线性代数期中试卷

姓名________ 学号____________________ 专业__________ 考试时间 2015.11.14

一. 简答与计算题(本题共5小题,每小题8分,共40分)

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{ij}=i\times j$，计算 $|A|$.

2. 求 p 使得矩阵 $A=\begin{pmatrix} p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 15 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 $r(A)$ 最小，并求 $r(A)$.

3. 设已知矩阵$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求$A^2-B^2$.

4. 已知3阶矩阵 A 有特征值6,8,9，求矩阵 $B=A^2-16A+64E$ 的特征值.

5. 若5元方程组 $Ax=b, b\neq\theta$ 有解 $\xi_1=(1,1,1,1,1)^T, \xi_2=(1,2,3,4,5)^T, \xi_3=(1,0,-3,-2,-3)^T$，且 $r(A)=3$，求方程组的通解.

二.(12分) (1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ & & \vdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$;(2)由(1)计算：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

三.(10分) 设3阶方阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，且 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & c \\ a & 4 & d \\ b & 2 & 6 \end{pmatrix}$，求$a,b,c,d$的值?

四.(12分) 求过点：$(-2,0),(-1,1),(1,-3),(t,1)$ 的三次多项式函数 $y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，其中 t 为参数.

五.(12分) 一个方阵 A 称为幂零的，如果存在正整数 N 使得 $A^N=O$. 设 A 为幂零的，证明
(1) $B=a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 也是幂零的;
(2) 若 $a_0\neq 0$，则 $C=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 是可逆矩阵，并利用 B 来表示 C^{-1}.

六.(14分) 若n 阶方阵A 满足$A^2=A$, 则称A 为幂等矩阵. 设A 为幂等矩阵，证明

(1) $E-A$ 也为幂等矩阵;

(2) $r(A)+r(E-A)=n$;

(3) A 有$r(A)$个属于特征值1 的线性无关的特征向量，$r(E-A)$个属于特征值0 的线性无关的特征向量.