

Beschreibende Statistik
Lageparameter
Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + x_n)$ Das Arithmetische Mittel \bar{x} minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$
Geometrisches Mittel $\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$
Median $\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & , \text{gerade} \end{cases}$ Der Median \tilde{x} minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n x_i - t $
Streuungsmaße
(empirische) Varianz $var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ alternativ $var = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$
Standardabweichung $\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \tilde{x} \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$
Kovarianz und Korrelationskoeffizient
Kovarianz $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ alternativ $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$
Korrelationskoeffizient $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwi-

schen $-1 \leq r \leq +1$. Je näher r_{xy} bei -1 (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genauer schmiegen sich die Messwerte an eine Gerade an. Bei r_{xy} nahe 0 gibt es keinen <i>linearen</i> Zusammenhang zwischen den Merkmalen.
Regressionsrechnung
Regressionsgerade Variante 1 $y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$ Variante 2 $y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung Die Parameter a, b, c, \dots werden so gewählt, dass $Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2$ minimal ist $f_{a,b,c,\dots}(x_i)$ ist die Funktion dessen Parameter gesucht werden Nullsetzen der partiellen Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\partial}{\partial b} Q(a, b) = 0$ über die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern
Vergleich ermittelter Kurven Um Kurven zu vergleichen, einfach die ermittelten Parameter in die $Q(a, b, c, \dots)$ Funktion eingeben und Wert berechnen. Je kleiner der Wert desto besser passt die Kurve
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wahrscheinlichkeitsräume
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff $Ergebnismenge = \Omega$ Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unmögliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\}$ Ereignis $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ Gegenereignis

Elementarereignis einelementige Teilmenge von Ω Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$																
Laplace-Versuch Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$																
Bedingte Wahrscheinlichkeit																
Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$																
Formel von Bayes $P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$																
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $P(A) = \sum_{i=1}^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$																
Viel Felder Tafel																
<table><tr><td></td><td>A</td><td>\bar{A}</td><td>Σ</td></tr><tr><td>B</td><td>$P(A \cap B)$</td><td>$P(\bar{A} \cap B)$</td><td>$P(B)$</td></tr><tr><td>\bar{B}</td><td>$P(A \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{A} \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{B})$</td></tr><tr><td>Σ</td><td>$P(A)$</td><td>$P(\bar{A})$</td><td>1</td></tr></table> <p>Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten</p>		A	\bar{A}	Σ	B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$	\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$	Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1
	A	\bar{A}	Σ													
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$													
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$													
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1													
Allgemeine Regeln $P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$ Wenn A und B unabhängig, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A B) = P(A)$																

Zufallsvariablen Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Groe zuordnet $X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = k\}$ $X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = 3\}$ $X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) \leq k\}$
Diskrete Verteilungen
Binomialverteilung Mit zurücklegen, Wahrscheinlichkeit fur jedes Ereignis gleich $X \sim B(n, p)$ $n =$: Stichprobenumfang $p =$: Wahrscheinlichkeit (p muss bei Binomialverteilung fest bleiben) $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ Eingabe Taschenrechner $\binom{n}{k} \hat{=} n nC r k$ $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow n \rightarrow p$
Binomialverteilung approximieren Die Binomialverteilung kann mit der Poisson Verteilung approximiert werden, dann gilt $\lambda = n \cdot p$ Die Binomialverteilung kann auch mit der Normalverteilung approximiert werden, wobei gilt $n \cdot p = \mu$ und $n \cdot p \cdot (1 - p) = \sigma^2$, bedingung ist $X \sim B(n, p) \approx N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ falls gilt $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ Bei der approximation mit der Normalverteilung kann man eine Stetigkeitskorrektur verwenden um ein besseres Ergebnis zu erhalten $P(X \leq k) \approx F_N(R + 0,5)$ $P(X < k) \approx F_N(R - 0,5)$ $P(a \leq X \leq b) \approx F_N(b + 0,5) - F_N(a - 0,5)$ Zusammengefasst Falls np und n(1 - p) groß genug sind: $\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$$F_B(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Hypergeometrische Verteilung

Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis
 $X \sim H(N, M, n)$
 $n =$: Stichprobenumfang
 $N =$: Gesamtzahl
 $M =$: Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Hypergeometrische Vert. approximieren

Die hypergeometrische Verteilung kann mit der **Binomialverteilung** approximiert werden. Dabei muss folgende Bedingung gelten
 $\frac{n}{N} < 0,05$

Poisson Verteilung

Schlüsselwörter sind **Ereignisse pro Zeiteinheit**, zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne
 $X \sim Pois(\lambda)$
$$P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$
Eingabe Taschenrechner
 $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow \lambda$

Näherung an Normalverteilung

Wenn λ groß genug ist kann die Verteilungsfunktion $F_P(x)$ der Poissonverteilung durch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $F_N(x)$ mit den Parametern $\mu = \lambda$ und $\sigma^2 = \lambda$ genähert werden:
$$F_P(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Geometrische Verteilung

$X \sim Geom(n, p)$
$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$
Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 Auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe

Stetige Verteilungen

Dichtefunktion

Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur **Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung**
Bedingungen der Dichtefunktion
$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$
Die Dichtefunktion muss **nicht** stetig sein
Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $F(x)$

Verteilungsfunktion

Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion F , die jedem x einer Zufallsvariable X genau eine Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet
$$F(x) \rightarrow P(X \leq x)$$
Bedingungen der Verteilungsfunktion
Die Verteilungsfunktion **muss** stetig sein
Die Verteilungsfunktion **muss** monoton steigend sein
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Normalverteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Ist $X \sim N(0, 1)$ dann heißt sie Standardnormalverteilt
Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt
Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ standardnormalverteilt
Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden

Regeln für den Phi-Wert

$$P(X \leq k) = \Phi(k)$$
$$P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$$
$$P(X = k) = 0$$
 (“Integral ohne Breite!”)
allgemein folgt daraus, wenn
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
dann gilt
$$P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Additionssatz der Normalverteilung

Seien X und Y unabhängig und Normalverteilt, dann gilt:
 $X + Y = N(\mu_X + \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$
Ihre Summe ist ebenfalls Normalverteilt!
Quantile der Normalverteilung
Tabelliert ist das β -Quantil z_β der Normalverteilung $N(0, 1)$
$$P(X \leq z_\beta) = \beta$$
$$z_{1-\beta} = -z_\beta$$
Beispiel
$$\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$$

Exponentialverteilung

Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte
$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$
und daraus eribt sich die Verteilungsfunktion
$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos

Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 0 & , sonst \end{cases}$$
$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 1 & , t > b \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$$

Für Binomialverteilung

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Für geometrische Verteilung

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$E(T_i) = \frac{a+b}{2}$$

Allgemeine Regeln für den Erwartungswert

$$a, b \in \mathbb{R}$$
$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Varianz

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Varianz aus Erwartungswert berechnen

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Für Binomialverteilung

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Für geometrische Verteilung

$$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Allgemeine Regeln für Varianz

$$Var(X + b) = Var(X)$$
$$Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$$
wobei gilt:
$$Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y$$
bei unabhängigen Zufallsvariablen X und Y ist $Cov(X, Y) = 0$ siehe unten.

Unabhängige Zufallsvariablen

Allgemeine Regeln

$$Var(X + const) = Var(X)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Wichtige Sätze der Stochastik

Zentraler Grenzwertsatz

n groß (Anzahl der Zufallsvariablen) $n \geq 30$
 X_i unabhängig und identisch verteilt
 $\hat{=}$ haben die gleiche Verteilung
$$E(X_i) = \mu$$
$$Var(X_i) = \sigma^2$$
$$\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$$
$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$
Manche Verteilungen verhalten sich in der Summe anders, zum Beispiel die Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt.
Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz verwendet

ZGS - Definition

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen (nicht zwangsläufig Normalverteilt) mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Ihre Summe sei $S = X_1 + \dots + X_n$ mit Erwartungswert $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$. Es gilt für die zugehörige Zufallsvariable $Z = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z \leq z) = \Phi(z)$

Induktive Statistik - Schätztheorie

Schätzfunktionen

Maximum-Likelihood-Schätzer

Vorbereitung: Falls $F(x)$ gegen leite ab um $f(x)$ zu erhalten ($f(x_i)$ muss eine Dichtefunktion sein)
1. Stelle auf: $L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$
Tipp: Wenn möglich alles was nicht von x_i abhängt aus der Summenfunktion ziehen.
2. Wende an: $\ln(L(x_1, \dots, x_n, \alpha))$
3. Die Funktion nach dem Parameter α ableiten und Nullsetzen: $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$
4. Nach α auflösen, Das Ergebnis ist der Maximum-Likelihood-Schätzer

Konfidenzintervalle

Achtung die Standartabweichung σ bezieht sich im Folgenden auf die Grundgesamtheit! Es kann also vorkommen, das eine Standartabweichung gegeben ist, dann ist allerdings noch zu Prüfen ob es sich um die der Stichprobe oder der Grundgesamtheit handelt.
Intervall für $E(X)$ einer Normalverteilung

Ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, dann ist $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

Bei bekannter Standardabweichung σ

$$\left[\bar{x} - z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
 \bar{X} = arithmetisches Mittel, bzw erwartungstreuer Schätzer bei n unabhängigen Stichproben
 α = Signifikanzwahrscheinlichkeit (Irrtumswahrscheinlichkeit)
 $1 - \alpha$ = Vertrauensniveau
Ist α gegeben, berechne das Quantil $z_{1-(\alpha/2)}$

Bei unbekannter Standardabweichung σ

$$\left[\bar{x} - t_{n-1;1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1;1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$
Anstatt σ^2 wird der erwartungstreue Schätzer s verwendet
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$
beziehungsweise
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Induktive Statistik - Hypothesentest

Achtung die Standartabweichung σ bezieht sich im Folgenden auf die Grundgesamtheit! Es kann also vorkommen, das eine Standartabweichung gegeben ist, dann ist allerdings noch zu Prüfen ob es sich um die der Stichprobe oder der Grundgesamtheit handelt.

Tests für Lageparameter

Wähle Fall a) wenn Verteilung statt absoluter Wert gegeben (z.b. "jeder n-te...") und verfolge Stragie (3).
Wähle Fall b) wenn $\bar{X} \leq \mu_0$
Wähle Fall c) wenn $\bar{X} \geq \mu_0$

(1)Gauß-Test (Wählen wenn σ^2 bekannt)

Ist ein Test für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei bekannter Standardabweichung σ
Wähle eine mögliche Hypothesenkombination:
a) $H_0 : \mu = \mu_0$
b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$
c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$

Wähle ein Signifikanzniveau α (z.B.: 0.05)
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang n , berechne \bar{x} und den zugehörigen standardisierten Prüfwert:
$$z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$$

Bestimme das entsprechende Quantil der Standardnormalverteilung:
a) $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. b) $z_{1-\alpha}$ c) $-z_{1-\alpha}$
 H_0 ist zu verwerfen, falls
a) $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
b) $z > z_{1-\alpha}$
c) $z < -z_{1-\alpha}$

Gauß-Test Tabellenform

	H_0	Ablehnungsbereich
	$\mu = \mu_0$	$ T > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\bar{X} \leq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$T > Z_{1-\alpha}$
$\bar{X} \geq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$T < -Z_{1-\alpha}$

(2)t-Test (Wählen wenn σ^2 nicht bekannt)

Wähle eine mögliche Hypothesenkombination:
a) $H_0 : \mu = \mu_0$

b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$
c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
Wähle ein Signifikanzniveau α (z.B.: 0.05)
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang n , berechne daraus \bar{x} und s sowie den zugehörigen Prüfwert:
$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}$$
Bestimme das entsprechende Quantil der t -Verteilung, wobei der n -Wert der Tabelle $= (n - 1)$ ist, also die Stückzahl -1 ist:
a) $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. b) $t_{n-1;1-\alpha}$ c) $-t_{n-1;1-\alpha}$
 H_0 ist zu verwerfen, falls
a) $|t| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$
b) $t > t_{n-1;1-\alpha}$
c) $t < -t_{n-1;1-\alpha}$

t-Test Tabellenform

	H_0	Ablehnungsbereich	
	$\mu = \mu_0$	$ T > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$(n - 1)$
$\bar{X} \leq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$T > t_{1-\alpha}$	$(n - 1)$
$\bar{X} \geq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha}$	$(n - 1)$

(3)Wahrscheinlichkeit gegeben

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ite Stichprobe hat die Eigenschaft} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$X_i \sim B(1, p_0)$$
$$\Rightarrow \text{ZGS} \Rightarrow \sum X_i \overset{a}{\sim} N(np_0 | np_0(1 - p_0))$$
$$T = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$
Verwerfe oder nicht nach Regeln in Variante (1)

Tests für Streuungsmaße
χ^2 - Anpassungstest
Der χ^2 -Anpassungstest überprüft ob eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung einem bestimmten Verteilungsmodell folgt
$T = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^r \frac{N_i^2}{p_i} \right) - n$
wobei N_i absolute Häufigkeit in Kategorie r , n ist der Stichprobenumfang. Alternativ
$T = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{n \cdot p_i}$
Das Ergebnis T mit $\chi^2_{r-1;1-\alpha}$ Wert aus der Tabelle vergleichen
$T < \chi^2 =$ Hypothese wird nicht verworfen
Algorithmus
1. Hypothese aufstellen
2. n und r festlegen (n = Stichprobenumfang, r = Anzahl der Klassen)
3. Verteilung auf welche getestet werden soll bestimmten
4. Alle p_i berechnen (zu jeder Kategorie r eines nach in 3. festgelegter Verteilung)
5. T berechnen.
6. χ^2 mit T vergleichen.
Allgemeine Matheregeln
Potenzen und Logarithmen
Potenzgesetze
$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$
$\sqrt[n]{k} = k^{\frac{1}{n}}$

Logarithmusregeln
$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$
$\log 1 = 0$
$\log x \cdot y = \log x + \log y$
$-\log x = \log \frac{1}{x}$
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
$\log x^n = n \cdot \log x$
$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
$\log \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log x_i$
$\ln(e^x) = x$

Ableitungen und Integrale

Grundlegende Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$x \pm c$	1

Verknüpfte Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
wichtige Stammfunktionen	
$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
c	$cx + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln x + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
e^x	$e^x + c$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Summen und Produkte
$\prod_{i=1}^n a \cdot x_i = a^n \prod_{i=1}^n x_i$
$\sum_{i=1}^n a \cdot x_i = a \cdot \sum_{i=1}^n x_i$
Sonstiges
$\frac{b}{\alpha} = c \Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{c}$
$\sum_{i=1}^n -x_i = - \sum_{i=1}^n x_i$
$\ln(a \cdot \prod_{i=1}^n x_i) = \ln(a) + \sum_{i=1}^n \ln x_i$
$\frac{a}{b} / c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$

Beispiele**Zentraler Grenzwertsatz**

Angabe Seien T_1, \dots, T_{102} unabhängige Zufallsvariablen, die alle exponentialverteilt sind mit Rate $\lambda = 3$. Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung von $S := T_1 + \dots + T_{102}$ und $\bar{T} := \frac{1}{102}S$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(S > 40)$ und $P(0,3 < \bar{T} < 0,4)$

Lösung Fst $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ dann $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$ und $\text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$.
Also da $T_i \sim \text{Exp}(3)$: $E(T_i) = \frac{1}{3}$ und $\text{Var}(T_i) = \frac{1}{9}$.
Da

1. T_i unabhängig und identisch verteilt sind mit $E(T_i) = \frac{1}{3}$ und $\text{Var}(T_i) = \frac{1}{9}$
2. $n = 102 \geq 30$

$\xrightarrow{\text{ZGS}}$

$$1) S = \sum_{i=1}^{102} T_i \sim N\left(\overbrace{102 \cdot \frac{1}{3}}^{\mu_S} \mid \overbrace{102 \cdot \frac{1}{9}}^{\sigma_S^2}\right)$$

$$2) \bar{T} := \frac{1}{102} \cdot \sum_{i=1}^{102} T_i \sim N\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{9}/102\right)$$

also $S \sim N(34 \mid \frac{34}{3})$

Mittelwert von S : 34

Standardabweichung von S : $\sqrt{\frac{34}{3}}$

also $\bar{T} \sim N(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{918})$

Mittelwert von \bar{T} : $\frac{1}{3}$

Standardabweichung von \bar{T} : $\sqrt{\frac{1}{918}}$

$$P(0,3 < \bar{T} < 0,4)$$

$$\begin{aligned} &= \Phi\left(\frac{0,4 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{918}}}\right) - \Phi\left(\frac{0,3 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{918}}}\right) \\ &= \Phi(2,02) - \Phi(-1,01) \\ &= \Phi(2,02) - (1 - \Phi(1,01)) \\ &= \Phi(2,02) - 1 + \Phi(1,01) \\ &= 0,978 - 1 + 0,844 = 0,822 \end{aligned}$$

$$P(S > 40) = 1 - P(S \leq 40)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{40 - 34}{\sqrt{\frac{34}{3}}}\right)$$

$$= 1 - 0,962$$

$$= 0,038$$