Synthèse d'article :
Rental harmony : Sperner's lemma in fair division

Léo Baty, Luca Brunod-Indrigo , Emmanuel Lo, Nicolas Podvin

Table des matières

1 Introduction

L'article étudié [1] porte sur la résolution du problème de *rent-partitioning* à l'aide du lemme de Sperner. Le problème concret à résoudre est le suivant : n individus s'apprêtent à s'installer en collocation dans un logement possédant n chambres, et vient le moment de la répartition des chambres. Si l'on associe à chaque chambre un pourcentage du loyer à payer, y a-t-il une répartition du loyer optimale, telle que chaque colocataire préfère une chambre différente ?

1. Rental harmony : Sperner's lemma in fair division, FRANCIS EDWARD SU

2 Résumé de l'article

2.1 Lemme de Sperner

La triangulation d'un simplexe de dimension n par des n-simplexes élémentaires est dite de Sperner lorsque les $n+1$ sommets sont indexés par un chiffre différent et que pour tout sous-simplexe de dimension inférieure ayant uniquement des sommets dans l'ensemble des $n+1$ sommets du simplexe de base, toute triangulation de ce sous-simplexe par des simplexes élémentaires ne contiennent que des chiffres des sommets initiaux du sous-simplexe.

Une telle triangulation d'un simplexe possède une propriété décrite par le lemme de Sperner : un tel simplexe possède nécessairement un nombre impair sous-simplexe élémentaire de même dimension n avec les $n+1$ différentes indexations aux $n+1$ sommets de ce simplexe élémentaire

2.2 Modélisation du problème

Le lemme de Sperner trouve alors une application dans la vie courante : le problème de l'allocation des chambres entre plusieurs locataires. Présentons le problème : on a n locataires qui payent un certain loyer pour occuper une chambre et doivent décider entre eux de la part de loyer a payer. Le but est de trouver une répartition du loyer qui apporte un payement qui soit socialement juste pour tous les joueurs. Les hypothèses prises sur les joueurs sont les suivantes :

1. Tout locataire est satisfait par au moins une des chambres de la propriété, quelque soit la répartition du loyer.
2. Une personne préfère toujours une chambre gratuite à une chambre payante.
3. Si une personne est satisfaite par une certaine chambre pour une suite convergente de répartition de loyer, alors il est satisfait par la même chambre à la limite de cette répartition.

expliquer en quoi cela se rapproche de Sperner

parler de dualite ?

faire une fonction de payement theorie des jeux ? ou pseudo fonction ?

Jeu sous forme normale :

1. $N+1$ joueurs :
   — N locataires $J_1, ...J_N$
   — la communauté : J_{N+1}
2. Stratégies :
   — Stratégies de J_{N+1} : proposition de partage (dans le modèle discrétisé de finesse $\delta = \frac{1}{k} < \epsilon$. $S_{N+1} = \{(x_1, ..., x_n) \in [0,1]^N | \, x_1 + ... + x_n = 1, x_i = n_i\delta, n_i \in \mathbb{N}\}$

Une proposition de partage correspond à un sommet de la triangulation avec un maillage de taille δ.

— Stratégies de J_i, $i \in [\![1, N]\!]$: choix d'une chambre connaisant la proposition de J_{N+1}. $S_i = \{s_i : S_{N+1} \to [\![1, N]\!]\}$ (ensemble fini)

3. Paiements :

— Paiement de J_{N+1} :

$$g_{n+1}(s_1, ..., s_{N+1}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \exists\, i, j \in [\![1, N]\!],\ i \neq j,\ s_i = s_j \text{ (co,flit)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— Paiement de J_i, $i \in [\![1, N]\!]$:
On suppose que chaque joueur a une fonction de préférene $P_i : S_{N+1} \to [\![1, N]\!]$

$$g_i(s_1, ..., s_{N+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i(s_{N+1}) = P_i(s_{N+1}) \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3 Résolution du problème de *rent-partitioning*

2.4 Algorithme de résolution

Algorithme approché de division équitable Les théorèmes énoncés précédemment garantissent l'existence d'un partage équitable construit comme limite ponctuelle d'une suite de n-simplex résultant de triangulations de plus en plus fines. Une telle construction, par son caractère asymptotique, est difficilement applicable dans des situation concrètes, en revanche, dans les applications classiques telles que celles qui nous intéressent et qui sont abordées dans l'article, il est possible de se contenter de solutions approchées. En effet, lorsqu'il existe un seuil au-dessous duquel les différents joueurs sont incapables de distinguer deux partages proches ñ typiquement, le seuil de la miette dans un partage de gâteau ou celui du centime dans le cas d'un partage de loyer ñ il n'est plus nécessaire de considérer des triangulations infiniment fines pour arriver à une solution. Si l'on note e le seuil en question et que l'on effectue la triangulation du n-simplexe de l'ensemble des partages possibles avec une taille de maillage inférieure à e, les partages correspondant aux sommets d'un simplexe élémentaire de cette triangulation ne sont pas discernables par les joueurs du fait de leur e-tolérance. Dans ces conditions, trouver un simplex élémentaire complètement étiqueté revient à trouver un partage équitable.

// !!!!!je ne sais pas à quel point la méthode des trap-doors a été détaillée, il faut peut-être compléter pour que ce soit compréhensible !!!!!!!!!!!!//

Pour trouver un tel simplexe élémentaire, il faut parcourir le maillage de porte en porte en partant des portes extérieures, qui sont situées sur la face n. Comme expliqué précédemment dans la preuve du lemme de Sperner, on aboutit nécessairement à un simplexe élémentaire complètement étiqueté. De plus, il n'est pas nécessaire de connaître la préférence des joueurs pour tous les noeuds du maillage, la connaissance des préférences aux noeuds correspondant aux sommets des simplexes élémentaires parcourus suffit.

3 Réflexions personnelles

3.1 Adaptation du problème au cours

3.2 Implémentation de l'algorithme

3.3 Application à un cas réel