

Beschreibende Statistik
Lageparameter
Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + a_n)$ Das Arithmetische Mittel \bar{x} minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$
Geometrisches Mittel $\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$
Median $\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & , \text{gerade} \end{cases}$ Der Median \tilde{x} minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n x_i - t $
Streungsmaße
(empirische) Varianz $var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ alternativ $var = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$
Standardabweichung $\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \tilde{x} \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$
Kovarianz und Korrelationskoeffizient
Kovarianz $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ alternativ $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$
Korrelationskoeffizient $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwi-

schen $-1 \leq r \leq +1$. Je näher r_{xy} bei -1 (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genau-er schmiegen sich die Messwerte an eine Ge- rade an. Bei r_{xy} nahe 0 gibt es keinen <i>linearen</i> Zusammenhang zwischen den Merkmalen.
Regressionsrechnung
Regressionsgerade Variante 1 $y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$ Variante 2 $y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung Die Parameter a, b, c, \dots werden so gewählt, dass $Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2$ minimal ist $f_{a,b,c,\dots}(x_i)$ ist die Funktion dessen Parameter gesucht werden Nullsetzen der partiellen Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\partial}{\partial b} Q(a, b) = 0$ Über die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern
Vergleich ermittelter Kurven Um Kurven zu vergleichen, einfach die ermittelten Parameter in die $Q(a, b, c, \dots)$ Funktion eingeben und Wert berechnen. Je kleiner der Wert desto besser passt die Kurve
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wahrscheinlichkeitsräume
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff $Ergebnismenge = \Omega$ Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unm\"ogliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\}$ Ereignis $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ Gegenereignis

Elementarereignis einelementige Teilmenge von Ω Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$																
Laplace-Versuch Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$																
Bedingte Wahrscheinlichkeit																
Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$																
Formel von Bayes $P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$																
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $P(A) = \sum_{i=1}^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$																
Viel Felder Tafel <table><tr><td></td><td>A</td><td>\bar{A}</td><td>Σ</td></tr><tr><td>B</td><td>$P(A \cap B)$</td><td>$P(\bar{A} \cap B)$</td><td>$P(B)$</td></tr><tr><td>\bar{B}</td><td>$P(A \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{A} \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{B})$</td></tr><tr><td>Σ</td><td>$P(A)$</td><td>$P(\bar{A})$</td><td>1</td></tr></table> Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten		A	\bar{A}	Σ	B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$	\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$	Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1
	A	\bar{A}	Σ													
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$													
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$													
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1													
Allgemeine Regeln $P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$ Wenn A und B unabhängig, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A B) = P(A)$																

Zufallsvariablen Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Größe zuordnet $X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = k\}$ $X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = 3\}$ $X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) \leq k\}$
Diskrete Verteilungen
Binomialverteilung Mit zurücklegen, Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis gleich $X \sim B(n, p)$ $n =$: Stichprobenumfang $p =$: Wahrscheinlichkeit (p muss bei Binomialverteilung fest bleiben) $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ Eingabe Taschenrechner $\binom{n}{k} \hat{=} n nC r k$
Binomialverteilung approximieren Die Binomialverteilung kann mit der Poisson Verteilung approximiert werden, dann gilt $\lambda = n \cdot p$ Die Binomialverteilung kann auch mit der Normalverteilung approximiert werden, bedingung ist $X \sim B(n, p) \approx N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ falls gilt $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ Bei der approximation mit der Normalverteilung kann man eine Stetigkeitskorrektur verwenden um ein besseres Ergebnis zu erhalten $P(X \leq k) \approx F_N(R + 0,5)$ $P(X < k) \approx F_N(R - 0,5)$ $P(a \leq X \leq b) \approx F_N(b + 0,5) - F_N(a - 0,5)$
Hypergeometrische Verteilung Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis $X \sim H(N, M, n)$ $n =$: Stichprobenumfang $N =$: Gesamtzahl

M =: Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
Hypergeometrische Vert. approximieren Die hypergeometrische Verteilung kann mit der Binomialverteilung approximiert werden. Dabei muss folgende Bedingung gelten $\frac{n}{N} < 0,05$
Poisson Verteilung Schlüsselwörter sind Ereignisse pro Zeiteinheit , zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne $X \sim Pois(\lambda)$ $P(X = k) = \pi_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
Geometrische Verteilung $X \sim Geom(n, p)$ $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$ Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe
Stetige Verteilungen
Dichtefunktion Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung Bedingungen der Dichtefunktion $f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ Die Dichtefunktion muss nicht stetig sein Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $F(x)$
Verteilungsfunktion Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion F , die jedem x einer Zufallsvariable X genau eine Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet $F(x) \rightarrow P(X \leq x)$ Bedingungen der Verteilungsfunktion Die Verteilungsfunktion muss stetig sein Die Verteilungsfunktion muss monoton steigend sein

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Ist $X \sim N(0, 1)$ dann heißt sie Standardnormalverteilt Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ standardnormalverteilt Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden $P(X \leq k) = \Phi(k)$ $P(X = k) = 0 \text{ ("Integral ohne Breite!")}$ $P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$ allgemein gilt $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $P(X \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$ $P(a \leq X \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
Quantile der Normalverteilung Tabelliert ist das β -Quantil z_{β} der Normalverteilung $N(0, 1)$ $P(X \leq z_{\beta}) = \beta$ $z_{1-\beta} = -z_{\beta}$ Beispiel $\beta = 0.9 \Rightarrow z_{\beta} = 1.28155$
Exponentialverteilung Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte $f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$ und daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion $F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos
Gleichverteilung (Rechteckverteilung) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 0 & , sonst \end{cases}$

$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 1 & , t > b \end{cases}$
Erwartungswert und Varianz
Erwartungswert Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung $\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T $E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$
Für Binomialverteilung $\mu = E(X) = n \cdot p$
Für geometrische Verteilung $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung $\mu = E(X) = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung $E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$
Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung) $E(T_i) = \frac{a+b}{2}$
Allgemeine Regeln für den Erwartungswert $a, b \in \mathbb{R}$ $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$
Varianz
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung $\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Varianz aus Erwartungswert berechnen $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$
Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T $Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$
Für Binomialverteilung $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
Für geometrische Verteilung $\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung $\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung $Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung) $Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Allgemeine Regeln für Varianz $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$ $Var(X + Y) =$ $Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$ wobei gilt: $Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y$ bei unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt $Cov(X, Y) = 0$ siehe unten.
Unabhängige Zufallsvariablen
Allgemeine Regeln $Var(X + const) = Var(X)$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ $E(aX + b) = aE(X) + b$
Wichtige Sätze der Stochastik
Zentraler Grenzwertsatz n groß (Anzahl der Zufallsvariablen) $n \geq 30$ X_i unabhängig und identisch verteilt $\hat{=}$ haben die gleiche Verteilung $E(X_i) = \mu$ $Var(X_i) = \sigma^2$ $\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ $\bar{n} \sum_{i=1}^n = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Manche Verteilungen verhalten sich in der Summe anders, zum Beispiel die Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt. Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz verwendet

Induktive Statistik - Schätztheorie

Schätzfunktionen

Maximum-Likelihood-Schätzer

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

$f(x_i)$ muss eine Dichtefunktion sein
$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

Die Funktion nach dem Parameter α ableiten und Nullsetzen
Das Ergebnis ist der Maximum-Likelihood-Schätzer

Konfidenzintervalle

Intervall für $E(X)$ einer Normalverteilung

Ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, dann ist
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Bei bekannter Standardabweichung σ

$$\left[\bar{x} - z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

\bar{X} = arithmetisches Mittel, bzw erwartungsstreuer Schätzer bei n unabhängigen Stichproben
 α = Signifikanzwahrscheinlichkeit
 $1 - \alpha$ = Vertrauensniveau
Ist α gegeben, berechne das Quantil
$$z_{1-(\alpha/2)}$$

Bei unbekannter Standardabweichung σ

$$\left[\bar{x} - t_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Anstatt σ^2 wird der erwartungstreue Schätzer s verwendet
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

beziehungsweise
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Induktive Statistik - Hypothesentest

Tests für Lageparameter

Gauß-Test

noch zu füllen

t-Test

noch zu füllen

Tests für Streuungsmaße

χ^2 - Anpassungstest

Der χ^2 -Anpassungstest überprüft ob eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung einem bestimmten Verteilungsmodell folgt

$$T = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^r \frac{N_i^2}{p_i} \right) - n$$

alternativ

$$T = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Das Ergebnis T mit $\chi^2_{r-1; 1-\alpha}$ Wert aus der Tabelle vergleichen
 $T < \chi^2$ = Hypothese wird nicht verworfen

Übersicht: Induktive Statistik

GEGEBENENFALLS FOLGENDES NOCH ZU DEN EINZELNEN POSITIONEN VERSCHIEBEN

Konfidenzbereich/Test für Erwartungswert

Varianz σ^2 bekannt

Zweiseitige Konfidenzintervalle

Wegen
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

ist zu gegebenen Konfidenzniveau $1 - \alpha$ das Konfidenzintervall gleich
$$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Einseitige Konfidenzintervalle

$$\left[-\infty, \bar{x} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
 bzw.
$$\left[-\infty, \bar{x} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Zweiseitige Tests

Für μ_0 sei
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$H_0 : \mu = \mu_0$ Bereich: $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Einseitige Tests

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ Bereich: $Z \leq z_{1-\alpha}$
 $H_0 : \mu \geq \mu_0$ Bereich: $Z \geq -z_{1-\alpha}$

Varianz σ^2 unbekannt

Zweiseitige Konfidenzintervalle

Allgemeine Matheregeln

Potenzen und Logarithmen

Potenzgesetze

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$
$$\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

Logarithmusregeln

$$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$$
$$\log 1 = 0$$
$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$
$$-\log x = \log \frac{1}{x}$$
$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$
$$\log x^n = n \cdot \log x$$
$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$
$$\log \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log x_i$$

Ableitungen und Integrale

Grundlegende Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Verknüpfte Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

wichtige Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln x + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
e^x	$e^x + c$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$$