Beschreibende Statistik

Lageparameter

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + a_n)$$

Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

Median

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) \end{cases}$$

Der Median $\tilde{x}$ minimiert die Funktion

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

Streungsmaße

(empirische) Varianz

$$var = \sigma^2 = {s_n}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{{s_n}^2}$$

Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Kovarianz

$$cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{1}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

Korrelationskoeffizent

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

Der Korrelationskoeffizent liegt immer zwischen $-1 \leq r \leq 1$

Regressionsrechnung

Regressionsgerade

Variante 1

$$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{{\sigma_x}^2} \cdot (x - \bar{x})$$

Variante 2

$$y = b + a \cdot x$$

$$a = \frac{S_{xy}}{{\sigma_x}^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$$

Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitsräume

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

$$Ergebnismenge = \Omega$$

Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge

$\varnothing \subseteq \Omega \mathrel{\widehat{=}}$ unmögliches Ereignis

$\Omega \subseteq \Omega \mathrel{\widehat{=}}$ sicheres Ereignis

$A = \{1, 2, 3\}$ Ereignis

$\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ Gegenereignis

Elementarereignis

einelementige Teilmenge von Ω

Ereignis, eine 3 werfen

$$B = \{3\}$$

$$P(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

Laplace-Versuch

Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{i}^{n}(P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Allgemeine Regeln

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \bar{\cup} B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A \bar{\cap} B) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

Wenn A und B unabhängig, dann gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Größe zuordnet

$$X = k \mathrel{\widehat{=}} \{\omega \in \Omega | X(\omega = k\}$$

$$X = 3 \mathrel{\widehat{=}} \{\omega \in \Omega | X(\omega = 3\}$$

$$X \leq k \mathrel{\widehat{=}} \{\omega \in \Omega | X(\omega \leq k\}$$

Diskrete Verteilungen

Binomialverteilung

Mit zurücklegen, Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis gleich

$$X \sim B(n, p)$$

$n =$: Stichprobenumfang

$p =$: Wahrscheinlichkeit

(p muss bei Binomialverteilung fest bleiben)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$$

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Eingabe Taschenrechner

$$\binom{n}{k} \mathrel{\widehat{=}} n \, |nCr| \, k$$

Binomialverteilung kann mit der Normalverteilung approximiert werden, bedingung ist

$$X \sim B(n, p) \stackrel{a}{=} N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$$

falls gilt

$$n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$$

Hypergeometrische Verteilung

Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis

$$X \sim H(N, M, n)$$

$n =$: Stichprobenumfang

$N =$: Gesamtzahl

$M =$: Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Poisson Verteilung

$$X \sim Pois(\lambda)$$

$$P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Geometrische Verteilung

$$X \sim Geom(n, p)$$

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p^n$$

Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 Auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe

Stetige Verteilungen

Normalverteilung

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Ist $X \sim N(0, 1)$ dann heißt sie Standardnormalverteilt

Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt

Wenn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt ist
dann ist die standardisierte Zufallsvariable
$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ standardnormalverteilt

Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden

$$P(X \leq k) = \Phi(k)$$

$$P(X = k) = \Phi(k) = 0$$

$$P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$$

allgemein gilt

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$P(X \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$$

Quantile der Normalverteilung

Tabelliert ist das $\beta-$Quantil z_β der Normalverteilung $N(0,1)$

$$P(X \leq z_\beta) = \beta$$
$$z_{1-\beta} = -z_\beta$$

Beispiel

$$\beta = 0.9 => z_\beta = 1.28155$$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^{n}(x_i \cdot p_i)$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Für Binomialverteilung

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Für geometrische Verteilung

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$E(S_n) = E(X_1 + ... + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Allgemeine Regeln für den Erwartungswert

$$a, b \in \mathbb{R}$$
$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Varianz

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum(x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Für Binomialverteilung

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Für geometrische Verteilung

$$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Allgemeine Regeln für Varianz

$$Var(X + Y) =$$
$$Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$$

Unabhängiger Zufallsvariablen

Allgemeine Regeln

$$E(X \cdot Y = E(X) \cdot E(Y)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$