

Beschreibende Statistik
Lageparameter
Arithmetisches Mittel
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$ <p>Das Arithmetische Mittel \bar{x} minimiert die Funktion</p> $g(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$
Geometrisches Mittel
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$
Median
$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & , \text{gerade} \end{cases}$ <p>Der Median \tilde{x} minimiert die Funktion</p> $g(t) = \sum_{i=1}^n x_i - t $
Streungsmaße
(empirische) Varianz
$var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ <p>alternativ</p> $var = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$
Standardabweichung
$\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \tilde{x} \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$
Kovarianz und Korrelationskoeffizient
Kovarianz
$cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ <p>alternativ</p> $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$
Korrelationskoeffizient
$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ <p>Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwi-</p>

schen $-1 \leq r \leq +1$. Je näher r_{xy} bei -1 (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genauer schmiegen sich die Messwerte an eine Gerade an. Bei r_{xy} nahe 0 gibt es keinen <i>linearen</i> Zusammenhang zwischen den Merkmalen.
Regressionsrechnung
Regressionsgerade
Variante 1
$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$
Variante 2
$y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung
Die Parameter a, b, c, \dots werden so gewählt, dass
$Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2$ <p>minimal ist</p> <p>$f_{a,b,c,\dots}(x_i)$ ist die Funktion dessen Parameter gesucht werden</p> <p>Nullsetzen der partiellen Ableitungen:</p> $\frac{\partial}{\partial a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\partial}{\partial b} Q(a, b) = 0$ <p>ber die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern</p>
Vergleich ermittelter Kurven
Um Kurven zu vergleichen, einfach die ermittelten Parameter in die $Q(a, b, c, \dots)$ Funktion eingeben und Wert berechnen. Je kleiner der Wert desto besser passt die Kurve
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wahrscheinlichkeitsräume
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff
$Ergebnismenge = \Omega$ <p>Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$</p> <p>Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge</p> $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unm\"ogliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\} \text{ Ereignis}$ $\bar{A} = \{4, 5, 6\} \text{ Gegenereignis}$

Elementarereignis																
einelementige Teilmenge von Ω Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$																
Laplace-Versuch																
Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$																
Bedingte Wahrscheinlichkeit																
Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$																
Formel von Bayes																
$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$ Mit ersetzung von $P(B)$ durch den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B A) \cdot P(A) + P(B \bar{A}) \cdot P(\bar{A})}$																
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit																
$P(A) = \sum_{i=1}^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$ $P(A) = P(A B) \cdot P(B) + P(A \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$																
Viel Felder Tafel																
<table><tr><td></td><td>A</td><td>\bar{A}</td><td>Σ</td></tr><tr><td>B</td><td>$P(A \cap B)$</td><td>$P(\bar{A} \cap B)$</td><td>$P(B)$</td></tr><tr><td>\bar{B}</td><td>$P(A \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{A} \cap \bar{B})$</td><td>$P(\bar{B})$</td></tr><tr><td>Σ</td><td>$P(A)$</td><td>$P(\bar{A})$</td><td>1</td></tr></table> <p>Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten</p>		A	\bar{A}	Σ	B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$	\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$	Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1
	A	\bar{A}	Σ													
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$													
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$													
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1													
Allgemeine Regeln																
$P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$ Wenn A und B unabhängig, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$																

$P(A B) = P(A)$
Zufallsvariablen
Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Größe zuordnet
$X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = k\}$ $X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = 3\}$ $X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) \leq k\}$
Diskrete Verteilungen
Binomialverteilung
Mit zururcklegen, Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis gleich
$X \sim B(n, p)$ <p>$n =$: Stichprobenumfang $p =$: Wahrscheinlichkeit (p muss bei Binomialverteilung fest bleiben)</p> $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ <p>Eingabe Taschenrechner</p> $\binom{n}{k} \hat{=} n nC r k$ $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow n \rightarrow p$
Binomialverteilung approximieren
Die Binomialverteilung kann mit der Poisson Verteilung approximiert werden, dann gilt
$\lambda = n \cdot p$ <p>Die Binomialverteilung kann auch mit der Normalverteilung approximiert werden, wobei gilt $n \cdot p = \mu$ und $n \cdot p \cdot (1 - p) = \sigma^2$, bedingung ist</p> $X \sim B(n, p) \approx N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ <p>falls gilt</p> $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ <p>Bei der approximation mit der Normalverteilung kann man eine Stetigkeitskorrektur verwenden um ein besseres Ergebnis zu erhalten</p> $P(X \leq k) \approx F_N(R + 0,5)$ $P(X < k) \approx F_N(R - 0,5)$ $P(a \leq X \leq b) \approx F_N(b + 0,5) - F_N(a - 0,5)$ <p>Zusammengefasst</p> <p>Falls np und $n(1 - p)$ groß genug sind:</p>

$\mu = n \cdot p \text{ und } \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$ $F_B(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
Hypergeometrische Verteilung
Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis $X \sim H(N, M, n)$ n =: Stichprobenumfang N =: Gesamtzahl M =: Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
Hypergeometrische Vert. approximieren
Die hypergeometrische Verteilung kann mit der Binomialverteilung approximiert werden. Dabei muss folgende Bedingung gelten $\frac{n}{N} < 0,05$
Poisson Verteilung
Schlüsselwörter sind Ereignisse pro Zeiteinheit , zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne oder Durchschnitt Ereignisse x pro y (z.B.: Staubkörner pro cm ²) $X \sim Pois(\lambda)$ $P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$ $P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$ Eingabe Taschenrechner $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow \lambda$
Näherung an Normalverteilung
Wenn λ groß genug ist kann die Verteilungsfunktion $F_P(x)$ der Poissonverteilung durch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $F_N(x)$ mit den Parametern $\mu = \lambda$ und $\sigma^2 = \lambda$ genähert werden: $F_P(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$
Geometrische Verteilung

$X \sim Geom(n, p)$ $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$ Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 Auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe
Stetige Verteilungen
Dichtefunktion
Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung Bedingungen der Dichtefunktion $f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ Die Dichtefunktion muss nicht stetig sein Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion $F(x)$
Verteilungsfunktion
Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion F , die jedem x einer Zufallsvariable X genau eine Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zuordnet $F(x) \rightarrow P(X \leq x)$ $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ Bedingungen der Verteilungsfunktion Die Verteilungsfunktion muss stetig sein Die Verteilungsfunktion muss monoton steigend sein $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
Normalverteilung
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ Ist $X \sim N(0, 1)$ dann heißt sie Standardnormalverteilt Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ standardnormalverteilt Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden
Regeln für den Phi-Wert
$P(X \leq k) = \Phi(k)$ $P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$ $P(X = k) = 0$ ("Integral ohne Breite!")

allgemein folgt daraus, wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dann gilt $P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
Additionssatz der Normalverteilung
Seien X und Y unabhängig und Normalverteilt, dann gilt: $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ Ihre Summe ist ebenfalls Normalverteilt!
Quantile der Normalverteilung
Tabelliert ist das β -Quantil z_β der Normalverteilung $N(0, 1)$ $P(X \leq z_\beta) = \beta$ $z_{1-\beta} = -z_\beta$ Beispiel $\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$
Exponentialverteilung
$X \sim Exp(\lambda)$ Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte $f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$ und daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion $F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos
Gleichverteilung(Rechteckverteilung)
$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 0 & , sonst \end{cases}$ $F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 1 & , t > b \end{cases}$

Erwartungswert und Varianz
Erwartungswert
Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung
$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$ $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$
Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T
$E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$
Für Binomialverteilung
$\mu = E(X) = n \cdot p$
Für geometrische Verteilung
$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung
$\mu = E(X) = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung
$E(S_n) = E(X_1 + ... + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$
Für Gleichverteilung(Rechteckverteilung)
$E(T_i) = \frac{a+b}{2}$
Allgemeine Regeln für den Erwartungswert
$a, b \in \mathbb{R}$ $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$
Varianz
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung
$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
Varianz aus Erwartungswert berechnen
$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$
Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T
$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

Für Binomialverteilung
$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
Für geometrische Verteilung
$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung
$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung
$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
Für Gleichverteilung(Rechteckverteilung)
$Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Allgemeine Regeln für Varianz
$Var(X + b) = Var(X)$ $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$ $Var(X) \geq 0$ $Var(X + Y) =$ $Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$ wobei gilt: $Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) =$ $E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y$ bei unabhängigen Zufallsvariablen X und Y ist $Cov(X, Y) = 0$ siehe unten.
Unabhängige Zufallsvariablen
Allgemeine Regeln
$Var(X + const) = Var(X)$ $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
Wichtige Sätze der Stochastik
Zentraler Grenzwertsatz
n groß (Anzahl der Zufallsvariablen) $n \geq 30$ X_i unabhängig und identisch verteilt $\hat{=}$ haben die gleiche Verteilung $E(X_i) = \mu$ $Var(X_i) = \sigma^2$ Fall a) bei Summierten Ereignisse, Fall b) für Durchschnitt a) $\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ b) $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ Manche Verteilungen verhalten sich in der Summe anders, zum Beispiel die Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt. Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz verwendet

ZGS Algorithmus
n : Anzahl der Zufallsvariablen (Stichproben) bestimmen, σ^2 : Varianz bestimmen, μ : Erwartungswert (Mittelwert) bestimmen Wonach wird gesucht? Summe oder Durchschnitt
1. Summe: Erwartungswert der Summe bestimmen mit $E(S) = n \cdot \mu$ alternativ und gleich- wertig ist: $E(S) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ Falls notwendig Varianz aus Erwartungs- wert berechnen: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ Wahrscheinlichkeit normalverteilt berech- nen mit $N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$
2. Durchschnitt: Durchschnittserwartungswert bestimmen entwder gegeben oder $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E(X_i)$ Falls notwendig (nicht gegeben) Varianz berechnen. Wahrscheinlichkeit normalverteilt berech- nen mit $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ Hinweis Normalverteilung berechnen: $P(X \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$
ZGS - Definition
Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen (nicht zwangsläufig Normalverteilt) mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Ihre Summe sei $S = X_1 + ... + X_n$ mit Erwartungswert $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$. Es gilt für die zugehörige Zufallsvariable $Z = \frac{S-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z \leq z) = \Phi(z)$
Induktive Statistik - Schätztheorie

Schätzfunktionen
Maximum-Likelihood-Schätzer
Vorbereitung: Falls $F(x)$ gegen leite ab um $f(x)$ zu erhalten ($f(x_i)$ muss eine Dichtefunktion sein)
1. Stelle auf: $L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ <i>Tipp:</i> Wenn möglich alles was nicht von x_i abhängt aus der Summenfunktion ziehen. 2. Wende an: $\ln(L(x_1, \dots, x_n, \alpha))$ 3. Die Funktion nach dem Parameter α ableiten und Nullsetzen: $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$ 4. Nach α auflösen, Das Ergebnis ist der Maximum-Likelihood-Schätzer
Konfidenzintervalle
Achtung die Standartabweichung σ bezieht sich im Folgenden auf die Grundgesamtheit! Es kann also vorkommen, das eine Standar- tabweichung gegeben ist, dann ist allerdings noch zu Prüfen ob es sich um die der Stich- probe oder der Grundgesamtheit handelt. Mit α in den Intervallformeln ist im- mer die Irrtumswahrscheinlichkeit gemeint.
Intervall für E(X) einer Normalverteilung
Wenn nach Schätzintervall des Erwartungswerts gefragt ist. Prüfen ob Sigma bekannt oder nicht und danach Formel wählen. Ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, dann ist $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
Bei bekannter Standardabweichung σ
$\left[\bar{x} - z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ \bar{X} = arithmetisches Mittel, bzw erwartungsstreu Schätzer bei n unabhängigen Stichproben α = Signifikanzwahrscheinlichkeit (Irrtumswahrscheinlichkeit) oder α = 1-Konfidenzniveau alternativ: $1 - \alpha$ = Konfidenzniveau (Vertrauensniveau) Ist α bekannt, berechne das Quantil $z_{1-(\alpha/2)}$
Bei unbekannter Standardabweichung σ
$\left[\bar{x} - t_{n-1;1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1;1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$

Anstatt σ^2 wird der erwartungstreu Schätzer s verwendet $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ beziehungsweise $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$
Intervall für Var(X) einer Normalverteilung
Wenn nach Schätzintervall der Varianz gefragt ist. $\left[\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}} \right]$
Induktive Statistik - Hypothesentest
Achtung die Standartabweichung σ bezieht sich im Folgenden auf die Grundgesamtheit! Es kann also vorkommen, das eine Standar- tabweichung gegeben ist, dann ist allerdings noch zu Prüfen ob es sich um die der Stich- probe oder der Grundgesamtheit handelt.
Tests für Lageparameter
Wähle Fall a) wenn Verteilung statt absoluter Wert gegeben (z.b. "jeder n-te...") und verfolge Stragie (3). Wähle Fall b) wenn $\bar{X} \leq \mu_0$ Wähle Fall c) wenn $\bar{X} \geq \mu_0$
(1)Gauß-Test (Wählen wenn σ^2 bekannt)
Ist ein Test für den Erwartungswert einer <i>Normalverteilung</i> bei bekannter Standardabweichung σ Wähle eine mögliche Hypothesenkombination: a) $H_0 : \mu = \mu_0$ b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ Wähle ein Signifikanzniveau α (z.B.: 0.05) Ziehe eine Stichprobe vom Umfang n , berechne \bar{x} und den zugehörigen standardisierten Prüfwert: $z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}$ Bestimme das entsprechende Quantil der Standartnormalverteilung: a) $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. b) $z_{1-\alpha}$ c) $-z_{1-\alpha}$ H_0 ist zu verwerfen, falls a) $ z > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

b) $z > z_{1-\alpha}$
c) $z < -z_{1-\alpha}$

Gauß-Test Tabellenform		
	H_0	Ablehnungsbereich
	$\mu = \mu_0$	$ T > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\bar{X} \leq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$T > Z_{1-\alpha}$
$\bar{X} \geq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$T < -Z_{1-\alpha}$

(2)t-Test (Wählen wenn σ^2 **nicht** bekannt)
Wähle eine mögliche Hypothesenkombination:
a) $H_0 : \mu = \mu_0$
b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$
c) $H_0 : \mu \geq \mu_0$
Wähle ein Signifikanzniveau α (z.B.: 0.05)
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang n , berechne daraus \bar{x} und s sowie den zugehörigen Prüfwert:
$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}$$

Bestimme das entsprechende Quantil der t -Verteilung, wobei der n -Wert der Tabelle $= (n - 1)$ ist, also die Stückzahl -1 ist:
a) $t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. b) $t_{n-1; 1-\alpha}$ c) $-t_{n-1; 1-\alpha}$
 H_0 ist zu verwerfen, falls
a) $|t| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$
b) $t > t_{n-1; 1-\alpha}$
c) $t < -t_{n-1; 1-\alpha}$

t-Test Tabellenform			
	H_0	Ablehnungsbereich	
	$\mu = \mu_0$	$ T > t_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$(n - 1)$
$\bar{X} \leq \mu_0$	$\mu \leq \mu_0$	$T > t_{1-\alpha}$	$(n - 1)$
$\bar{X} \geq \mu_0$	$\mu \geq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha}$	$(n - 1)$

(3)Wahrscheinlichkeit gegeben

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ite Stichprobe hat die Eigenschaft} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{ZGS} \Rightarrow \sum X_i \overset{a}{\sim} N(np_0 | np_0(1 - p_0))$$
$$T = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

Verwerfe oder nicht nach Regeln in Variante (1)

Tests für Streuungsmaße
 χ^2 - Anpassungstest
Der χ^2 -Anpassungstest überprüft ob eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung einem bestimmten Verteilungsmodell folgt
$$T = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^r \frac{N_i^2}{p_i} \right) - n$$
wobei N_i absolute Häufigkeit in Kategorie r , n ist der Stichprobenumfang. Alternativ
$$T = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{n \cdot p_i}$$
Das Ergebnis T mit $\chi^2_{r-1; 1-\alpha}$ Wert aus der Tabelle vergleichen
 $T < \chi^2 =$ Hypothese wird nicht verworfen

Algorithmus
1. Hypothese aufstellen
2. n und r festlegen (n = Stichprobenumfang, r = Anzahl der Klassen)
3. Verteilung auf welche getestet werden soll bestimmen
4. Alle p_i berechnen (zu jeder Kategorie r eines nach in 3. festgelegter Verteilung)
5. T berechnen.
6. χ^2 mit T vergleichen.

Allgemeine Matheregeln	
Potenzen und Logarithmen	
Potenzgesetze	
$a^0 = 1$	
$a^1 = a$	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	
$\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$	
$\sqrt[n]{k} = k^{\frac{1}{n}}$	

Logarithmusregeln	
$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$	
$\log 1 = 0$	
$\log x \cdot y = \log x + \log y$	
$-\log x = \log \frac{1}{x}$	
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$	
$\log x^n = n \cdot \log x$	
$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$	
$\log \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log x_i$	
$\ln(e^x) = x$	

Ableitungen und Integrale

Grundlegende Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$x \pm c$	1

Verknüpfte Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

wichtige Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
c	$cx + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln x + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
e^x	$e^x + c$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Summen und Produkte	
$\prod_{i=1}^n a \cdot x_i = a^n \prod_{i=1}^n x_i$	
$\sum_{i=1}^n a \cdot x_i = a \cdot \sum_{i=1}^n x_i$	

Sonstiges

$\frac{b}{\alpha} = c \Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{c}$
$\sum_{i=1}^n -x_i = - \sum_{i=1}^n x_i$
$\ln(a \cdot \prod_{i=1}^n x_i) = \ln(a) + \sum_{i=1}^n \ln x_i$
$\frac{a}{b} / c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$

Beispiele**Zentraler Grenzwertsatz**

Angabe Seien T_1, \dots, T_{102} unabhängige Zufallsvariablen, die alle exponentialverteilt sind mit Rate $\lambda = 3$. Berechnen Sie Mittelwert und Standardabweichung von $S := T_1 + \dots + T_{102}$ und $\bar{T} := \frac{1}{102}S$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(S > 40)$ und $P(0,3 < \bar{T} < 0,4)$

Lösung Fst $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ dann $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$ und $\text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$.
Also da $T_i \sim \text{Exp}(3)$: $E(T_i) = \frac{1}{3}$ und $\text{Var}(T_i) = \frac{1}{9}$.
Da

1. T_i unabhängig und identisch verteilt sind mit $E(T_i) = \frac{1}{3}$ und $\text{Var}(T_i) = \frac{1}{9}$
2. $n = 102 \geq 30$

$\xrightarrow{\text{ZGS}}$

$$1) S = \sum_{i=1}^{102} T_i \sim N\left(\overbrace{102 \cdot \frac{1}{3}}^{\mu_S} \mid \overbrace{102 \cdot \frac{1}{9}}^{\sigma_S^2}\right)$$

$$2) \bar{T} := \frac{1}{102} \cdot \sum_{i=1}^{102} T_i \sim N\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{9}/102\right)$$

also $S \sim N(34 \mid \frac{34}{3})$

Mittelwert von S : 34

Standardabweichung von S : $\sqrt{\frac{34}{3}}$

also $\bar{T} \sim N(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{918})$

Mittelwert von \bar{T} : $\frac{1}{3}$

Standardabweichung von \bar{T} : $\sqrt{\frac{1}{918}}$

$$P(0,3 < \bar{T} < 0,4)$$

$$\begin{aligned} &= \Phi\left(\frac{0,4 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{918}}}\right) - \Phi\left(\frac{0,3 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{918}}}\right) \\ &= \Phi(2,02) - \Phi(-1,01) \\ &= \Phi(2,02) - (1 - \Phi(1,01)) \\ &= \Phi(2,02) - 1 + \Phi(1,01) \\ &= 0,978 - 1 + 0,844 = 0,822 \end{aligned}$$

$$P(S > 40) = 1 - P(S \leq 40)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{40 - 34}{\sqrt{\frac{34}{3}}}\right)$$

$$= 1 - 0,962$$

$$= 0,038$$