

<b>Beschreibende Statistik</b>
<b>Lageparameter</b>
Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + a_n)$ Das Arithmetische Mittel $\bar{x}$ minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$
Geometrisches Mittel $\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$
Median $\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & , \text{ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & , \text{gerade} \end{cases}$ Der Median $\tilde{x}$ minimiert die Funktion $g(t) = \sum_{i=1}^n  x_i - t $
<b>Streuungsmaße</b>
(empirische) Varianz $var = \sigma^2 = s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ alternativ $var = \sigma^2 = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)$
Standardabweichung $\sigma = s_n = \sqrt{\sigma^2}$ $\sigma = s_n = \sqrt{s_n^2}$
mittlere absolute Abweichung $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - \tilde{x}  \text{ f\"ur Median}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  x_i - \bar{x}  \text{ f\"ur arithmetisches Mittel}$
<b>Kovarianz und Korrelationskoeffizient</b>
Kovarianz $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ alternativ $cov(x, y) = S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y})$
Korrelationskoeffizient $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$ Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwi-

schen $-1 \leq r \leq +1$ . Je näher $r_{xy}$ bei $-1$ (negative Korellation/Steigung), oder $+1$ (positive Steigung/Korrelation) liegt, desto genauer schmiegen sich die Messwerte an eine Gerade an. Bei $r_{xy}$ nahe 0 gibt es keinen <i>linearen</i> Zusammenhang zwischen den Merkmalen.
<b>Regressionsrechnung</b>
Regressionsgerade Variante 1 $y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})$ Variante 2 $y = b + a \cdot x$ $a = \frac{S_{xy}}{\sigma_x^2} \text{ und } b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$
Kleinste quadratische Abweichung Die Parameter $a, b, c, \dots$ werden so gewählt, dass $Q(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2$ minimal ist $f_{a,b,c,\dots}(x_i)$ ist die Funktion dessen Parameter gesucht werden Nullsetzen der partiellen Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial a} Q(a, b) = 0$ $\frac{\partial}{\partial b} Q(a, b) = 0$ über die Ableitungen lassen sich die Parameter finden welche die vorgegebene Funktion am besten annähern
Vergleich ermittelter Kurven Um Kurven zu vergleichen, einfach die ermittelten Parameter in die $Q(a, b, c, \dots)$ Funktion eingeben und Wert berechnen. Je kleiner der Wert desto besser passt die Kurve
<b>Wahrscheinlichkeitstheorie</b>
<b>Wahrscheinlichkeitsräume</b>
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff $Ergebnismenge = \Omega$ Beispiel Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge $\emptyset \subseteq \Omega \hat{=} \text{unm\"ogliches Ereignis}$ $\Omega \subseteq \Omega \hat{=} \text{sicheres Ereignis}$ $A = \{1, 2, 3\}$ Ereignis $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$ Gegenereignis

Elementarereignis einelementige Teilmenge von $\Omega$ Ereignis, eine 3 werfen $B = \{3\}$ $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$																
Laplace-Versuch Jedes Elementarereignis ist gleich wahrscheinlich $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{ \Omega }$ $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$																
<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit</b>																
Bedingte Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung B $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(\bar{A} B) = 1 - P(A B)$																
Formel von Bayes $P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$																
Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $P(A) = \sum_{i=1}^n (P(A B_i) \cdot P(B_i))$																
Viel Felder Tafel <table><tr><td></td><td>A</td><td><math>\bar{A}</math></td><td><math>\Sigma</math></td></tr><tr><td>B</td><td><math>P(A \cap B)</math></td><td><math>P(\bar{A} \cap B)</math></td><td><math>P(B)</math></td></tr><tr><td><math>\bar{B}</math></td><td><math>P(A \cap \bar{B})</math></td><td><math>P(\bar{A} \cap \bar{B})</math></td><td><math>P(\bar{B})</math></td></tr><tr><td><math>\Sigma</math></td><td><math>P(A)</math></td><td><math>P(\bar{A})</math></td><td>1</td></tr></table> <p>Die Ränder sind immer die Summen der zugehörigen Zeilen oder Spalten</p>		A	$\bar{A}$	$\Sigma$	B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$	$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$	$\Sigma$	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1
	A	$\bar{A}$	$\Sigma$													
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$													
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$													
$\Sigma$	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1													
Allgemeine Regeln $P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B) = P(B A) \cdot P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $P(A \cap B) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$ Wenn A und B unabhängig, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A B) = P(A)$																

<b>Zufallsvariablen</b> Eine Zufallsvariable ist eine Zuordnungsvorschrift die jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Größe zuordnet $X = k \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) = k\}$ $X = 3 \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) = 3\}$ $X \leq k \hat{=} \{\omega \in \Omega   X(\omega) \leq k\}$
<b>Diskrete Verteilungen</b>
Binomialverteilung Mit zurücklegen, Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis gleich $X \sim B(n, p)$ $n =$ : Stichprobenumfang $p =$ : Wahrscheinlichkeit (p muss bei Binomialverteilung fest bleiben) $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$ $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$ Eingabe Taschenrechner $\binom{n}{k} \hat{=} n  nC r  k$ $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow n \rightarrow p$
Binomialverteilung approximieren Die <b>Binomialverteilung</b> kann mit der <b>Poisson</b> Verteilung approximiert werden, dann gilt $\lambda = n \cdot p$ Die <b>Binomialverteilung</b> kann auch mit der <b>Normalverteilung</b> approximiert werden, wobei gilt $n \cdot p = \mu$ und $n \cdot p \cdot (1 - p) = \sigma^2$ , <b>bedingung ist</b> $X \sim B(n, p) \approx N(n \cdot p, n \cdot p \cdot (1 - p))$ falls gilt $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$ Bei der approximation mit der Normalverteilung kann man eine <b>Stetigkeitskorrektur</b> verwenden um ein besseres Ergebnis zu erhalten $P(X \leq k) \approx F_N(R + 0,5)$ $P(X < k) \approx F_N(R - 0,5)$ $P(a \leq X \leq b) \approx F_N(b + 0,5) - F_N(a - 0,5)$ <b>Zusammengefasst</b> Falls $np$ und $n(1 - p)$ groß genug sind: $\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$$F_B(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Hypergeometrische Verteilung

Ohne zurücklegen, Wahrscheinlichkeit ändert sich nach jedem Ereignis  
 $X \sim H(N, M, n)$   
 $n =$ : Stichprobenumfang  
 $N =$ : Gesamtzahl  
 $M =$ : Anzahl der Elemente mit der Eigenschaft  
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$
$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$$

Hypergeometrische Vert. approximieren

Die hypergeometrische Verteilung kann mit der **Binomialverteilung** approximiert werden. Dabei muss folgende Bedingung gelten  
 $\frac{n}{N} < 0,05$

Poisson Verteilung

Schlüsselwörter sind **Ereignisse pro Zeiteinheit**, zum Beispiel Anrufe innerhalb bestimmter Zeitspanne  
 $X \sim Pois(\lambda)$   
$$P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$
Eingabe Taschenrechner  
 $Mode \rightarrow 4 \rightarrow \downarrow \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow k \rightarrow \lambda$

Näherung an Normalverteilung

Wenn  $\lambda$  groß genug ist kann die Verteilungsfunktion  $F_P(x)$  der Poissonverteilung durch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung  $F_N(x)$  mit den Parametern  $\mu = \lambda$  und  $\sigma^2 = \lambda$  genähert werden:  
$$F_P(x) \approx F_N(x + 0.5) = \Phi\left(\frac{x+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Geometrische Verteilung

$X \sim Geom(n, p)$   
$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$
Beispiel: Ein Würfel wird so lange gewürfelt bis eine 6 auftritt. Die Zufallsvariable X ist gleich Anzahl der Würfe

Stetige Verteilungen

Dichtefunktion

Die Dichtefunktion ist ein Hilfsmittel zur **Beschreibung einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung**  
Bedingungen der Dichtefunktion  
$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$
Die Dichtefunktion muss **nicht** stetig sein  
Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion  $F(x)$

Verteilungsfunktion

Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion  $F$ , die jedem  $x$  einer Zufallsvariable  $X$  genau eine Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$  zuordnet  
$$F(x) \rightarrow P(X \leq x)$$
Bedingungen der Verteilungsfunktion  
Die Verteilungsfunktion **muss** stetig sein  
Die Verteilungsfunktion **muss** monoton steigend sein  
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Normalverteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$   
Ist  $X \sim N(0, 1)$  dann heißt sie Standardnormalverteilt  
Jede Normalverteilung kann standardisiert werden, das heißt die Mitte der Kurve wird auf den Nullpunkt gesetzt  
Wenn  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  verteilt ist dann ist die standardisierte Zufallsvariable  $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  standardnormalverteilt  
Ist die Zufallsvariable standardverteilt kann die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abgelesen werden

Regeln für den Phi-Wert

$$P(X \leq k) = \Phi(k)$$
$$P(X \leq -k) = 1 - \Phi(+k)$$
$$P(X = k) = 0$$
 (“Integral ohne Breite!”)  
allgemein folgt daraus, wenn  
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
dann gilt  
$$P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Additionssatz der Normalverteilung

Seien  $X$  und  $Y$  unabhängig und Normalverteilt, dann gilt:  
$$X + Y = N(\mu_X + \mu_Y; \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$
Ihre Summe ist ebenfalls Normalverteilt!  
Quantile der Normalverteilung  
Tabelliert ist das  $\beta$ -Quantil  $z_\beta$  der Normalverteilung  $N(0, 1)$   
$$P(X \leq z_\beta) = \beta$$
$$z_{1-\beta} = -z_\beta$$
Beispiel  
$$\beta = 0.9 \Rightarrow z_\beta = 1.28155$$

Exponentialverteilung

Eine exponentialverteilte Zufallsvariable T hat die Dichte  
$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$
und daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion  
$$F(x) = P(T \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung ist Gedächtnislos

Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 0 & , sonst \end{cases}$$
$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , t \in [a, b] \\ 1 & , t > b \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert

Erwartungswert und Mittelwert sind prinzipiell gleichwertig, der Erwartungswert entspricht der theoretischen Erwartung, der Mittelwert entspricht den tatsächlichen Werten

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^n (x_i \cdot p_i)$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$E(T) = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$$

Für Binomialverteilung

$$\mu = E(X) = n \cdot p$$

Für geometrische Verteilung

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$E(S_n) = E(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot E(X_1) = n \cdot \frac{M}{N}$$

Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$E(T_i) = \frac{a+b}{2}$$

Allgemeine Regeln für den Erwartungswert

$$a, b \in \mathbb{R}$$
$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

Varianz

Zufallsvariable mit diskreter Verteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Zufallsvariable mit Dichtefunktion f

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Varianz aus Erwartungswert berechnen

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Exponentialverteilung mit Zufallsvariable T

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Für Binomialverteilung

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Für geometrische Verteilung

$$\sigma^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Für Poissonverteilung

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Für Hypergeometrischeverteilung

$$Var(S_n) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Für Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$Var(T_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Allgemeine Regeln für Varianz

$Var(X + b) = Var(X)$   
 $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$   
 $Var(X + Y) =$   
 $Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$   
wobei gilt:  
 $Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) =$   
 $E(X \cdot Y) - \mu_X \mu_Y$   
bei unabhängigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$   
ist  $Cov(X, Y) = 0$  siehe unten.

Unabhängige Zufallsvariablen

Allgemeine Regeln

$Var(X + const) = Var(X)$   
 $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$   
 $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Wichtige Sätze der Stochastik

Zentraler Grenzwertsatz

$n$  groß (Anzahl der Zufallsvariablen)  $n \geq 30$   
 $X_i$  unabhängig und identisch verteilt  
 $\hat{=}$  haben die gleiche Verteilung  
 $E(X_i) = \mu$   
 $Var(X_i) = \sigma^2$   
 $\sum X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$   
 $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$   
Manche Verteilungen verhalten sich in der  
Summe anders, zum Beispiel die  
Rechteckverteilung ist nicht mehr R-Verteilt.  
Dann wird der Zentrale Grenzwertsatz  
verwendet

ZGS - Definition

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige und identisch  
verteilte Zufallsvariablen (nicht zwangsläufig  
Normalverteilt) mit Erwartungswert  $\mu$  und  
Varianz  $\sigma^2$ . Ihre Summe sei  
 $S = X_1 + \dots + X_n$  mit Erwartungswert  $n\mu$   
und Varianz  $n\sigma^2$ . Es gilt für die zugehörige  
Zufallsvariable  
 $Z = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  gilt  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z \leq z) = \Phi(z)$

Induktive Statistik - Schätztheorie

Schätzfunktionen

Maximum-Likelihood-Schätzer

$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$

$f(x_i)$  muss eine **Dichtefunktion** sein  
 $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{\partial \alpha} = 0$   
Die Funktion nach dem Parameter  $\alpha$   
ableiten und Nullsetzen  
Das Ergebnis ist der  
Maximum-Likelihood-Schätzer

Konfidenzintervalle

Intervall für  $E(X)$  einer Normalverteilung

Ist  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  verteilt, dann ist  
 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

Bei bekannter Standardabweichung  $\sigma$

$\left[ \bar{x} - z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$   
 $\bar{X}$  = arithmetisches Mittel, bzw  
erwartungstreuer Schätzer bei  $n$   
unabhängigen Stichproben  
 $\alpha$  = Signifikanzwahrscheinlichkeit  
(Irrtumswahrscheinlichkeit)  
 $1 - \alpha$  = Vertrauensniveau  
Ist  $\alpha$  gegeben, berechne das Quantil  
 $z_{1-(\alpha/2)}$

Bei unbekannter Standardabweichung  $\sigma$

$\left[ \bar{x} - t_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-(\alpha/2)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$   
Anstatt  $\sigma^2$  wird der erwartungstreue  
Schätzer  $s$  verwendet  
 $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$   
beziehungsweise  
 $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

Induktive Statistik - Hypothesentest

Tests für Lageparameter

Gauß-Test (z-Test, u-Test)

Ist ein Test für den Erwartungswert einer  
Normalverteilung bei bekannter  
Standardabweichung  $\sigma$   
Formuliere die Hypothesen:  
a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$   
b)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$   
c)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$   
Wähle ein Signifikanzniveau  $\alpha$  (z.B.: 0.05)

Ziehe eine Stichprobe vom Umfang  $n$ ,  
berechne  $\bar{x}$  und den zugehörigen  
standardisierten Prüfwert:  
 $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$   
Bestimme das entsprechende Quantil der  
Standartnormalverteilung:  
a)  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  bzw. b), c)  $z_{1-\alpha}$   
Entscheidungsregel:  $H_0$  ist zu verwerfen,  
falls  
a)  $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$   
b)  $z < -z_{1-\alpha}$   
c)  $z > z_{1-\alpha}$

t-Test

Formuliere die Hypothesen:  
a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$   
b)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$   
c)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$   
Wähle ein Signifikanzniveau  $\alpha$  (z.B.: 0.05)  
Ziehe eine Stichprobe vom Umfang  $n$ ,  
berechne daraus  $\bar{x}$  und  $s$  sowie den  
zugehörigen Prüfwert:  
 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$   
Bestimme das entsprechende Quantil der  
 $t$ -Verteilung:  
a)  $t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$  bzw. b), c)  $t_{n-1; 1-\alpha}$   
Entscheidungsregel:  $H_0$  ist zu verwerfen,  
falls  
a)  $|t| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$   
b)  $t < -t_{n-1; 1-\alpha}$   
c)  $t > t_{n-1; 1-\alpha}$

Tests für Streuungsmaße

$\chi^2$  - Anpassungstest

Der  $\chi^2$ -Anpassungstest überprüft ob eine  
unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung  
einem bestimmten Verteilungsmodell folgt  
 $T = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^r \frac{N_i^2}{p_i} \right) - n$   
wobei  $N_i$  absolute Häufigkeit in Kategorie  $r$ ,  
 $n$  ist der Stichprobenumfang. Alternativ  
 $T = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$   
Das Ergebnis  $T$  mit  $\chi^2_{r-1; 1-\alpha}$  Wert aus der  
Tabelle vergleichen  
 $T < \chi^2 =$  Hypothese wird nicht verworfen  
**Algorithmus**  
1. Hypothese aufstellen

2.  $n$  und  $r$  festlegen ( $n$  = Stichprobenumfang,  
 $r$  = Anzahl der Klassen)
3. Verteilung auf welche getestet werden soll  
bestimmen
4. Alle  $p_i$  berechnen (zu jeder Kategorie  $r$   
eines nach in 3. festgelegter Verteilung)
5. T berechnen.
6.  $\chi^2$  mit T vergleichen.

Übersicht: Induktive Statistik

GEGEBENENFALLS FOLGENDES  
NOCH ZU DEN EINZELNEN  
POSITIONEN VERSCHIEBEN

Konfidenzbereich/Test für Erwartungswert

Varianz  $\sigma^2$  bekannt

Zweiseitige Konfidenzintervalle

Wegen  
 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0, 1)$   
ist zu gegebenen Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  das  
Konfidenzintervall gleich  
 $\left[ \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

Einseitige Konfidenzintervalle

$\left] -\infty, \bar{x} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  bzw.  
 $\left[ -\infty, \bar{x} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$

Zweiseitige Tests

Für  $\mu_0$  sei  
 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$   
 $H_0 : \mu = \mu_0$  Bereich:  $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Einseitige Tests

$H_0 : \mu \leq \mu_0$  Bereich:  $Z \leq z_{1-\alpha}$   
 $H_0 : \mu \geq \mu_0$  Bereich:  $Z \geq -z_{1-\alpha}$

Varianz  $\sigma^2$  unbekannt

Zweiseitige Konfidenzintervalle

Allgemeine Matheregeln

<b>Potenzen und Logarithmen</b>
Potenzgesetze
$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$
$\sqrt[n]{k} = k^{\frac{1}{n}}$

<b>Logarithmusregeln</b>
$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x$
$\log 1 = 0$
$\log x \cdot y = \log x + \log y$
$-\log x = \log \frac{1}{x}$
$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
$\log x^n = n \cdot \log x$
$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
$\log \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log x_i$

<b>Ableitungen und Integrale</b>	
Grundlegende Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$\ln a \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Verknüpfte Ableitungsregeln	
$f(x)$	$f'(x)$
$(f(x) + g(x))$	$(f'(x) + g'(x))$
$(f(x) \cdot g(x))$	$(f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{(f'(x) \cdot g(x)) - (f(x) \cdot g'(x))}{g(x)^2}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
wichtige Stammfunktionen	
$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq 1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$c$	$cx + c$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln  x  + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$
$e^x$	$e^x + c$
Bestimmte Integrale	
$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) - F(a)$	

$$\int_a^b a \cdot f(x)dx = a \cdot \int_a^b f(x)dx$$