Integracion_Sipson

May 13, 2022

[149]:

```julia
using Plots
using LaTeXStrings
```

0.1 Integración: Regla de Simpson

La regla de Simpson es una regla que usa 3 puntos equiespaciados para aproximar la integral de una función:

$$I_S(f)[a,b] = [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]\frac{b-a}{6}$$

Dicha regla de aproximación se puede obtener integrando el polinomio interpolante basado en los tres puntos: $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$

Recordemos las otras dos reglas que vimos:

Trapecio:

$$I_T(f)[a,b] = [f(a) + f(b)]\frac{b-a}{2}$$

Punto medio:

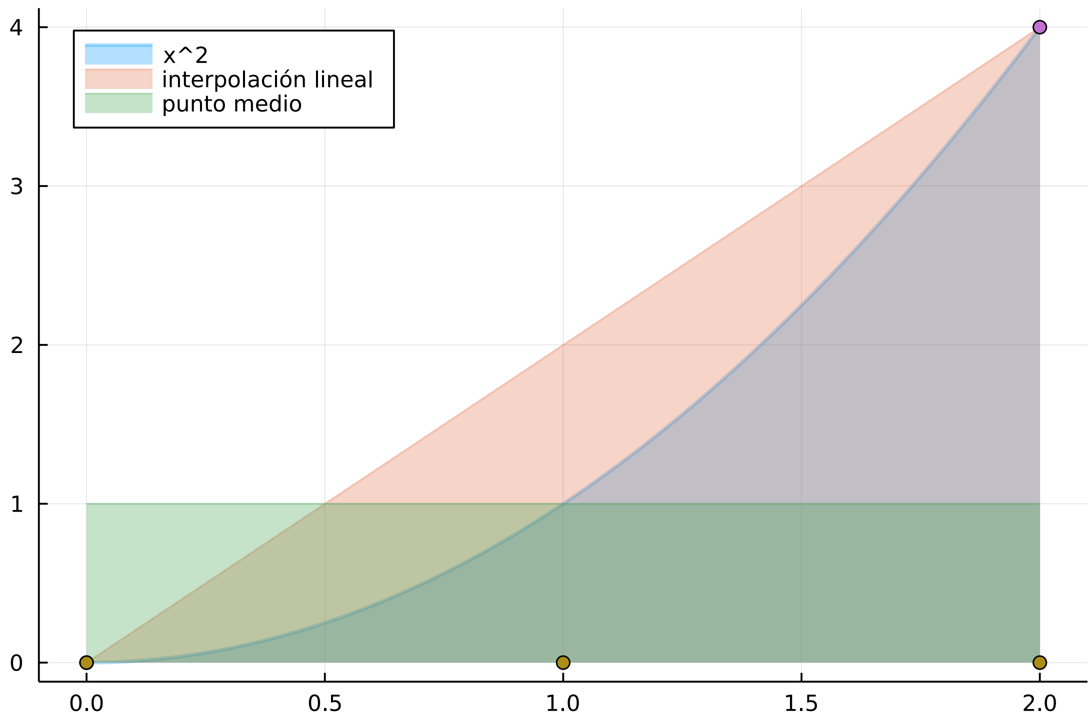
$$I_{PM}(f)[a,b] = [f(\frac{a+b}{2})](b-a)$$

Ambas tenían un error que dependia de la derivada segunda de f, o sea que eran exactas para funciones lineales.

[150]:

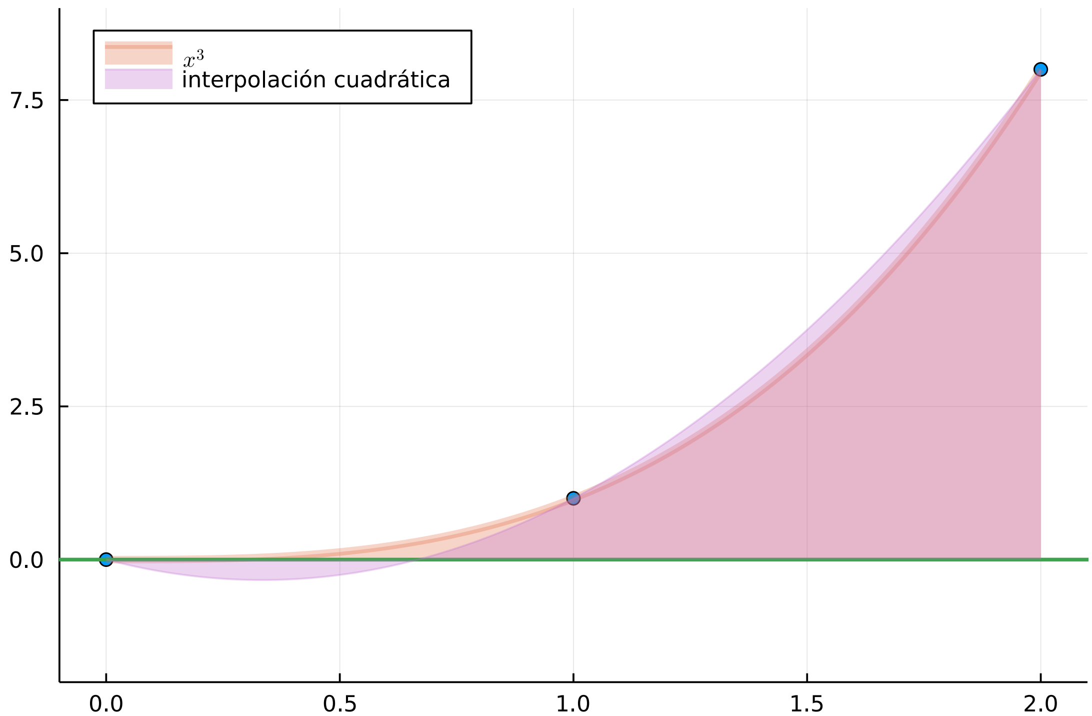
```julia
h(x) = x^2
x = [0:0.01:2]
plot(xlim=(-0.1,2.1))
plot!(x,h,label="x^2", lw= 2, legend=:topleft,fillrange = 0, alpha=0.3)
plot!([0;2],[h(0);h(2)],label="interpolación lineal",fillrange = 0, alpha=0.3)
plot!([0;2],[h(1);h(1)], label="punto medio",fillrange = 0, alpha=0.3)
scatter!([0;2],[h(0); h(2)], ms=4, label="")
scatter!([0;1;2],[0; 0; 0], ms=4, label="")
```

[150]:



[160]:
```
l(x) = x^3
plot(xlim=(-0.1,2.1), ylim=(-2,9), legend=:topleft)
scatter!([0;1;2],[h(0); l(1); l(2)], ms=4, label="")
plot!(x,l, lw=4, label=L"x^3",fillrange = 0, alpha=0.3)
#plot!([0; 2], [l(0);l(2)], label="interpolación lineal",fillrange = 0, alpha=0.
↪3)
#plot!([0;2],[l(1);l(1)], label="punto medio",fillrange = 0, alpha=0.3)
hline!([0], label="", lw=2)
L(x) = l(0)*(x-1)*(x-2)/2 + l(1)*x*(x-2)/(-1) + l(2)*x*(x-1)/2
plot!(x,L, label="interpolación cuadrática",fillrange = 0, alpha=0.3)
```

[160]:



La regla de Simpson, al tener 3 puntos, y haberse obtenido integrando el polinomio interpolante de 3 puntos, es exacta para polinomios de grado 2. Recordemos que el polinomio interpolante de 3 puntos en una cuadrática y por lo tanto el polinomio interpolante de una cuadrática coincide exáctamente con la misma.

O sea, si $P_2(x)$ es cualquier cuadrática, $P_2(x) = Int_3(P_2(x))$ y por lo tanto,

$$I_S(P_2(x))[a,b] = \int_a^b Int_3(P_2(x))\;dx = \int_a^b P_2(x)\;dx.$$

Por lo tanto su error debiera ser proporcional a la derivada tercera de f, f'''. Pero aquí se da un fenómeno similar al que vimos con las derivadas centradas y el error es aún más pequeño!.

Veamos:

Si tomamos una función constante, $f_0 = 1$ luego la regla nos da:

$$I_S(f_0)[a,b] = [f_0(a) + 4f_0(\frac{a+b}{2}) + f_0(b)]\frac{b-a}{6} = [1+4+1]\frac{b-a}{6} = (b-a) = \int_a^b 1\;dx$$

Veamos ahora con una lineal. A cualquir lineal $Ax+B$ la podemos escribir como

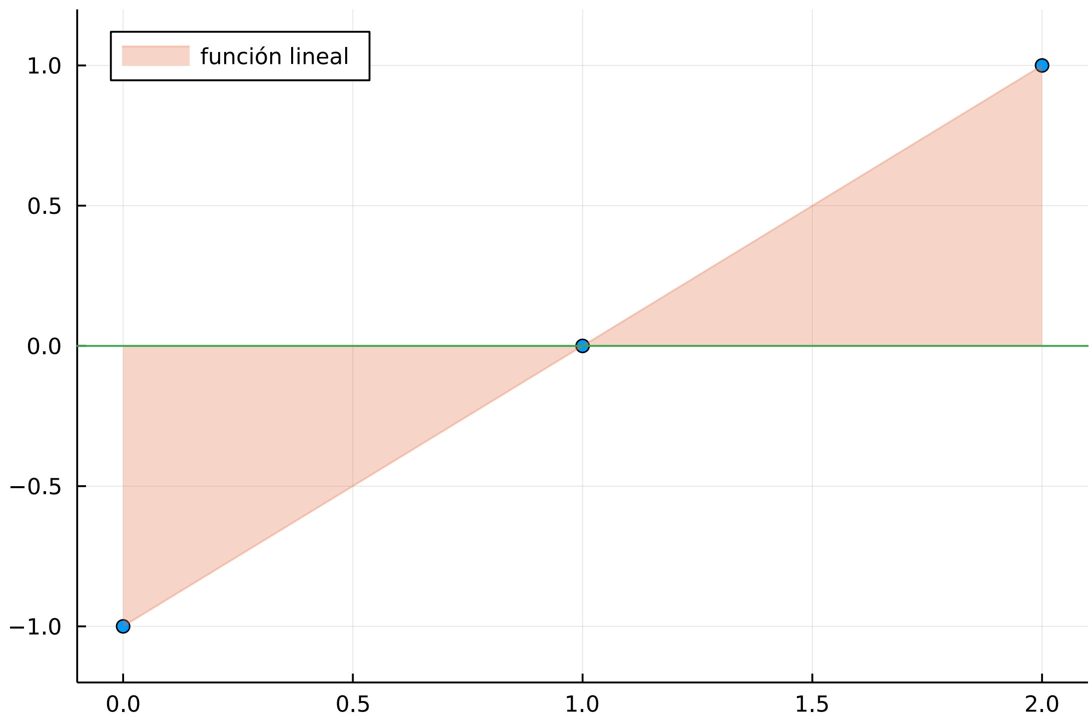
$$C(x - \frac{a+b}{2}) + D$$

Como ya sabemos que es exacta para las constantes (D) y que si multiplicamos una función por una constante esta sale fuera de la regla, basta con que probemos con la función:

$$f_1 = x - \frac{a+b}{2}$$

[142]:
```
a = 0
b = 2
f_1(x) = x - (a+b)/2
plot(xlim=(-0.1,2.1), ylim=(-1.2,1.2), legend=:topleft)
scatter!([a;(a+b)/2;b],[f_1(0); f_1(1); f_1(2)], ms=4, label="")
plot!(x,f_1,fillrange = 0, alpha=0.3, label="función lineal")
hline!([0],label="")
```

[142]:



Del gráfico se ve que la integral de esta función se anula! Por otro lado, como $f_1(a) = -f_1(b)$ y $f_1(\frac{a+b}{2}) = 0$ vemos que la regla de Simpson nos da también cero.

Pero también nos da cero para cualquier función que sea impar con respecto al punto medio!

Verifiquemos ahora que es exacta para polinomios de segundo orden. Basta considerar,

$$f_2(x) = (x - \frac{a+b}{2})^2$$

En efecto, la regla de Simpson nos da:

$$I_S(f_2)[a,b] = [f_2(a) + 4f_2(\frac{a+b}{2}) + f_2(b)]\frac{b-a}{6} = [(\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{-a+b}{2})^2]\frac{b-a}{6} = \frac{(b-a)^3}{12}$$

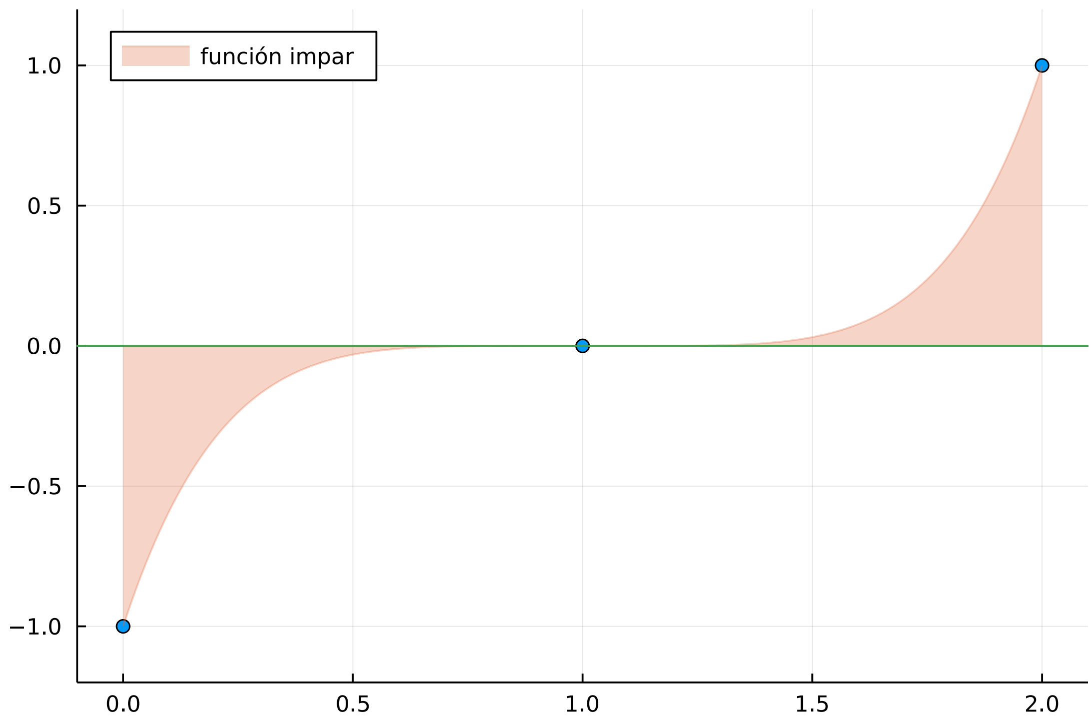
Por otro lado:

$$\int_a^b f_2(x)\;dx = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2\;dx = \frac{1}{3}(x - \frac{a+b}{2})^3|_a^b = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

Como es exacta para polinomios de segundo orden y es exacta para polinomios impares (en $\frac{a+b}{2}$) también es exacta para todo polinomio de tercer orden!

[144]:
```
ll(x) = (x-1)^3*(x-1)^2
plot(xlim=(-0.1,2.1), ylim=(-1.2,1.2), legend=:topleft)
scatter!([a;(a+b)/2;b],[ll(0); ll(1); ll(2)], ms=4, label="")
plot!(x,ll,fillrange = 0, alpha=0.3, label="función impar")
hline!([0],label="")
```

[144]:



Cálculo del error de la regla de Simpson Cómo dependerá de la derivada 4ta de la función (que supondremos con derivada cuarta continua) el error tendrá la forma:

$$Error_S(f) = C|f^{iv}(\zeta)|(b-a)^5$$

Donde C es una constante numérica. Lo encontraremos entonces será el valor numérico de dicha constante. Lo haremos expandiendo f en serie de Taylor.

Para escribir menos usaremos $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y expandiremos a f en serie de Taylor con respecto al punto medio:

$$f(x) = f(x_1) + f^{'}(x_1)(x-x_1) + \frac{f^{''}(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f^{'''}(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{iv}(\zeta(x))}{24}(x-x_1)^4$$

Ya tenemos las primeras 4 integrales, las de una constante, una función lineal impar, una cuadrática, una cúbica impar, solo resta la última!

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(x_1)(b-a) + \frac{f^{''}(x_1)}{2}\frac{1}{12}(b-a)^3 + \int_a^b \frac{f^{iv}(\zeta(x))}{24}(x-x_1)^4\ dx$$

Recordamos ahora la aproximación a la derivada segunda con diferencias finitas centradas:

$$f^{''}(x_1) = \frac{f(x_0)+f(x_2)-2f(x_1)}{(\frac{b-a}{2})^2} + \frac{f^{iv}(\bar{\zeta}(x))}{12}(\frac{b-a}{2})^2$$

Substituyendo obtenemos:

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(x_1)(b-a) + \frac{1}{6}[f(x_0)+f(x_2)-2f(x_1)](b-a) + \frac{f^{iv}(\bar{\zeta}(x))}{1152}(b-a)^5 + \int_a^b \frac{f^{iv}(\zeta(x))}{24}(x-x_1)^4\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{6}[f(x_0)+f(x_2)+4f(x_1)](b-a) + \frac{f^{iv}(\bar{\zeta}(x))}{1152}(b-a)^5 + \int_a^b \frac{f^{iv}(\zeta(x))}{24}(x-x_1)^4\ dx$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = I_S(f)[a,b] + \frac{f^{iv}(\bar{\zeta}(x))}{1152}(b-a)^5 + \int_a^b \frac{f^{iv}(\zeta(x))}{24}(x-x_1)^4\ dx$$

$$C = \max_{\zeta\in[a,b]}\{|f^{iv}(\zeta)|\}$$

$$Error_S(f) \leq C\frac{(b-a)^5}{1152} + C\int_a^b \frac{1}{24}(x-x_1)^4\ dx$$

$$Error_S(f) \leq C\frac{(b-a)^5}{720} \quad \text{con un poco más de trabajo} \quad \leq C\frac{(b-a)^5}{2880}$$

Veamos:

Tomemos $a = 0$, $b = 1$, $f_4(x) = (x - 0.5)^4$. La derivada 4^{ta} es: $f^{iv}(x) = 24$

$$I_S(f_4)[0,1] = [\frac{-1}{2}^4 + \frac{1}{2}^4]\frac{1}{6} = \frac{1}{6*8} = \frac{1}{48}$$

$$\int_0^1 (x-0.5)^4 \, dx = \frac{1}{5}[(\frac{1}{2})^5 - (\frac{-1}{2})^5)] = \frac{1}{5*2^4} = \frac{1}{80}$$

[17]:
```
(1//48 - 1//80)
```

[17]: 1//120

El error es:

$$\frac{1}{120}$$

La estimación es:

$$\frac{24}{720} = \frac{1}{30} \qquad \frac{24}{2880} = \frac{1}{120}$$

[25]:
```
function I_S(f, a, b)
    return (f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)) * (b-a) / 6
end
```

[25]: I_S (generic function with 1 method)

[161]:
```
a = 0
b = 1
f_4(x) = (x - (a+b)/2)^4

I_S(f_4,a,b) - 1/48 #Diferencia con el cálculo manual
```

[161]: 0.0

[162]:
```
I_S(f_4,a,b) - 1/80 #Diferencia con el valor exacto, o sea el error
```

[162]: 0.008333333333333331

[101]:
```
function I_T(f,a,b)
    return (f(a)+f(b))*(b-a)/2
end
```

[101]: I_T (generic function with 1 method)

[163]:
```
I_T(f_4,a,b) - 1/80 #Error
```

[163]:
```
0.05
```

[103]:
```
function I_PM(f,a,b)
    return f((a+b)/2)*(b-a)
end
```

[103]:
```
I_PM (generic function with 1 method)
```

[104]:
```
I_PM(f_4,a,b) - 1/80 #Error
```

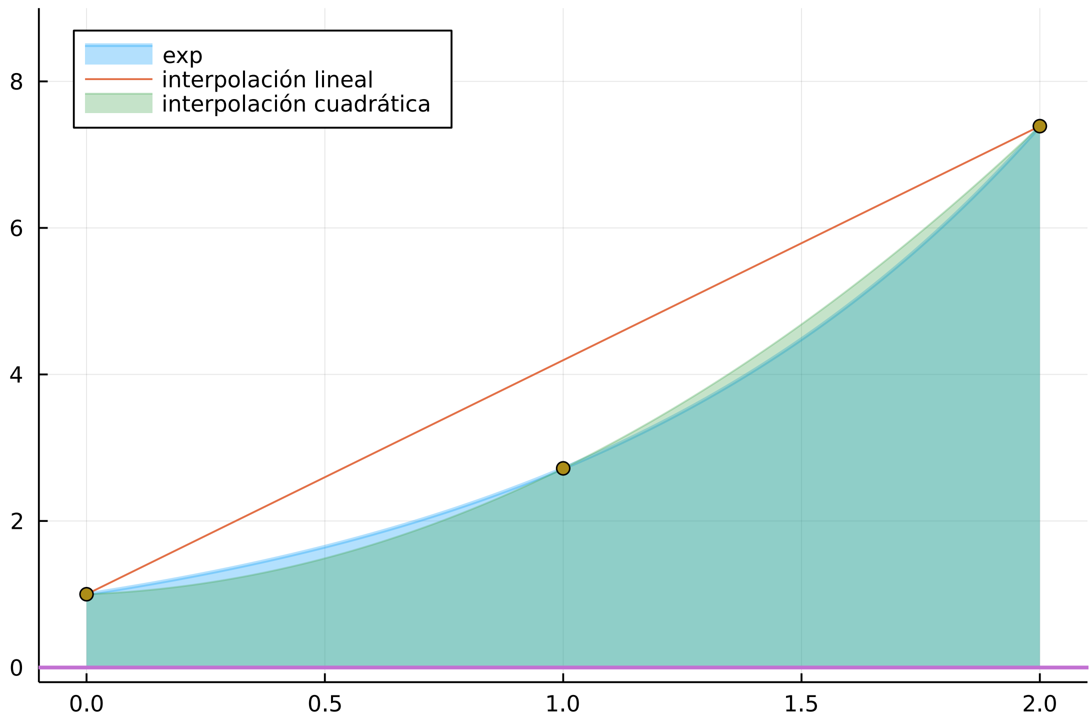
[104]:
```
-0.0125
```

Ejemplos:

$$I = \int_0^2 e^x \, dx = e^2 - e^0 = e^2 - 1 = 6.38905609893065$$

[166]:
```
a=0
b=2
plot(xlim=(-0.1,2.1), ylim=(-0.2,9), legend=:topleft)
plot!(x,exp, lw=2, label="exp",fillrange = 0, alpha=0.3)
plot!([0; 2], [exp(0);exp(2)], label="interpolación lineal")
#plot!([0;2],[exp(1);exp(1)], label="punto medio",fillrange = 0, alpha=0.3)
Lexp(x) = exp(0)*(x-1)*(x-2)/2 + exp(1)*x*(x-2)/(-1) + exp(2)*x*(x-1)/2
plot!(x,Lexp, label="interpolación cuadrática",fillrange = 0, alpha=0.3)
hline!([0], label="", lw=2)
scatter!([a;(a+b)/2;b],[exp(a); exp((a+b)/2); exp(b)], ms=4, label="")
```

[166]:



[167]:
```
I = exp(2) - 1
```

[167]: 6.38905609893065

[168]:
```
I_T(exp, 0, 2)
```

[168]: 8.38905609893065

[169]:
```
I_S(exp, 0, 2)
```

[169]: 6.42072780425561

[170]:
```
I_PM(exp, 0, 2)
```

[170]: 5.43656365691809

Error de Trapecio:

[39]:
```
I - I_T(exp, 0, 2)
```

[39]: -2.0

Error relativo:

[50]:
```
(I - I_T(exp, 0, 2))/I
```

[50]: -0.3130352854993313

Error del Punto Medio:

[67]:
```
I - I_PM(exp, 0, 2)
```

[67]: 0.9524924420125602

Error relativo:

[62]:
```
(I - I_PM(exp, 0, 2))/I
```

[62]: 0.14908187176067852

Error Simpson:

[54]:
```
I - I_S(exp, 0, 2)
```

[54]: -0.031671705324959554

Error relativo:

[51]:
```
(I - I_S(exp, 0, 2))/I
```

[51]: -0.004957180659324703

Recordemos las cotas:

$$Error_T = C_2 \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$Error_{MP} = C_2 \frac{(b-a)^3}{24}$$

$$C_2 = \max_{\zeta \in [a,b]} \{|f^{''}(\zeta)|\}$$

$$Error_S = C_4 \frac{(b-a)^5}{2880}$$

$$C_4 = \max_{\zeta \in [a,b]} \{|f^{iv}(\zeta)|\}$$

En este caso:

$$C_2 = C_4 = e^2 = 7.38905609893065$$

f	a	b	I	I_T	I_PM	I_S	E_T	I - I_T	E_PM	I - I_PM	E_S	I-I_S
exp	0	2	6.38	8.38	5.43	6.42	4.92	-2.00	2.46	0.952	0.082	-0.031

Ejemplo 2:

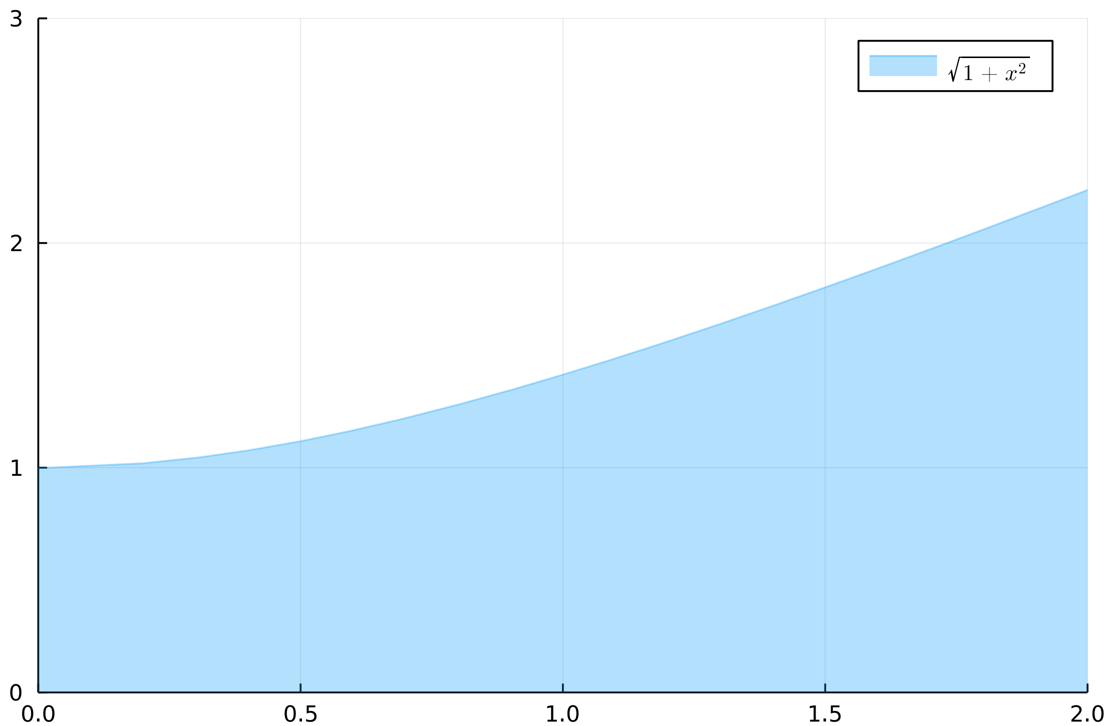
$$g(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$I_g = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx = \sqrt{5} + \frac{1}{2}sinh^{-1}(2) = 2.95789$$

[156]:

```
g(x) = sqrt(1+x^2)
plot(g, xlim=(0,2), ylim=(0,3), label=L"\sqrt{1+x^2}",fillrange = 0, alpha=0.3)
```

[156]:



[73]:

```
Ig = 2.95789
println("I = $(Ig)")
println("I_T = $(I_T(g,0,2))")
println("I_PM = $(I_PM(g,0,2))")
println("I_S = $(I_S(g,0,2))")
```

```
I = 2.95789
I_T = 3.23606797749979
I_PM = 2.8284271247461903
I_S = 2.96430740899739
```

[82]:
```
println("I_g - I_T = $(Ig - I_T(g,0,2))")
println("I_g - I_PM = $(Ig - I_PM(g,0,2))")
println("I_g - I_S = $(Ig - I_S(g,0,2))")
```

```
I_g - I_T = -0.2781779774997899
I_g - I_PM = 0.12946287525380962
I_g - I_S = -0.006417408997390073
```

Cotas del error

$$g^{'}(x) = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g^{''}(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$g^{'''}(x) = -3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

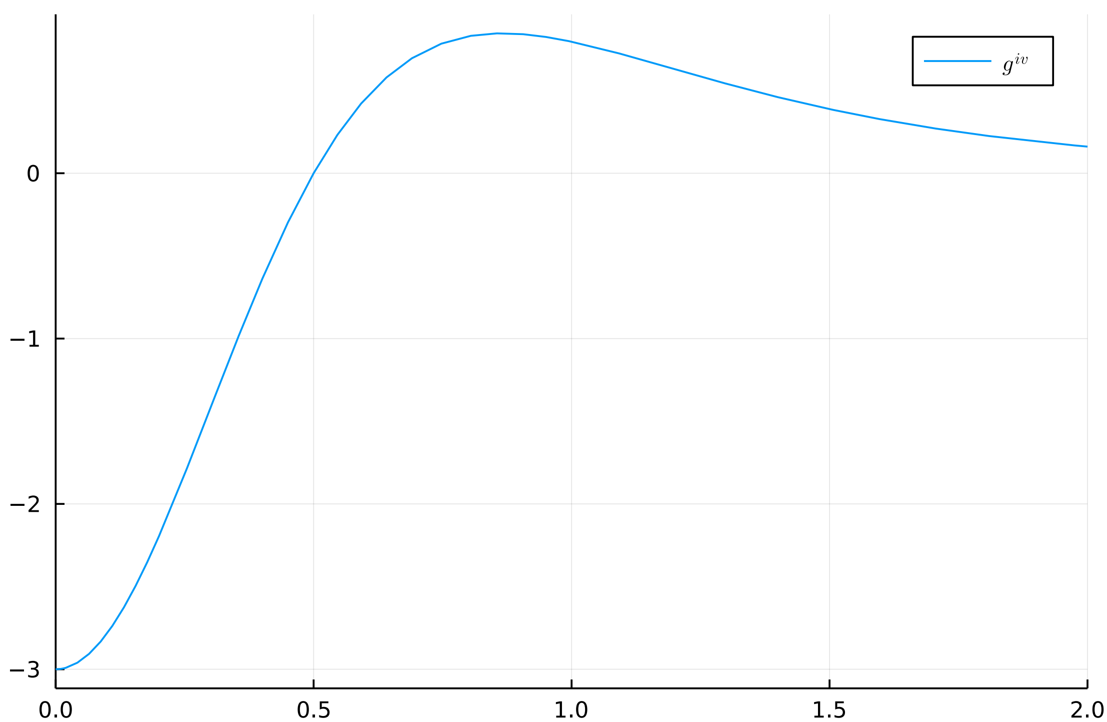
$$g^{iv}(x) = (12x^2-3)(1+x^2)^{-\frac{7}{2}}$$

$$g^{v}(x) = (45x-60x^3)(1+x^2)^{-\frac{9}{2}}$$

El máximo de $|g^{''}(x)|$ está en $x = 1$.

[157]:
```
g_4(x) = (12x^2 - 3)*(1+x^2)^(-7/2)
plot(g_4,xlim=(0,2),label=L"g^{iv}")
```

[157]:



El máximo del valor absoluto de g^{iv} está también en $x = 0$ y vale 3.

[121]:
```
println("E_T = $(1/12*2^3)")
println("E_PM = $(1/24*2^3)")
println("E_S = $(3/2880*2^5)")
```

```
E_T = 0.6666666666666666
E_PM = 0.3333333333333333
E_S = 0.03333333333333333
```

f	a	b	I	I_T	I_PM	I_S	E_T	I - I_T	E_PM	I - I_PM	E_S	I-I_S
e^x	0	2	6.38	8.38	5.43	6.42	4.92	-2.00	2.46	0.952	0.082	-0.031
sqrt(1 + x^2)	0	2	2.95	3.23	2.82	2.96	0.66	-0.28	0.33	0.13	0.03	-0.006

[ ]:
```

```

[ ]:
```

```