Вычислительная математика **Преподаватель:** *Г.С. Гойман*
Задание по теме 1
17.02.2024

Вариант	Номер задачи	
1	1a)	3a)
2	1b)	3b)
3	1c)	3c)
4	1d)	3d)
5	1e)	3e)
6	2a)	3a)
7	2b)	3b)
8	2c)	3c)
9	2d)	3d)
10	2e)	3e)
11	1a)	3a)
12	1c)	3b)
13	2a)	3c)
14	2c)	3d)
15	2b)	3e)

Задача 1. Рассматривается система ОДУ первого порядка, имеющая периодическое решение с периодом T:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \theta(t) \\ \theta'(t) = -\sin\alpha(t), \qquad t \in [0, T], \\ \alpha(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \theta(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $T = 4K(\pi/4),\ K(\pi/4) \approx 1.854074677301372$, $K(m)$ – эллиптический интеграл первого рода.

- Реализовать предложенный метод численного решения данной системы уравнений.
- Исследовать предложенный метод на устойчивость.
- Экспериментально определить порядок сходимости, исследуя ошибку численного решения $||\vec{y}(T) - \vec{y}(0)||$, сравнить с порядком аппроксимации метода.
- Построить фазовую диаграмму решения.

Задача 2. Рассматривается система ОДУ первого порядка, имеющая периодическое решение с периодом T:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -u^3(t), \qquad t \in [0, T], \\ u(0) = 1, \quad v(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где $T = \sqrt{32\pi}\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \approx 7.416298709205487$.

- Реализовать предложенный метод численного решения данной системы уравнений.
- Исследовать предложенный метод на устойчивость.
- Экспериментально определить порядок сходимости, исследуя ошибку численного решения $||\vec{y}(T) - \vec{y}(0)||$, сравнить с порядком аппроксимации метода.
- Построить графики $u(t)$, $v(t)$

Варианты численных методов для задачи 1, 2:

a) Схема Чехарда (leapfrog) $\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta t} = f_i$.

b) Классический метод Рунге-Кутты

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

c) Явный метод Адамса $y_{i+1} - y_i = \frac{\Delta t}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$.

d) Метод Рунге

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}$$

e) Метод Хойна

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Задача 3. Рассматривается система ОДУ, описывающая реакции фотохимии озона в атмосфере

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= k_1c_3 - k_2c_1, \\ \dot{c}_2 &= k_1c_3 - k_3c_2c_4, \\ \dot{c}_3 &= k_3c_2c_4 - k_1c_3, \\ \dot{c}_4 &= k_2c_1 - k_3c_2c_4, \end{aligned}$$

где $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ – концентрации (кол-во молекул вещества в кубическом сантиметре) O, NO, NO_2 и O_3. В начальный момент времени $t = 0$ концентрации веществ $\vec{c} = (0, 0, 5 \times 10^{11}, 8 \times 10^{11})^T$. Выражения для коэффициентов реакций:

$$k_1 = 10^{-2} \max\left[0, \sin(2\pi t/t_d)\right] \text{ s}^{-1},$$
$$k_2 = 10^5 s^{-1}, k_3 = 10^{-16} \text{cm}^3 \text{molecule}^{-1} \text{s}^{-1},$$

$t_d = 24 \cdot 60 \cdot 60$ s.

Найти численное решение данной задачи для промежутка времени $t = [0, 2t_d]$, используя предложенный численный метод. Построить графики численного решения. Определить экспериментально максимальный шаг по времени, при котором явный метод Эйлера для данной задачи устойчив. Сравнить с шагом по времени, который позволяет использовать предложенный метод численного решения.

Варианты численных методов для задачи 3:

a) Неявный метод Эйлера.

b) Схема Кранка-Николсон.

c) Формула диифференцирования назад 2го порядка

d) Диагонально-неявный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \hline & -\frac{1}{12} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{array}$$

e) Диагонально-неявный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cc} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$