线性代数期中试卷 (2019.11.16)

一. 简答与计算题(本题共5小题，每小题8分，共40分)

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，求矩阵 $B=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}$，其中 M_{ij}为行列式$|A|$的ij元素的余子式.

3. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$，求 $(E+A)^{-1}$.

4. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(-3\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3,-2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3), |B|=16$，求 $|A+B|$.

5. 设矩阵 $A,B\in \mathrm{R}^{m\times n}$，证明 $\mathrm{r}(AA^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A,B)$.

二.(15分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -7 & 9 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix} 3 \\ s \\ 2.4 \end{pmatrix}$，其中 s 为参数.

(1) 解方程组 $Ax=\beta$； (2) 令 $B=\begin{pmatrix} A & \beta \\ \gamma^{\mathrm{T}} & 3 \end{pmatrix}$，解方程组 $By=\theta$.

三. (10分) 设 n 阶矩阵 A 满足 $(A^*)^*=O$，其中 $(A^*)^*$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的伴随矩阵，证明 $|A|=0$.

四.(15分) 设两个向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $B:\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

(1) 分别求向量组 A 的一个极大无关组和向量组 B 的一个极大无关组；

(2) 找一个向量 γ 使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma$ 等价，给出理由.

五.(10分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量； (2) 计算行列式 $|3E+A^*|$.

六.(10分) 设 n 阶实矩阵 $A\sim D=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, d_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n, f(\lambda)=|\lambda E-A|$.

(1) 证明 $f(d_i)=0, i=1,2,\cdots,n$； (2) 证明 $f(A)=O$.