Логика предикатов

Теорема адекватности исчисления аналитических таблиц

Перязев Николай Алексеевич

Теорема адекватности исчисления аналитических таблиц

Теорема (Адекватность исчисления аналитических таблиц)

В семантике языка предикатов $\Phi \equiv \sigma$ *тогда и только тогда, когда* $\Phi = \bar{\sigma}$ *опровержима в исчислении аналитических таблиц.*

Теорема адекватности разбивается на две теоремы - теорему корректность и теорему полноты.

Теорема корректности исчисления аналитических таблиц

Теорема (Корректность исчисления аналитических таблиц)

Если $\Phi = \bar{\sigma}$ *опровержима в исчислении аналитических таблиц, то* $\Phi \equiv \sigma$.

Ветка таблицы выполнима, если существует интерпретация при которой истинностное значения всех формул на этой ветки совпадает с их отметками.

Для доказательства теоремы рассмотрим лемму.

Лемма

Если формула Φ *является* σ*-выполнимой, то в любой аналитической таблице с корнем* $\Phi = \sigma$ *существует выполнимая ветка.*

Теорема корректности исчисления аналитических таблиц

Доказательство леммы.

Доказательство индукцией по глубине s таблицы для $\Phi = \sigma$.

Базис индукции. $s = 0$. По условию леммы существует интерпретация f при которой$f(\Phi) = \sigma$.

Шаг индукции. Пусть есть ветка, у которой все формулы на глубине s выполнимы. Формула на глубине $s + 1$ получается применением правил образования таблиц.

α-правило и β-правило очевидно,

γ-правило: рассмотрим $\dfrac{\forall x_i \Phi = 1}{\Phi_{x_i}^{c_j} = 1}$, аналогично $\dfrac{\exists x_i \Phi = 0}{\Phi_{x_i}^{c_j} = 0}$.

По индукционному предположению существует интерпретация при которой $f(\forall x_i \Phi) = 1$, по определению семантики для любой расширяющей интерпретации выполняется $f(\Phi_{x_i}^{c_j}) = 1$, т.е. для всех возможных интерпретаций старых констант.

Доказательство леммы

δ-правило: рассмотрим $\dfrac{\exists x_i \Phi = 1}{\Phi_{x_i}^{c_j} = 1}$, аналогично $\dfrac{\forall x_i \Phi = 0}{\Phi_{x_i}^{c_j} = 0}$.

По индукционному предположению существует интерпретация при которой $f(\exists x_i \Phi) = 1$, по определению семантики для некоторой расширяющей интерпретации выполняется $f(\Phi_{x_i}^{c_j}) = 1$, где c_j - константа, соответствующая этому расширению.

$\square$

Теорема корректности исчисления аналитических таблиц

Доказательство теоремы.

Доказательство теоремы проведем от противного.
Пусть Φ является $\bar{\sigma}$-выполнимой. Так как все ветки таблицы с корнем $\Phi = \bar{\sigma}$ замкнуты, то по лемме существует ветка W у которой все формулы выполнимы. Это значит существует формула Ψ такая, что $\Psi = 0 \in W$ и $\Psi = 1 \in W$, следовательно $f(\Psi) = 0$ и $f(\Psi) = 1$, для некоторой интерпретации. Так как может выполняется только одно из условий, получили противоречие. $\square$

Теорема полноты исчисление аналитических таблиц

Теорема (Полнота исчисления аналитических таблиц)

Если $\Phi \equiv \sigma$, *тогда* $\Phi = \bar{\sigma}$ *опровержима в исчислении аналитических таблиц, т.е. существует замкнутая аналитическая таблица с корнем* $\Phi = \bar{\sigma}$.

Для доказательства теоремы рассмотрим лемму.

Лемма

Любая финальная открытая ветка таблицы является выполнимой (т.е. существует интерпретация, при которой истинностное значение всех формул ветки совпадает с их отметками).

Доказательство леммы.

Пусть V-финальная открытая ветка.
Универсум $A = \{c_i \mid c_i \in C(V)\}$.
Интерпретация $g(c_i) = c_i$, $h(p^n) = p^n$, где $p^n \in P(V)$ и определяется так: $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in p^n \Leftrightarrow p^n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = 1 \in V$
Докажем индукцией по глубине формул, входящих в V, что ветка V выполнима при так определенной интерпретации.
Базис индукции. $\Phi \equiv p^n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$
если $p^n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = 1 \in V$, то $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in p^n$, получаем $f(p^n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})) = 1$;
если $p^n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = 0 \in V$, то $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \notin p^n$, получаем $f(p^n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})) = 0$.

Доказательство леммы

Шаг индукции.
а) Если $\Phi = \sigma$ есть α-формула, так как V финальная ветка, то $\Psi_1 = \sigma_1 \in V$ и $\Psi_2 = \sigma_2 \in V$. Тогда по индуктивному предположению $f(\Psi_1) = \sigma_1$ и $f(\Psi_2) = \sigma_2$. По определению истинности α-формул получим $f(\Phi) = \sigma$.

б) Если $\Phi = \sigma$ есть β-формула, так как V финальная ветка, то $\Psi_1 = \sigma_1 \in V$ или $\Psi_2 = \sigma_2 \in V$. Тогда по индуктивному предположению $f(\Psi_1) = \sigma_1$ или $f(\Psi_2) = \sigma_2$. По определению истинности β-формул получим $f(\Phi) = \sigma$.

Доказательство леммы

г) Если $\Phi = \sigma$ есть γ-формула. Рассмотрим случай $\forall x_j \Psi^{x_j}_{c_i} = 1$, а случай $\exists x_j \Psi^{x_j}_{c_i} = 0$ рассматривается аналогично.
Так как V финальная ветка, то $\Psi^{c_k}_{x_j} = 1 \in V$ для всех c_k входящих в формулы V, т.е. для всех $c_k \in A$. Тогда по индукционному предположению $f(\Psi^{c_k}_{x_j}) = 1$ для всех c_k. Тогда по определению семантики $f(\forall x_j \Psi^{x_j}_{c_i}) = 1$, т.к. очевидно $\Psi \equiv (\Psi^{c_k}_{x_j})^{x_j}_{c_k}$.

д) Если $\Phi = \sigma$ есть δ-формула. Рассмотрим случай $\forall x_j \Psi^{x_j}_{c_i} = 0$, а случай $\exists x_j \Psi^{x_j}_{c_i} = 1$ рассматривается аналогично.
Так как V финальная ветка, то $\Psi^{c_k}_{x_j} = 0 \in V$ для некоторого $c_k \in A$. Тогда по индукционному предположению $f(\Psi^{c_k}_{x_j}) = 0$ для некоторого $c_k \in A$ Тогда по определению семантики $f(\forall x_j \Psi^{x_j}_{c_i}) = 0$.

$\square$

Теорема полноты исчисление аналитических таблиц

Опираясь на лемму, докажем теорему полноты.

Доказательство теоремы.

Доказательство проведем от противного. Любая таблица для $\Phi = \bar{\sigma}$ содержит открытую ветку (возможно бесконечную). Построим финальную таблицу для $\Phi = \bar{\sigma}$.

Построение проведем индукцией (счетное число шагов):

Базис индукции. Начинаем с $\Phi = \bar{\sigma}$ и считаем ее не использованной;

Шаг индукции. Проведем построения. Если $\Phi' = \tau$ появилась на минимальном уровне, не была использована и принадлежит открытой ветке, то каждую открытую ветку Θ, содержащую $\Phi' = \tau$, продолжаем применением правил построения таблиц к формуле $\Phi' = \tau$.

Доказательство теоремы

При этом если $\Phi' = \tau$ есть γ-формула ($\Phi' \equiv \exists x_i \Psi = 0$, $\Phi' \equiv \forall x_i \Psi = 1$), то берем первую сверху константу $c_j \in \Theta$,(если нет, то новую) такую что $\Psi_{x_i}^{c_j} = \tau \notin \Theta$ и продолжаем Θ на две вершины сначала $\Psi_{x_i}^{c_j} = 0$ ($\Psi_{x_i}^{c_j} = 1$), затем $\Phi' = \tau$ (ν)-метка.
Считаем вершину $\Phi' = \tau$ использованной, но если эта формула была с меткой (ν), то эту вершину удаляем. Считаем, что в построенной таблице каждая ее ветка либо замкнута, либо все формулы использованы (возможно в этом случае бесконечная ветка).
Индукцией по глубине s таблицы покажем, что применение правила избыточно, т.е., что эта таблица финальная.

Доказательство теоремы

Базис индукции. $s = 0$, т.е. $\Phi = \bar{\sigma}$ есть таблица с использованной вершиной.

Шаг индукции. Применение правил ко всем формулам на глубине s избыточно. $\Phi' = \tau$ на глубине $(s+1)$. Т.к. ветка использована, то, если $\alpha-$, $\beta-$, $\sigma-$ формулы - применение правил избыточно. Если γ-формула и c_i i-тая сверху константа, входящая в ветку, то через i штук копий $\Phi' = \tau$ (с меткой ν) в ветку входит формула $\Phi'(c_i) = \tau$ и правило избыточно. Тем самым доказали шаг индукции.

Так как финальная таблица для $\Phi = \bar{\sigma}$ содержит открытую ветку, то по лемме эта ветка выполнима. Значит существует интерпретация при которой $f(\Phi) = \bar{\sigma}$, что противоречит $\Phi \equiv \sigma$.

$\square$