

| |
|--|
| Beschreibende Statistik |
| Lageparameter |
| Arithmetisches Mittel |
| $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + a_n)$ <p>Das Arithmetische Mittel \bar{x} minimiert die Funktion</p> $g(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$ |
| Geometrisches Mittel |
| $\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ |
| Median |
| $\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & , \text{gerade} \end{cases}$ <p>Der Median \tilde{x} minimiert die Funktion</p> $g(t) = \sum_{i=1}^n x_i - t $ |
| Streuungsmaße |
| (empirische) Varianz |
| $var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ <p>alternativ</p> $var = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$ |
| Standardabweichung |
| $\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$ |
| mittlere absolute Abweichung |
| $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \tilde{x} \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$ |
| Kovarianz und Korrelationskoeffizient |
| Kovarianz |
| $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ <p>alternativ</p> $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$ |
| Korrelationskoeffizient |
| $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ <p>Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwi-</p> |

| |
|---|
| schen $-1 \leq r \leq +1$. Je näher r_{xy} bei -1 (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genauer schmiegen sich die Messwerte an eine Gerade an. Bei r_{xy} nahe 0 gibt es keinen <i>linearen</i> Zusammenhang zwischen den Merkmalen. |
| Regressionsrechnung |
| Regressionsgerade |
| Variante 1 |
| $y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$ |
| Variante 2 |
| $y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$ |
| Kleinste quadratische Abweichung |
| Die Parameter a, b, c, \dots werden so gewählt, dass |
| $Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2$ |
| minimal ist |
| $f_{a,b,c,\dots}(x_i)$ ist die Funktion dessen |
| Parameter gesucht werden |
| Nullsetzen der partiellen Ableitungen: |
| $\frac{\partial}{\partial a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\partial}{\partial b} Q(a, b) = 0$ |
| ber die Ableitungen lassen sich die |
| Parameter finden welche die vorgegebene |
| Funktion am besten annähern |
| Vergleich ermittelter Kurven |
| Um Kurven zu vergleichen, einfach die |
| ermittelten Parameter in die $Q(a, b, c, \dots)$ |
| Funktion eingeben und Wert berechnen. Je |
| kleiner der Wert desto besser passt die |
| Kurve |
| Wahrscheinlichkeitstheorie |
| Wahrscheinlichkeitsräume |
| Der Wahrscheinlichkeitsbegriff |
| $Ergebnismenge = \Omega$ <p>Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$</p> <p>Ein Ereignis ist eine Teilmenge der</p> <p>Ergebnismenge</p> $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unm\"ogliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\} \text{ Ereignis}$ $\bar{A} = \{4, 5, 6\} \text{ Gegenereignis}$ |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---------------------|---------------------------|--------------|----------|---|---------------|---------------------|--------|-----------|---------------------|---------------------------|--------------|----------|--------|--------------|---|
| Elementarereignis | | | | | | | | | | | | | | | | |
| einelementige Teilmenge von Ω Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Laplace-Versuch | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Bedingte Wahrscheinlichkeit | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Formel von Bayes | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Satz der totalen Wahrscheinlichkeit | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $P(A) = \sum_{i=1}^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Viel Felder Tafel | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table><tr><td></td><td>A</td><td>\bar{A}</td><td>Σ</td></tr><tr><td>B</td><td>$P(A \cap B)$</td><td>$P(\bar{A} \cap B)$</td><td>$P(B)$</td></tr><tr><td>\bar{B}</td><td>$P(A \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{A} \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{B})$</td></tr><tr><td>Σ</td><td>$P(A)$</td><td>$P(\bar{A})$</td><td>1</td></tr></table> <p>Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten</p> | | A | \bar{A} | Σ | B | $P(A \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(B)$ | \bar{B} | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ | Σ | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | 1 |
| | A | \bar{A} | Σ | | | | | | | | | | | | | |
| B | $P(A \cap B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(B)$ | | | | | | | | | | | | | |
| \bar{B} | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ | | | | | | | | | | | | | |
| Σ | $P(A)$ | $P(\bar{A})$ | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| Allgemeine Regeln | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$ Wenn A und B unabhängig, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A B) = P(A)$ | | | | | | | | | | | | | | | | |

| |
|---|
| Zufallsvariablen |
| Eine Zufallsvariable ist eine |
| Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen |
| Ergebnis eines Zufallsexperiments eine |
| Größe zuordnet |
| $X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = k\}$ $X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = 3\}$ $X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) \leq k\}$ |
| Diskrete Verteilungen |
| Binomialverteilung |
| Mit zurücklegen, Wahrscheinlichkeit für |
| jedes Ereignis gleich |
| $X \sim B(n, p)$ <p>n =: Stichprobenumfang</p> <p>p =: Wahrscheinlichkeit</p> <p>(p muss bei Binomialverteilung fest bleiben)</p> $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ <p>Eingabe Taschenrechner</p> $\binom{n}{k} \hat{=} n nC r k$ $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow n \rightarrow p$ |
| Binomialverteilung approximieren |
| Die Binomialverteilung kann mit der |
| Poisson Verteilung approximiert werden, |
| dann gilt |
| $\lambda = n \cdot p$ |
| Die Binomialverteilung kann auch mit |
| der Normalverteilung approximiert |
| werden, wobei gilt $n \cdot p = \mu$ und |
| $n \cdot p \cdot (1 - p) = \sigma^2$, bedingung ist |
| $X \sim B(n, p) \approx N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ |
| falls gilt |
| $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ |
| Bei der approximation mit der |
| Normalverteilung kann man eine |
| Stetigkeitskorrektur verwenden um ein |
| besseres Ergebnis zu erhalten |
| $P(X \leq k) \approx F_N(R + 0,5)$ $P(X < k) \approx F_N(R - 0,5)$ $P(a \leq X \leq b) \approx F_N(b + 0,5) - F_N(a - 0,5)$ |
| Zusammengefasst |
| Falls np und $n(1 - p)$ groß genug sind: |
| $\mu = n \cdot p \text{ und } \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ |

$$F_B(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Hypergeometrische Verteilung

Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis
 $X \sim H(N, M, n)$
 $n =$: Stichprobenumfang
 $N =$: Gesamtzahl
 $M =$: Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Hypergeometrische Vert. approximieren

Die hypergeometrische Verteilung kann mit der **Binomialverteilung** approximiert werden. Dabei muss folgende Bedingung gelten
 $\frac{n}{N} < 0,05$

Poisson Verteilung

Schlüsselwörter sind **Ereignisse pro Zeiteinheit**, zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne
 $X \sim Pois(\lambda)$
$$P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$
Eingabe Taschenrechner
 $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow \lambda$

Näherung an Normalverteilung

Wenn λ groß genug ist kann die Verteilungsfunktion $F_P(x)$ der Poissonverteilung durch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $F_N(x)$ mit den Parametern $\mu = \lambda$ und $\sigma^2 = \lambda$ genähert werden:
$$F_P(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Geometrische Verteilung

$X \sim Geom(n, p)$
$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$
Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe

Stetige Verteilungen

Dichtefunktion

Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur **Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung**
Bedingungen der Dichtefunktion
$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$
Die Dichtefunktion muss **nicht** stetig sein
Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $F(x)$

Verteilungsfunktion

Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion F , die jedem x einer Zufallsvariable X genau eine Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet
$$F(x) \rightarrow P(X \leq x)$$
Bedingungen der Verteilungsfunktion
Die Verteilungsfunktion **muss** stetig sein
Die Verteilungsfunktion **muss** monoton steigend sein
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Normalverteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Ist $X \sim N(0, 1)$ dann heißt sie Standardnormalverteilt
Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt
Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ standardnormalverteilt
Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden

Regeln für den Phi-Wert

$$P(X \leq k) = \Phi(k)$$
$$P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$$
$$P(X = k) = 0$$
 (“Integral ohne Breite!”)
allgemein folgt daraus, wenn
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
dann gilt
$$P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Additionssatz der Normalverteilung

Seien X und Y unabhängig und Normalverteilt, dann gilt:
$$X + Y = N(\mu_X + \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$
Ihre Summe ist ebenfalls Normalverteilt!
Quantile der Normalverteilung
Tabelliert ist das β -Quantil z_β der Normalverteilung $N(0, 1)$
$$P(X \leq z_\beta) = \beta$$
$$z_{1-\beta} = -z_\beta$$
Beispiel
$$\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$$

Exponentialverteilung

Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte
$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$
und daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion
$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos

Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 0 & , sonst \end{cases}$$
$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 1 & , t > b \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$$
Für Binomialverteilung
$$\mu = E(X) = n \cdot p$$
Für geometrische Verteilung
$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$
Für Poissonverteilung
$$\mu = E(X) = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$E(T_i) = \frac{a+b}{2}$$
Allgemeine Regeln für den Erwartungswert
$$a, b \in \mathbb{R}$$
$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Varianz

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Varianz aus Erwartungswert berechnen

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$
Für Binomialverteilung
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Für geometrische Verteilung

$$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$
Für Poissonverteilung
$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$
Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Allgemeine Regeln für Varianz

$Var(X + b) = Var(X)$
 $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$
 $Var(X + Y) =$
 $Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$
wobei gilt:
 $Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) =$
 $E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y$
bei unabhängigen Zufallsvariablen X und Y
ist $Cov(X, Y) = 0$ siehe unten.

Unabhängige Zufallsvariablen

Allgemeine Regeln

$Var(X + const) = Var(X)$
 $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
 $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Wichtige Sätze der Stochastik

Zentraler Grenzwertsatz

n groß (Anzahl der Zufallsvariablen) $n \geq 30$
 X_i unabhängig und identisch verteilt
 $\hat{=}$ haben die gleiche Verteilung
 $E(X_i) = \mu$
 $Var(X_i) = \sigma^2$
 $\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$
 $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
Manche Verteilungen verhalten sich in der
Summe anders, zum Beispiel die
Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt.
Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz
verwendet

ZGS - Definition

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch
verteilte Zufallsvariablen (nicht zwangsläufig
Normalverteilt) mit Erwartungswert μ und
Varianz σ^2 . Ihre Summe sei
 $S = X_1 + \dots + X_n$ mit Erwartungswert $n\mu$
und Varianz $n\sigma^2$. Es gilt für die zugehörige
Zufallsvariable
 $Z = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ gilt
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z \leq z) = \Phi(z)$

Induktive Statistik - Schätztheorie

Schätzfunktionen

Maximum-Likelihood-Schätzer

$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$

$f(x_i)$ muss eine **Dichtefunktion** sein
 $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$
Die Funktion nach dem Parameter α
ableiten und Nullsetzen
Das Ergebnis ist der
Maximum-Likelihood-Schätzer

Konfidenzintervalle

Intervall für $E(X)$ einer Normalverteilung

Ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, dann ist
 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

Bei **bekannter** Standardabweichung σ

$\left[\bar{x} - z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
 \bar{X} = arithmetisches Mittel, bzw
erwartungstreuer Schätzer bei n
unabhängigen Stichproben
 α = Signifikanzwahrscheinlichkeit
(Irrtumswahrscheinlichkeit)
 $1 - \alpha$ = Vertrauensniveau
Ist α gegeben, berechne das Quantil
 $z_{1-(\alpha/2)}$

Bei **unbekannter** Standardabweichung σ

$\left[\bar{x} - t_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$
Anstatt σ^2 wird der erwartungstreue
Schätzer s verwendet
 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
beziehungsweise
 $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

Induktive Statistik - Hypothesentest

Tests für Lageparameter

Wähle Fall a) wenn Verteilung statt
absoluter Wert gegeben (z.b. "jeder n-te...")
und verfolge Strategie (3).
Wähle Fall b) wenn $\bar{X} \leq \mu_0$
Wähle Fall c) wenn $\bar{X} \geq \mu_0$

(1) Gauß-Test (Wählen wenn σ^2 bekannt)

Ist ein Test für den Erwartungswert einer
Normalverteilung bei bekannter
Standardabweichung σ
Wähle eine mögliche
Hypothesenkombination:

- a) $H_0 : \mu = \mu_0$
b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$

Wähle ein Signifikanzniveau α (z.B.: 0.05)
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang n ,
berechne \bar{x} und den zugehörigen
standardisierten Prüfwert:

$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

Bestimme das entsprechende Quantil der
Standardnormalverteilung:

- a) $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. b) $-z_{1-\alpha}$ c) $z_{1-\alpha}$
 H_0 ist zu verwerfen, falls
a) $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
b) $z < -z_{1-\alpha}$
c) $z > z_{1-\alpha}$

(2) t-Test (Wählen wenn σ^2 **nicht** bekannt)

Wähle eine mögliche
Hypothesenkombination:
a) $H_0 : \mu = \mu_0$
b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$

Wähle ein Signifikanzniveau α (z.B.: 0.05)
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang n ,
berechne daraus \bar{x} und s sowie den
zugehörigen Prüfwert:

$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

Bestimme das entsprechende Quantil der
 t -Verteilung:

- a) $t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. b) $-t_{n-1; 1-\alpha}$ c) $t_{n-1; 1-\alpha}$
 H_0 ist zu verwerfen, falls
a) $|t| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$
b) $t < -t_{n-1; 1-\alpha}$
c) $t > t_{n-1; 1-\alpha}$

(3) Wahrscheinlichkeit gegeben

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ite Stichprobe hat die Eigenschaft} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$X_i \sim B(1, p_0)$
 \Rightarrow ZGS $\Rightarrow \sum X_i \overset{a}{\sim} N(np_0 | np_0(1 - p_0))$
 $T = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$
Verwerfe oder nicht nach Regeln in Variante
(1)

Tests für Streuungsmaße

χ^2 - Anpassungstest

Der χ^2 -Anpassungstest überprüft ob eine
unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung
einem bestimmten Verteilungsmodell folgt

$T = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^r \frac{N_i^2}{p_i} \right) - n$

wobei N_i absolute Häufigkeit in Kategorie r ,
 n ist der Stichprobenumfang. Alternativ

$T = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$

Das Ergebnis T mit $\chi^2_{r-1; 1-\alpha}$ Wert aus der
Tabelle vergleichen

$T < \chi^2 =$ Hypothese wird nicht verworfen
Algorithmus

1. Hypothese aufstellen
2. n und r festlegen (n = Stichprobenumfang,
 r = Anzahl der Klassen)
3. Verteilung auf welche getestet werden soll
bestimmen
4. Alle p_i berechnen (zu jeder Kategorie r
eines nach in 3. festgelegter Verteilung)
5. T berechnen.
6. χ^2 mit T vergleichen.

Übersicht: Induktive Statistik

GEGEBENENFALLS FOLGENDES
NOCH ZU DEN EINZELNEN
POSITIONEN VERSCHIEBEN

Konfidenzbereich/Test für Erwartungswert

Varianz σ^2 **bekannt**

Zweiseitige Konfidenzintervalle

Wegen ZGS:
 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot \sqrt{n} \sim N(0, 1)$
ist zu gegebenen Konfidenzniveau $1 - \alpha$ das
Konfidenzintervall gleich
 $\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
wobei $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ein Quantil der
Standardnormalverteilung ist.
Das Konfidenzintervall überdeckt den
gesuchten Erwartungswert μ mit der
Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$.

Einseitige Konfidenzintervalle

| |
|---|
| $\left] -\infty, \bar{x} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ bzw. $\left[-\infty, \bar{x} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$ |
| Zweiseitige Tests |
| Für μ_0 sei $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ $H_0 : \mu = \mu_0$ Bereich: $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ |
| Einseitige Tests |
| $H_0 : \mu \leq \mu_0$ Bereich: $Z \leq z_{1-\alpha}$ $H_0 : \mu \geq \mu_0$ Bereich: $Z \geq -z_{1-\alpha}$ |

| |
|-------------------------------------|
| Varianz σ^2 unbekannt |
| Zweiseitige Konfidenzintervalle |

| |
|------------------------|
| Allgemeine Matheregeln |
|------------------------|

| |
|--------------------------|
| Potenzen und Logarithmen |
|--------------------------|

| |
|--|
| Potenzgesetze |
| $a^0 = 1$ |
| $a^1 = a$ |
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ |
| $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ |
| $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ |
| $\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$ |
| $\sqrt[n]{k} = k^{\frac{1}{n}}$ |

| |
|-------------------|
| Logarithmusregeln |
|-------------------|

| |
|---|
| $x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$ |
| $\log 1 = 0$ |
| $\log x \cdot y = \log x + \log y$ |
| $-\log x = \log \frac{1}{x}$ |
| $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$ |
| $\log x^n = n \cdot \log x$ |
| $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ |
| $\log \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log x_i$ |

| |
|---------------------------|
| Ableitungen und Integrale |
|---------------------------|

| |
|-------------------------------|
| Grundlegende Ableitungsregeln |
|-------------------------------|

| | |
|-------------|---------------------------|
| $f(x)$ | $f'(x)$ |
| $c = const$ | 0 |
| x^n | $n \cdot x^{n-1}$ |
| \sqrt{x} | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| e^x | e^x |
| a^x | $\ln a \cdot a^x$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{\ln a \cdot x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cot x$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ |

| |
|-----------------------------|
| Verknüpfte Ableitungsregeln |
|-----------------------------|

| | |
|---------------------|--|
| $f(x)$ | $f'(x)$ |
| $(f(x) + g(x))$ | $(f'(x) + g'(x))$ |
| $(f(x) \cdot g(x))$ | $(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$ |
| $\frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$ |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ |

| |
|--------------------------|
| wichtige Stammfunktionen |
|--------------------------|

| | |
|-------------------------|---|
| $f(x)$ | $F(x)$ |
| $x^n, n \neq 1$ | $\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$ |
| c | $cx + c$ |
| $\frac{1}{x}, x \neq 0$ | $\ln x + c$ |
| \sqrt{x} | $\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$ |
| e^x | $e^x + c$ |

| |
|---------------------|
| Bestimmte Integrale |
|---------------------|

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$