# Synthèse d'article :
Rental harmony : Sperner's lemma in fair division

Léo Baty, Luca Brunod-Indrigo , Emmanuel Lo, Nicolas Podvin

## Table des matières



# Introduction

L'article étudié [1] porte sur la résolution du problème de *rent-partitioning* à l'aide du lemme de Sperner. Le problème concret à résoudre est le suivant : $n$ individus s'apprêtent à s'installer en collocation dans un logement possédant $n$ chambres, et vient le moment de la répartition des chambres. Si l'on associe à chaque chambre un pourcentage du loyer à payer, y a-t-il une répartition du loyer optimale, telle que chaque colocataire préfère une chambre différente ?

1. Rental harmony : Sperner's lemma in fair division, FRANCIS EDWARD SU

# Résumé de l'article

## Lemme de Sperner

La triangulation d'un simplexe de dimension $n$ par des $n$-simplexes élémentaires est dite de Sperner lorsque les $n+1$ sommets sont indexés par un chiffre différent et que pour tout sous-simplexe de dimension inférieure ayant uniquement des sommets dans l'ensemble des $n+1$ sommets du simplexe de base, toute triangulation de ce sous-simplexe par des simplexes élémentaires ne contiennent que des chiffres des sommets initiaux du sous-simplexe.

Une telle triangulation d'un simplexe possède une propriété décrite par le lemme de Sperner : un tel simplexe possède nécessairement un nombre impair sous-simplexe élémentaire de même dimension n avec les $n+1$ différentes indexations aux $n+1$ sommets de ce simplexe élémentaire

## Modélisation du problème

Le lemme de Sperner trouve alors une application dans la vie courante : le problème de l'allocation des chambres entre plusieurs locataires. Présentons le problème : on a $n$ locataires qui payent un certain loyer pour occuper une chambre et doivent décider entre eux de la part de loyer a payer. Le but est de trouver une répartition du loyer qui apporte un payement qui soit socialement juste pour tous les joueurs. Les hypothèses prises sur les joueurs sont les suivantes :

1. Tout locataire est satisfait par au moins une des chambres de la propriété, quelque soit la répartition du loyer.
2. Une personne préfère toujours une chambre gratuite à une chambre payante.
3. Si une personne est satisfaite par une certaine chambre pour une suite convergente de répartition de loyer, alors il est satisfait par la même chambre à la limite de cette répartition.

expliquer en quoi cela se rapproche de Sperner

parler de dualite ?

faire une fonction de payement theorie des jeux ? ou pseudo fonction ?

Jeu sous forme normale :

1. $N+1$ joueurs :
   - $N$ locataires $J_1, ...J_N$
   - la communauté : $J_{N+1}$
2. Stratégies :
   - Stratégies de $J_{N+1}$ : proposition de partage (dans le modèle discrétisé de finesse $\delta = \frac{1}{k} < \epsilon$. $S_{N+1} = \{(x_1, ..., x_n) \in [0,1]^N | \, x_1 + ... + x_n = 1, x_i = n_i\delta, n_i \in \mathbb{N}\}$

Une proposition de partage correspond à un sommet de la triangulation avec un maillage de taille $\delta$.

— Stratégies de $J_i$, $i \in [\![1, N]\!]$ : choix d'une chambre connaisant la proposition de $J_{N+1}$. $S_i = \{s_i : S_{N+1} \to [\![1, N]\!]\}$ (ensemble fini)

3. Paiements :

— Paiement de $J_{N+1}$ :

$$g_{n+1}(s_1, ..., s_{N+1}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \exists\, i, j \in [\![1, N]\!],\ i \neq j,\ s_i = s_j \text{ (co,flit)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— Paiement de $J_i$, $i \in [\![1, N]\!]$ :
On suppose que chaque joueur a une fonction de préférene $P_i : S_{N+1} \to [\![1, N]\!]$

$$g_i(s_1, ..., s_{N+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i(s_{N+1}) = P_i(s_{N+1}) \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Résolution du problème de *rent-partitioning*

## Algorithme de résolution

Algorithme approché de division équitable Les théorèmes énoncés précédemment garantissent l'existence d'un partage équitable construit comme limite ponctuelle d'une suite de n-simplex résultant de triangulations de plus en plus fines. Une telle construction, par son caractère asymptotique, est difficilement applicable dans des situation concrètes, en revanche, dans les applications classiques telles que celles qui nous intéressent et qui sont abordées dans l'article, il est possible de se contenter de solutions approchées. En effet, lorsqu'il existe un seuil au-dessous duquel les différents joueurs sont incapables de distinguer deux partages proches ñ typiquement, le seuil de la miette dans un partage de gâteau ou celui du centime dans le cas d'un partage de loyer ñ il n'est plus nécessaire de considérer des triangulations infiniment fines pour arriver à une solution. Si l'on note $e$ le seuil en question et que l'on effectue la triangulation du n-simplexe de l'ensemble des partages possibles avec une taille de maillage inférieure à $e$, les partages correspondant aux sommets d'un simplexe élémentaire de cette triangulation ne sont pas discernables par les joueurs du fait de leur e-tolérance. Dans ces conditions, trouver un simplex élémentaire complètement étiqueté revient à trouver un partage équitable.

// !!!!!je ne sais pas à quel point la méthode des trap-doors a été détaillée, il faut peut-être compléter pour que ce soit compréhensible !!!!!!!!!!!//

Pour trouver un tel simplexe élémentaire, il faut parcourir le maillage de porte en porte en partant des portes extérieures, qui sont situées sur la face $n$. Comme expliqué précédemment dans la preuve du lemme de Sperner, on aboutit nécessairement à un simplexe élémentaire complètement étiqueté. De plus, il n'est pas nécessaire de connaître la préférence des joueurs pour tous les noeuds du maillage, la connaissance des préférences aux noeuds correspondant aux sommets des simplexes élémentaires parcourus suffit.

# Réflexions personnelles

## Adaptation du problème au cours

## Implémentation de l'algorithme

## Exemples d'applications dans la réalité

Nous décrirons ici des exemples de la vie réelle qui sauraient se prêter à une utilisation de la théorie vue jusqu'à présent. Les exemples ont été vécus personnellement ou entendus pendant d'autres cours. La plupart symbolisent une alliance de petites forces pour être plus fort, surtout quand le temps presse. La question du partitionnement venant après.

Un premier exemple est inspiré du cours de stratégie financière. Lorsque certaines entreprises veulent développer des projets conséquents, mais qu'elle n'ont pas les moyens à mettre sur ces projets, car elle ne souhaite pas s'endetter ou demander plus de cash en passant par les actionnaires, il est possible de faire appel à une joint venture. Cette joint venture devient une nouvelle entité detenue à parts variables par les entreprises qui l'ont consitué. Souvent une joint venture = brevets + outils de production + cash + moyens humains... Plus une entreprise va contribuer a cette somme dont les montants pour chaque catégorie ont été fixés, plus une entreprise va avoir une part de pouvoir importante dans les décisions de la joint venture, un des exemples étant la proportion de membre du comité exécutif venant d'une faction ou d'une autre. Pour qu'il y ait harmonie dans une joint venture, chaque entreprise contribuant doit idéalement avoir une part égale de pouvoir dans la joint venture. Il ne reste plus qu'à savoir comment répartir les apports de chacun dans la joint venture pour arriver à l'équilibre...

Un second exemple vient d'une intervention d'un responsable de salle de marché de la Socieété génerale lors de la journé pédagogique du département SEGF aux tours de la défense. Il disait que les derniers mètres carrés de Puteaux devenaient extrêmement chers, prisés et restreints, et que certaines entreprises se sont alliés pour racheter certains terrains ce qui leur coûterait moins cher que de louer à des acheteurs de terrain plus puissants comme les banques s'ils restaient à long terme. Il ne reste plus qu'à diviser le prix de la construction future et de l'achat du terrain actuel pour une occupation des locaux qui satisfera tout le monde.

Un dernier exemple, est vécu personnellement. Deux amis essayent de chercher des objets qui peuvent les intérresser dans des enchères. Parfois, ces des lots, qui ne seraient pas intéressant seuls, sont mis en enchères en lot. Il s'avère que les deux amis sont numismates et voient passer un lot de pleins de pièces étrangères diverses. Elles sont pour la plupart d'une valeur assez faible, mais il n'est pas nécessairement facile de les trouver à un prix raisonnable sans voyager. N'ayant pas envie de faire monter artificiellement le prix de l'enchère en entrant en concurrence avec un ami aussi intéressé que moi par le lot, et ayant parfois certaines de ces pièces dans notre collection respective, certaines pièces serviront plus à l'un qu'à l'autre. L'idée à donc d'allier nos budgets pour acheter comme une personne, et en refléchissant ensuite à la part que chacun allait payer pour le lot selon ses besoins.