

Guía 6, 2021, Julia

Lunes 25 de Mayo

Problema 1

1. Haciendo los calculos a mano y trabajando con 7 cifras significativas, encuentre las aproximaciones a las integrales definidas:

a. $I_1 = \int_0^1 x^4 dx$

b. $I_2 = \int_0^\pi \sin(x) dx$

utilizando las reglas simples de i) *punto medio*, ii) *trapecio* y iii) *Simpson*.

2. Calcule el error absoluto y el error relativo en cada caso y para cada método.

Problema 2

1. Repita el problema 1 dividiendo el intervalo de integración en dos subintervalos de igual tamaño. Es decir:

a. $I_1 = \int_0^{1/2} x^4 dx + \int_{1/2}^1 x^4 dx$

b. $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi \sin(x) dx$

2. Compare resultados con lo obtenido en el problema 1.

Problema 3

1. Construya funciones que dada una función arbitraria, retornen las aproximaciones numéricas S_M , S_T y S_S a una integral de la forma

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

utilizando las reglas compuestas del *punto medio*, del *trapecio* y de *Simpson*, respectivamente. Las funciones deben evaluar el integrando $f(x)$ en $n + 1$ puntos equiespaciados x_i para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ y con espaciamento $h = (b - a)/n$. En el caso del punto medio, se evalúa en los $x_i + h/2$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

2. Calcule S_M , S_T y S_S para la integral:

$$I = \int_0^1 e^{-x} dx$$

Utilice un espaciamento $h_1 = 0.05$ en ambos casos. Luego repita el procedimiento disminuyendo su espaciamento a la mitad, $h_2 = h_1/2 = 0.025$.

3. Teniendo en cuenta que es posible conocer el resultado exacto de la integral en cuestión, evalúe el error $\varepsilon(h) = |S - I|$, para $h = 0.05$ y $h = 0.025$ para los tres métodos de aproximación. Verifique que el cociente de precisión, definido como

$$Q = \frac{\varepsilon(h)}{\varepsilon(h/2)}$$

toma un valor aproximado a 4 cuando se usa la regla del *punto medio* y del *trapecio*, y un valor aproximado a 16 cuando se usa la regla de *Simpson*. Teniendo en cuenta la expresión del error de truncamiento en cada caso, justifique este resultado.

Consejo: tener cuidado con *Simpson* en elegir siempre un número par de intervalos, i.e, un número impar de puntos. Pruebe con una integral conocida, qué resultados da cuando usa un número impar de intervalos. Incluya en la función para dicho método un chequeo de que el número de puntos sea par.

Problema 4

1. Para los métodos de integración numérica del problema 3, implemente fórmulas de estimación del error en función de el número de puntos n , una cota máxima M asociada a $f(x)$ o alguna de sus derivadas, y los extremos a y b del intervalo de integración.
2. Indique, para cada método, el mínimo n necesario para alcanzar un error relativo menor a 10^{-7} de las siguientes integrales

- a. $\int_0^{1/2} \frac{2}{x-4} dx$

- b. $\int_1^{3/2} x^2 \log x dx$

3. Compruebe usando los métodos del problema 3 si las estimaciones de n son adecuadas.

Problema 5

Comparación de métodos.

1. Aproxime la integral

$$I = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$$

empleando los algoritmos del problema 3.

2. Calcule el error relativo E para $n \in [2, 4, 8, \dots, 4096]$ ($n = 2^i$ con $i = 1, 2, \dots$) y grafique E vs n en *log-log*.
3. Verifique visualmente que se satisfacen leyes de potencia

$$E = Cn^{-\alpha}$$

y estime visualmente los valores de $C > 0$ y $\alpha > 0$.

4. Use el gráfico para estimar, para cada método, el mínimo n al cuál se alcanza una precisión $E < 10^{-7}$.
5. Repita los incisos anteriores en *Float16* y *Float32*.
6. Determine si el error de redondeo es relevante en estos casos.

Problema 6

En el repositorio

<https://github.com/reula/MetodosNumericos2021/tree/main/Guias>

se encuentran dos archivos de datos,

mediciones1-c1-g6.dat

mediciones2-c1-g6.dat

Los mismos almacenan mediciones de una función $f(t)$ sobre un mismo rango de t . El primero muestra $n = 629$ puntos y el segundo $n = 10001$.

1. Baje y grafique los datos.
2. Copie y modifique los algoritmos del problema 3 para integrar muestreos de funciones.
3. Integre los muestreos y compare.

Ayuda: Para bajar el archivo mediciones1-c1-g6.dat del repositorio de github desde julia realice:

```
In [ ]: # Ejemplo de como bajar un archivo.
        separador = "/" # En Linux
        #separador = "\" # En Windows
        download(
            "https://raw.githubusercontent.com/reula/MetodosNumericos2021/main/Guias/mediciones1-c1-g6.dat" # Guardamos lo bajado en un archivo llamado mediciones1-c1-g6.dat
        )
```

1. Notar que Windows usa "\" en vez de "/".
2. Cuando entre a github a ver los links a los archivos, seleccione primero el archivo, cuando se visualice seleccione el botón **Raw**. Fíjese que el link debe comenzar con <https://raw.githubusercontent.com>

Ejercicios Complementarios

Problema C.1

Idem problema 4, para las siguientes integrales: 1. $\int_{1/2}^1 x^4 dx$ 2. $\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$

Problema C.2

Integración numérica en dos dimensiones 1. Haga un programa que integre funciones en la region $a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$ siguiendo el código delineado en la clase teórica, usando el método de cuadratura de Simpson en cada coordenada. 2. Evalúe numéricamente con no menos de 8 cifras significativas las integrales

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy e^{-xy} \qquad \int_{7/5}^2 dx \int_1^{3/2} dy \ln(x+2y)$$

3. Modifique el programa para permitir que los límites de integración en y sean función de x y evalúe la integral

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy e^{-xy}$$