

Synthèse d'article :

Rental harmony : Sperner's lemma in fair division

LÉO BATY, LUCA BRUNOD-INDRIGO, EMMANUEL LO, NICOLAS PODVIN

07/01/2019

Table des matières

1	Introduction	2
2	Résumé de l'article	2
2.1	Quelques définitions	2
2.2	Lemme de Sperner	2
2.3	Modélisation du problème	2
3	Exemples d'applications concrètes	4

1 Introduction

L'article étudié¹ porte sur la résolution du problème de *rent-partitioning* à l'aide du lemme de Sperner. Le problème concret à résoudre est le suivant : n individus s'apprêtent à s'installer en collocation dans un logement possédant n chambres, et vient le moment de la répartition des chambres. Si l'on associe à chaque chambre un pourcentage du loyer à payer, y a-t-il une répartition du loyer optimale, telle que chaque colocataire préfère une chambre différente ?

2 Résumé de l'article

2.1 Quelques définitions

Le lemme de Sperner utilise la notion de *n-simplexe*, c'est à dire l'enveloppe convexe d'un ensemble de $n + 1$ points linéairement indépendants de \mathbb{R}^m , avec $m \leq n$. Dans les problèmes abordés, le simplexe est en fait une façon de représenter un ensemble de solutions. On appelle triangulation d'un *n-simplexe* S un ensemble de *n-simplexes* dont l'union est égale à S est dont l'intersection deux à deux est soit vide soit égale à un simplexe de dimension inférieure – soit une face.

2.2 Lemme de Sperner

La triangulation d'un *n-simplexe* S par des *n-simplexe* élémentaires est dite **de Sperner** lorsque :

1. Chaque sommet de S du *n-simplexe* est indexé par un entier différent de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.
2. Les noeuds de la triangulation appartenant à un sous-simplexe engendré par n sommets de S sont numérotés avec les indices de ces sommets.
3. Les noeuds restants, dits noeuds intérieurs, sont indexés de manière quelconque par des entiers de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

Une telle triangulation d'un simplexe possède une propriété décrite par le **lemme de Sperner** : **il possède nécessairement un nombre impair de *n-simplexes* élémentaires dont les $n + 1$ sommets sont numérotés par tous les entiers de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.**

2.3 Modélisation du problème

Le lemme de Sperner trouve alors une application dans la vie courante : le problème de l'allocation des chambres entre plusieurs locataires. Les n locataires doivent décider de la répartition entre eux du montant du loyer. Le but est alors de trouver une répartition du

1. Rental harmony : Sperner's lemma in fair division, FRANCIS EDWARD SU

loyer qui telle que chaque locataire préfère occuper une chambre différente.

Les hypothèses sur les joueurs sont les suivantes :

1. Tout locataire est satisfait par au moins une des chambres de la propriété, quelque soit la répartition du loyer.
2. Une personne préfère toujours une chambre gratuite à une chambre payante.
3. L'ensemble des préférence est fermé. C'est-à-dire qu'un locataire préfère une même chambre pour une suite convergente de répartition du loyer préfèrera cette chambre à la répartition limite.

Nous avons choisi de nous concentrer sur la version discrétisée du problème : on considère qu'il existe un seuil ϵ tel que deux montants de loyer ne sont distinguable qu'à plus de ϵ près. Ce seuil peut être interprété simplement comme un montant inférieur à la plus petite unité monétaire.

Ainsi, le nombre de partages possibles du loyer est fini et on peut mettre le jeu sous forme normale de la façon suivante :

1. $n + 1$ joueurs ϵ -tolérants :
 - N locataires J_1, \dots, J_n
 - Un joueur supplémentaire J_{n+1} représentant la communauté
2. Stratégies :
 - Stratégies de J_{n+1} : proposition de partage (on considère que le montant du loyer vaut 1).
 $S_{n+1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket x_i = n_i \epsilon, n_i \in \mathbb{N}\}$
 - Stratégies de $J_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: choix d'une chambre connaissant la proposition de J_{n+1} . $S_i = \{s_i : S_{n+1} \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket\}$ (ensemble fini)
3. Paiements :
 - Paiement de J_{n+1} :

$$g_{n+1}(s_1, \dots, s_{n+1}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \exists i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, s_i = s_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Paiement de $J_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: on suppose que chaque joueur a une fonction de préférence $P_i : S_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) \setminus \emptyset$ garantissant que le joueur préfère toujours une chambre gratuite à une payante.

$$g_i(s_1, \dots, s_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i(s_{n+1}) \in P_i(s_{n+1}) \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'existence d'une solution au problème de *rent-partitionning* se démontre en se ramenant à une triangulation de Sperner et en utilisant le lemme associé défini précédemment.

Tout d'abord, on se munit d'un $n-1$ -simplexe S maillé avec un pas $\epsilon > 0$, et on étiquette chaque sommet de ce simplexe avec le nom d'un joueur. Chaque point à l'intérieur de ce simplexe correspond à une répartition possible du loyer entre les chambres, les sommets de S correspondant aux cas particuliers où l'un des locataires paye tout. Puis, on étiquette tous les simplexes élémentaires de sorte à ce que chacun ait un sommet au nom de chaque joueur.

Puis, pour chaque point de ce maillage, on demande au propriétaire du sommet (le joueur dont le nom étiquette le sommet) quelle chambre il préfère dans le cas de la répartition de loyer correspondant au sommet, et on l'étiquette avec le numéro de la chambre préférée. Ainsi, on obtient une triangulation du simplexe avec les indices correspondants aux n chambres.

Enfin, on dualise le $n-1$ -simplexe S en un nouveau simplexe S^* , et l'on obtient alors une triangulation de Sperner. Ainsi, d'après le lemme de Sperner, il existe un simplexe élémentaire de S avec les n indices associés aux n chambres. Avec la discrétisation choisie, les répartitions du loyer correspondant aux sommets du simplexe élémentaire trouvé, ne sont pas discernable par les joueurs. On a ici résolu le problème dans un cas discret, mais l'hypothèse de fermeture initiale permettrait d'itérer la procédure sur des simplexes de plus en plus petits, et ainsi de trouver une répartition de loyer équitable dans un modèle continu par passage à la limite et extraction d'une suite où les préférences des joueurs sont constantes.

3 Exemples d'applications concrètes

Nous décrirons ici des exemples de la vie réelle qui sauraient se prêter à une utilisation de la théorie vue jusqu'à présent. Les exemples sont issus d'expériences personnelles ou d'autres cours.

Un premier exemple est inspiré du cours de stratégie financière. Lorsque certaines entreprises veulent développer des projets conséquents, mais qu'elle n'ont pas les moyens à mettre sur ces projets, car elle ne souhaite pas s'endetter ou demander des fonds à des actionnaires, il est possible de faire appel à une joint venture. Cette joint venture devient une nouvelle entité détenue à parts variables par les entreprises qui l'ont consituée. Souvent une joint venture = brevets + outils de production + cash + moyens humains... Plus une entreprise va contribuer a cette somme dont les montants pour chaque catégorie ont été fixés, plus une entreprise va avoir une part de pouvoir importante dans les décisions de la joint venture, un des exemples étant la proportion de membre du comité exécutif venant d'une faction ou d'une autre. Pour qu'il y ait harmonie dans une joint venture, chaque entreprise contribuant doit idéalement avoir une part égale de pouvoir dans la joint venture. Il ne reste plus qu'à savoir comment répartir les apports de chacun dans la joint venture pour arriver à l'équilibre.

Un second exemple vient d'une intervention d'un responsable de salle de marché de la

Société Générale lors de la journée pédagogique du département SEGF aux tours de la défense. Il disait que les derniers mètres carrés de Puteaux devenaient extrêmement chers, prisés et restreints, et que certaines entreprises se sont alliées pour racheter certains terrains ce qui leur coûterait moins cher que de louer à des acheteurs de terrain plus puissants comme les banques s'ils restaient à long terme. Il ne reste plus qu'à diviser le prix de la construction future et de l'achat du terrain actuel pour une occupation des locaux qui satisfera tout le monde.

Un dernier exemple, est vécu personnellement. Deux amis essayent de chercher des objets qui pouvaient les intéresser dans des enchères. Parfois, certains articles qui auraient eu peu d'intérêt seuls étaient mis aux enchères en lot. Il s'avère que les deux amis sont numismates et voient passer un lot de pièces étrangères diverses. Elles sont pour la plupart d'une valeur assez faible, mais il n'est pas nécessairement facile de les trouver à un prix raisonnable sans voyager. N'ayant pas envie de faire monter artificiellement le prix de l'enchère en entrant en concurrence avec un ami aussi intéressé que moi par le lot, et ayant déjà certaines de ces pièces dans nos collections respectives, certaines pièces servant plus à l'un qu'à l'autre. L'idée a donc été d'allier nos budgets pour acheter comme une personne, et en réfléchissant ensuite à la part que chacun allait payer pour le lot selon ses besoins.