Parcial 2°

Metodos Numéricos

Segundo Parcial, 10 de junio de 2021, Julia

Importante

1. Realice este exámen en una notebook de jupyter.
2. Cambie el nombre del notebook a:

   `parcial_2_apellido_nombre.ipynb`

   remplazando `apellido_nombre` por su primer apellido y nombre.
3. Envíe la notebook por correo a

   `francisco.tamarit@unc.edu.ar`

   y súbala al aula virtual. Tenga en cuenta que:

   a. Los archivos enviados por mail y subidos al aula virtual deben coincidir totalmente.
   b. El horario límite para subir los archivos al aula virtual y mandar el email es el 10 de junio de 2021 a las 13:05.

Nota sobre la programación, la presentación y sus gráficas:

1. Trabaje con precisión `Float64`.
2. Ordene las partes de su programa en la forma secuencial solicitada.
3. Los graficos deben contener título, los ejes etiquetas y las curvas leyendas adecuadas.

Problema 1

1A) Escriba un programa para calcular una aproximación numérica S de la integral siguiente:

$$I = \int_0^{\pi} dx\ x \sin(x) \qquad (1)$$

El programa debe utilizar el método de **Simpson compuesto** y debe tener como entrada: - una función $f(x)$ que represente el integrando, y - el valor N (el número de nodos menos 1).

1B) Calcule la aproximación S de la integral I y el error absoluto $\epsilon = |S - I|$ como función de N con $N = 2^k$ para $k = 1, 2, \ldots, 15$. Para calcular el error, use como aproximación del valor exacto $I = \pi = 3.1415926535897...$.

Grafique el error absoluto ϵ *vs.* N usando puntos. Elija la escala de los ejes en forma apropiada para verificar la dependencia del error con el número de intervalos N. A modo de guía, agregue al gráfico una función que represente la dependencia teórica del error en función de N.

Ayuda: Fórmula de Simpson Compuesta :

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=2}^{N/2} f(x_{2i-2}) + f(b)\right]$$

1C) Comente el resultado del punto anterior **(1B)**.

Problema 2

2A) Escriba las funciones pertinentes a los fines de resolver el problema de valor inicial:

$$y' = f(t, y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha$$

que utilice los siguientes métodos: (debe definir una función que realize un paso de integración para cada método):

- método de Euler
- método de Heun (orden 3) dado por:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t, y_i) \\ k_2 &= hf(t + h/3, y_i + k_1/3) \\ k_3 &= hf(t + 2h/3, y_i + 2k_2/3) \\ y_{i+1} &= y_i + (k_1 + 3k_3)/4 \end{aligned}$$

- método de Runge-Kutta de segundo orden y
- método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Las variables de la función que realiza la integración deben ser:

- el límite inferior del intervalo temporal, a,
- el límite superior del intervalo temporal, b,
- el valor inicial, α, y
- el tamaño del paso de integración, h.

Dicha función debe retornar:

- el tiempo t_i,
- la aproximación w_i,
- la solución exacta $y(t_i)$ y
- el error absoluto $\varepsilon_i = |y(t_i) - w_i|$.

2B) Utilice el programa del punto **(2A)** para resolver el problema de valor inicial:

$$y' = \frac{2 - 2ty}{t^2 + 1} \qquad 0 \leq t \leq 1, \qquad y(0) = 1$$

con los tres métodos y con $h = 0.1$. La solución exacta de este problema es:

$$y_e(t) = \frac{2t + 1}{t^2 + 1}$$

2C) Grafique simultáneamente las tres aproximaciones a la solución del problema de valor inicial planteado, con $0 \leq t \leq 5$, una por método, más la curva de la solución exacta. Para cada curva aproximada use diferentes tipos de puntos de tamaños adecuados y de diferentes colores. Grafique la curva exacta con una línea continua negra de ancho suficiente para que sea visible.

2D) Grafique las cuatro curvas del error absoluto en escala logarítmica y superpuestas, una por método, con $0 \leq t \leq 5$ y **h=0.01**. Para cada curva del error use diferentes tipos de puntos de tamaños adecuados y de diferentes colores. Repita para el error relativo.