Punto_Fijo

April 19, 2022

0.1 Punto Fijo

Una propiedad importante de algunas funciones (o aplicaciones en general) que van de un espacio en sí mismo es la de poseer (o no) puntos fijos.

Definición: Sea $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$ diremos que x es punto fijo de f si $f(x) = x$.

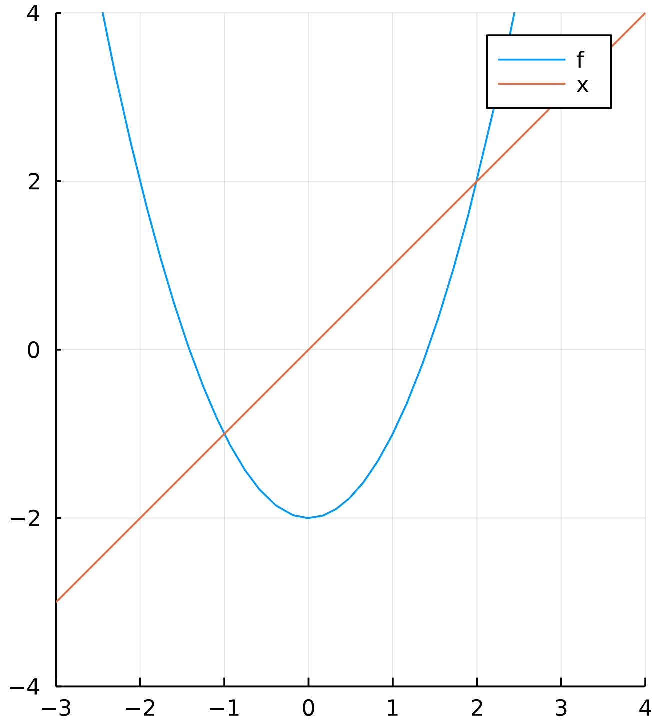
Ejemplos:

1. La función $f(x) : [0, 5] \rightarrow R$ definida por $f(x) = 6 + x^2$ no tiene ningún punto fijo.
2. La función $f(x) = x$ tiene infinitos puntos fijos.
3. La función $f(x) = x^2 - 2$ tiene dos puntos fijos.

[2]:
```
using Plots, LaTeXStrings
```

[3]:
```
f(x) = x^2 - 2
l(x) = x
plot(f, xlim=(-3,4), ylim=(-4,4),aspectratio=1, label="f")
plot!(l, label="x")
```

[3]:



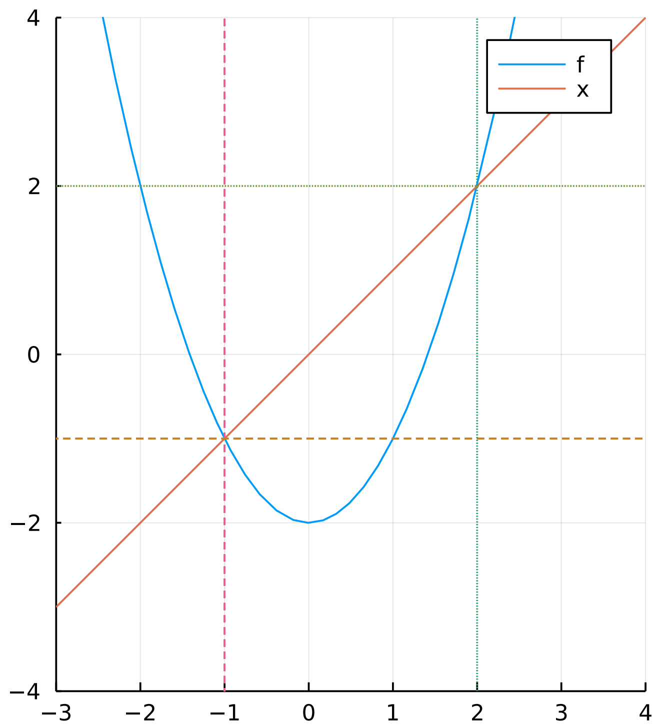
Si x es tal que $f(x) = x$ entonces $f(x) - x = 0 = x^2 - 2 - x$

Como es un polinomio cuadrático sus raices serán:

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = (-1, 2)$$

[5]:
```
vline!([-1], ls=:dash, label=false)
hline!([-1], ls=:dash, label=false)
vline!([2], ls=:dot, label=false)
hline!([2], ls=:dot, label=false)
```

[5]:



Pregunta: Cuál es el número máximo de raices que un polinomio (distinto de x) puede tener?

Ejemplo de uso: Supongamos que queremos encontrar una raíz de $f(x)$. Podemos mirar el problema:

Encuentre el punto fijo de $g(x) = f(x) + x$, ya que:

$$g(x) = x \Rightarrow 0 = g(x) - x = f(x) + x - x = f(x)$$

0.2 Teorema:

0.2.1 (hay muchos otros teoremas de punto fijo, entre ellos el de Banach, el de Brouwer y el de Schauder)

Sea $f : [a, b] \subset R \rightarrow R$ una función *contínua* tal que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Luego:

1. f tiene al menos un punto fijo.
2. Si f es diferenciable y $|f'(x)| < 1$ entonces el punto fijo es único.

0.2.2 Prueba:

1. Si \$f(a) = a \$ o $f(b) = b$ entonces la parte 1. del teorema está probada.

Supongamos que no. En ese caso sea

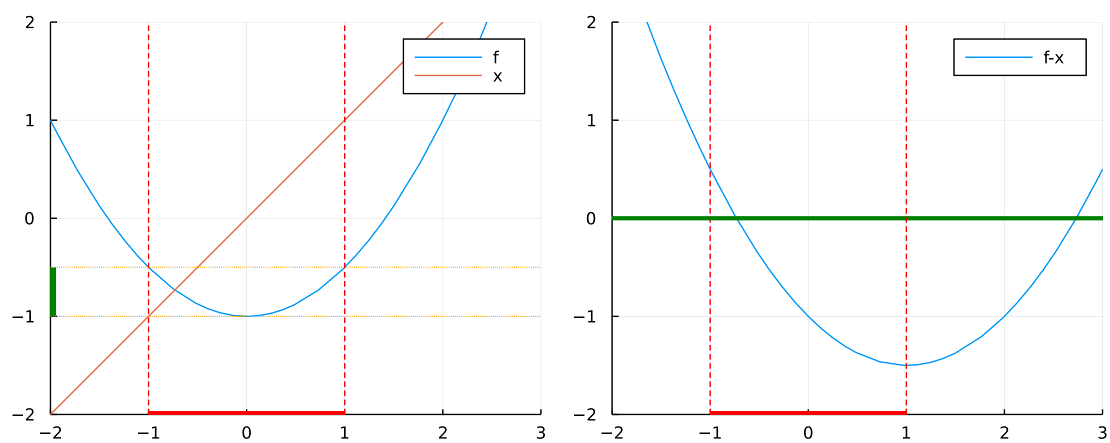
$$h(x) := f(x) - x$$

Tenemos entonces que $h(a) = f(a) - a > 0$ y $h(b) - b < 0$.

Como h es contínua deberá pasar por cero, es decir, deberá existir $x \in (a, b)$ tal que $h(x) = 0$ y por lo tanto $f(x) = x$.

[7]:
```
ff(x) = 0.5*x^2 - 1
plot(layout=(1,2), size=(800,400))
plot!(subplot=1,ff, xlim=(-2,3), ylim=(-2,2),aspectratio=1, label="f")
plot!(subplot=1,l, label="x")
plot!(subplot=1,[-1, 1],[-2,-2], lw = 5, c=:red, label="")
plot!(subplot=1,[-2, -2],[-1,-0.5], lw = 8, c=:green, label="")
vline!(subplot=1,[-1], ls=:dash, c=:red, label=false)
hline!(subplot=1,[-1], ls=:dot, c=:orange, label=false)
vline!(subplot=1,[1], ls=:dash, c=:red, label=false)
hline!(subplot=1,[-0.5], ls=:dot, c=:orange, label=false)
plot!(subplot=2,x -> ff(x) - l(x), xlim=(-2,3), ylim=(-2,2),aspectratio=1,␣
 ↪label="f-x")
#hline!(subplot=2,[-2,0],label=false)
plot!(subplot=2,[-1, 1],[-2,-2], lw = 5, c=:red, label="")
#plot!(subplot=2,[-3, -3],[-1,-0.5], lw = 5, c=:green, label="")
vline!(subplot=2,[-1], ls=:dash, c=:red, label=false)
hline!(subplot=2,[0], c=:green, lw=3, label=false)
vline!(subplot=2,[1], ls=:dash, c=:red, label=false)
```

[7]:



0.2.3 Prueba (cont.):

2. Supongamos ahora que $|f'| < k < 1$ y que existen dos o más puntos fijos. Sean estos x_1 y x_2, con $x_1 < x_2$.

Cómo f es diferenciable tenemos debe existir $\zeta \in [x_1, x_2]$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\zeta)\ (x_2 - x_1)$$

Por lo tanto,

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\zeta)|\ |(x_2 - x_1)| \leq k\ |(x_2 - x_1)|$$

Pero por otro lado,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1$$

Y por lo tanto,

$$|x_2 - x_1| \leq k\ |(x_2 - x_1)|$$

Lo cual solo puede ser cierto se $x_1 = x_2$.

Nota

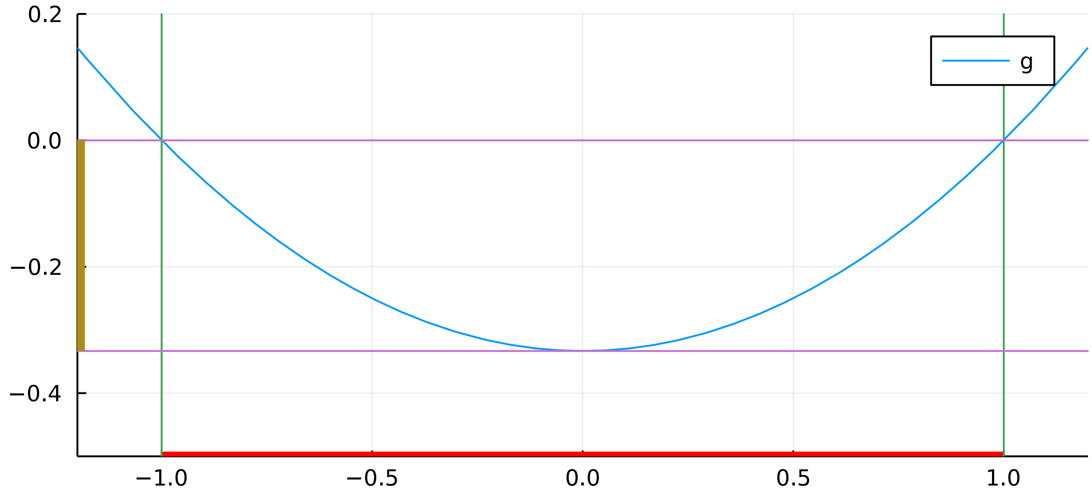
1. La existencia del punto fijo solo usa la continuidad de la función y la inclusión de la imagen en el rango. Estos son conceptos *topológicos*.
2. La unicidad usa la diferenciabilidad, que no es un concepto topológico.

0.2.4 Ejemplo:

Veamos que la función $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ tiene un único punto fijo en el intervalo $[-1, 1]$.

[9]:
```
g(x) = (x^2 -1)/3

plot(g, xlim=(-1.2,1.2), ylim=(-0.5,0.2), label="g", aspectratio=1.5)
plot!([-1,1],[-0.5,-0.5], label="", c=:red, lw=5)
vline!([-1,1], label="")
hline!([0,-1/3], label="")
plot!([-1.2,-1.2],[-1/3,0], label="", lw=8)
```

[9]:

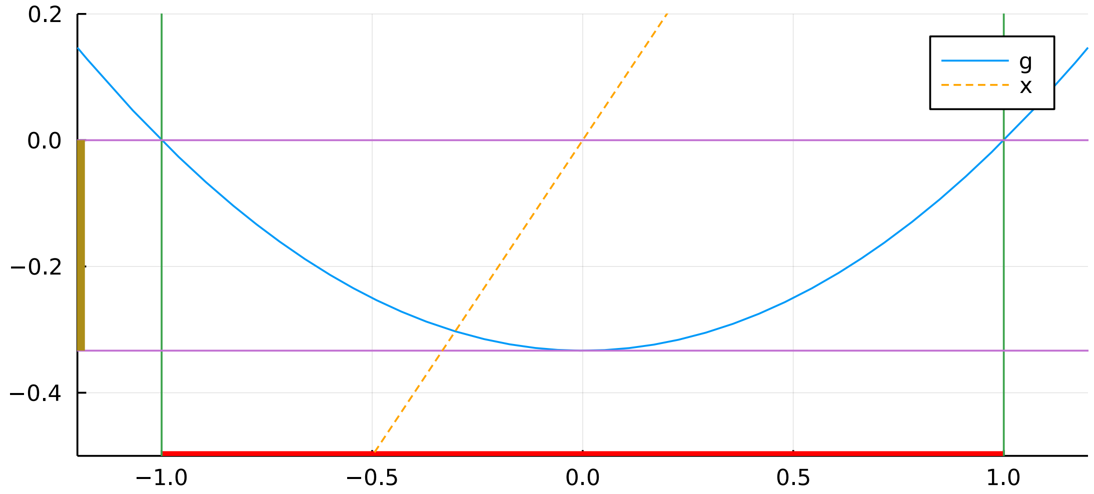


1. Vemos que en el intervalo g es no-positiva y $g(-1) = g(1) = 0$
2. La función tiene un mínimo en $x = 0$ $(g'(x) = \frac{2}{3}x)$ y allí $g(0) = \frac{-1}{3}$
3. Por lo tanto $g[-1,1] \subset [-1/3, 0] \Rightarrow$ tiene punto fijo.
4. $|g'(x)| = \frac{2}{3}|x| \leq \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ punto fijo único.

Tarea: Calcule el punto fijo.

[10]:
```
plot!(l, label="x", c=:orange, ls=:dash)
```

[10]:



0.3 Cómo calculamos los puntos fijos?

0.3.1 Iteraciones y convergencia:

Queremos encontrar una iteración de manera que la sucesión de puntos nos dé como límite el punto fijo de g, es decir x tal que $g(x) = x$.

Probamos con:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Note que si $\{x_n\} \to x$ luego $g(x_n) \to g(x)$ (por continuidad) y por lo tanto

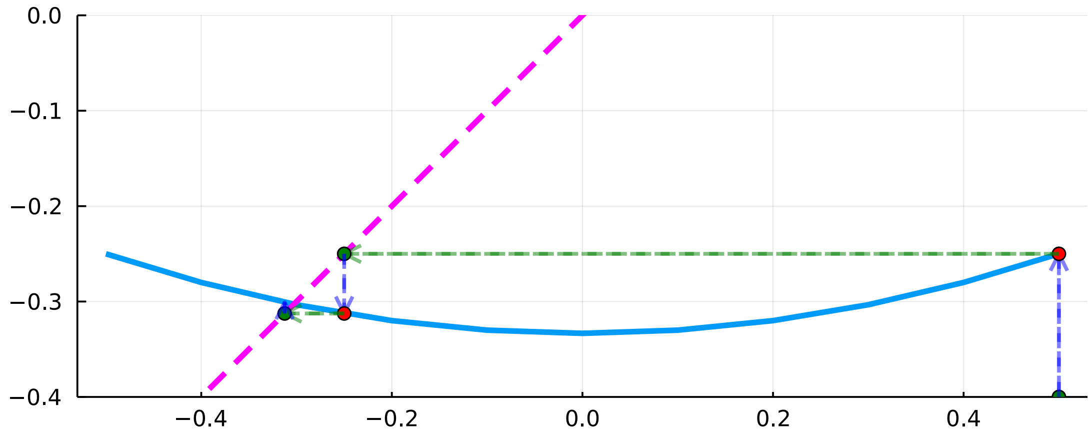
$$x = g(x)$$

[19]:
```
function punto_fijo(f, n, x_range, x0, ymin=-10, ymax=10)
    l = -4
        p = plot(f, x_range, lw=3, ylim=(ymin, ymax), legend=:false,␣
 ↪aspectratio=1)

    #hline!([0.0], c="magenta", lw=3, ls=:dash)
    X(x) = x
    plot!(X, c="magenta", lw=3, ls=:dash)
```

```
    scatter!([x0], [ymin], c="green"
        #, ann=(x0, ymin+l, L"x_0", 10)
    )
        #vline!([x0], c=:blue, alpha=0.5, ls=:dash, lw=2)
    plot!([x0,x0],[ymin,f(x0)],arrow=true,color=:blue, alpha=0.5, ls=:
↪dash,linewidth=2,label="")

        for i in 1:n

        x1 = f(x0)
        scatter!([x0], [x1], c=:red)
        #hline!([x1], c=:green, ls=:dash)
        plot!([x0,x1],[x1,x1],arrow=true,color=:green, alpha=0.5, ls=:
↪dash,linewidth=2,label="")
        scatter!([x1], [x1], c="green"
            #, ann=(x0, l, L"x_i", 10)
        )
        #vline!([x1], c=:blue, alpha=0.5, ls=:dash, lw=2)
        plot!([x1,x1],[x1,f(x1)],arrow=true,color=:blue, alpha=0.5, ls=:
↪dash,linewidth=2,label="")
                x0 = x1


        end

        #p |> as_svg
    display(p)

end
```

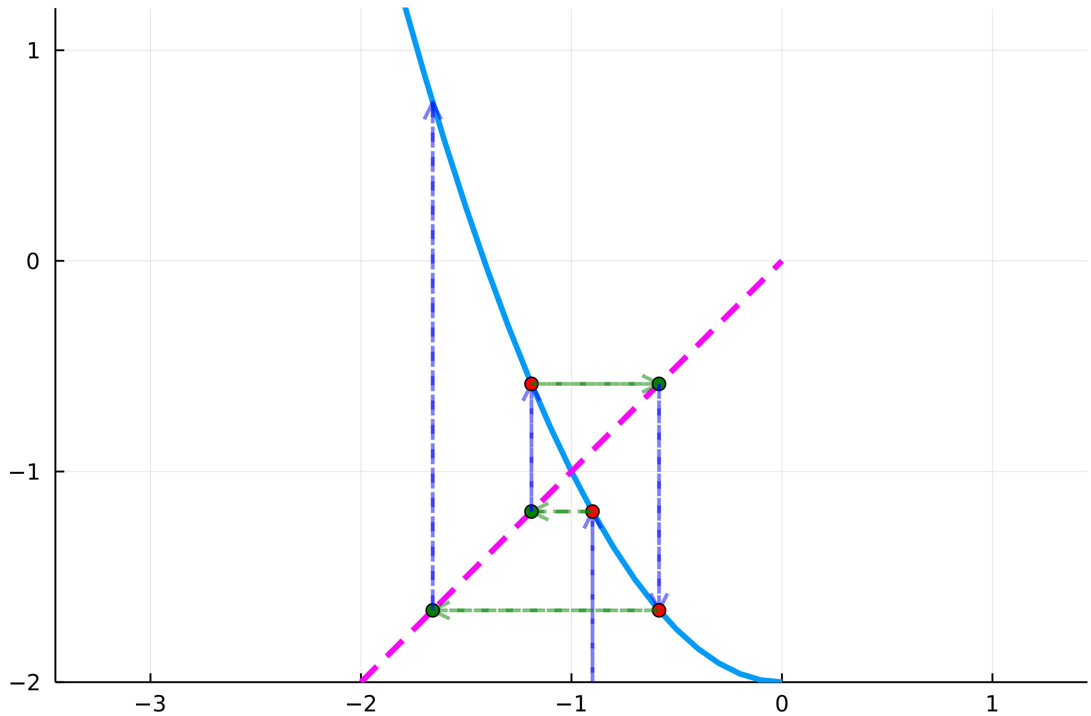
[19]:
```
punto_fijo (generic function with 3 methods)
```

[23]:
```
punto_fijo(g,2, -0.5:0.1:0.5, 0.5, -0.4, 0.0) # NO TOCAR!
```



0.3.2 Cuando converge?

[24]:
```
punto_fijo(f,3, -2:0.1:0, -0.9, -2, 1.2)
```



0.3.3 Tarea:

Juegue con distintas funciones y vea que para que haya convergencia es necesario que $|g'| < 1$ en un entorno del punto fijo.

En realida esa condición es también suficiente:

Teorema:

Sea $f : [a, b] \subset R \to R$ una función *diferenciable* tal que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Si $|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a, b]$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge la único punto fijo.

Nota En la práctica lo que necesitamos es encontrar una región conteniendo el punto fijo donde la derivada sea de módulo menor que uno.

Nota Algunas veces se puede modificar la función para que la derivada de la nueva función si satisfaga la condición que buscamos.

0.3.4 Ejemplo:

Sea

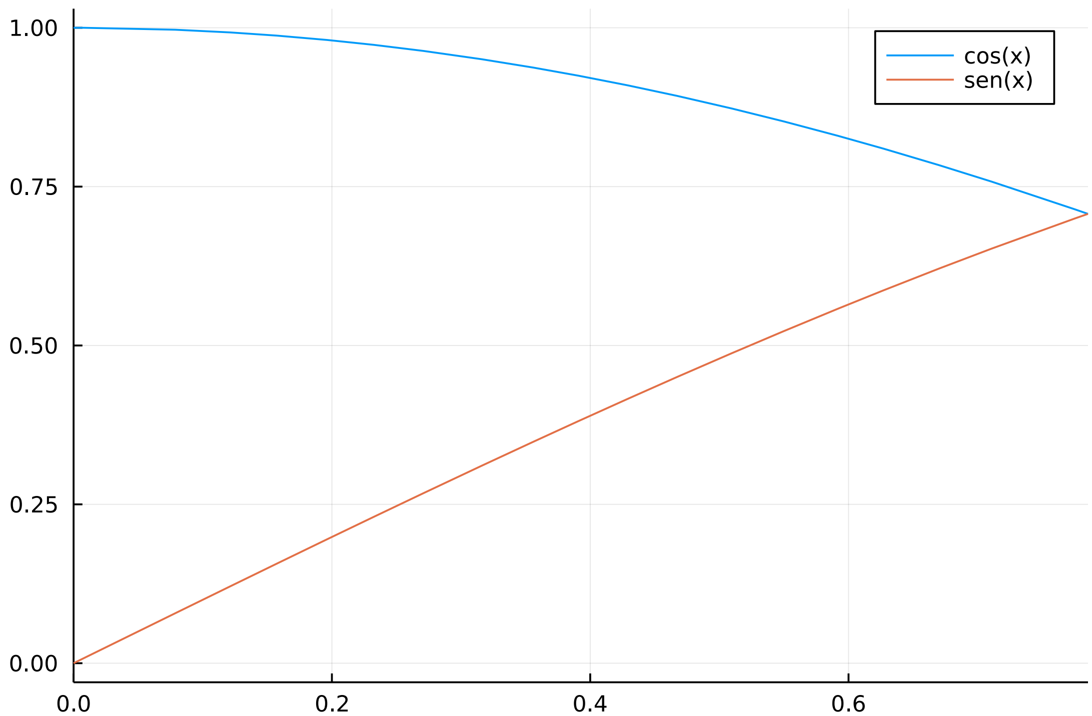
$$g(x) = cos(x) \quad x \in [0, \pi/2]$$

El punto fijo será x tal que $cos(x) = x$.

1. La secuencia vendrá dada por $x_{n+1} = cos(x_n)$
2. En ese intervalo \$0 cos(x) 1 \$ y por lo tanto $cos[0, \pi/4] = [0, 1] \subset [0, \pi/4]$ **por lo tanto habrá al menos un punto fijo**
3. $|cos'(x)| = |-sen(x)| < 1$ por lo tanto **habrá un único punto fijo**.

[32]:
```
plot(cos,xlim=(0.0,  /4), label="cos(x)")
plot!(sin, label="sen(x)")
```

[32]:

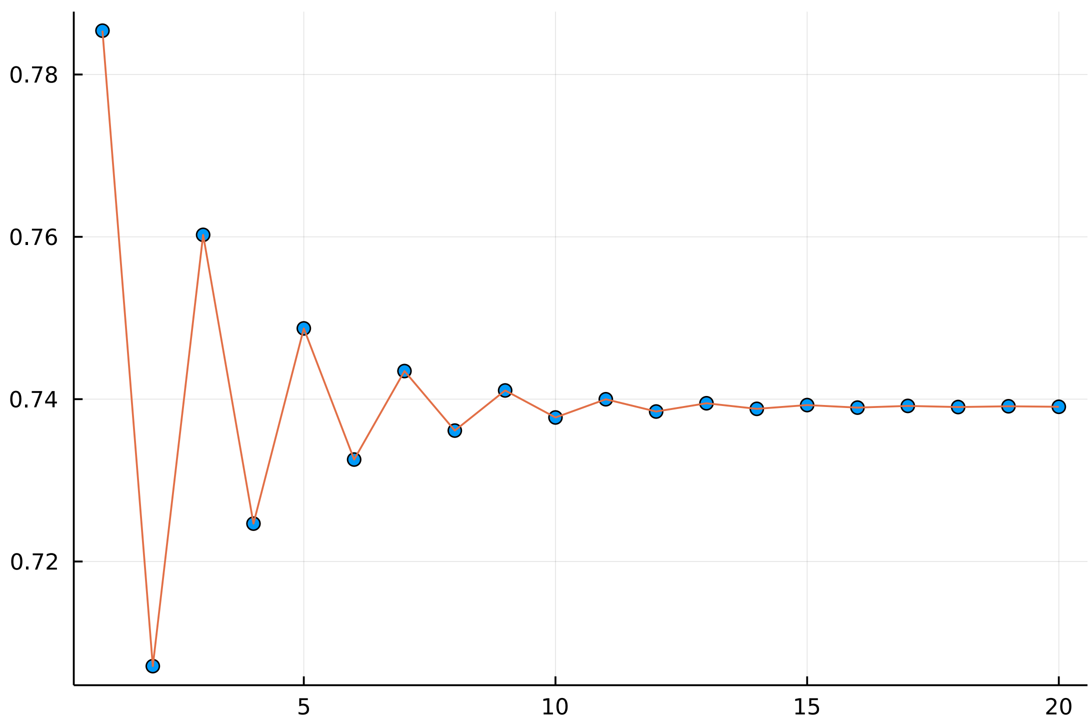


[42]:
```
N = 20
x = zeros(N)
x[1] =  /4

for n in 1:(N-1)
    x[n+1] = cos(x[n])
end
x
```

[42]:
```
20-element Vector{Float64}:
 0.7853981633974483
 0.7071067811865476
 0.7602445970756301
 0.7246674808891262
 0.7487198857894842
 0.7325608445922418
 0.7434642113152936
 0.736128256500852
 0.7410736870837101
 0.7377441589925747
 0.7399877647958709
 0.7384768087245538
 0.7394947711319744
 0.7388091341840698
 0.7392710213301092
 0.7389599039762518
 0.7391694833413742
 0.7390283113262728
 0.7391234079298638
 0.7390593503655666
```

[43]:
```
scatter(x, label=false)
plot!(x, label=false)
```

[43]:



Tarea Encuentre el punto fijo usando Newton-Raphson y compare.

[ ]:
```

```