

# Modélisation du transport d'un polluant

Projet d'introduction à la recherche

Léo Baty, Chiheb Eddine Najjar, Nathan Godey, Régis Santet,  
Song Phuc Duong, Clément Lasuen  
sous la direction de  
Damiano Lombardi et Sebastien Boyaval  
Laboratoire INRIA

31 mai 2018

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Méthodes
  - Proper Orthogonal Decomposition
  - Champs de vitesse étudiés
  - Approche eulerienne
  - Approche lagrangienne
- 3 Résultats et interprétations
  - Approche eulerienne
    - Champ de vitesse uniforme
    - Ecoulements cellulaires
  - Approche lagrangienne
    - Champ de vitesse uniforme
    - Ecoulements cellulaires
    - Champ de vitesse de Lamb-Oseen
- 4 Conclusion

# Introduction



FIGURE 1: Explosion de *Deepwater Horizon*, 20/04/2010

$$\partial_t c + u \nabla c = 0. \quad (1)$$

# Blocks

## Block Title

You can also highlight sections of your presentation in a block, with it's own title

## Theorem

*There are separate environments for theorems, examples, definitions and proofs.*

## Example

Here is an example of an example block.

# Champs de vitesse étudiés

## Champ de vitesse uniforme

$$\begin{cases} u_x = ||u|| \cos(\theta) \\ u_y = ||u|| \sin(\theta) \end{cases}$$

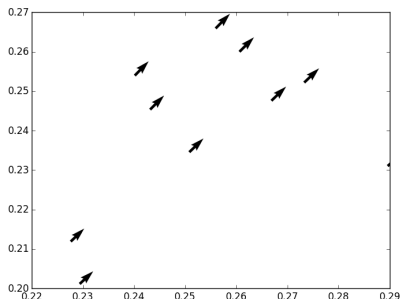


FIGURE 2: Écoulement constant avec un angle  $\theta$

# Champs de vitesse étudiés

## Écoulements cellulaires

$$\psi(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \theta_0 \cos(2\pi\theta_1 x) \cos(2\pi\theta_2 y)$$

$$\theta_0 \in [0, 2.5] \text{ et } (\theta_1, \theta_2) \in [0.5, 4]^2$$

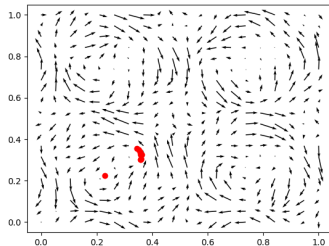


FIGURE 3: Écoulement cellulaire

# Champs de vitesse étudiés

## Champ de vitesse de Lamb-Oseen

$$\mathbf{V}(r, \theta, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \exp \left( \frac{-r^2}{4\nu t + r_c^2} \right) \right) \mathbf{u}_\theta$$

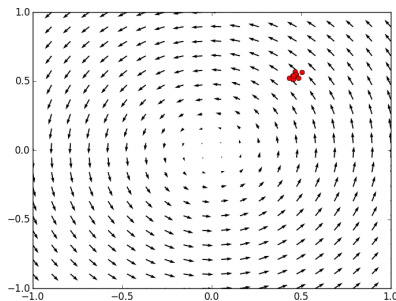


FIGURE 4: Écoulement Lamb-Oseen



# Approche eulerienne

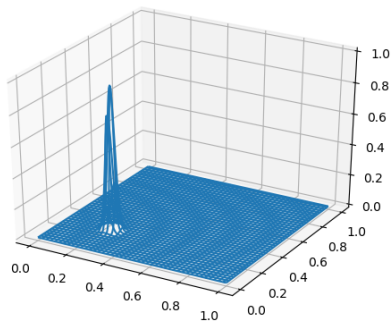


FIGURE 5: Condition initiale...

# Approche eulerienne

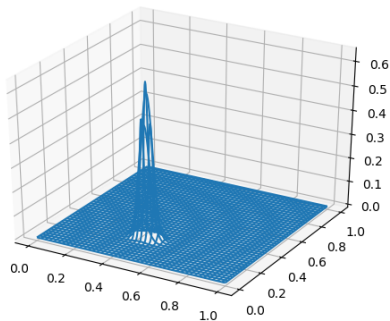


FIGURE 6: ... et après un certain temps

# Approche eulerienne

## Méthode des volumes finis

# Approche eulerienne

## Modèle réduit

# Approche lagrangienne

$$\begin{cases} \partial_t X = v(X(\xi, t), t) \\ X(\xi, 0) = \xi \end{cases}$$

# Approche lagrangienne

## Hypothèses mathématiques

- $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{n \times 2} \times \mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{n \times 2} \times \mathbb{R})$
- Existence et unicité d'une solution locale (Théorème de Cauchy-Lipschitz).
- Le transport est à vitesse finie.

# Approche lagrangienne

## Résolution numérique

Schéma de Crank-Nicholson :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \frac{\Delta t}{2}(v(X^{(k)}, t^k) + v(X^{(k+1)}, t^{k+1}))$$

Algorithme du point fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^{(k+1)} = X^{(k)} \\ X_1^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta t v(X^{(k)}, t^k) \\ X_{r+1}^{(k+1)} = X^{(k)} + \frac{\Delta t}{2}(v(X^{(k)}, t^k) + v(X_r^{(k+1)}, t^{k+1})) \end{array} \right.$$

# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

16 simulations,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

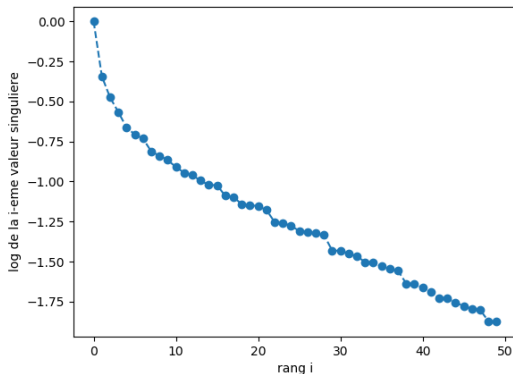


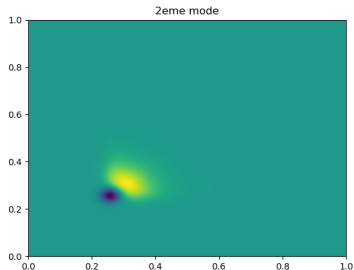
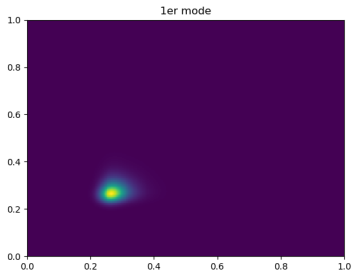
Figure 7: Trajectoire des valeurs singulières en fonction du rang.

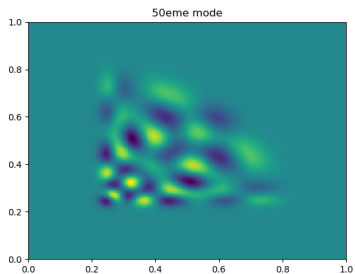
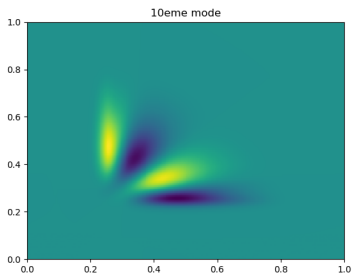


# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

Rôle des modes propres :

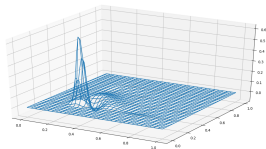




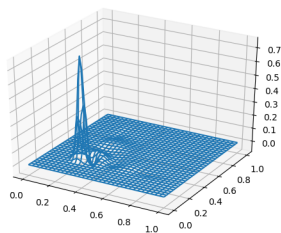
# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

Reconstruction d'une solution fine



Condition initiale, 10 modes

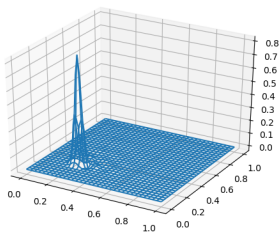


Condition initiale, 20 modes

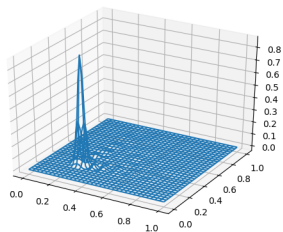
# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

Reconstruction d'une solution fine



Condition initiale, 50 modes

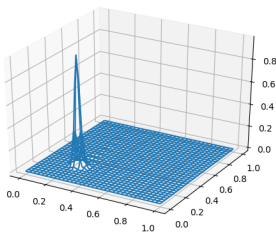


Condition initiale, 100 modes

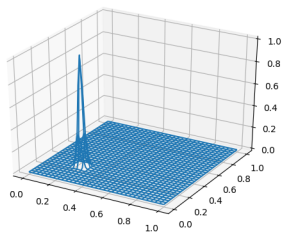
# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

Reconstruction d'une solution fine



Condition initiale, 200 modes

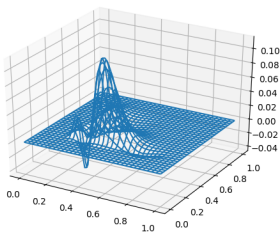


Condition initiale, 500 modes

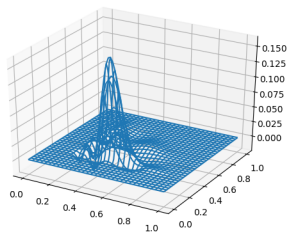
# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

Reconstruction d'une solution fine



A mi-parcours, 10 modes

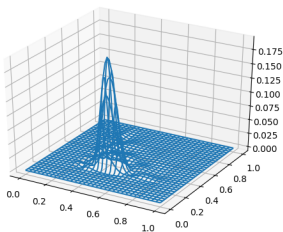


A mi-parcours, 20 modes

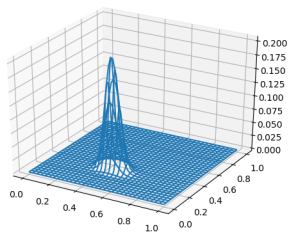
# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

Reconstruction d'une solution fine



A mi-parcours, 50 modes

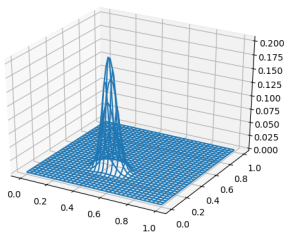


A mi-parcours, 100 modes

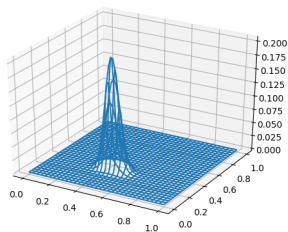
# Approche eulerienne

## Champ de vitesse uniforme

Reconstruction d'une solution fine



A mi-parcours, 200 modes



A mi-parcours, 500 modes



# Approche eulerienne

## Ecoulements cellulaires

# Approche lagrangienne

## Champ de vitesse uniforme

# Approche lagrangienne

## Écoulements cellulaires

# Approche lagrangienne

## Champ de vitesse de Lamb-Oseen

## For Further Reading I



A. Author.

*Handbook of Everything.*

Some Press, 1990.



S. Someone.

On this and that.

*Journal of This and That*, 2(1) :50–100, 2000.