

Beschreibende Statistik
Lageparameter
Arithmetisches Mittel
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + x_n)$
Geometrisches Mittel
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$
Median
$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) \end{cases}$
Der Median \tilde{x} minimiert die Funktion $\sum_{i=1}^n x_i - \tilde{x} $
Streuungsmaße
(empirische) Varianz
$var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung
$\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \tilde{x} \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$
Kovarianz und Korrelationskoeffizient
Kovarianz
$cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
Korrelationskoeffizient
$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$
Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwischen $-1 \leq r \leq 1$
Regressionsrechnung
Regressionsgerade
Variante 1
$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$
Variante 2

$y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung
Die Parameter a, b, c, \dots werden so gew\"ahlt, dass
$Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - f_{a,b,c,\dots}(x_i))^2$
minimal ist
Nullsetzen der partiellen Ableitungen:
$\frac{\delta}{\delta a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\delta}{\delta b} Q(a, b) = 0$
Über die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern
Wahrscheinlichkeitstheorie
Wahrscheinlichkeitsräume
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff
$Ergebnismenge = \Omega$
Beispiel W\"urfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge
$\emptyset \subseteq \Omega \hat{=}$ unm\"ogliches Ereignis
$\Omega \subseteq \Omega \hat{=}$ sicheres Ereignis
$A = \{1, 2, 3\}$ Ereignis
$\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ Gegenereignis
Elementarereignis
einelementige Teilmenge von Ω
Ereignis, eine 3 werfen
$B = \{3\}$
$P(\{3\}) = \frac{1}{6}$
Laplace-Versuch
Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich
$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$
$P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Bedingte Wahrscheinlichkeit
Bedingte Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit f\"ur A unter der Bedingung B
$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
$P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$
Formel von Bayes

$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
$P(A) = \sum_i^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$
Allgemeine Regeln
$P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$
$P(A \cap B) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$
Wenn A und B unabh\"angig, dann gilt
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Zufallsvariablen
Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem m\"oglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Gr\"oÙe zuordnet
$X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = k\}$
$X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) = 3\}$
$X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega X(\omega) \leq k\}$
Diskrete Verteilungen
Binomialverteilung
Mit zur\"ucklegen, Wahrscheinlichkeit f\"ur jedes Ereignis gleich
$X \sim B(n, p)$
$n =$: Stichprobenumfang
$p =$: Wahrscheinlichkeit
(p muss bei Binomialverteilung fest bleiben)
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$
$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
Eingabe Taschenrechner
$\binom{n}{k} \hat{= } n nC r k$
Binomialverteilung kann mit der Normalverteilung approximiert werden, bedingung ist
$X \sim B(n, p) \stackrel{a}{=} N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$
falls gilt
$n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$
Hypergeometrische Verteilung
Ohne zur\"ucklegen, Wahrscheinlichkeit \u00c4ndert sich nach jedem Ereignis
$X \sim H(N, M, n)$

$n =$: Stichprobenumfang
$N =$: Gesamtzahl
$M =$: Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft
$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$
$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
Poisson Verteilung
$X \sim Pois(\lambda)$
$P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$
Geometrische Verteilung
$X \sim Geom(n, p)$
$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p^n$
Beispiel: Ein W\"urfel wird so lange gew\"urfelt bis eine 6 auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der W\"urfe
Stetige Verteilungen
Normalverteilung
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Ist $X \sim N(0, 1)$ dann heiÙt sie Standardnormalverteilt
Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heiÙt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt
Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ standardnormalverteilt
Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden
$P(X \leq k) = \Phi(k)$
$P(X = k) = \Phi(k) = 0$
$P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$
allgemein gilt
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$P(X \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$
Quantile der Normalverteilung
Tabelliert ist das β -Quantil z_β der Normalverteilung $N(0, 1)$
$P(X \leq z_\beta) = \beta$
$z_{1-\beta} = -z_\beta$
Beispiel
$\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$

Erwartungswert und Varianz
Erwartungswert
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung
$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
Für Binomialverteilung
$\mu = E(X) = n \cdot p$
Für geometrische Verteilung
$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung
$\mu = E(X) = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung
$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$
Allgemeine Regeln für den Erwartungswert
$a, b \in \mathbb{R}$ $E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ $E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$
Varianz
Zufallsvariable mit diskreter Verteilung
$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
Zufallsvariable mit Dichtefunktion f
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
Für Binomialverteilung
$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$
Für geometrische Verteilung
$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$
Für Poissonverteilung
$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$
Für Hypergeometrischeverteilung
$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
Allgemeine Regeln für Varianz
$Var(X + Y) =$ $Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$

Unabhängiger Zufallsvariablen	
Allgemeine Regeln	
$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$	
Allgemeine Matheregeln	
Ableitungen und Integrale	
Grundlegende Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Verknüpfte Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$[f(g(x))]$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
wichtige Stammfunktionen	
$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n-1} \cdot x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$ \ln x + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
e^x	$e^x + c$