

<b>Beschreibende Statistik</b>
<b>Lageparameter</b>
Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + x_n)$ Das Arithmetische Mittel $\bar{x}$ minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$
Geometrisches Mittel $\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$
Median $\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & , \text{gerade} \end{cases}$ Der Median $\tilde{x}$ minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n  x_i - t $
<b>Streuungsmaße</b>
(empirische) Varianz $var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ alternativ $var = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$
Standardabweichung $\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - \tilde{x}  \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - \bar{x}  \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$
<b>Kovarianz und Korrelationskoeffizient</b>
Kovarianz $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ alternativ $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$
Korrelationskoeffizient $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwi-

schen $-1 \leq r \leq +1$ . Je näher $r_{xy}$ bei $-1$ (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genauer schmiegen sich die Messwerte an eine Gerade an. Bei $r_{xy}$ nahe 0 gibt es keinen <i>linearen</i> Zusammenhang zwischen den Merkmalen.
<b>Regressionsrechnung</b>
Regressionsgerade Variante 1 $y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$ Variante 2 $y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung Die Parameter $a, b, c, \dots$ werden so gewählt, dass $Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2$ minimal ist $f_{a,b,c,\dots}(x_i)$ ist die Funktion dessen Parameter gesucht werden Nullsetzen der partiellen Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\partial}{\partial b} Q(a, b) = 0$ über die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern
Vergleich ermittelter Kurven Um Kurven zu vergleichen, einfach die ermittelten Parameter in die $Q(a, b, c, \dots)$ Funktion eingeben und Wert berechnen. Je kleiner der Wert desto besser passt die Kurve
<b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>
<b>Wahrscheinlichkeitsräume</b>
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff $Ergebnismenge = \Omega$ Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unmögliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\}$ Ereignis $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ Gegenereignis

Elementarereignis einelementige Teilmenge von $\Omega$ Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$																
Laplace-Versuch Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$																
<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit</b>																
Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$																
Formel von Bayes $P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$																
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $P(A) = \sum_{i=1}^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$																
Viel Felder Tafel																
<table><tr><td></td><td>A</td><td><math>\bar{A}</math></td><td><math>\Sigma</math></td></tr><tr><td>B</td><td><math>P(A \cap B)</math></td><td><math>P(\bar{A} \cap B)</math></td><td><math>P(B)</math></td></tr><tr><td><math>\bar{B}</math></td><td><math>P(A \cap \bar{B})</math></td><td><math>P(\bar{A} \cap \bar{B})</math></td><td><math>P(\bar{B})</math></td></tr><tr><td><math>\Sigma</math></td><td><math>P(A)</math></td><td><math>P(\bar{A})</math></td><td>1</td></tr></table> <p>Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten</p>		A	$\bar{A}$	$\Sigma$	B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$	$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$	$\Sigma$	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1
	A	$\bar{A}$	$\Sigma$													
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$													
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$													
$\Sigma$	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1													
Allgemeine Regeln $P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$ Wenn A und B unabhängig, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A B) = P(A)$																

<b>Zufallsvariablen</b> Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Groe zuordnet $X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) = k\}$ $X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) = 3\}$ $X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) \leq k\}$
<b>Diskrete Verteilungen</b>
Binomialverteilung Mit zurücklegen, Wahrscheinlichkeit fur jedes Ereignis gleich $X \sim B(n, p)$ $n =$ : Stichprobenumfang $p =$ : Wahrscheinlichkeit (p muss bei Binomialverteilung fest bleiben) $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ Eingabe Taschenrechner $\binom{n}{k} \hat{=} n  nC r  k$ $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow n \rightarrow p$
Binomialverteilung approximieren Die <b>Binomialverteilung</b> kann mit der <b>Poisson</b> Verteilung approximiert werden, dann gilt $\lambda = n \cdot p$ Die <b>Binomialverteilung</b> kann auch mit der <b>Normalverteilung</b> approximiert werden, wobei gilt $n \cdot p = \mu$ und $n \cdot p \cdot (1 - p) = \sigma^2$ , <b>bedingung ist</b> $X \sim B(n, p) \approx N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ falls gilt $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ Bei der approximation mit der Normalverteilung kann man eine <b>Stetigkeitskorrektur</b> verwenden um ein besseres Ergebnis zu erhalten $P(X \leq k) \approx F_N(R + 0,5)$ $P(X < k) \approx F_N(R - 0,5)$ $P(a \leq X \leq b) \approx F_N(b + 0,5) - F_N(a - 0,5)$ <b>Zusammengefasst</b> Falls $np$ und $n(1 - p)$ groß genug sind: $\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$$F_B(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Hypergeometrische Verteilung

Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis  
 $X \sim H(N, M, n)$   
 $n =$ : Stichprobenumfang  
 $N =$ : Gesamtzahl  
 $M =$ : Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft  
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Hypergeometrische Vert. approximieren

Die hypergeometrische Verteilung kann mit der **Binomialverteilung** approximiert werden. Dabei muss folgende Bedingung gelten  
 $\frac{n}{N} < 0,05$

Poisson Verteilung

Schlüsselwörter sind **Ereignisse pro Zeiteinheit**, zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne  
 $X \sim Pois(\lambda)$   
$$P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$
Eingabe Taschenrechner  
 $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow \lambda$

Näherung an Normalverteilung

Wenn  $\lambda$  groß genug ist kann die Verteilungsfunktion  $F_P(x)$  der Poissonverteilung durch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung  $F_N(x)$  mit den Parametern  $\mu = \lambda$  und  $\sigma^2 = \lambda$  genähert werden:  
$$F_P(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x + 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Geometrische Verteilung

$X \sim Geom(n, p)$   
$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$
Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe

Stetige Verteilungen

Dichtefunktion

Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur **Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung**  
Bedingungen der Dichtefunktion  
$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$
Die Dichtefunktion muss **nicht** stetig sein  
Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion  $F(x)$

Verteilungsfunktion

Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion  $F$ , die jedem  $x$  einer Zufallsvariable  $X$  genau eine Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$  zuordnet  
$$F(x) \rightarrow P(X \leq x)$$
Bedingungen der Verteilungsfunktion  
Die Verteilungsfunktion **muss** stetig sein  
Die Verteilungsfunktion **muss** monoton steigend sein  
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Normalverteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$   
Ist  $X \sim N(0, 1)$  dann heißt sie Standardnormalverteilt  
Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt  
Wenn  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  standardnormalverteilt  
Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden

Regeln für den Phi-Wert

$$P(X \leq k) = \Phi(k)$$
$$P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$$
$$P(X = k) = 0$$
 ("Integral ohne Breite!")  
allgemein folgt daraus, wenn  
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
dann gilt  
$$P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$$
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Additionssatz der Normalverteilung

Seien  $X$  und  $Y$  unabhängig und Normalverteilt, dann gilt:  
 $X + Y = N(\mu_X + \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$   
Ihre Summe ist ebenfalls Normalverteilt!  
Quantile der Normalverteilung  
Tabelliert ist das  $\beta$ -Quantil  $z_\beta$  der Normalverteilung  $N(0, 1)$   
$$P(X \leq z_\beta) = \beta$$
$$z_{1-\beta} = -z_\beta$$
Beispiel  
$$\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$$

Exponentialverteilung

Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte  
$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$
und daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion  
$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos

Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$
$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 1 & , t > b \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$$

Für Binomialverteilung

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Für geometrische Verteilung

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$E(T_i) = \frac{a+b}{2}$$

Allgemeine Regeln für den Erwartungswert

$$a, b \in \mathbb{R}$$
$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Varianz

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Varianz aus Erwartungswert berechnen

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Für Binomialverteilung

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Für geometrische Verteilung

$$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Allgemeine Regeln für Varianz

$$Var(X + b) = Var(X)$$
$$Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$$
wobei gilt:
$$Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y$$
bei unabhängigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist  $Cov(X, Y) = 0$  siehe unten.

Unabhängige Zufallsvariablen

Allgemeine Regeln

$$Var(X + const) = Var(X)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Wichtige Sätze der Stochastik

Zentraler Grenzwertsatz

$n$  groß (Anzahl der Zufallsvariablen)  $n \geq 30$   
 $X_i$  unabhängig und identisch verteilt  
 $\hat{=}$  haben die gleiche Verteilung  
$$E(X_i) = \mu$$
$$Var(X_i) = \sigma^2$$
$$\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$$
$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$
Manche Verteilungen verhalten sich in der Summe anders, zum Beispiel die Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt.  
Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz verwendet

ZGS - Definition

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen (nicht zwangsläufig Normalverteilt) mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Ihre Summe sei  $S = X_1 + \dots + X_n$  mit Erwartungswert  $n\mu$  und Varianz  $n\sigma^2$ . Es gilt für die zugehörige Zufallsvariable  $Z = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z \leq z) = \Phi(z)$

Induktive Statistik - Schätztheorie

Schätzfunktionen

Maximum-Likelihood-Schätzer

Vorbereitung: Falls  $F(x)$  gegen leite ab um  $f(x)$  zu erhalten ( $f(x_i)$  muss eine Dichtefunktion sein)  
1. Stelle auf:  $L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$   
*Tipp:* Wenn möglich alles was nicht von  $x_i$  abhängt aus der Summenfunktion ziehen.  
2. Wende an:  $\ln(L(x_1, \dots, x_n, \alpha))$   
3. Die Funktion nach dem Parameter  $\alpha$  ableiten und Nullsetzen:  $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$   
4. Nach  $\alpha$  auflösen, Das Ergebnis ist der Maximum-Likelihood-Schätzer

Konfidenzintervalle

Achtung die Standartabweichung  $\sigma$  bezieht sich im Folgenden auf die Grundgesamtheit! Es kann also vorkommen, das eine Standartabweichung gegeben ist, dann ist allerdings noch zu Prüfen ob es sich um die der Stichprobe oder der Grundgesamtheit handelt.  
Intervall für  $E(X)$  einer Normalverteilung

Ist  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  verteilt, dann ist  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

Bei bekannter Standardabweichung  $\sigma$

$$\left[ \bar{x} - z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
 $\bar{X}$  = arithmetisches Mittel, bzw erwartungstreuer Schätzer bei  $n$  unabhängigen Stichproben  
 $\alpha$  = Signifikanzwahrscheinlichkeit (Irrtumswahrscheinlichkeit)  
 $1 - \alpha$  = Vertrauensniveau  
Ist  $\alpha$  gegeben, berechne das Quantil  $z_{1-(\alpha/2)}$

Bei unbekannter Standardabweichung  $\sigma$

$$\left[ \bar{x} - t_{n-1;1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1;1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$
Anstatt  $\sigma^2$  wird der erwartungstreue Schätzer  $s$  verwendet  
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$
beziehungsweise  
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Induktive Statistik - Hypothesentest

Achtung die Standartabweichung  $\sigma$  bezieht sich im Folgenden auf die Grundgesamtheit! Es kann also vorkommen, das eine Standartabweichung gegeben ist, dann ist allerdings noch zu Prüfen ob es sich um die der Stichprobe oder der Grundgesamtheit handelt.

Tests für Lageparameter

Wähle Fall a) wenn Verteilung statt absoluter Wert gegeben (z.b. "jeder n-te...") und verfolge Stragie (3).  
Wähle Fall b) wenn  $\bar{X} \leq \mu_0$   
Wähle Fall c) wenn  $\bar{X} \geq \mu_0$

(1)Gauß-Test (Wählen wenn  $\sigma^2$  bekannt)

Ist ein Test für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei bekannter Standardabweichung  $\sigma$   
Wähle eine mögliche Hypothesenkombination:  
a)  $H_0 : \mu = \mu_0$   
b)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$   
c)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$

Wähle ein Signifikanzniveau  $\alpha$  (z.B.: 0.05)  
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang  $n$ , berechne  $\bar{x}$  und den zugehörigen standardisierten Prüfwert:  
$$z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$$

Bestimme das entsprechende Quantil der Standardnormalverteilung:  
a)  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  bzw. b)  $z_{1-\alpha}$  c)  $-z_{1-\alpha}$   
 $H_0$  ist zu verwerfen, falls  
a)  $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$   
b)  $z > z_{1-\alpha}$   
c)  $z < -z_{1-\alpha}$

Gauß-Test Tabellenform

	$H_0$	Ablehnungsbereich
	$\mu = \mu_0$	$ T  > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\bar{X} \leq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$T > Z_{1-\alpha}$
$\bar{X} \geq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$T < -Z_{1-\alpha}$

(2)t-Test (Wählen wenn  $\sigma^2$  nicht bekannt)

Wähle eine mögliche Hypothesenkombination:  
a)  $H_0 : \mu = \mu_0$

b)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$   
c)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$   
Wähle ein Signifikanzniveau  $\alpha$  (z.B.: 0.05)  
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang  $n$ , berechne daraus  $\bar{x}$  und  $s$  sowie den zugehörigen Prüfwert:  
$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}$$
Bestimme das entsprechende Quantil der  $t$ -Verteilung, wobei der  $n$ -Wert der Tabelle  $= (n - 1)$  ist, also die Stückzahl  $-1$  ist:  
a)  $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$  bzw. b)  $t_{n-1;1-\alpha}$  c)  $-t_{n-1;1-\alpha}$   
 $H_0$  ist zu verwerfen, falls  
a)  $|t| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$   
b)  $t > t_{n-1;1-\alpha}$   
c)  $t < -t_{n-1;1-\alpha}$

t-Test Tabellenform

	$H_0$	Ablehnungsbereich	
	$\mu = \mu_0$	$ T  > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$(n - 1)$
$\bar{X} \leq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$T > t_{1-\alpha}$	$(n - 1)$
$\bar{X} \geq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha}$	$(n - 1)$

(3)Wahrscheinlichkeit gegeben

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ite Stichprobe hat die Eigenschaft} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$X_i \sim B(1, p_0)$$
$$\Rightarrow \text{ZGS} \Rightarrow \sum X_i \overset{a}{\sim} N(np_0 | np_0(1 - p_0))$$
$$T = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$
Verwerfe oder nicht nach Regeln in Variante (1)

Tests für Streuungsmaße
$\chi^2$ - Anpassungstest
Der $\chi^2$ -Anpassungstest überprüft ob eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung einem bestimmten Verteilungsmodell folgt
$T = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^r \frac{N_i^2}{p_i} \right) - n$
wobei $N_i$ absolute Häufigkeit in Kategorie $r$ , $n$ ist der Stichprobenumfang. Alternativ
$T = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{n \cdot p_i}$
Das Ergebnis $T$ mit $\chi^2_{r-1;1-\alpha}$ Wert aus der Tabelle vergleichen
$T < \chi^2 =$ Hypothese wird nicht verworfen
<b>Algorithmus</b>
1. Hypothese aufstellen
2. $n$ und $r$ festlegen ( $n$ = Stichprobenumfang, $r$ = Anzahl der Klassen)
3. Verteilung auf welche getestet werden soll bestimmten
4. Alle $p_i$ berechnen (zu jeder Kategorie $r$ eines nach in 3. festgelegter Verteilung)
5. T berechnen.
6. $\chi^2$ mit T vergleichen.
Allgemeine Matheregeln
Potenzen und Logarithmen
Potenzgesetze
$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$
$\sqrt[n]{k} = k^{\frac{1}{n}}$

Logarithmusregeln
$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$
$\log 1 = 0$
$\log x \cdot y = \log x + \log y$
$-\log x = \log \frac{1}{x}$
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
$\log x^n = n \cdot \log x$
$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
$\log \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log x_i$
$\ln(e^x) = x$

Ableitungen und Integrale

Grundlegende Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$x \pm c$	1

Verknüpfte Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
wichtige Stammfunktionen	
$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$c$	$cx + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln  x  + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
$e^x$	$e^x + c$
Bestimmte Integrale	

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Summen und Produkte
$\prod_{i=1}^n a \cdot x_i = a^n \prod_{i=1}^n x_i$
$\sum_{i=1}^n a \cdot x_i = a \cdot \sum_{i=1}^n x_i$
Sonstiges
$\frac{b}{\alpha} = c \Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{c}$
$\sum_{i=1}^n -x_i = - \sum_{i=1}^n x_i$
$\ln(a \cdot \prod_{i=1}^n x_i) = \ln(a) + \sum_{i=1}^n \ln x_i$
$\frac{a}{b} / c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$

**Beispiele****Zentraler Grenzwertsatz**

**Angabe** Seien  $T_1, \dots, T_{102}$  unabhängige Zufallsvariablen, die alle exponentialverteilt sind mit Rate  $\lambda = 3$ . Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung von  $S := T_1 + \dots + T_{102}$  und  $\bar{T} := \frac{1}{102}S$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(S > 40)$  und  $P(0,3 < \bar{T} < 0,4)$

**Lösung** Fst  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  dann  $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$  und  $\text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$ .  
Also da  $T_i \sim \text{Exp}(3)$ :  $E(T_i) = \frac{1}{3}$  und  $\text{Var}(T_i) = \frac{1}{9}$ .  
Da

1.  $T_i$  unabhängig und identisch verteilt sind mit  $E(T_i) = \frac{1}{3}$  und  $\text{Var}(T_i) = \frac{1}{9}$
2.  $n = 102 \geq 30$

$$\xrightarrow{\text{ZGS}}$$

$$1) S = \sum_{i=1}^{102} T_i \sim N(102 \cdot \frac{1}{3} | 102 \cdot \frac{1}{9})$$

$$2) \bar{T} := \frac{1}{102} \cdot \sum_{i=1}^{102} T_i \sim N(\frac{1}{3} | \frac{1}{9}/102)$$

also  $S \sim N(34 | \frac{34}{3})$

Mittelwert von  $S$ : 34

Standardabweichung von  $S$ :  $\sqrt{\frac{34}{3}}$

also  $\bar{T} \sim N(\frac{1}{3} | \frac{1}{918})$

Mittelwert von  $\bar{T}$ :  $\frac{1}{3}$

Standardabweichung von  $\bar{T}$ :  $\sqrt{\frac{1}{918}}$

$$\begin{aligned} P(S > 40) &= 1 - P(S \leq 40) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{40 - 34}{\sqrt{\frac{34}{3}}}\right) \\ &= 1 - 0,962 \\ &= 0,038 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(0,3 < \bar{T} < 0,4) \\ &= \Phi\left(\frac{0,4 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{918}}}\right) - \Phi\left(\frac{0,3 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{918}}}\right) \\ &= \Phi(2,02) - \Phi(-1,01) \\ &= \Phi(2,02) - (1 - \Phi(1,01)) \\ &= \Phi(2,02) - 1 + \Phi(1,01) \\ &= 0,978 - 1 + 0,844 = 0,822 \end{aligned}$$