Integracion_divide_y_conquista

May 13, 2022

[43]:
```
using Plots
using LaTeXStrings
```

0.0.1 Integración: Divide y Conquista!

Reglas Compuestas. Cuando tenemos un intervalo de integración podemos dividir el mismo en intervalos menores y usar las reglas aprendidas (Punto Medio, Trapecio y Simpson) en cada una de ellas y sumar.

Consideremos un intervalo $[a, b]$ dividido en $N-1$ intervalos iguales de longitud $dx = (b-a)/(N-1)$, es decir donde los puntos de cada uno de ellos vienen dados por:

$$x_i = a + dx(i-1)$$

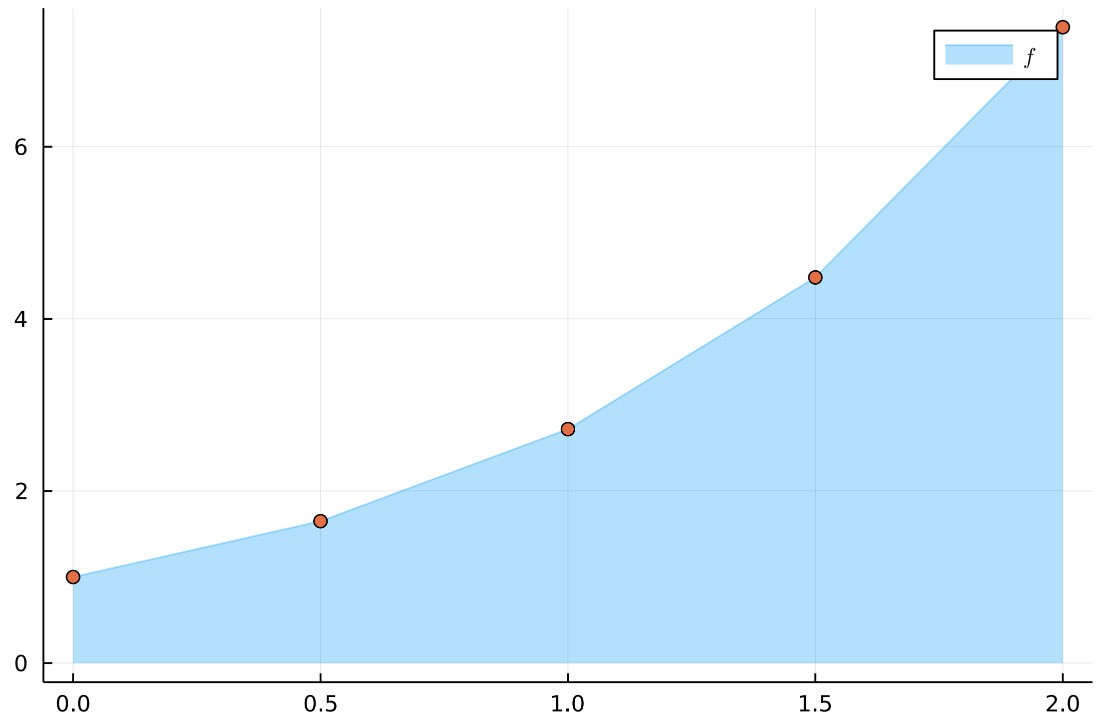
Supondremos que tenemos los valores de una función en dichos puntos, $y_i = f(x_i)$.

[44]:
```
a = 0
b = 2
N = 5
dx = (b-a)/(N-1)
x = [a + dx*(i-1) for i in 1:N]

f(x) = exp(x)

plot(x,f,label=L"f",fillrange = 0, alpha=0.3)
scatter!(x,f,ns=5, label="")
```

[44]:



La fórmula que me quedará será entonces:

$$I_T(f)[a,b]_5 = I_T(f)[a,a+dx]+I_T(f)[a+dx,a+2dx]+I_T(f)[a+2dx,a+3dx]+I_T(f)[a+3dx,a+b]$$

$$I_T(f)[a,b]_5 = [\frac{f(a)+f(a+dx)}{2}+\frac{f(a+dx)+f(a+2dx)}{2}+\frac{f(a+2dx)+f(a+3dx)}{2}+\frac{f(a+3dx)+f(b)}{2}]dx$$

$$I_T(f)[a,b]_5 = [\frac{1}{2}f(a)+f(a+dx)+f(a+2dx)+f(a+3dx)+\frac{f(b)}{2}]dx$$

En general tendremos:

$$I_T(f)[a,b]_N = [\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{i=2}^{N-1} f(a+dx*(i-1))]*dx$$

$$I_T(f)[a,b]_N = [\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{i=2}^{N-1} f(x_i)]*dx$$

Ejemplo:

$$I_e = \int_0^2 e^x \, dx = 6.38905609893065$$

$$I_T(e)[0,2]_5 = [(e^0 + e^2)/2 + e^{0.5} + e^1 + e^{1.5}]\frac{2}{4}$$

[37]:
```
println("I_T = [($(exp(0)) + $(exp(2)))/2 + $(exp(0.5)) + $(exp(1)) + $(exp(1.
 ↪5)))/2")
I_T = (((exp(0) + exp(2))/2 + (exp(0.5)) + (exp(1)) + (exp(1.5)))/2)
println("I_T = $(I_T)")
```

```
I_T = [(1.0 + 7.38905609893065)/2 + 1.6487212707001282 + 2.718281828459045 +
4.4816890703380645)/2
I_T = 6.521610109481282
```

[38]:
```
I_e = 6.38905609893065
I_e - I_T
```

[38]: -0.13255401055063132

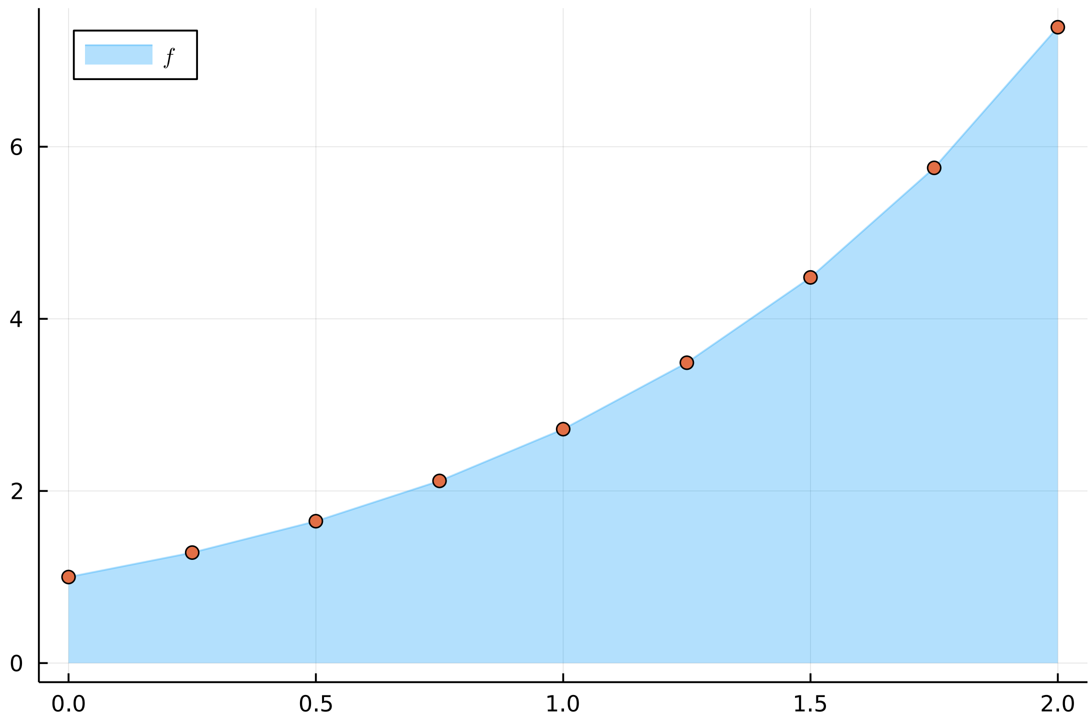
[46]:
```
N = 9
a = 0
b = 2
dx = (b-a)/(N-1)
x = [a + dx*(i-1) for i in 1:N]
y = exp.(x)

I_T_9 = (sum(y) - (y[1]+y[N])/2)*dx
```

[46]: 6.422297821432638

[48]:
```
plot(x,y,label=L"f",fillrange = 0, alpha=0.3, legend=:topleft)
scatter!(x,y,ns=5, label="")
```

[48]:



0.0.2 Estimación del error

Recordemos que el error de cada término era de:

$$Error_T(f)[x, x+dx] = C_2 \frac{dx^3}{12}$$

$$C_2 = \max_{\zeta \in [x, x+dx]} \{|f^{''}(\zeta)|\}$$

Como estaremos sumando $N-1$ términos, los errores se suman en valor absoluto para la cota y por ende tenemos:

$$Error_T(f)[a, b] = C_2 \frac{dx^3}{12}(N-1) = C_2 \frac{dx^2}{12}(b-a)$$

Donde ahora,

$$C_2 = \max_{\zeta \in [a, b]} \{|f^{''}(\zeta)|\}$$

El error decrece cuadráticamente con dx o sea con $\frac{1}{N-1}$

0.0.3 Regla de Simpson

En la regla de Simpson tendremos igualmente (tomando de a dos puntos):

$$I_S(f)[a,b]_5 = I_S(f)[a,a+2dx] + I_S(f)[a+2dx,b]$$

$$I_S(f)[a,b]_5 = [(f(a) + f(a+2dx) + 4f(a+dx)]\frac{2dx}{6} + (f(a+2dx) + f(b) + 4f(a+3dx)]\frac{2dx}{6}$$

$$I_S(f)[a,b]_5 = [(f(a) + 4f(a+dx) + 2f(a+2dx) + 4f(a+3dx) + f(b)]\frac{dx}{3}$$

Ejemplo:

$$I_e = \int_0^2 e^x \; dx = 6.38905609893065$$

$$I_S(e)[0,2]_5 = [e^0 + e^2 + 4e^{0.5} + 2e^1 + 4e^{1.5}]\frac{0.5}{3}$$

[41]:
```
println("I_S = [$(exp(0)) + $(exp(2)) + $(4*exp(0.5)) + $(2*exp(1)) + $(4*exp(1.
 ↪5)))0.5/3")
I_S = (exp(0) + exp(2) + 4*exp(0.5) + 2*exp(1) + 4*exp(1.5))/6
println("I_S = $(I_S)")
```

```
I_S = [1.0 + 7.38905609893065 + 6.594885082800513 + 5.43656365691809 +
17.926756281352258)0.5/3
I_S = 6.391210186666918
```

[42]:
```
I_e = 6.38905609893065
I_e - I_S
```

[42]: `-0.0021540877362680177`

Con $N=3$ teníamos -0.031.

Notemos que necesitamos un numero impar de puntos

La expresión para un número de puntos arbitrarios $\{x_i\}$ $\; i = 1 \ldots N$, es

$$I_S^N(f)[a,b] = [f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} f(x_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{N-3}{2}} f(x_{2i+1})]\frac{dx}{3} \qquad dx = \frac{b-a}{N-1}$$

Recordando que si nos dan in conjunto de valores $\{y_i\}$ $\; i = 1 \ldots N$ debemos subsituir $f(x_i) \to y_i$.

El error total de la integración será entonces la suma de los errores de cada tramo de integración y por lo tanto vendrá dado por (recordando que usamos 2 intervalos por cada aplicación, o sea tenemos $(N-1)/2$ aplicaciones):

$$Error_S^N(f)[a,b] = \frac{N-1}{2} Error_S(f)[x, x{+}2dx] = \frac{N-1}{2} C_4 \frac{(2dx)^5}{2880} = C_4 \frac{(2dx)^4}{2880}(b{-}a) = C_4 \frac{dx^4}{180}(b{-}a)$$

Donde,

$$C_4 = \max_{\zeta\in[a,b]} \{|f^{iv}(\zeta)|\}.$$

Vemos entonces que el error disminuye orden dx^4, lo cual hace que este método sea muy útil y económico.

```
[ ]:
```