Review Notes

Analyse 4 & Complètement de mathématiques

Mai 2024

目录

1 Norme et Toplogie sur $\mathbb{R}^n$

1.1 Norme sur $\mathbb{R}^n$

实数域上的代数构造构成一个域，多维实数域可以将其视作实数域上的一个向量空间，从而可以自然的去定义范数。

on définit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, la produit cartésienne de n corps réals, donc l'addition et la multiplication par un scalarie est déterminé par l'opération sur $\mathbb{R}$, on a

addition : $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ pour tout $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$

multiplication par un scalaire : $a(x_1, ..., x_n) = (ax_1, ..., ax_n)$ pour tout $x_i \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$

Definition (Norme sur $\mathbb{R}^n$)**.** *Une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\|$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. *Positivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq 0$;*
2. *Séparation : Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
3. *Homogénéité : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;*
4. *Inégalité triangulaire : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

On dit alors que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

赋范定义与度量空间（metric space）的定义是等价的，这里给出度量空间的定义

Definition (Metric Space)**.**

$$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto d(x, y)$$

est une metric fonction si il vérifie trois propriétés suivant:

1. *Définie : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*

2. *Symetrique :* $d(x,y) = d(y,x)$

3. *Inégalité triangulaire :* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

On dit alors $(\mathbb{R}^n, d)$ *est une metric space.*

恒正性质根据以上三点可以推出，而度量函数与赋范函数之间的联系为

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Proposition 1.1 (Norme Classique)**.** *Sur* $\mathbb{R}^n$ *il y a quelques norme usuelle:*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max |x_i|$$

on les note 1-norme, 2-norme et ∞*-norme respectivement.*

通过定义：$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n x_i^p)^1/p$, 前两个范数可以推广至 p-norme（Lp 范数）

Proposition 1.2 (inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, on a*

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| = |\sum_{i=1}^{n} x_i^p|^{1/p} |\sum_{i=1}^{n} y_i^p|^{1/p}$$

utiliser la symbole de norme et produit scalaire, on a $< x, y >= \|x\|_p^{1/p} \|y\|_p^{1/p}$.

Proposition 1.3 (equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$)**.** *Toutes les normes sur* $\mathbb{R}^n$ *est equivalentes. C.a.d pour deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sur* $\mathbb{R}^n$*, il existe reals m, M telle que*

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

1.2 Ouverts et Fermés sur $\mathbb{R}^n$

为了总结性的要求，将定义任何 $\mathbb{R}^n$ 度量上的拓扑结构，这一点由 $\mathbb{R}^n$ 度量的等价性决定。

Definition (Ouverts et Fermés)**.** *On munit* $\mathbb{R}^n$ *avec la norme* $\|\cdot\|$, *alors pour toutes parties* $A \in \mathbb{R}^n$ *on definit:*

- *A est ouvert si*
$$\forall x \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset A$$
- *A est fermé si A n'est pas ouvert*

  (caractérisation séquentielle des fermés) *A est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergent d'éléments de A appartient à A.*

$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑结构将开度量球作为开集的基本单位，刻画开集从而自然的导出闭集，闭集的序列性质可以等价的替换原定义（非开），其证明如下

否命题等价证明. A est pas fermé $\Leftrightarrow$ A^c n'est pas ouvert $\Leftrightarrow$ il existe $x \in A^c$ t.q. pour $\forall \epsilon > 0, B(x, r) \not\subset A^c$.

donc on peut poser $r_n = 1/n$ et on choisi un élément x_n dans $A \cap B(x, r_n) - \{x\}$ pour obtenir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est facile de montrer que cette suite converge vers x quand n tend vers l'infinité. C.a.d que il existe une suite d'éléments de A mais il n'est pas convergent dans A. □

此外，对开闭集的刻画可以通过对集合中点的分类来完成。

Definition (classification des point)**.** *soit* $A \subset \mathbb{R}^n$

- *x est une point intérieur de A s'il existe un ouvert v contenant x t.q.* $V \subset A$.

  $Int(A) := \{$*Tout les point intérieur de* $A\}$
- *x est une point adhérent de A si pour tout ouvert V contenant x t.q.*$V \cap A \neq \emptyset$.

  $\bar{A} := \{$*Tout les point adhérent de* $A\}$
- *x est une point extérieur de A s'il existe un ouvert V contenant x t.q.* $V \cap A = \emptyset$

  $Ext(A) := \{$*Tout les point extérieur de* $A\}$

根据这些点我们可以给出开闭的等价定义：

Proposition 1.4. *soit A une partie de $\mathbb{R}^n$*

- *A est ouvert si et seulement si $Int(A) = A$*
- *A est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$*

此外，根据点的性质可以赋予 $\mathbb{R}^n$ 一种划分方式，这种划分方式适用于任何一种拓扑结构。给定一个集合我们可以把所有点分为三类：内部、外部、边界。我们可以定义边界点为 $\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n - A)}$，根据性质进行符号运算：

$$\partial A = \overline{A} \cap (\mathbb{R}^n - Int(A)) = \overline{A} - Int(A)$$

而一个点不可能既是附着点又是外点，而上式给出一个点不可能即是边界点又是内点，故有分划（partition）：

$$\mathbb{R}^n = Int(A) \sqcup \overline{A} \sqcup Ext(A)$$

连通性是一个重要的拓扑性质，以下命题给出 $\mathbb{R}^n$ 是一个连通集，其证明涉及到确界性质或者区间套定理，没有简单的证明主要是因为这涉及到实数自身的性质，其完备性翻译为几何一点的语言即是连通性。

Proposition 1.5. *Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.*

证明. Necessary is trival, we wil prove the Sufficient condition.

Suppose A is the non-empty proper subset of $\mathbb{R}^n$, then we fix $a \in A$ and $b \in A^c$, then construct a path from a to b by definig $r(t) := (1-t)a + tb$, where $t \in [0,1]$. So we have a subset of $\mathbb{R}$:

$$I = \{t \in [0,1] : r(t) \in A\}$$

we notice that $0 \in I$ since $r(0) = a \in A$, by Supremum Principle I attains a supremum $s \in [0,1]$. Clearly I is closed, so $r(s) \in A$ by taking limits.

If $s = 1, \quad r(s) = b \notin A$ If $s < 1$, $r(s)$ is an interior since A is open. Additionally, r(s) is a point of boundary since A is closed and s is a supremum. Contradict happens here as $Int(A) \cup \partial A = \emptyset$. In conclusion, A can not be open and closed if $A \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$.

$\square$

1.3 Compact de $\mathbb{R}^n$

紧性也是一种拓扑性质，这种性质的一般性讨论较为复杂，博雷尔的原始定义为具有有限开覆盖选取特性的集合，这里给出 $\mathbb{R}^n$ 中的等价定义。

Definition. *On dit que $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergent dans K.*

该定义的动机来自于 BW 定理（有界序列必有收敛子列）。首先紧集必是闭集，这是子列收敛的要求（收敛序列的子列与其收敛到同一个值），其次紧集中的序列必有收敛子列，可以推出紧集一定是有界集合。因此对于 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集判定有如下定理：

Theorem 1.1 (Heine-Borel Theorem)**.**

$$K \subset \mathbb{R}^n \textit{est compact} \quad \Leftrightarrow \quad K \textit{est fermé et borné}$$

2 Continuité et Différentiabilité

2.1 La Continuité

Definition. *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction qui est continue en $x_0 \in E$, On a*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta \in E, \quad \|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \epsilon$$

On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point $x_0 \in E$

对于连续性的定义需要注意一点，任何函数若在一孤立点有定义，则其在孤立点处连续。无法用极限的语言去描述孤立点处的连续性是因为极限是一个函数的局部性质，取决于一点周围的函数变化。因此对于非孤立点（附着点），我们有连续的等价定义如下：

$$f \quad \text{est continue en} \quad x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

而根据函数收敛于序列收敛的联系可以得到连续性的序列版本的等价定义：

Proposition 2.1 (caractérisation séquentielle des fonctions continues)**.** *Soit fonction est continue en* x_0 *si et seulement si pour tout suite* $(x_k)_k \subset E$ *qui converge vers* x_0*, on a* $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x_0)$.

连续性的一个重要性质是保持紧性，在 $\mathbb{R}^{\ltimes}$ 的分析中，紧性即为有界闭，实数域中的紧集合即为闭区间（closed interval），以下定理对此做出总结：

Theorem 2.1 (Weierstrass)**.** *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *une fonction qui est continue et* K *un compact de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $f(K)$ *est un compact de* $\mathbb{R}^p$.

当 $n = 1$ 时，$\mathbb{R}$ 为有序集而具有确界性质，有界闭性质确保紧集可以分别取到其下界和上界，故又称为 théorème des bornes atteint 。

2.2 La Différentiabilité

Definition (Differentiability)**.** *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *est une application differentiable au point* x_0 *s'il existe une application linéaire* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *telle que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0$$

et on appelle différentielle de f l'application linéaire , notée $D_{x_0} f$*. On dit que f est une application differentiable si f est differentiable en tout point de domaine.*

在可微的定义中强调定义域为开集是为了排除边界的可微性讨论，这涉及到左导数与右导数的讨论，且过多的定义会使得定义本身变得繁琐，并且可微性的常常在几何上被应用在一个开区域中去讨论一个局部性质的成立与否。一元函数的微分（differentielle）即为导数（derivative），故有 $D_{x_0} f = f'(x_0)$。实际上，微分可看作导数的推广，多元函数的微分对应一个线性映射，其矩阵形式在后面可以看到对应一个元素为偏导数的矩阵。

Proposition 2.2 (linéaire application)**.**

- *Soit* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *une application linéaire, alors f est différentiable et* $D_x f = f$.
- *Soit* $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application linéaire, alors f est différentiable et* $D_{(x,y)} f(h, k) = f(h, y) + f(x, k)$.

Proposition 2.3 (differentielle des fonctions composées)**.** *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions différentiable sur Ω et $f(\Omega)$ respectivement, alors $g \circ f$ est différentiable sur Ω, et on a*

$$D_x g \circ f = D_{f(x)} g \circ D_x f \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \Omega$$

另外，我们定义方向导数，注意偏导数即为一种特殊的方向导数。

Definition (dérivées directionnelle)**.** *Soit $f : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction qui admet une dérivée en $x_0 \in \Omega$ suivant le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ si $f(x_0 + tv)$ admet une dérivée en $t = 0$, c.a.d que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \quad \textit{existe}$$

on le note alors $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = D_{x_0} f(v)$

- *(dérivées partielles) soit $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$, on dit que f admet i-ème dérivée partielle en $x_0 \in \Omega$ si f admet une dérivee en x_0 suivant le vecteur e_i, c.a.d que*

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = D_{x_0} f(e_i)$$

注意方向导数定义中对方向向量的选取不一定是单位向量，方向导数的定义是为了衡量函数在某一点沿着特定方向的变化率，而选取单位向量是为了消除方向向量对导数大小的影响以及进行标准化计算。而一元函数的微分中，对方向的选取是唯一的，故有 $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = D_{x_0} f(x)$，容易观察到当我们取非单位向量 $u = cx$ 时有成比例的方向导数 $\frac{df}{du}(u = x_0) = \frac{1}{c}\frac{df}{dx}(u = x_0)$。

另外，方向导数与可微性以及函数的连续性满足以下命题关系

$$continue \Leftarrow differentiable \Leftarrow \text{derives partielles est continue (C1 classe)}$$

函数的微分与偏导数之间的联系可以用线性代数的语言来概括

Definition (Matrice Jacobienne et Gradient)**.** *Soit $f : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en x_0, on appelle matrice Jacobienne de f au point x_0 la matrice de l'application linéaire $D_{x_0} f$, et on a*

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

on a anisi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$J_f(x_0) \cdot h = D_{x_0} f(h)$$

- ***Jacobien(p=n)***

$$Jacf(x_0) = det(J_f(x_0))$$

- ***Gradient(n=1)*** *Soit $f : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable en x_0, on definit le gradient de f en x_0 par*

$$\nabla f(x_0) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))$$

  pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D_{x_0} f =< \nabla f(x_0), h >$$

可以发现，Jacobien 矩阵可以看作一个 p 维数的向量，元素分别为分量的梯度，即

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_p(x_0) \end{pmatrix}$$

其中，仅需要将函数看作 $f = (f_1, ..., f_p)$ 即可。

Proposition 2.4 (Matrice Jacobienne des fonctions composées)**.** *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions différentiable sur Ω et $f(\Omega)$ respectivement, alors $g \circ f$ est différentiable sur Ω, et on a*

$$J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \times J_f(x_0)$$

3 Fonctions de Classe C^k et Extrema

3.1 Classe C^k

Definition. *Soit $f : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- ***fonction de classe C^1:*** *On dit que f est de classe C^1 sur Ω, noté $f \in C^1(\Omega)$, si f admet* *des dérivées partielles première continue sur* Ω.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \textit{est continue pour sur domaine}$$

- ***fonction de classe*** C^2***:*** *On dit que* f *est de classe* C^2 *sur* Ω*, noté* $f \in C^2(\Omega)$*, si* f *admet des dérivées partielles secondes continue sur* Ω.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \textit{est continue pour sur domaine}$$

- ***fonction de classe*** C^k***:*** *On dit que* f *est de classe* C^2 *sur* Ω*, noté* $f \in C^2(\Omega)$*, si* f *admet des dérivées partielles k-éme continue sur* Ω.

$$\frac{\partial^{\mathbf{k}} f}{\partial x^{\mathbf{k}}}(x) \quad \textit{est continue pour sur domaine}$$

avec $\mathbf{k}$ *la multi-indice* $\partial^{\mathbf{k}} := \partial_1^{k_1} ... \partial_n^{k_n}$, $k_1 + \cdots + k_n = k$.

从几何角度 Ck 函数的分类与函数的光滑或者正则性有关，以 C2 函数为例，其满足混合偏导的可交换性质，这使得函数的微分极大程度的具有一定的对称性。我们可以在原有的微分的基础上定义二阶微分，对于定义中的函数 f, 若其可微则满足

$$D_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i$$

若考虑对原函数再一次进行微分则有

$$\begin{aligned} D_x^2 f(h,k) = D_x(D_x f(h))(k) &= D_x(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i)(k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} D_x(\frac{\partial f}{\partial x_i})(k) h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \cdot h_i k_j \end{aligned}$$

可以发现，二阶微分对应一个双线型，我们将其定义为 Matrice Hessienne de f au point x，记为：

$$H_f(x) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i})_{i,j} \qquad 1 \le i, j \le n$$

从而二阶微分可以表示为

$$D_x^2 f(h,k) =< H_f(x)h, k >$$

从严格的定义来说，以上定义有意义当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 在 Ω 内是均是可微的。而仿照偏导存在且连续蕴含可微的证明（C^1 implique différentiable ），我们同样可以证明 C^2 函数蕴含二阶可微。而二阶可微的一个重要性质是对应的双线性型（la forme bilinéaire symétrique ），因此有以下命题关系：

$$f \in C^2(\Omega) \Rightarrow \text{二阶可微} \Rightarrow H_f(x) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Théorème de Schwarz}$$

注意到在一元函数中，函数的光滑性决定了函数可被多项式逼近的程度。同样在多元函数中，我们可以将泰勒公式做推广：

Theorem 3.1 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty(\Omega)$, alors pour une point $x_0 \in \Omega$ on a:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^{\mathbf{j}} f}{\partial x^{\mathbf{j}}}(h)$$

ici **j** *est la multi-indice, on peut obtenir la formule de Taylor-Young à l'ordre k par fusionner la reste terme*:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \frac{\partial^{\mathbf{j}} f}{\partial x^{\mathbf{j}}}(h) + o(\|h\|_2^k)$$

- *En particulier, on a la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 dénoté par le gradient et la matrcie Heissienne*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + D_{x_0} f(h) + \frac{1}{2} D_{x_0}^2 f(h,h) + o(\|h\|_2^2) \\ &= f(x_0) + < \nabla f(x_0), h > + \frac{1}{2} < H_f(x_0)h, h > + o(\|h\|_2^2) \end{aligned}$$

3.2 Le Extrema

将研究多元函数对应的极值问题，此处命题和定理的证明诸多采用参数构造法，即在自变量中引入一个一元参数变量，从而达到可以应用一元函数中的有关理论来完成证明。首先我们先叙述关于极值的定义：

Definition (Extrema Local)**.** *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f admet un minimum* *(resp. maximum) local en* $x_0 \in E$ *s'il existe un ouvert* $\Omega \subset E$*, t.q.*

$$\forall x \in \Omega, \qquad f(x_0) \leq f(x) \quad (f(x_0) \geq f(x))$$

在一元函数中，极值的存在很多时候与导数为 0 处的解有关，或者说极值点和驻点（critical point）有关，在多元函数中我们同样可以找到这样的对应关系：

Definition (Point Critique)**.** *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point intérieur à* E*. On dit que* x_0 *est un point critique de* f *si* $\nabla f(x_0) = 0$*.*

根据以上两个定义，引入参变量易证明以下命题关系：

$$\text{point critique} \quad \Leftarrow \begin{cases} \text{point extrema local} \\ \text{differentiable} \end{cases}$$

驻点中蕴含所有可能极值点的信息，因此我们需要一个判别标准来帮助我们筛选极值点是极大值还是极小值，从相反的方向重新建立以上命题关系:

Proposition 3.1 (La relation entre l'extrema et differentielle d'ordre 2)**.** *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* x_0 *est un point intérieur à* E*,* f *est deux fois differentiable en* x_0 *et* x_0 *est un point critique de* f*, alors on a*

$$\textit{minimum local} \xLongrightarrow[\Leftarrow + \textit{ Definie}]{} H_f(x_0) \textit{ est positive}$$

$$\textit{maximum local} \xLongrightarrow[\Leftarrow + \textit{ Definie}]{} H_f(x_0) \textit{ est négative}$$

这是我们去判断驻点是否为极值以及为何种极值的基本策略。我们可以将判断极值的方法写为以下伪代码：

Algorithm 1 极值判断方法

1: $\nabla f(x) = 0 \to$ 计算 point critique x_0
2: 判断是否为极值：观察 $H_f(x_0)$ 是 definie positif 还是 definie negatif
(notice：两种情况都意味着对应矩阵的特征值是同号的，因此二元函数的时候等价于判断矩阵特征值是否大于 0（$Det(H_f(x_0)) > 0$））
3: 判断极值类型: positif 对应极小值；neagtif 对应极大值

4 Suite et Série de fonction

序列结构在描述一元函数时有重要的作用，回顾我们建立实数域上分析的过程，从 Peano 公理开始建立起完整的自然数系，根据自然数系去定义序列，然后用极限来刻画一个序列的收敛情况，从而拓展到关于函数的性质。需要注意的是极限涉及到 norm 的配备，而序列的选取也非一定为数，只要选取一个配备好符合定义的 norm 的空间，我们可以在该空间刻画一样的序列结构。在 complément de mathématiques 的课程中我们主要刻画的是 $\mathbb{R}$ 上的函数空间，定义 $F_D := \{f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ 为定义域为 D 的所有实数域上的函数的集合，我们配备以下的代数结构：

- 加法：$\forall f, g \in F_D, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- 乘法：$\forall f, g \in F_D, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$

对这样一个空间我们给出几种常见的 norm：

- L^p norm: $\|f\|_p = (\int_D |f|^{1/p} dx)^p$, 这里常常要进一步限制 F_D 为一个定义域上可积的空间
- L^∞ norm: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$

4.1 Suite de Foncion

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'application dans F_D, on definit:

- Converge Simplement (CVS)
  Il existe une fonction $f \in F_D$ t.q. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$

$$\forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad n > n_0 \Rightarrow |f_n - f| < \epsilon$$

- Converge Uniformément (CVU)
  $(f_n)_n$ CVS vers f et

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad n > n_0 \Rightarrow |f_n - f| < \epsilon \quad \text{pour} \quad \forall x \in D$$

根据一致收敛的定义可以给出一个判别条件：

$$CVU \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

粗略地说，一致收敛等价于依 L^∞ 范数收敛 [Rudin, 7.14 定义以及 7.9 定理]。因此在我们研究一致收敛的性质等价于在研究一个配备了 L^∞ 范数的度量空间中序列收敛所具有的性质。对于一致收敛我们还有如下一个等价命题

Proposition 4.1 (critère de Cauchy uniforme)**.** *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D vers $\mathbb{K}$ converge uniformément sur $A \subseteq D$ si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme suivant sur A:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in A, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

$$CVU \Leftrightarrow \textit{Cauchy Sequence}$$

一个度量空间被称为完备的若其中所有的 Cauchy 序列都是收敛的，因此该收敛准则揭示了 $(F_D, \|\cdot\|_\infty)$ 构成一个完备度量空间，这同时也说明了另外一个问题：单单去定义逐点收敛（CVS）是不够的，因为其无法赋予度量（$|\cdot| : F_D \to F_D$ 而非打到正数上，并没有赋予距离函数）而构成一个度量空间，而序列的诸多性质是建立在度量空间之上的。

一致连续相较于逐点连续具有更好的极限计算性质，主要体现在三个方面：极限的可交换性以及收敛函数的连续性，收敛函数的可微性，收敛函数的可积性和 Lp 收敛。

Theorem 4.1 (Interversion de Limite)**.** *Soit $(f_n)_n$ est une suite de fonction de A vers K, et a un point accumulation à A (limit point), alors on a*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

该定理给出了一致收敛函数列的基本性质：交换极限。这保证了函数能够进行很多方便的操作，在物理中经常需要去交换极限来去计算特定的积分或者导数，这里给出了这些操作理论基础。利用该性质我们可以去考察一致收敛下收敛函数的性质：

Theorem 4.2 (caractérisation de CVU)**.**

- *Continuity*

$$\left.\begin{array}{r} (f_n)_n \ \textit{CVU vers} \ f \\ f_n \ \textit{est continue} \end{array}\right\} \Rightarrow f \ \textit{est continue}$$

- *Intégrabilité*

$$\left.\begin{array}{r} (f_n)_n \ \textit{CVU vers} \ f \\ f_n \ \textit{est (Riemann) intégrable} \end{array}\right\} \Rightarrow f \ \textit{est (Riemann) intégrable}$$

et on a $\int_D f dx = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n dx$

- *Différentiabilité*

$$\left.\begin{array}{r} (f_n^{(p)})_n \text{ CVU vers } f^{(p)} \\ f_n \in C^p(D) \\ (f_n)_n, ..., (f^{(p-1)})_n \text{ CVS vers } f \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f \in C^p(D) \\ (f_n)_n \text{ CVU vers } f \end{cases}$$

et on a $f^{(p)} = \lim_{n\to\infty} f_n^{(p)}$

另外，对于函数列的积分收敛形式有一个更一般形式的判定定理（控制收敛定理）：

Theorem 4.3 (theoreme de convergence dominée)**.**

$$\left.\begin{array}{r} (f_n)_n \text{ CVS vers } f \\ f_n \text{ est (Riemann) intégrable} \\ \exists g \text{ fonction (Riemann) intégrable t.q.} |f_n| \leq g \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ est (Riemann) intégrable}$$

et on a $\int_D f dx = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n dx$*. De plus,* $\lim_{n\to\infty} \int_D |f_n - f| dx$*=0.*

我们弱化 CVU 下的有关条件仍然可以去得到积分下的交换极限的运算性质，并且可以得到在 L1 范数下

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$

即函数列 f_n 在 L1 范数下收敛至 f。

4.2 Série de Fonction

自然的，类比级数理论我们可以将函数列发展到函数级数。函数级数在分析中具有重要的意义，函数和其对应的级数之间的互相转化方便我们去计算以及性质研究。首先我们给出对应级数的定义

Definition. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonction de* D *vers* $\mathbb{K}$*, on definit la suite de fontction par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

alors on dit que la serie de fonction $\sum f_n$ *CVU(CVS) si la suite de la fonction* S_n *CVU(CVS). De* *plus, on definit le reste d'ordre n de la serie par*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$$

donc si $S(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} S_n(x)$, *on a* $S(x) = R_n(x) + S_n(x)$

根据余项的定义，我们可以得到函数级数一致收敛的等级命题关系：

$$\sum f_n \text{ CVU} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum f_n \text{ CVS} \\ R_n \text{ CVU vers nulle fonction} \end{cases}$$

另外判断级数收敛的另一个办法是利用无穷范数。我们注意到级数是多个函数的累和，而级数中绝对收敛蕴含收敛，从而我们可以对级数的上界进行估计，从而有以下收敛判断方法：

Proposition 4.2 (Convergence Normale)**.** *On definit que la série de fonction* $\sum f_n$ *converge normalement (CVU) sur D si*

$$\sum_n \|f_n\|_\infty = \sum_n \sup_{x\in D} |f_n(x)| \quad \textit{converge}$$

alors on a

$$CVN \Rightarrow CVU$$

该方法实质是计算出函数列的上界从而将函数级数转化为一个一般的级数，从而使得不依赖于变量的选取，若上界是收敛的，则函数级数也一定收敛，且为一致收敛。实质上，从无穷范数的角度，该命题蕴含于不等式：

$$\|\sum_n f_n\|_\infty \leq \sum_n \|f_n\|_\infty$$

对于函数级数，其一致收敛对应的性质可以从函数列理论中推广而来，我们对此做出总结

Theorem 4.4 (caractérisation de CVU dans série de fonction)**.**

- *Continuity*

$$\left.\begin{array}{r} \sum_n f_n \ \textit{CVU vers } S \\ f_n \ \textit{est continue} \end{array}\right\} \Rightarrow S \ \textit{est continue}$$

- *Intégrabilité*

$$\left.\begin{array}{r}\sum_n f_n \ CVU \ vers \ S \\ f_n \ est \ (Riemann) \ intégrable\end{array}\right\} \Rightarrow S \ est \ (Riemann) \ intégrable$$

et on a $\sum_n^\infty (\int_D f_n dx) = \int_D (\sum_n^\infty f_n dx)$

- *Différentiabilité*

$$\left.\begin{array}{r}\sum_n f_n^{(p)} \ CVU \\ f_n \in C^p(D) \\ \sum_n f_n, ..., \sum_n f^{(p-1)} \ CVS\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\sum_n f_n \ CVU \ vers \ S \\ S = \sum_n f_n \in C^p(D)\end{cases}$$

et on a $S^{(p)} = \sum_n^\infty f_n^{(p)}$

另外控制收敛法同样可以推广至函数级数版本，给出一个绝对收敛条件下的积分收敛定理

Theorem 4.5 (theoreme d'intégration terme à terme, admis)**.**

$$\left.\begin{array}{r}\sum_n f_n \ CVS \ vers \ S \\ f_n \ est \ (Riemann) \ intégrable \\ \sum_n \int_D |f_n(x)| dx \ converge\end{array}\right\} \Rightarrow S \ est \ (Riemann) \ intégrable$$

et on a $\sum_n^\infty (\int_D f_n dx) = \int_D (\sum_n^\infty f_n dx)$.

另外级数理论中还有关于交错级数的判断方法，同样我们给出判定定理

Theorem 4.6 (critère de convergence uniforme pour les série alternées)**.**

$$\left.\begin{array}{r}\sum_n f_n \ est \ CSSA \ \text{（交错级数）} \\ f_n)_n \ converge \ vers \ la \ fonction \ nulle\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_n f_n CVU$$

4.3 Séries entière

在介绍完基础的函数列理论后我们关注一种特别的函数级数：幂级数。它在函数解析中有着重要的角色。幂级数的一般形式为

$$\sum_n a_n (z - z_0)^n$$

我们将其收敛区域称为 domaine de convergence，其与收敛半径有紧密的联系

Definition. *on definit rayon de convergence de la série entière* $\sum_n a_n z^n$ *par*

$$R = \sup\{r \geq 0\ (a_n r^n)_n \textit{ est borné }\} \cup \{+\infty\}$$

根据该原始定义，等价地我们可以证明

$$R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}$$

对于收敛半径的计算，我们可以利用级数中的根式判别和比较判别，此外对于两个幂级数，我们也可以根据各自的收敛半径判断他们生成的新幂级数的收敛半径，我们将其总结为以下命题

Proposition 4.3 (Calcul du rayon de convergence)**.**

- *règle de Cauchy et D'Alembert*
  soit R *est le rayon de convergence de série entière* $\sum_n a_n z^n$*, on a*

$$1/R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

- *somme de deux série entière*
  soient R_a *et* R_b *les rayon de convergence de* $\sum_n a_n z^n$ *et* $\sum_n b_n z^n$*, on pose* R *est le rayon de convergence de* $\sum_n (a_n + b_n) z^n$*, alors on a*

$$\begin{cases} R \geq \min(R_a, R_b) & \textit{si } R_a = R_b \\ R = \min(R_a, R_b) & \textit{si } R_a \neq R_b \end{cases}$$

- *produit de deux série entière*
  soient R_a *et* R_b *les rayon de convergence de* $\sum_n a_n z^n$ *et* $\sum_n b_n z^n$*, on pose* R *est le rayon de convergence de* $\sum_n c_n z^n$ *avec* $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$*, alors on a*

$$R \geq \min(R_a, R_b)$$

- *Comparaison du rayon de convergence*

$$a_n \leq C b_n \Rightarrow R_a \geq R_b$$
$$a_n \sim_{n\to\infty} b_n \Rightarrow R_a = R_b$$

- $\sum_n n^\alpha a_n z^n$

il a le même rayon de convergence avec $\sum_n a_n z^n$

幂级数的一个很好的特性在于一致收敛，收敛半径对应的圆盘内部级数 CVN 或者 CVU，圆盘边界的收敛情况需要另外讨论，圆盘外的点级数发散。因此自然地，幂级数收敛的函数在圆盘内部是连续的，若级数在边界处也收敛，那么对应的收敛函数在边界处也连续（Abel 定理）。此外，应用级数的积分与微分性质可以像此前一样总结出对应的性质，我们假设幂级数 $\sum_n a_n z^n$ 的收敛半径为正实数 R，从而有积分性质：

$$\int_{-R}^{R}(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(\int_{-R}^{R} a_n x^n dx)$$

假设幂级数收敛到函数 $S(x)$, 一个常用于积分计算的推论是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(x)dt$$

同样，我们观察到 $x \mapsto x^n$ 是一个无线可微的函数（C^∞），从而根据级数的微分性质我们可以得到

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+p)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$$

从而我们可以得到幂级数的系数与其导数的关系如下

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

幂级数与实函数的一个重要联系是实解析，我们给出定义

Definition (Fonctions développable en séries entières 实解析函数)**.** *Soit* U *un ouvert et* $f : U \to \mathbb{C}$, *on dit que* f *est développable en séries entières en* $z_0 \in U$ *si il exist une série entière* $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ *avec le rayon de convergence* $R > 0$ *t.q.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{pour } \forall z \in D(z_0, r) \subset D(z_0, R)$$

on appelle $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ *le développement en série entière de* f *en 0.*

粗略地说，在某一点实解析就是局部存在一个可以收敛至该函数的幂级数，自然地我们想到 Taylor 级数，对于一个无线可微的函数 f 根据 Taylor 展开定理在定义域内一点 z_0 展开可以得到级数

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n$$

但是需要注意实解析性质（实解析函数）与无限可微性质（泰勒级数）有以下命题关系：

$$\text{实解析} \underset{\Leftarrow + \text{有界}}{\Longrightarrow} \text{无线可微}$$

5 Intégrales à paramètre

函数理论中有一类重要的函数是积分函数，而一些特殊的函数往往对应一个积分变换，例如

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad \text{Fourier transform}$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt \qquad \text{Laplace transform}$$

一般地，一个积分函数具有可表述为以下形式

$$F : A \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto \int_I f(t,x)dt$$

我们给出定理以总结积分函数的函数性质

Theorem 5.1. *Soient fonction $t \mapsto f(t,x)$est integrable sur $I \subset R$, on definit $F(x) = \int_I f(t,x)dt$.*

- *Conituity*

$$\left.\begin{array}{r} x \mapsto f(t,x) \;\; est\ continue\ sur\ A \\ \exists\ integrable\ fonction\ \phi : I \to \mathbb{R}^+, \quad |f(t,x)| \leq \phi(t) \end{array}\right\} \Rightarrow F \;\; est\ continue\ sur\ A$$

- *Dérivabilité*

$$\left.\begin{array}{r} x \mapsto f(t,x) \in C^1(A) \\ \exists\ integrable\ fonction\ \phi : I \to \mathbb{R}^+, \quad |\frac{\partial f]}{\partial x}(t,x)| \leq \phi(t) \\ t \mapsto \frac{\partial f]}{\partial x}(t,x) \;\; est\ integrable\ sur\ I \end{array}\right\} \Rightarrow F \in C^1(A)$$

et on a $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt$

其中 C1 类函数既可弱化为可导条件，亦可推广至 Ck 类函数。