפסוקית הנוכחית הוא ספיק ומביא לנו 1, ומתי הוא מביא לנו 0.
4. **בניית DNF** – עכשיו, על מנת ליצור צורת CNF של הפסוקית, ניקח את כל תוצאות ה-0 של הטבלה ונרשום אותם בצורת DNF – כלומר, הליטרלים יהיו מאוחדים עם AND, והפסוקיות יקושרו ב-OR. דבר זה ייתן לנו את הנוסחה ההופכית ל-CNF
5. **דה מורגן** – המרה של כל הנוסחאות לצורת CNF.
6. **וידוא שלישיות** – שינוי הפסוקיות שקיבלנו לצורה שתתאים לנו לדרגה שלישית של CNF.

על מנת לראות את כל השלבים, גם אם לא במלואם, נראה את הדוגמא הבאה מתוך הספר –

$$\phi = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee \neg((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \vee x_4)) \wedge \neg x_2$$

עץ פיסוק בינארי

נתחיל בפירור הנוסחה לעץ בינארי. נזכיר – הקשרים יהיו לקדקודים, והליטרלים לעלים. מבחינת חלוקת הפיצול של העץ, אנחנו יכולים לראות שבסופו של דבר, יש לנו פה שני חלקים עיקריים לנוסחה – הסוגריים הסגולות, שמכילות תתי-נוסחאות, והצד השני שהוא מכיל רק ליטרל בודד. נפרק את כל המרכיבים ונקבל את העץ הבא –



הקדקודים צבועים כמובן לפי הסוגריים שתוחמות כל חלק מהנוסחה, ככה קצת יותר נוח לקרוא ולהבין את ההמרה.

רדוקציה של ספיקת נוסחאות

עכשיו אנחנו עובדים בדיוק באותה צורה שעשינו בספיקת המעגלים, כל מוצא יסומן בגרף באות המתאימה (למעלה זה האותיות y בשביל שנבדיל ביניהם ובין הקלט של הקדקוד), ונוציא מכל קדקוד את הנוסחה בצורה של אם"ם ביחס הקלט-פלט. למשל, עבור הקדקוד הסופי, יוצא ממנו y1, שתלוי בפלט y2 וגם בהופכי של x2, ולכן יתורגם ל- $y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)$. נמשיך ונעשה את זה עבור כל הקדקודים השונים, ע שנקבל את הנוסחה ϕ הבאה –

$$
\begin{aligned}
\phi = \; & y \\
& \wedge (y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)) \\
& \wedge (y_2 \leftrightarrow (y_3 \vee y_4)) \\
& \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \\
& \wedge (y_4 \leftrightarrow \neg y_5)) \\
& \wedge (y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)) \\
& \wedge (y_6 \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow x_3))
\end{aligned}
$$

עכשיו מגיע החלק הכיפי, שקורמן החליט שאין צורך להראות את כולו-

טבלת אמת

עבור כל פסוקית בנוסחה ϕ שמצאנו אנחנו בונים טבלת אמת. קצת מייגע, זאת הדרך שלנו לחלץ את הגרירות השונות לתצורה של DNF. כמובן שאפשר להשתמש בכל חוקי ההמרה הלוגיים, אבל אני לא ממש בטוח שזה יעשה את העבודה יותר קלה. בכל אופן, בואו נתחיל, ונראה איפה נישבר-

y_2	y_3	y_4	$y_2 \leftrightarrow (y_3 \vee y_4)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

y_1	y_2	x_2	$y_1 \leftrightarrow (y_2 \wedge \neg x_2)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

y_4	y_5	$y_4 \leftrightarrow \neg y_5$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

y_3	x_1	x_2	$y_3 \leftrightarrow (x_1 \rightarrow x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

y_6	x_1	x_3	$y_6 \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0

y_5	y_6	x_4	$y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0

0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

עכשיו סיימנו לעשות טבלת אמת עבור רק שש פסוקיות. השלב הבא הוא זה שמתחיל לעשות את הנוסחה הסופית ארוך ומייגע.

בניית DNF

עבור כל טבלה, ניקח את כל התוצאות 0, ונרכיב מהם את פסוקיות הDNF הדרושות לנו – כלומר, כל טבלה מכונה בשם הנוסחה, למשל $y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)$, טבלת האמת שלה זה ϕ'_5. על מנת ליצור CNF שיקיים אותו, נצטרך לבנות את הDNF ההופכי של הטבלה, כלומר את $\neg\phi'_5$.

y_5	y_6	x_4	$y_5 \leftrightarrow (y_6 \vee x_4)$
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0

עבור זה, נוציא את הנוסחה הבאה (נזכור שאנחנו מבצעים פה היפוך, וכל 1 שמופיע אנחנו ממירים אותו ל-0):

$$(y_5 \wedge y_6 \wedge \neg y_4) \vee (y_5 \wedge \neg y_6 \wedge y_4) \vee (y_5 \wedge \neg y_6 \wedge \neg y_4) \vee (\neg y_5 \wedge y_6 \wedge y_4)$$

דה מורגן

מה שנותר לנו להגיע לצורת CNF היא ההמרה של דה-מורגן שמשנה את כל הסימנים וכל הקשרים, ונקבל את התצורה הבאה:

$$\text{CNF-}\phi''_5 = (\neg y_5 \vee \neg y_6 \vee y_4) \wedge (\neg y_5 \vee y_6 \vee \neg y_4) \wedge (\neg y_5 \vee y_6 \vee y_4) \wedge (y_5 \vee \neg y_6 \vee \neg y_4)$$

הידד לנו! הוצאנו נוסחה אחת מתוך הטבלה, תרשו לי לעצור פה ולא לבצע את כולם, הרעיון מובן.

נותר לנו השלב האחרון ברדוקציה-

וידוא שלישיות

אמנם השגנו CNF, ובמקרה הוא יצא לנו גם 3-CNF. אבל תמיד יכולים להיות מקרים בהם יהיה לנו פסוקיות בגודל קטן יותר (לא יכול להיות גדול יותר, מאחר ועבדנו על עץ בינארי, אז יכול להיות לנו מקסימום שני קלטים ופלט אחד, גאוני!).

על מנת לטפל במקרים השונים, מה שנעשה הוא כדלקמן:

- אם יש לנו פסוקית של שני ליטרלים (כמו למשל ϕ'_4 בדוגמה שלנו), לאחר שנוציא את הCNF נכפיל כל פסוקית פעמיים, ונוסיף לכל אחד מהן ליטרל שהוא מחוץ למסגרת – למשל p, ובכל הכפלה נשים אותו פעם בתור עצמו ופעם בתור הופכי, וכך נשמור על התצורה. למשל אם יצאה לנו

הנוסחה $(\neg y_5 \vee y_6)$, נעשה לה המרה ולצורה הבאה $(\neg y_5 \vee y_6 \vee \neg p) \vee (\neg y_5 \vee y_6 \vee p)$, כך שלא משנה מה נגדיר את p, זה שקול לטאוטולוגיה.

- אם יש לנו ליטרל בודד, אז עושים בדיוק את אותו רעיון, רק שמכפילים את הליטרל ארבעה פעמים, ובכל פעם מוסיפים שני ליטרלים בצורה מותאמת על מנת למלא את החלל בפסוקיות אמת.

אחרי כל זה – סיימנו עם הרדוקציה, עכשיו רק נותר לוודא שהיא אכן מקיימת.

שלבי הבנייה השונים, דאגו להשאיר תמיד את כל הנוסחאות וכל המעגלים שיהיו ספיקים בצורה שקולה. כלומר, בניית הטבלה היא בוודאי שקולה לנוסחה המקורית (אותה כבר הוכחנו שהיא מקיימת רדוקציה). בניית הDNF מהטבלה היא שקילות בוודאי כי זה רק קריאת נתונים, והפעלת דה מורגן, בוודאי שמתקיימת, ולכן נשארנו באותו מקום – הנוסחה הסופית שנייצר ספיקה אם ורק אם הנוסחה המקורית ספיקה.

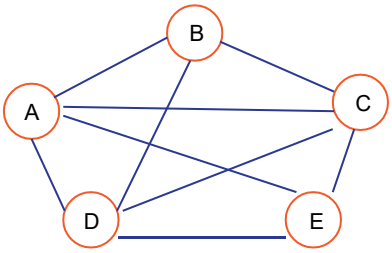
מבחינת חישוב בזמן פולינומיאלי, במקרה הגרוע ביותר, נשים בסופו של דבר 4 ליטרלים על כל ליטרל מקורי של הנוסחה (וגם זה רק בהנחה שאיך שהוא יצאו לנו רק ליטרלים בודדים בפסוקיות), וגם אם זה קרה, עדיין הוספת הליטרלים נשמרת תחת זמן פולינומי ולא מעריכי.

מש"ל.

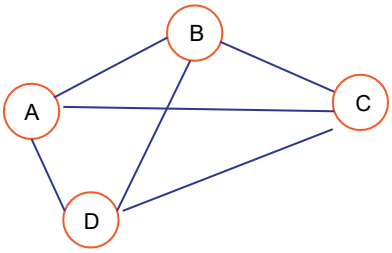
בעיית הקליקה Clique

בעיית הקליקה מתחילה להראות לנו את השימושים המטורפים שעושים בעזרת רדוקציות. אם עד עכשיו עברנו על דברים שנראים אותו דבר, ברעיון גם אם לא בפועל, כאן אנחנו עושים דילוג עצום לעבר בעיות חדשות בעזרת בעיות שהוכחנו קודם.

בעיית הקליקה מוגדרת כך – עבור גרף בלתי מכוון $G(V,E)$, $V' \subseteq V$ היא קבוצת קדקודים בה כל זוג קדקודים מחובר על ידי קשת ב-E, כלומר יש פה תת גרף שלם של G. דרגה של קליקה מוגדרת כמספר הקדקודים המחוברים ביניהם. לדוגמא, נסתכל על הגרף הבא:



עבור גרף זה, קיימת לנו קליקה בדרגה 4, נסתכל על תת הגרף המתאים:



ניתן לראות שכל קדקוד מחובר לכל שאר האחרים בגרף. חדי העין, ישימו לב שיש פה עוד קליקה בדרגה 4, {A,C,D,E}, אבל אנחנו כידוע מחפשים אם יש פתרון, ולא כמה פתרונות יש.

בעיית אופטימיזציה תהיה "מה הקליקה הגדולה ביותר בגרף?", בדיקה של דבר כזה היא כמובן מעריבית, ואנחנו מחפשים את בעיית ההכרעה המתאימה – בהינתן גרף ומספר קבוע, האם יש בגרף קליקה בגודל הדרוש? ובצורה פורמלית:

CLIQUE = { <G,k> : k הוא גרף המכיל קליקה בגודל G }

האלגוריתם הנאיבי לפתירת הבעיה יעבוד באופן הבא – נסדר רשימה של כל התת-קבוצות האפשריות בגרף, ונבדוק עבור כל אחת מהן האם תת הקבוצה הנתונה היא קליקה. אם ננסה להסתכל על זמן הריצה של אלגוריתם נאיבי כזה, אז יש לנו קודם כל חלוקה של תת הקבוצות שזה $\binom{|v|}{k}$, ועבור כל תת קבוצה (בהנחה המוצלחת יותר שיש לנו מטריצת סמיכויות) נצטרך לרוץ k^2. כלומר סה"כ - $\Omega(k^2\binom{|v|}{k})$.

עכשיו, אם מדובר על k שהוא גבוה מאוד עד כדי שהוא מתקרב ל-|V|, מספר התת קבוצות יהיה יחסית קטן, באופן דומה אך שונה, אם k יהיה קטן מאוד ושואף ל-0, אז אמנם יהיו מלא תת קבוצות, אבל זמן הריצה שלהם יהיה מאוד קצר. בשני המקרים האלה אנחנו מצליחים לשמור על האלגוריתם הזה תחת זמן פולינומי, אבל בכל מקרה אחר, שיש לנו גם הרבה תתי-קבוצות, וגם מעבר בדיקה ארוך עליהם, זמן הריצה קובץ להיות מעריבי.

אך אל דאגה! אנחנו טוענים כי בעיית הקליקה היא NP שלמה (זה לא שאין דאגה, רק טיפה פחות).

בשביל להוכיח זאת, נעבוד בסדר הפעולות הידוע:
ראשית, נוכיח שהבעיה בכלל נמצאת בNP, אחרת היא סתם קשה. אנחנו מחפשים קשה עם טוויסט.

עבור גרף נתון G וקבוע k כלשהו, אנחנו יכולים לקבל מחרוזת אימות y שתהיה סדרה של קדקודים, ונצטרך לבדוק אותה תחת זמן פולינומי. איך נעשה זאת? קודם כל נספור את הקדקודים בשביל לוודא שכמות הקדקודים מתאימה ושווה ל-k זה כמובן יהיה O(k), ואז נתפוס כל קדקוד בנפרד, ונוודא שיש לו קשתות עבור כל שאר הקדקודים ($O(k^2)$, - אם כן CLIQUE ∈ NP.

עכשיו החלק היותר מסובך – על מנת להוכיח כי בעיית הקליקה היא בעייה קשה ב-NP, נוכיח כי 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE – כלומר, נעשה רדוקציה מסיפוק תלת-פסוקיות לבעייה הזו! זה נראה לא קשור בכלל אחד לשני, אבל נבנה את הגרף בצורה מאוד מוגדרת וברורה על מנת שהרדוקציה תהיה מספקת.

על מנת לבנות את הגרף באופן מתאים, אנחנו ניקח נוסחה העומדת בתנאי 3-CNF – שרשור של פסוקיות CNF, שכל אחת מהן מורכבת משלושה ליטרלים. ניקח את הנוסחה $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge .. \wedge C_k$ ונבנה עבורה גרף, שבתוכו יהיה קליקה בגודל k הרצוי.

כל ליטרל שנדבר עליו, יסומן באופן הבא – l_1^r, כך ש-l מייצג ליטרל (literal), המספר העליון r ממספר את הפסוקית המתאימה עליה אנחנו מדברים, כך ש- $1 \leq r \leq k$. והמספר התחתון, הוא מיקום הליטרל בתוך הפסוקית בין 1 ל-3.

אופן הבנייה יהיה כזה –

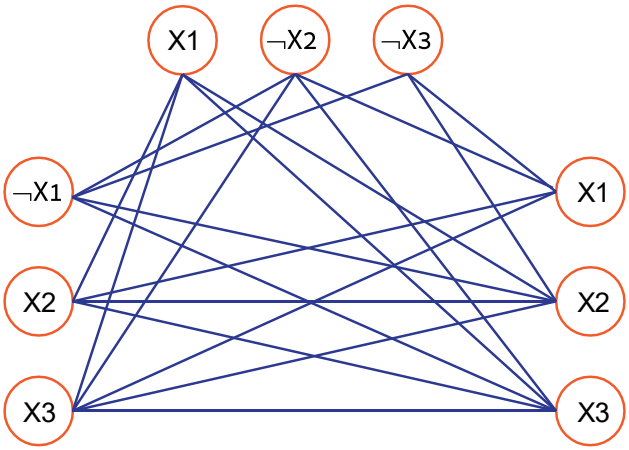
- עבור כל פסוקית C_r, נכניס את שלושת הליטרלים בקדקודים, ונסמן על כל אחד מהם את ערך הליטרל.

- את הקשתות נמתח בין כל הקדקודים תחת שני תנאים:
  1. הקשתות יהיה רק בין כל קדקוד לכל שאר הקדקודים מחוץ לפסוקית. כלומר, בין הקדקודים באותה שלישיה, לא יהיו קשתות.
  2. מעבר לקדקודים באותה פסוקית, לא נמתח גם קשתות בין שני ליטרלים שסותרים זה את זה. כלומר, אם $l_2^3 = x_2$, $l_3^4 = \neg x_2$ – לא תעבור ביניהם קשת.

נבנה גרף כזה בשביל להבין את צורת הבנייה, ואז נראה כיצד ממשיכים. עבור הבניה ניקח את נוסחת 3CNF הבאה:

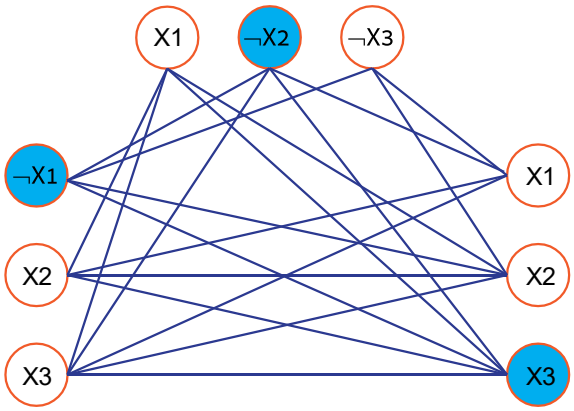
$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

ועבור הנוסחה הזאת, נבנה את הגרף על פי התנאים שאמרנו, ונקבל את הגרף המופלא הבא, בו אנחנו טוענים שתהיה קליקה מסדר 3 (שזה כמובן כמות הפסוקיות הנתונות לנו בנוסחה):



השלישיה הראשונה היא C_1, השמאלית היא C_2, והימנית היא C_3, האם יש לנו כאן קליקה מסדר 3? קל לראות שכן, ואפילו יותר. אבל עם קל-לראות לא הולכים למכולת, ולכן נסביר.

קודם כל נראה את הרדוקציה שהיא מספקת את הדרישות. נניח כי ϕ היא נוסחה שניתן לספק עבור השמה מסוימת, כלומר עבור הנוסחה שנתנו, אם ניקח את ההשמה הבאה $<x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1>$, אז התוצאה של הנוסחה תהיה 1. עכשיו נראה איך זה מתקיים בגרף שיצרנו.



צבענו את הפסוקיות שמקבלות את ההשמה המתאימה, וניתן לראות כי בנינו קליקה מתאימה.

מאחר וכל הפסוקיות מחוברות ביניהם עם AND, ובתוך הפסוקיות הליטרלים מחוברים עם OR, זה מכריח אותנו שלכל פסוקית תהיה לפחות השמה אחת של 1. אם יהיה כך, כל פסוקית בנפרד תפיק לנו 1, והנוסחה תסופק (כמובן שיכול להיות יותר, אבל זה מספיק לנו). כמובן שכל השמה היא חח"ע, ולא יכול להיות מצב בו x_i מסוים הוא בו זמנית גם 0 וגם 1. אם נסתכל בגרף ובחוקי הבניה שלו, גם לא יכול להיות שיש לנו קשת מליטרל מסוים לשלילה שלו, ולכן עבור כל $l_i^r, l_j^s \in V$, כאשר $r \neq s$, וכאשר ברור לנו מחוקי הבניה שלא מדובר על שלילה אחד של השני, יש לנו קשת ששייכת לקליקה.

בכיוון ההפוך, לו נתון לנו גרף המכיל קליקה V', ובנוי בצורה של שלישיות, ניתן לקחת כל קדקוד ששיך לקליקה ולתת לו ערך 1 בנוסחה שנבנה, ואין לנו צורך לחשוש מהשמה כפולה של משתנים, מאחר והשלילה של הליטרל איננה שייכת לקליקה, ואנחנו מסוגלים לספק גם את ϕ. הוכחנו כי CLICQUE ∈ NPH.

ומאחר וקיימנו את שני התנאים, אזי הוכחנו כי CLICQUE ∈ NPC

הערה: ישאל השואל (ובצדק) שהבניה שעשינו היא מאוד ספציפית ומקרה פרטי, אבל מה נעשה אם כל שאר המקרים הקיימים? דבר ראשון, אנחנו לא צריכים להוכיח את כל המקרים, אלא רק להראות שיש דרך לעבור מסיפוק הנוסחאות ליצירת קליקה. דבר שני, אם נרצה לממש עבור כל גרף, נוכל לעשות רדוקציה מהבעיה הנוכחית ולעבור לבעיות אחרות, ושיהיה לנו בהצלחה.

בעיית כיסוי הקדקודים Vertex-Cover

בעיית כיסוי הקדקודים, היא בעיה שממשיכה את הקו של בעיית הקליקה (והרדוקציה גם נעשית מהקליקה), ומתוארת כך – עבור גרף נתון G(V,E), קיימת תת-קבוצה V'⊆V, כך שבעבור כל קשת (u,v) ∈E, u ∈ V' או v ∈ V'. כלומר, אנחנו מחפשים תת-קבוצה של קדקודים V', שכל קשת שקיימת בגרף, מחוברת באחד מהקצוות שלה לקדקוד ב-V'.
נדגיש שוב, אנחנו לא מדברים על בעיית אופטימיזציה, אלא על בעיית הכרעה – בהינתן גרף, האם יש לנו קבוצה של k קדקודים שמכסה את כל הקשתות בגרף. נשאל זאת שוב בצורה קצת יותר פורמלית:

VERTEX-COVER = { <G,k> : k לגרף G יש כיסוי-על-ידי-קדקודים שגודלו }

אנחנו ננסה להוכיח, כמובן בהצלחה, כי VERTEX-COVER ∈ NPC.

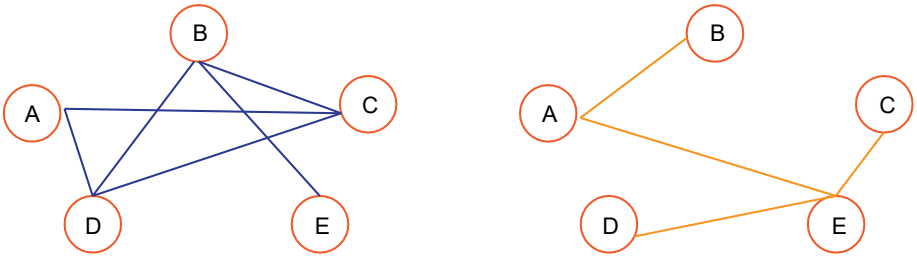
כנהוג, נתחיל בהוכחה כי VC ∈ NP. האימות תחת זמן פולינומיאלי, כמובן יהיה בדומה לקליקה – נקבל רשימת קדקודים, נוודא שזה מתאים ל-k הדרוש, ונבדוק שקבוצת הקדקודים מכילה את כל הקשתות מתוך E. דבר כזה כמובן לא יעלה הרבבה מעבר לפולינומיאלי.

עכשיו נוכיח כי VC ∈ NPH, על ידי רדוקציה $CLIQUE \leq_p$ VERTEX-COVER.

מאחר ושתי הבעיות מגיעות מעולם הגרפים, המעבר מאחר לשני לא מפתיע אף אחד (לפחות לא כמו מנוסחאות CNF לגרפים), אבל האופן בו הרדוקציה נעשית, זה כבר משהו לא פחות ממדהים.

את בסיס הרדוקציה אנחנו נעשה על בסיס גרף המשלים, ונראה כי לגרף יש כיסוי על ידי קבוצה של קדקודים, אם"ם בגרף המשלים של הגרף הנתון, יש לנו קליקה בגודל V-k על ידי הקדקודים שאינם בכיסוי. הבנייה של הגרף המשלים תהיה כמובן זמן פולינומיאלי, בו נבנה מטריצת סמיכויות חדשה, ובכל מקום בו אין קשת, שפוט נוסיף אחת במטריצה החדשה.

קחו רגע לעכל את זה, ונראה את זה עם דוגמא:



הגרף השמאלי G הוא גרף בעל חמישה קדקודים קליקה בדרגה 3. ניקח את G, ונבדוק מהו הגרף המשלים שלו $\bar{G}$. בגרף הימני המשלים, ניתן לראות שמתוך חמשת הקדקודים, שניים מתוכם (שזה בדיוק 3-5!!! מי היה מאמין??) מקושרים לכל הקשתות הקיימות בו. אפשר לבדוק את זה עם עוד גרפים, גם כאלה לא קשירים וזה תמיד יהיה נכון. מדהים. עכשיו נוכיח את זה.

נתחיל מהקליקה לכיסוי-קדקודים.
נניח כי נתון לנו גרף G שמכיל קליקה V', כאשר |V'| = k.
טענה: V-V' מהווה כיסוי קדקודים עבור $\bar{G}$.
הוכחה: עבור כל קשת $(u,v) \in \bar{E}$, מתקיים כי $(u,v) \notin E$. למשל בדוגמה למעלה, הקשת (a,b) נמצאת רק בגרף המשלים.
כלומר – לפחות אחד משני הקדקודים u או v **לא שייכים** לקליקה V'. כי אם שניהם היו בקליקה, אז היתה ביניהם קשת. הקדקוד b שייך לקליקה {b, c, d}, אליה הקדקוד a לא שייך.
באופן שקול – לפחות אחד משני הקדקודים u או v **שייכים** ל'V-V, כי הם חייבים להיות איפשהו. הקדקוד a שאינו בקליקה עליה דיברנו, שייך לקבוצת הכיסוי {a,e} שהיא בדיוק המשלים של קדקודי הקליקה.
כלומר הקשת (u,v) מכוסה על ידי 'V-V. כמובן על ידי הגבלת הכלליות, וכל השקרים שאנחנו אומרים בשביל להגיד שזה מתקיים לכל הקדקודים ולכל הקשתות. ומכאן – הקבוצה 'V-V שגודלה |V| - k מהווה כיסוי-על-ידי-קדקודים עבור $\bar{G}$.

בכיוון ההפוך, נניח כי ל-$\bar{G}$ יש כיסוי-קדקודים על ידי $V' \subseteq V$, כאשר |V'| = |V| -k.
לפיכך – עבור כל זוג קדקודים $u, v \in V$, אם $(u, v) \in \bar{E}$, אזי או $v \in V'$ או $u \in V'$ או שניהם. ניקח למשל את {c, e} בגרף הכיסוי. הקשת $(c, e) \in V'$. ואכן הקדקוד $e \in \bar{E}$.
ולהיפך ניתן לראות, כי לכל $u, v \in V$, אם $u \notin V'$ וגם $v \notin V'$ אז $(u, v) \in E$ והצלע הזאת היא חלק מהקליקה 'V-V, שגודלה |V| - |V'| = k. כלומר אם ניקח את הקדקודים {d,c} אף אחד מהם אינו שייך ל-'V, אבל הקשת $(d, c) \in E$ והיא חלק מהקליקה.

הוכחנו שהרדוקציה מתקיימת, כלומר VERTEX-COVER ∈ NPH.

ומשילוב שני ההוכחות אנחנו יכולים לומר כי VERTEX-COVER ∈ NP. מש"ל

בעיית סכום התת-קבוצה Subset-Sum

בעיית סכום התת-קבוצה, היא בעיה אריתמטית, ומוגדרת כך – בהינתן סדרת מספרים S, וקבוע t (הפתעה! זה לא k), האם ניתן למצוא תת סדרה 'S, שסכום האיברים שלה הוא t.

אנו מוכיחים כי SUBSET-SUM ∈ NPC.
אימות של תת קבוצה שכזה, הוא בוודאי על זמן פולינומי. מקבלים תת סדרה, ובודקים אם היא קיימת ב-S ואם סכומה שווה t.

עבור הוכחת הקיימות של SUS ב-NPH, עושים זאת על ידי בניית רדוקציה $\text{VERTEX-COVER} \leq_p$ SUBSET-SUM. אבל כאן יש לנו בשורות טובות – ההוכחה והבנייה לא חשובות למבחן (לחיים אולי כן, אבל לא למבחן). מי שממש רוצה זה עמוד 510-512 בכרך ב' של הפתוחה. תהנו!

בעיית המעגל ההמילטוני Hamilton's Cycle

מי שיסתכל בעץ שנעשה על הרדוקציות, יכול לראות שסכום התת-קבוצה מסיים לנו ענף אחד של ההוכחות, והענף השני מתחיל בבעיית המעגל ההמילטוני.
קל להוכיח את הבעיה כשייכת לNP (מקבלים את המסלול המעגלי, בודקים שהמסלול קיים ועובר בכל הקדקודים, בודקים שהוא עובר רק פעם אחת בכל קדקוד)
את הרדוקציה אנחנו עושים על בסיס ה $\text{3-CNF-SAT} \leq_p \text{HAM-CYCLE}$, ובונים את הגרף עם המעגל באופן שהוא דומה קצת לקליקה, אבל הרבה יותר מסובך. כמה יותר מסובך? לא צריך לדעת אותו, אלא רק לדעת שהוא קיים. מש"ל.

בעיית הסוכן הנוסע The Traveling Salesman

הבעיה האחרונה עבור הרדוקציות האלה, כל השאר אנחנו צריכים לעשות לבד. בעיה זאת קשורה מאוד לבעיית המעגלים ההמילטוניים, ואכן הרדוקציה נעשית ישירות ביניהם. הבעיה מוגדרת כך – סוכן מכירות רוצה לעבור בכמה שיותר ערים נתונות. לצורך העניין, הוא מתכנן לעבור ב-n ערים שונות ולסיים בחזרה בעיר הראשונה, כאשר הגרף המכיל את רשת הערים, הוא גרף שלם – כלומר, יש דרך להגיע מכל עיר לכל עיר אחרת, אך כל מסלול בין שני ערים נתון עם משל שונה. בעיית אופטימיזציה תהיה כמובן, מה הדרך המהירה ביותר שהוא יכול למצוא, אך הסיבוכיות של מציאת מסלול כזה הוא בערך !n. אנחנו מחפשים כבעיית הכרעה את השאלה "האם ניתן לעבור את המסלול הנ"ל תחת k מסוים?". האופן הפורמלי לשפה של בעיית ההכרעה הוא:

TSP = { <G, c, k> : G(V,E) הוא גרף שלם,
c היא פונקציה מ- $V*V \rightarrow Z$,
$k \in Z$,
G מכיל נתיב עבור הסוכן הנוסע שעלותו לכל היותר k }

נוכיח כי בעיית הסוכן הנוסע היא NP שלמה.

נראה כי $\text{TSP} \in \text{NP}$.
בהינתן מופע של הבעיה ומחרוזת אישור של n קדקודי המסלול לפי סדר, נאמת כי הסדרה מכילה את כל הקדקודים בגרף, שהיא מכילה אותם רק פעם אחת, שיש מסלול מעגלי בין כל הקדקודים הנ"ל, ושהוא אינו עולה על k.
כל זה ניתן לעשות תחת זמן פולינומי. נמשיך.

נראה כי $\text{TSP} \in \text{NPH}$ על ידי הרדוקציה $\text{HAM-CYCLE} \leq_p \text{TSP}$.

על מנת לבנות את הרדוקציה, ניקח גרף G(V,E) מתוך השפה של המעגלים ההמילטוניים, ונעתיק אותו אלינו אל גרף שלם חדש G'(V', E'), תוך כדי שאנחנו ממשקלים אותו באופן הבא:
אם הקשת $(i, j) \in E$ נגדיר את המשקל 0.
אם הקשת $(i, j) \notin E$ נגדיר את המשקל 1.

כלומר, נבנה גרף שלם (שזה הדרישה של בעיית הסוכן הנוסע, מעגל המילטוני לא חייב להיות שלם), שכל הצלעות שנלקחו מהמילטון, ימושקלו כ- 0, וכל השאר כ-1. בנייה של גרף היא כמובן תחת זמן פולינומיאלי, ולכן זה מקיים את הדרישה לזמן-פולינומיאלי.
מה שזה ייתן לנו, הוא שאם אכן יש מעגל המילטוני בגרף, אז המסלול הקצר ביותר לסוכן הנוסע הוא במשקל 0. ובכיוון ההפוך – אם יש לסוכן הנוסע איזשהו מסלול שמשקלו הוא 0, אזי אנחנו יודעים שאנחנו יכולים לקחת בחזרה את הגרף G מתוך 'G, ויהיה לנו בו מעגל המילטוני. ומכאן הרדוקציה מתקיימת, מה שגורר כי TSP ∈ NPH.

ובשילוב שתי ההוכחות, הוכחנו כי TSP ∈ NPC. מש"ל.

שאלות הרחבה

נתונה בעיית ההכרעה המוגדרת כך:

$PAR_{\text{בעיית הכרעה}} = \{ S = \{a_1..a_n\} \mid \exists S_1,S_2 \subseteq S,\ S_1 \cap S_2 = \phi,\ S_1 \cup S_2 = S,\ \sum_{a_{i\in S1}} a_i = \sum_{a_{j\in S2}} a_j \}$

צ"ל – PAR ∈ NP-Complete

ראשית, נגדיר את הבעיה בצרה מובנת יותר – אנחנו מחפשים עבור סדרה נתונה של מספרים, האם ניתן לחלק את הסדרה לשני תתי-סדרות בחלוקה ממצה – הווה אומר, שתי תתי הסדרות הן זרות זו לזו, ואיחודם יביא לנו את הסדרה S, כך שסכום שתי תת-הסדרות יהיה שווה. שם הבעיה PAR נגזר כמובן מהמילה PARTITION.

לדוגמה, אם יביאו לנו $S= \{1,2,4,5\}$, אז נוכל לחלק את S באופן הבא: $S_1= \{1,5\},\ S_2 = \{2,4\}$. וכל התנאים הנ"ל יתקיימו.

ראשית, נגדיר את השפה, שבמקרה זה היא מאוד דומה להגדרת הבעיה. ההבדל הוא, שבעיית ההכרעה שזה קבוצות של הסדרות שניתן לחלק אותן תחת כל הנ"ל, והשפה היא כבר קבוצת המחרוזות הבינאריות תחת כל הכללים. את השפה PAR נגדיר-

$PAR_{\text{שפה}} = \{ S = \{a_1..a_n\} \in \{0,1\}^* \mid \exists S_1,S_2 \subseteq S,\ S_1 \cap S_2 = \phi,\ S_1 \cup S_2 = S,\ \sum_{a_{i\in S1}} a_i = \sum_{a_{j\in S2}} a_j \}$

כאשר באמת ההבדל הוא רק השיוך לקידוד הבינארי.

על מנת להוכיח ש PAR ∈ NPC, מוטל עלינו להוכיח שני דברים:

1. PAR ∈ NP
2. PAR ∈ NPH

(הכלל השני, שאנחנו מבקשים רדוקציה מתאימה מכל שפה, בעצם מגדיר לנו את PAR כ-NPH, ועל מנת להכליל את השפה תחת תת הקבוצה NPC, אנחנו צריכים לוודא שזה אכן תחת NP)

בבדי להראות את התנאי הראשון, נראה כי עבור כל מחרוזת שנקבל, אם נקבל עבורה אישור מתאים, נוכל לבדוק את אפשרות החלוקה תחת זמן-פולינומיאלי. את אלגוריתם האימות נגדיר בצורה הבאה – נציע עבור כל סדרת קלט $x \in \{a_1..a_n\}$, את הקלט y שיהווה אימות, כך ש $y = \{b_1..b_k\},\{b_{k+1}..b_n\}$. כלומר, האימות שנקבל לא יהיה רק סדרה בודדת כמו בבעיות מסלולים ודומיהם, אלא עבור סרה מסוימת, נקבל את האימות המתאים של דרך החלוקה הממצה. אלגוריתם האימות שנספק עבשיו יהיה כדלקמן:

1. נבדוק ש-y הוא קלט תקין, כלומר הוא קידוד מתאים של סדרת מספרים.

2. נבדוק ש $\{b_1..b_k\} \subseteq x$, $\{b_{k+1}..b_n\} \subseteq x$
נבדוק $x_1 \cap x_2 = \phi$
נבדוק $x_1 \cup x_2 = x$
3. נחשב $t_1 = \sum x_1$, $t_2 = \sum x_2$
4. אם $t_1 = t_2$ נחזיר True
אחרת, נחזיר False.

<u>הוכחת נכונות:</u> אם $x \in PAR$, ו-y אישור מתאים, אזי – שורות (1),(2) מצליחות, שורה (3) גורמת לשורה (4) להחזיר True.

<u>הוכחת זמן ריצה:</u> בדיקת הקלט תהיה תחת $O(n)$, אימות תתי-הסדרות יהיה $O(n^2)$, וחישוב הסכום יהיה $O(n)$ – סה"ב זמן פולינומיאלי $O(n^2)$.

ומכאן $PAR \in NP$. מש"ל.

בעת נוכיח כי $PAR \in NPH$. מאחר שיהיה לנו מסובך להוכיח מחדש עבור כל שפה את הקיימות שלה בNPH, השיטה שאנו עובדים עליה היא לקחת שפה שכבר הוכחנו, ולקשור אותה לשפה הנתונה ברדוקציה. עבור הרדוקציה ניקח את השפה SUBSET-SUM (להלן SUS), המוגדרת באופן הבא:

$$SUS = \{<S=\{a_1..a_n\}>,k \mid \exists\, S' \subseteq S,\ \sum S' = k\}$$

כלומר עבור סדרה נתונה S, וערך קבוע k, השפה מקבלת רק מילים המכילים תת-סדרה שסכומה הוא k. למשל $S=\{2,4,6,8\}$, $k=14$, שייכם לשפה SUS.

עכשיו נוכיח כי $SUS \leq_p PAR$. ועל ידי זה יוכח $PAR \in NPH$.

רעיון הרדוקציה – בהינתן קלט מתאים עבור השפה SUS וערך k, נפנה מחרוזת חדשה שתכיל את כל המחרוזת המקורית, שאנו יודעים שיש בה תת-סדרה שסכומה הוא k. ונוסיף לסדרה הזאת את הדרוש, על מנת שתת-הסדרה השניה, יהיה שווה גם הוא k.

נראה דוגמה שתסביר את הרדוקציה, ואז נמשיך בפורמליות-

נניח קיבלנו כי $S=\{137, 42, 271, 103, 154, 16\ 3\}$, $k=452$.

עבור הסדרה הנתונה, שסכומה הכולל הוא 726, קיימת תת הסדרה $S' = \{137,42, 103, 154, 16\}$ שסכומה הוא k, מה שמשאיר את $S'' = \{271,3\}$ בצד. הבניה שנעשה היא כזאת – נגדיר את $x = \sum S - 2k$ מה שייתן לנו את ההפרש (אנחנו לוקים את סכום הקבוצה במלואה, מחסירים ממנו k שזה תת-הסדרה שמצאנו, ועכשיו מוצאים את ההפרש בין הנותרים ל-k – לכן מחסירים 2k), ואת המספר הנוסף, אנחנו מוסיפים לסדרה החדשה.

עכשיו הסדרה הקיימת לנו מכילה 3 אלמנטים עיקריים – 1. תת הסדרה שערכה k.
2. הנותר מהסדרה המקורית.
3. איבר שישלים את הנותר להיות שווה k.

עכשיו נותר לנו להוכיח את תנאי הרדוקציה $w \in SUS \leftrightarrow f(w) \in PAR$.
כלומר, עלינו להוכיח באופן דו כיווני כי כל מילה מSUS שעוברת רדוקציה שייכת ל-PAR.

כיוון 1 - $w \in SUS \rightarrow f(w) \in PAR$

נתון $w \in SUS$. $w: \{S,k\}$.

מאחר הוא שייך לSUS, אז יש שם איזה תת סדרה ששווה ל-k, ותת סדרה שהגרנו בתור הנותרים. נוסיף לסדרה את x, כמו שהגדרנו למעלה, וכעת גם הנותרים שווים ל-k. כלומר יש לנו שני תתי-סדרות ששוים בסכומם, ומקיימים את כל שאר התנאים שביקשנו.

כיוון 2 – $w \in PAR \rightarrow f^{-1}(w) \in SUS$.

נתון $w \in PAR$.

כלומר מאחר שביצענו את הרדוקציה, יש לנו בעצם מילה שהיא במקור שייכת ל-SUS, כך שסכום כל האיברים ב-f(w) שווה ל-$\sum S$+x .
פה זה מתחיל להיות קצת מבולגן, אז אני אפריד לשורות שיהיה קצת יותר ברור-
אם נפרק את x, נקבל כי $\sum f(w) = \sum s + \sum s - 2k$.
כלומר $\sum f(w) = 2\sum s - 2k$,
את זה ניתן לחלק לשני חלקים שווים בגודלם, שכל אחד מהם הוא $\sum s - k$.
אם ניקח את אחד החלקים, ונפצל אותו שוב, נקבל - $\sum s - 2k + k$.
נפריד את זה לשני איברים שהגדרנו בעבר, ונקבל x, k. כלומר – הקבוע אליו אנחנו צריכים להגיע, בתוספת ההפרש לנותר. וככה חזרנו למילה המקורית שהתקבלה ל-SUS.

מש"ל.