

<b>Beschreibende Statistik</b>
<b>Lageparameter</b>
Arithmetisches Mittel
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + a_n)$ <p>Das Arithmetische Mittel <math>\bar{x}</math> minimiert die Funktion</p> $g(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$
Geometrisches Mittel
$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$
Median
$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}}) & , \text{gerade} \end{cases}$ <p>Der Median <math>\tilde{x}</math> minimiert die Funktion</p> $g(t) = \sum_{i=1}^n  x_i - t $
<b>Streungsmaße</b>
(empirische) Varianz
$var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ <p>alternativ</p> $var = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$
Standardabweichung
$\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - \tilde{x}  \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - \bar{x}  \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$
<b>Kovarianz und Korrelationskoeffizient</b>
Kovarianz
$cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ <p>alternativ</p> $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$
Korrelationskoeffizient
$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ <p>Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwi-</p>

schen $-1 \leq r \leq +1$ . Je näher $r_{xy}$ bei $-1$ (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genauer schmiegen sich die Messwerte an eine Gerade an. Bei $r_{xy}$ nahe 0 gibt es keinen <i>linearen</i> Zusammenhang zwischen den Merkmalen.
<b>Regressionsrechnung</b>
Regressionsgerade
Variante 1
$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$
Variante 2
$y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung
Die Parameter $a, b, c, \dots$ werden so gewählt, dass
$Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2$ <p>minimal ist</p> <p><math>f_{a,b,c,\dots}(x_i)</math> ist die Funktion dessen Parameter gesucht werden</p> <p>Nullsetzen der partiellen Ableitungen:</p> $\frac{\partial}{\partial a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\partial}{\partial b} Q(a, b) = 0$ <p>ber die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern</p>
Vergleich ermittelter Kurven
Um Kurven zu vergleichen, einfach die ermittelten Parameter in die $Q(a, b, c, \dots)$ Funktion eingeben und Wert berechnen. Je kleiner der Wert desto besser passt die Kurve
<b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>
<b>Wahrscheinlichkeitsräume</b>
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff
$Ergebnismenge = \Omega$ <p>Beispiel Würfel <math>\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}</math></p> <p>Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge</p> $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unm\"ogliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\} \text{ Ereignis}$ $\bar{A} = \{4, 5, 6\} \text{ Gegenereignis}$

Elementarereignis																
einelementige Teilmenge von $\Omega$ Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$																
Laplace-Versuch																
Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$																
Bedingte Wahrscheinlichkeit																
Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$																
Formel von Bayes																
$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$																
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit																
$P(A) = \sum_{i=1}^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$																
Viel Felder Tafel																
<table><tr><td></td><td>A</td><td><math>\bar{A}</math></td><td><math>\Sigma</math></td></tr><tr><td>B</td><td><math>P(A \cap B)</math></td><td><math>P(\bar{A} \cap B)</math></td><td><math>P(B)</math></td></tr><tr><td><math>\bar{B}</math></td><td><math>P(A \cap \bar{B})</math></td><td><math>P(\bar{A} \cap \bar{B})</math></td><td><math>P(\bar{B})</math></td></tr><tr><td><math>\Sigma</math></td><td><math>P(A)</math></td><td><math>P(\bar{A})</math></td><td>1</td></tr></table> <p>Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten</p>		A	$\bar{A}$	$\Sigma$	B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$	$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$	$\Sigma$	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1
	A	$\bar{A}$	$\Sigma$													
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$													
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$													
$\Sigma$	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1													
Allgemeine Regeln																
$P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$ Wenn A und B unabhängig, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A B) = P(A)$																

<b>Zufallsvariablen</b>
Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Größe zuordnet
$X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) = k\}$ $X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) = 3\}$ $X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) \leq k\}$
<b>Diskrete Verteilungen</b>
Binomialverteilung
Mit zururcklegen, Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis gleich
$X \sim B(n, p)$ <p><math>n</math> =: Stichprobenumfang <math>p</math> =: Wahrscheinlichkeit (<math>p</math> muss bei Binomialverteilung fest bleiben)</p> $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ <p>oder</p> $P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ <p>mit Grundgesamtheit <math>N</math>, <math>M</math> aus <math>N</math> mit besonderer Eigenschaft, <math>n</math> entnommen ohne zururcklegen, <math>X</math> = Anzahl der Elemente in der Stichprobe mit der gewünschte Eigenschaft, <math>x = 0, \dots, n</math></p> $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ <p>Eingabe Taschenrechner</p> $\binom{n}{k} \hat{=} n  nC r  k$
Binomialverteilung approximieren
Die Binomialverteilung kann mit der Poisson Verteilung approximiert werden, dann gilt
$\lambda = n \cdot p$
Die Binomialverteilung kann auch mit der Normalverteilung approximiert werden,
<b>bedingung ist</b>
$X \sim B(n, p) \approx N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ <p>falls gilt</p> $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ <p>Bei der approximation mit der Normalverteilung kann man eine Stetigkeitskorrektur verwenden um ein besseres Ergebnis zu erhalten</p> $P(X \leq k) \approx F_N(R + 0, 5)$

$$P(X < k) \approx F_N(R - 0, 5)$$
$$P(a \leq X \leq b) \approx F_N(b + 0, 5) - F_N(a - 0, 5)$$

Hypergeometrische Verteilung

Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis  
 $X \sim H(N, M, n)$   
 $n$  =: Stichprobenumfang  
 $N$  =: Gesamtzahl  
 $M$  =: Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft  
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Hypergeometrische Vert. approximieren

Die hypergeometrische Verteilung kann mit der **Binomialverteilung** approximiert werden. Dabei muss folgende Bedingung gelten  
 $\frac{n}{N} < 0,05$

Poisson Verteilung

Schlüsselwörter sind **Ereignisse pro Zeiteinheit**, zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne  
 $X \sim Pois(\lambda)$   
$$P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Geometrische Verteilung

$X \sim Geom(n, p)$   
$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$

Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 Auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe

Stetige Verteilungen

Dichtefunktion

Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur **Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung**  
Bedingungen der Dichtefunktion  
$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Die Dichtefunktion muss **nicht** stetig sein  
Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion  $F(x)$

Verteilungsfunktion

Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion  $F$ , die jedem  $x$  einer Zufallsvariable  $X$  genau eine Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$  zuordnet  
$$F(x) \rightarrow P(X \leq x)$$

Bedingungen der Verteilungsfunktion  
Die Verteilungsfunktion **muss** stetig sein  
Die Verteilungsfunktion **muss** monoton steigend sein  
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Normalverteilung

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Ist  $X \sim N(0, 1)$  dann heißt sie Standardnormalverteilt  
Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt  
Wenn  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  standardnormalverteilt  
Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle

abgelesen werden  
$$P(X \leq k) = \Phi(k)$$
$$P(X = k) = \Phi(k) - \Phi(k-1)$$
$$P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$$

allgemein gilt  
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$P(X \leq k) = \Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$$
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Quantile der Normalverteilung

Tabelliert ist das  $\beta$ -Quantil  $z_\beta$  der Normalverteilung  $N(0, 1)$   
$$P(X \leq z_\beta) = \beta$$
$$z_{1-\beta} = -z_\beta$$

Beispiel  
$$\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$$

Exponentialverteilung

Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte  
$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

und daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos

Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$
$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 1 & , t > b \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$$

Für Binomialverteilung

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Für geometrische Verteilung

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Für Rechteckverteilung

$$E(T_i) = \frac{a+b}{2}$$

Allgemeine Regeln für den Erwartungswert

$$a, b \in \mathbb{R}$$
$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Varianz

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung  
$$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f  
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T  
$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Für Binomialverteilung  
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Für geometrische Verteilung  
$$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung  
$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung  
$$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot (1 - \frac{M}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Für Rechteckverteilung  
$$Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Allgemeine Regeln für Varianz  
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$$

Unabhängiger Zufallsvariablen

Allgemeine Regeln  
$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Wichtige Sätze der Stochastik

Zentraler Grenzwertsatz  
 $n$  groß (Anzahl der Zufallsvariablen)  $n \geq 30$   
 $X_i$  unabhängig und identisch verteilt  
 $\hat{=}$  haben die gleiche Verteilung  
$$E(X_i) = \mu$$
$$Var(X_i) = \sigma^2$$
$$\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$$
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Manche Verteilungen verhalten sich in der Summe anders, zum Beispiel die Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt.  
Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz verwendet

Induktive Statistik - Schätztheorie

Schätzfunktionen

Maximum-Likelihood-Schätzer

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$
$$f(x_i) \text{ muss eine Dichtefunktion sein}$$
$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$$
Die Funktion nach dem Parameter  $\alpha$  ableiten und Nullsetzen  
Das Ergebnis ist der Maximum-Likelihood-Schätzer

Konfidenzintervalle

Intervall für  $E(X)$  einer Normalverteilung

Bei bekannter Standardabweichung

Ist  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  verteilt, dann ist  
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$
 $\bar{X}$  = erwartungstreuer Schätzer bei  $n$  unabhängigen Stichproben  
Ist  $\alpha$  gegeben, berechne das Quantil  
$$z_{1-(\alpha/2)}$$
Daraus erhält man das Konfidenzintervall  
$$\left[ \bar{x} - z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Allgemeine Matheregeln

Potenzen und Logarithmen

Potenzgesetze

$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$a^{\frac{b}{n}} = \sqrt[n]{b}$
$\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$

Logarithmusregeln

$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$
$\log 1 = 0$
$\log x \cdot y = \log x + \log y$
$-\log x = \log \frac{1}{x}$
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
$\log x^n = n \cdot \log x$
$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
$\log \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log x_i$

Ableitungen und Integrale

Grundlegende Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{const}$	0
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$

Verknüpfte Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

wichtige Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln  x  + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
$e^x$	$e^x + c$