

Beschreibende Statistik
Lageparameter
Arithmetisches Mittel
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + x_n)$
Geometrisches Mittel
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$
Median
$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}), & \text{gerade} \end{cases}$
Der Median \tilde{x} minimiert die Funktion $\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} $
Streuungsmaße
(empirische) Varianz
$var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung
$\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \tilde{x} $ für Median $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} $ für arithmetisches Mittel
Kovarianz und Korrelationskoeffizient
Kovarianz
$cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
Korrelationskoeffizient
$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\bar{S}_x \cdot \bar{S}_y}$

Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwischen $-1 \leq r \leq +1$. Je näher r_{xy} bei -1 (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genauer schmiegen sich die Messwerte an eine Gerade an. Bei r_{xy} nahe 0 gibt es keinen *linearen* Zusammenhang zwischen den Merkmalen.

Regressionsrechnung
Regressionsgerade
Variante 1 $y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$ Variante 2 $y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung
Die Parameter a, b, c, \dots werden so gewählt, dass $Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - f_{a,b,c,\dots}(x_i))^2$ minimal ist Nullsetzen der partiellen Ableitungen: $\frac{\delta}{\delta a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\delta}{\delta b} Q(a, b) = 0$ Über die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wahrscheinlichkeitsräume
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff
$Ergebnismenge = \Omega$ Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unmögliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\} \text{ Ereignis}$ $\bar{A} = \{4, 5, 6\} \text{ Gegenereignis}$
Elementarereignis
einelementige Teilmenge von Ω Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$
Laplace-Versuch
Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit			
Bedingte Wahrscheinlichkeit			
Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B			
$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$			
$P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$			
Formel von Bayes			
$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$			
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit			
$P(A) = \sum_i^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$			
Viel Felder Tafel			
	A	\bar{A}	Σ
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1
Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten			
Allgemeine Regeln			
$P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$			
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$			
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$			
$P(A \cup B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$			
$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$			
Wenn A und B unabhängig, dann gilt			
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$			
Zufallsvariablen			
Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Größe zuordnet			
$X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = k\}$			
$X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = 3\}$			
$X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) \leq k\}$			
Diskrete Verteilungen			
Binomialverteilung			
Mit zurücklegen, Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis gleich			
$X \sim B(n, p)$			
$n =:$ Stichprobenumfang			
$p =:$ Wahrscheinlichkeit			

(p muss bei Binomialverteilung fest bleiben)
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$
$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
Eingabe Taschenrechner $\binom{n}{k} \hat{=} n nC r k$
Die Binomialverteilung kann mit der Normalverteilung approximiert werden, bedingung ist $X \sim B(n, p) \stackrel{a}{=} N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ falls gilt $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$
Die Binomialverteilung kann mit der Poisson Verteilung approximiert werden, dann gilt $\lambda = n \cdot p$
Hypergeometrische Verteilung
Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis $X \sim H(N, M, n)$ $n =:$ Stichprobenumfang $N =:$ Gesamtzahl $M =:$ Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
Poisson Verteilung
Schlüsselwörter sind Ereignisse pro Zeiteinheit , zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne $X \sim Pois(\lambda)$ $P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
Geometrische Verteilung
$X \sim Geom(n, p)$ $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p^n$ Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 Auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe

Stetige Verteilungen
Dichtefunktion
Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung Bedingungen der Dichtefunktion $f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ Die Dichtefunktion muss nicht stetig sein Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $F(x)$
Verteilungsfunktion
Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion F , die jedem x einer Zufallsvariable X genau eine Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet $F(x) \rightarrow P(X \leq x)$ Bedingungen der Verteilungsfunktion Die Verteilungsfunktion muss stetig sein Die Verteilungsfunktion muss monoton steigend sein $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
Normalverteilung
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Ist $X \sim N(0, 1)$ dann heißt sie Standardnormalverteilt Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ standardnormalverteilt Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden $P(X \leq k) = \Phi(k)$ $P(X = k) = \Phi(k) = 0$ $P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$ allgemein gilt $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $P(X \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$
Quantile der Normalverteilung
Tabelliert ist das β -Quantil z_β der Normalverteilung $N(0, 1)$ $P(X \leq z_\beta) = \beta$

$z_{1-\beta} = -z_\beta$ Beispiel $\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$
Exponentialverteilung
Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte $f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ und daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion $F(x) = P(T \leq x) =$ $= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$
Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos
Erwartungswert und Varianz
Erwartungswert
Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung
$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T
$E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$
Für Binomialverteilung
$\mu = E(X) = n \cdot p$
Für geometrische Verteilung
$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung
$\mu = E(X) = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung
$E(S_n) = E(X_1 + ... + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$
Für Rechteckverteilung
$E(T_i) = \frac{a+b}{2}$

Allgemeine Regeln für den Erwartungswert
$a, b \in \mathbb{R}$ $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$
Varianz
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung
$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T
$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$
Für Binomialverteilung
$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
Für geometrische Verteilung
$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung
$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung
$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
Für Rechteckverteilung
$Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Allgemeine Regeln für Varianz
$Var(X + Y) =$ $Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$
Unabhängiger Zufallsvariablen
Allgemeine Regeln
$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
Wichtige Sätze der Stochastik
Zentraler Grenzwertsatz
n groß (Anzahl der Zufallsvariablen) $n \geq 30$ X_i unabhängig und identisch verteilt $\hat{=}$ haben die gleiche Verteilung $E(X_i) = \mu$ $Var(X_i) = \sigma^2$ $\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Manche Verteilungen verhalten sich in der Summe anders, zum Beispiel die Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt. Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz verwendet	
Induktive Statistik - Schätztheorie	
Konfidenzintervalle	
Intervall für $E(X)$ einer Normalverteilung $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$	
Allgemeine Matheregeln	
Ableitungen und Integrale	
Grundlegende Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Verknpfte Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$[f(g(x))]$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
wichtige Stammfunktionen	

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$ \ln x + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
e^x	$e^x + c$