בס"ד, תשרי תשע"ז

ניתוח אלגוריתמים (קורס 150134)

תרגיל 2 – תכנון דינמי

מגיש: יוחנן האיק

שאלה 1

בבעיית הטריאנגולציה האופטימאלית, מחפשים טריאנגולציה עבורה סכום היקפי המשולשים מינימאלי, או באופן שקול, סכום אורכי המיתרים, מינימאלי.

מצאו טריאנגולציה אופטימאלית עבור המצולע (**מחומש**) שקדקודיו הם:

J, T, Z, H, B

וטבלת המרחקים בין הנקודות היא:

	J	T	Z	H	B
J		62	194	145	89
T			160	95	103
Z				78	258
H					193

היקף המחומש הוא 62+89+193+78+160 = 582, ונתון זה לא משתנה.

צמד הקשתות בעל המשקל הנמוך ביותר הוא צמד הקשתות הפנימיות היוצאות מהקדקוד T.

95+103+582=780. וזה הטריאנגולציה האופטימלית.

שאלה 2

נתונה סדרה של n מספרים שלמים חיוביים $X=\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$.

א. כתבו אלגוריתם תכנות דינמי למציאת תת סדרה מונוטונית לא-עולה ארוכה ביותר בתוך X.
האלגוריתם צריך לפלוט את התת-סדרה שנמצאה ואת אורכה.

- ניצור מערך חדש Y, אליו נמיין את הסדרה X
- נריץ עלי שתי הסדרות את האלגוריתם למציאת תת סדרה משותפת אופטימלית.
- תת הסדרה שתתקבל, היא התשובה הרצויה

ב. הוכיחו נכונות האלגוריתם.

הוכחנו בביתה את נכונות האלגוריתם למציאת תמ"א.
לאחר שנמיין את המערך X, התמ"א שלו עם Y תהיה תת הסדרה הדרושה.
ניתן להראות זאת באינדוקציה – עבור מערך בגודל 1 – בוודאי שזה היה תת סדרה מתאימה.
עבור כל מספר שיתווסף למערך X, ובהתאמה ייכנס למקומו בY – יש שתי אפשרויות –
המספר יוסיף לתת הסדרה – גם בX וגם בY האיבר ייכנס לסוף המערך.
אחרת, ייכנס למקום אחר בY, ותת הסדרה האופטימלית תישאר אות דבר.

ג. נתחו זמן ריצה ומקום בזיכרון.

זמין ריצה : יצירת מערך ממוין O(nlogn) – מיון הכנסה
אלגוריתם תמ"א – $O(n^2)$
סה"כ – $O(n^2)$

מקום בזיכרון - מערך חדש n
טבלה לתמ"א – n^2

שאלה 3

נתונה הבעיה האלגוריתמית הבאה :

נתונה קבוצה S של פעילויות, S={a1,a2,…an}. לכל פעילות נתון זמן התחלה si וזמן סיום fi.

בנוסף, נתון זמן ההתחלה B של מערכת הפעילויות וזמן הסיום F של מערכת הפעילויות כולה.

(שימו לב שיתכן שתהיינה פעילויות שמתחילות לפני זמן B, ויתכן שתהיינה פעילויות שמסתיימות אחרי זמן F, ופעילויות כאלו כמובן לא תוכלנה להיות משובצות).

המטרה היא לבחור קבוצה S'⊆S של פעילויות שמתאימות זו לזו (ללא התנגשויות), ומתאימות לזמן ההתחלה והסיום הכללי, באופן שיביא למקסימום את סך כל הזמנים של הפעילויות שנבחרו

במילים אחרות : יש להביא למקסימום את סכום הערכים Σ (fi-si) לכל הפעילויות i שנבחרו.

א. הסבירו מדוע בעיה זו שונה מבעיית בחירת הפעילויות שנלמדה בנושא של תכנות חמדני.

בבעיית בחירת הפעולות דיברנו על מקסימום פעילויות, אך כאן הדרישה היא לכמה שיותר ניצולת זמן בביתה (לצורך העניין, פעילות שמכסה הכל טובה לנו)

ב. הראו שאלגוריתם חמדני שממיין את הפעילויות בסדר עולה של זמני סיום לא יחזיר בהכרח פתרון אופטימלי עבור הבעיה שנתונה כאן.

נניח: פעילות **a1 = (0,2)**

A2 = (1,10)

קל לראות שפעילו ת **a1** לא תביא לנו את הדרוש.

ג. הראו מהי בעיה ומהי תת בעיה עבור בעיה זו, והוכיחו את תכונת **תת המבנה האופטימלי** עבור בעיה זו.

הבעיה – הכנסת הפעילויות מתוך **s = {a1…an}** תחת מסגרת הזמן **[B,F]**

תת הבעיה – שליפת הפעילות **ai** מתוך הסדרה והכנסת הבעיות **s' = {ai+1…an}** תחת מסגרת הזמן **[B+fi, F]**

תכונת תת המבנה האופטימלי –

נניח כי **S** הוא הפתרון האופטימלי עבור הבעיה, אזי בהזזת הרף ל **B+fi** הוא תת הבעיהה האופטימלית. שאם לא כן, גם עבור **S** אין זה הפתרון האופטימלי, ויש כאן סתירה.

ד. נסחו נוסחה רקורסיבית עבור הבעיה של מציאת מקסימום זמני פעילויות.

$$G(i,B)=\begin{cases} 0 & S_j<B \text{ or } f_j<F \\ \text{Max}\ \{G(i,\ B),\ G(I,\ B+f_i) + (f_i-s_i)\} & \text{Else} \end{cases}$$

ה. כתבו אלגוריתם תכנות דינאמי לפתרון הבעיה על סמך הנוסחה הרקורסיבית שמצאתם, וחשבו את סיבוכיותו.

בדומה לבעיית תיק הגב בשלמים–

א. לקיחת הפעילות בעלת זמן ההתחלה המוקדם ביותר.

ב. בדיקה עבור הפעילות האם לקיחתה או אי לקיחתה תניב תוצאה יותר גבוהה

ג. החזרת התוצאה המקסימלית

סיבוכיות –

בדומה לתיק הגב בשלמים מדובר ב $\mathbf{0(n^2)}$

ו. הסטודנט דני הציע לקחת את הנוסחה הרקורסיבית של סעיף ד', ולכתוב רקורסיה שפותרת את הבעיה על סמך הנוסחה הרקורסיבית הנ"ל, בלי להשתמש בתכנות דינאמי כלל. השוו את זמן הריצה שקיבלתם בסעיף ה' עם זמן הריצה של הרקורסיה שהציע דני. מהיכן נובע הפער בין הזמנים הללו? הסבירו.

ללא שימוש בתכנות דינאמי, זמן הריצה יהיה מעריכי **(O(2n))** מאחר שהוא צריך לעבור על כל הקומבינציות האפשריות של המערך. התכנות הדינאמי מטרתו להוריד את זמן הריצה להיות פולינומיאלי.

ז. האם ניתן לשפר את הצעתו של דני באופן שכן תתקבל רקורסיה יעילה? (רמז: היזכרו בשיטת התזכור).

ניתן על ידי שיטת התזכור לשמור בכל פעם את הערך המקסימלי הקיים בו, וכך לא צריך לחזור ולבדוק אותו בכל פעם ולחסוך על ידי זה בזמן ריצה.

בהצלחה!