Логика высказываний

Исчисление аналитических таблиц

Перязев Николай Алексеевич

Отмеченные формулы

$\Phi = \sigma$ – отмеченная формула, $\sigma \in \{0, 1\}$,
σ – отметка (спецификация) формулы.

Разобьем все отмеченные формулы на две группы:

- $\alpha-$формулы: $\neg = 0$, $\neg = 1$, $\& = 1$, $\vee = 0$, $\rightarrow = 0$;
- $\beta-$формулы: $\& = 0$, $\vee = 1$, $\rightarrow = 1$.

Ниже правила построения таблиц называем $\alpha-$правилами или $\beta-$правилами, если они применяются к соответствующим отмеченным формулам.

Правила построения таблиц

$$\neg\!=\!1)\ \frac{\neg\Phi = 1}{\Phi = 0} \qquad \neg\!=\!0)\ \frac{\neg\Phi = 0}{\Phi = 1}$$

$$\&\!=\!1)\ \frac{\Phi \,\&\, \Psi = 1}{\begin{array}{c}\Phi = 1\\ \Psi = 1\end{array}} \qquad \&\!=\!0)\ \frac{\Phi \,\&\, \Psi = 0}{\Phi = 0 \mid \Psi = 0}$$

$$\vee\!=\!1)\ \frac{\Phi \vee \Psi = 1}{\Phi = 1 \mid \Psi = 1} \qquad \vee\!=\!0)\ \frac{\Phi \vee \Psi = 0}{\begin{array}{c}\Phi = 0\\ \Psi = 0\end{array}}$$

$$\to\!=\!1)\ \frac{\Phi \to \Psi = 1}{\Phi = 0 \mid \Psi = 1} \qquad \to\!=\!0)\ \frac{\Phi \to \Psi = 0}{\begin{array}{c}\Phi = 1\\ \Psi = 0\end{array}}$$

Исчисление аналитических таблиц

Аналитической таблицей называется:

a) $\Phi = \sigma$ – аналитическая таблица с одной веткой.

b) Пусть $\sum$ – аналитическая таблица с n ветками. К ветке, в которой есть $\Psi = \tau$ достраивается таблица по правилам построения таблиц.

Аналитическая таблица по существу является деревом.

Пример

$(A \vee B)\&C \to A = 0$
$(A \vee B)\&C = 1$
$A = 0$
$A \vee B = 1$
$C = 1$

$A = 1$	$B = 1$

Исчисление аналитических таблиц

- Ветка аналитической таблицы называется *замкнутой*, если содержит $\Phi = 0$ и $\Phi = 1$, иначе она называется *открытой*. Замкнутые ветки будем отмечать двойной горизонтальной линией.
- Применение правила построения таблицы называется *избыточным*, если хотя бы в одной новой ветке нет новых отмеченных формул.
- Ветка таблицы называется *финальной*, если применение любого правила построения таблиц к формулам этой ветки избыточно.
- Аналитическая таблица называется *финальной*, если все ветки у нее либо замкнутые, либо финальные.
- Аналитическая таблица называется *замкнутой*, если все ее ветки замкнуты.

Теорема адекватности исчисления аналитических таблиц для языка высказываний

Теорема (Адекватность исчисления аналитических таблиц)

Формула Φ языка высказываний тождественно равна σ тогда и только тогда, когда для отмеченной формулы $\Phi = \bar{\sigma}$ существует замкнутая таблица в исчислении аналитических таблиц.

Теорема адекватности разбивается на две теоремы - теорему полноты и теорему корректности, которые рассматриваются далее.

Пример решения задачи

Условие:

Пятеро друзей Антон, Витя, Сергей, Дима и Миша являются полевыми игроками одной хоккейной команды. Определить их амплуа, если известно следующее:

Если Антон защитник, то Витя тоже защитник.

Среди Димы и Миши хоть один защитник.

Витя и Сергей имеют разные амплуа.

Дима и Сергей одного амплуа.

Если Миша защитник, то защитники также Антон и Дима.

Пример решения задачи

Условие:

Пятеро друзей Антон, Витя, Сергей, Дима и Миша являются полевыми игроками одной хоккейной команды. Определить их амплуа, если известно следующее:
Если Антон защитник, то Витя тоже защитник.
Среди Димы и Миши хоть один защитник.
Витя и Сергей имеют разные амплуа.
Дима и Сергей одного амплуа.
Если Миша защитник, то защитники также Антон и Дима.

Решение:

Множество высказываний $\{A, B, C, D, M\}$
Интерпретация:
$f(X) = 1$, если X — защитник.

Модель условия задачи в языке высказываний

Если Антон защитник, то Витя тоже защитник.
$A \rightarrow B = 1$

Среди Димы и Миши хоть один защитник.
$D \vee M = 1$

Витя и Сергей имеют разные амплуа.
$B \& \neg C \vee \neg B \& C = 1$

Дима и Сергей одного амплуа.
$D \& C \vee \neg D \& \neg C = 1$

Если Миша защитник, то защитники также Антон и Дима.
$M \rightarrow A \& D = 1$

$(A \to B)\&(D \vee M)\&(B\&\neg C \vee \neg B\&C)\&(D\&C \vee \neg D\&\neg C)\&$
$\&(M \to A\&D) = 1$

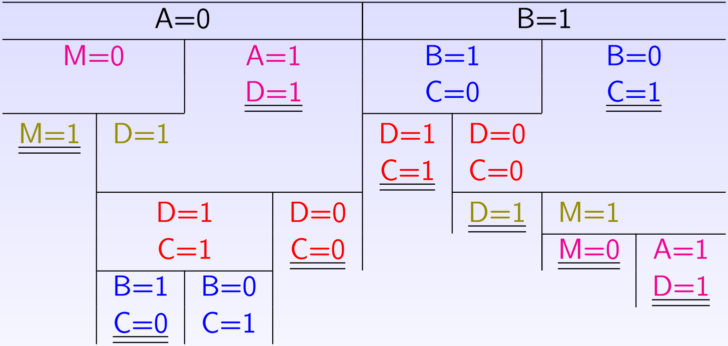
$A \to B = 1$

$D \vee M = 1$

$B\&\neg C \vee \neg B\&C = 1$

$D\&C \vee \neg D\&\neg C = 1$

$M \to A\&D = 1$



Ответ: Дима и Сергей — защитники,
Антон, Витя и Миша — нападающие.

Теорема корректности исчисления аналитических таблиц для языка высказываний

Теорема (Корректность исчисления аналитических таблиц)

Если для отмеченной формулы $\Phi = \bar{\sigma}$ *существует замкнутая таблица в исчислении аналитических таблиц, тогда формула* Φ *тождественно равна* σ.

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим следующую лемму.

Лемма

Для заданной интерпретации f *при применении правила построения аналитической таблицы хоть для одной из новых веток сохраняется выполнимость отметок формул.*

Теорема корректности исчисления аналитических таблиц

Доказательство леммы.

Для доказательства достаточно рассмотреть правила построения таблиц для отмеченных формул.

а) α-правила:

$$\frac{\Phi_1 \& \Phi_2 = 1}{\Phi_1 = 1\ ,\ \Phi_2 = 1}\ , \qquad \frac{\Phi_1 \vee \Phi_2 = 0}{\Phi_1 = 0\ ,\Phi_2 = 0}\ ,$$

$$\frac{\Phi_1 \to \Phi_2 = 0}{\Phi_1 = 1\ ,\Phi_2 = 0}\ , \qquad \frac{\neg\Phi_1 = 0}{\Phi_1 = 1}\ , \qquad \frac{\neg\Phi_1 = 1}{\Phi_1 = 0}$$

$f(\Phi_1 \& \Phi_2) = 1$ по определению интерпретации: $f(\Phi_1) = 1$ и $f(\Phi_2) = 1$ выполнимость отметки при интерпретации f будет сохраняться по каждой из веток. Остальные аналогично.

Доказательство леммы

б) β-правила:

$$\frac{\Phi_1 \vee \Phi_2 = 1}{\Phi_1 = 1 \mid \Phi_2 = 1}, \qquad \frac{\Phi_1 \& \Phi_2 = 0}{\Phi_1 = 0 \mid \Phi_2 = 0}, \qquad \frac{\Phi_1 \to \Phi_2 = 1}{\Phi_1 = 0 \mid \Phi_2 = 1}$$

$f(\Phi_1 \vee \Phi_2) = 1$ по определению интерпретации: $f(\Phi_1) = 1$ или $f(\Phi_2) = 1$, по одной из веток будет сохраняться выполнимость отметки при интерпретации f. Остальные аналогично. $\square$

Теорема корректности исчисления аналитических

Опираясь на доказанную лемму, докажем теорему корректности.

Доказательство теоремы.

Проведем доказательство от противного. Пусть $f(\Phi) = \bar{\sigma}$. Существует замкнутая таблица для $\Phi = \bar{\sigma}$. Все ветки таблицы замкнуты, но существует ветка, у которой, по доказанному выше, все отметки формул выполнимы при интерпретации f. А значит существует формула Ψ такая, что $\Psi = 0 \in W$ и $\Psi = 1 \in W$, и из леммы следует выполнимость $f(\Psi) = 0$ и $f(\Psi) = 1$. Получили противоречие, так как при любой интерпретации оба условия выполнятся не могут. $\square$

Теорема полноты исчисления аналитических таблиц для языка высказываний

Теорема (Полнота исчисления аналитических таблиц)

Если формула Φ тождественно равна σ, тогда для отмеченной формулы $\Phi = \bar{\sigma}$ существует замкнутая таблица в исчислении аналитических таблиц.

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим следующую лемму.

Лемма

Любая финальная открытая ветвь аналитической таблицы W выполнима, то есть существует интерпретация $f : S_i \to \{0, 1\}$, такая что, если $\Psi = \sigma \in W$, то $f(\Psi) = \sigma$.

Теорема полноты исчисления аналитических таблиц

Доказательство леммы.

Так как ветвь W финальная, то для α-формул из W будет $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, а для β-формул из W будет $\beta_1 \in W$ или $\beta_2 \in W$.
Определим интерпретацию f так: если $S_i = \tau \in W$, то $f(S_i) = \tau$; если $S_i = \tau \notin W$, то $f(S_i) = 1$ (можно 0).
Доказательство утверждения леммы проведем индукцией по глубине формул, входящих в W.
Базис индукции. $\Psi = S_i$, то $f(\Psi) = \sigma$ по построению f.
Шаг индукции. а) Если $\Psi = \sigma$ – α-формула. Например, $\Psi_1 \& \Psi_2 = 1$. Тогда $\Psi_1 = 1 \in W$ и $\Psi_2 = 1 \in W$ по индуктивному предположению $f(\Psi_1) = 1$ и $f(\Psi_2) = 1$. Тогда по определению конъюнкции $f(\Psi) = 1$. Аналогично для других α-формула.
б) Если $\Psi = \sigma$ – β-формула. Например $\Psi_1 \& \Psi_2 = 0$.Тогда $\Psi_1 = 0 \in W$ или $\Psi_2 = 0 \in W$ по индуктивному предположению, соответственно, $f(\Psi_1) = 0$ или $f(\Psi_2) = 0$. Тогда по определению конъюнкции $f(\Psi) = 0$. Аналогично для других β-формула.

Теорема полноты исчисления аналитических таблиц

Учитывая доказанную лемму, докажем теорему.

Доказательство теоремы.

Проведем доказательство от противного. Пусть построили финальную таблицу для $\Phi = \bar{\sigma}$. По предположению она открытая. Тогда по лемме существует открытая финальная выполнимая ветвь. $\Phi = \bar{\sigma}$ - принадлежит всем веткам. Значит существует интерпретация f такая, что $f(\Phi) = \bar{\sigma}$. Это противоречит $\Phi \equiv \sigma$, то есть $f(\Phi) = \sigma$. (При интерпретации Φ не может быть одновременно истинна и ложна). $\square$