Grundlagen der Programmierung

Ralf Möller, FH-Wedel

- Vorige Vorlesung: Einführung, Algorithmusbegriff
- Inhalt dieser Vorlesung
  - Aussagenlogik (Boole'sche Logik)
- Lernziele:
  - Syntax von Ausdrücken (Formeln der Aussagenlogik)
  - Semantik von Formeln
  - Entscheidungsprobleme über aussagenlogischen Formeln
  - Anwendungen

Motivation

- Eine zentrale Frage in der Informatik:
- Wie beschreibt man, was ein Algorithmus tun soll?
- Man macht Aussagen darüber, wie bestimmte Eingaben in entsprechende Ausgaben transformiert werden (Algorithmus als Funktion).
- Aussagen können verknüpft werden. Beispiele sind:
  - Konjunktion (UND-Verknüpfung)
  - Disjunktion (ODER-Verknüpfung)
  - Negation (Verneinung)
  - ...

Aussagenlogik

- Kernidee
- Aus gegebenen Aussagen und ihren Verknüpfungen neue Aussagen ableiten

Aussagen

- Der Begriff "Aussage" entzieht sich einer Definition (ebenso wie "Punkt", "natürliche Zahl")
- Daher: Beschreibung des Begriffs
  - Eine Aussage ist jeder sprachliche Satz, der seiner inhaltlichen Bedeutung nach entweder wahr oder falsch ist
- "Zweiwertige" Logik
  - {wahr, falsch} oder {true, false} oder {w, f} oder {1, 0}
- Aussagen werden nicht (sprachlich) zerlegt sofern sie nicht aus Verknüpfungen aufgebaut sind.

Aussagen: Beispiele aus dem täglichen Leben

- Holz ist brennbar (W)
- Jede Aussage ist wahr (F)
- Kiel liegt an der Nordsee (F)
- Kein Mensch ist unsterblich (W)

Aussagen: wissenschaftlicher Art

- Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne (W)
- Die maligne Lymphogranulomatose ist derzeit medizinisch unheilbar (W)
- Jede Zahl der Gestalt $2^{(2^n)} + 1$ ist eine Primzahl, wenn n eine natürliche Zahl einschließlich 0 ist (F)
- Jedes lösbare Problem ist auch algorithmisch lösbar (F)

Aussagen: gesetzliche Regelungen

- Ostersonntag fällt auf einen Sonntag, der auf den ersten Vollmond nach Frühlingsanfang folgt (W)
- Die gesetzliche Einheit der Wärmemenge ist die Kilokalorie (F) (richtig ist Joule)
- Parken gegenüber einer Grundstücksein- oder -ausfahrt auf schmaler Fahrbahn ist verboten (W)

Aussagen: Wahrheitswert nach Situtation

- Klaus studiert Nachrichtentechnik (?W)
- Am Donnerstag schien die Sonne (?F)
- Das Heizöl wird wieder teurer (?W)

Aussagen mit derzeit unbekanntem Wahrheitwert

- Kein Planet außer der Erde ist bewohnt
- In zwanzig Jahren wird die Medizin die Krebskrankheit besiegt haben

Die Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagen ist frei wählbar!

Aussagenverknüpfungen

- Negation: $\neg W = F$, $\neg F = W$
  - Wie sieht die negierte sprachliche Aussagenform aus?
  - Beispiel: Alle Lösungen von $f(x) = 0$ sind reell
  - Negiert: Wenigstens eine Lösung von $f(x) = 0$ ist komplex
- Konjunktion (UND-Verknüpfung)
  - Die Sinusfunktion ist stetig **und** beschränkt
- Disjunktion (ODER-Verknüpfung)
  - In der Bibliothek kann man Zeitschriften **oder** Bücher ausleihen (inklusives ODER)

Aussagenverknüpfungen (Wahrheitstabellen)

- Konjunktion
  - $W \wedge W = W$
  - $W \wedge F = F$
  - $F \wedge W = F$
  - $F \wedge F = F$
- Disjunktion
  - $W \vee W = W$
  - $W \vee F = W$
  - $F \vee W = W$
  - $F \vee F = F$

Verknüpfungsoperatoren für Aussagen heißen auch "Junktoren"

Aussagenverknüpfungen Wahrheitstabellen (2)

- Implikation
  - $W \rightarrow W = W$
  - $W \rightarrow F = F$
  - $F \rightarrow W = W$
  - $F \rightarrow F = W$

Lies: $\rightarrow$ "wenn - dann"

- Biimplikation
  - $W \leftrightarrow W = W$
  - $W \leftrightarrow F = F$
  - $F \leftrightarrow W = F$
  - $F \leftrightarrow F = W$

Lies: $\leftrightarrow$ als "genau dann - wenn"

Motivation für Implikation

- Wir wollen (später) mehrere Aussagen betrachten
  - Wenn die Sonne scheint, gehe ich schwimmen
  - Die Sonne scheint
- Wir wollen annehmen, daß die betrachteten Aussagen wahr sein sollen
- Intuitiv möchten wir erreichen, daß bei den betrachteten (wahren) Aussagen die Aussage „Ich gehe schwimmen“ eine Folgerung ist. Das kommt später.
- Unter Implikation wird ein syntaktischer Verknüpfungsoperator für Aussagen verstanden
- Folgerung bezieht sich auf die Bedeutung von Aussagen

Motivation für Implikation (2)

- Wenn wir drei Aussagen
  - Wenn die Sonne scheint, gehe ich schwimmen
  - Die Sonne scheint NICHT
  - Ich gehe schwimmen

  soll sich kein Widerspruch ergeben, d.h. alle Aussagen sollen wahr sein, denn ich kann (wie in diesem speziellen Fall) auch schwimmen gehen, wenn die Sonne nicht scheint.
- Die Wahrheitstabelle der Implikation erlaubt genau dieses
- Die Implikation drückt folgendes aus:
  - Wenn die Sonne scheint, gehe ich auf jeden Fall schwimmen. Andernfalls erfolgt in dem Beispiel keine Einschränkung: Ich kann schwimmen gehen oder auch nicht.

Variable und Ausdrücke

- Wir haben gesehen: Aussagen können sehr lang sein. Das ist unübersichtlich. Die Verknüpfungsoperatoren sind schlecht sichtbar.
- Wir wissen: Elementare Aussagen, seien sie sprachlich noch so komplex, werden nicht zerlegt.
- Also vergessen wir die (natürliche) Sprache und führen Bezeichner für Aussagen ein: Variable
- Mit Variablen und Junktoren lassen sich aussagenlogische Ausdrücke aufbauen

Wir müssen akurater, d.h. formaler arbeiten ...

- Nach welchen Regeln werden aussagenlogische Ausdrücke aufgebaut?
- Wie werden Wahrheitswerte von zusammengesetzen Ausdrücken bestimmt?
- Nach welchen Regeln lassen sich aus gegebenen Aussagen neue Aussagen ableiten?
- Die natürliche Sprache hilft uns nicht weiter
- Im folgenden verwenden wir daher
  1 statt W, 0 statt F, um dieses zu verdeutlichen

Danksagung

- Die Folien zur Aussagenlogik nach dem Buch "Logik für Informatiker" von Uwe Schöning wurden übernommen von Javier Esparza (http://wwwbrauer.in.tum.de/lehre/logik/SS99/)

Syntax der Aussagenlogik

Eine *atomare Formel* hat die Form A_i (wobei $i = 1, 2, 3, \ldots$).

Formeln werden durch folgende induktive Definition festgelegt:

1. Alle atomaren Formeln sind Formeln
2. Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
3. Für jede Formel F ist $\neg F$ eine Formel.

Abkürzungen:

$$
\begin{array}{rcl}
A, B, C \text{ oder } P, Q, R \text{ oder } \ldots & \text{statt} & A_1, A_2, A_3 \ldots \\
(F_1 \rightarrow F_2) & \text{statt} & (\neg F_1 \vee F_2) \\
(F_1 \leftrightarrow F_2) & \text{statt} & ((F_1 \wedge F_2) \vee (\neg F_1 \wedge \neg F_2)) \\
(\bigvee_{i=1}^{n} F_i) & \text{statt} & (\ldots((F_1 \vee F_2) \vee F_3) \vee \ldots \vee F_n) \\
(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i) & \text{statt} & (\ldots((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \wedge \ldots \wedge F_n)
\end{array}
$$

Semantik der Aussagenlogik

Die Elemente der Menge $\{0,1\}$ heißen *Wahrheitswerte*.

Eine *Belegung* ist eine Funktion $\mathcal{A}: D \to \{0,1\}$, wobei D eine Teilmenge der atomaren Formeln ist. Wir erweitern $\mathcal{A}$ zu einer Funktion $\overline{\mathcal{A}}: E \to \{0,1\}$, wobei $E \supseteq D$ die Menge aller Formeln ist, die nur aus den atomaren Formeln in D aufgebaut sind.

$$\overline{\mathcal{A}}((F \wedge G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{\mathcal{A}}(F) = 1 \text{ und } \overline{\mathcal{A}}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{A}}((F \vee G)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{\mathcal{A}}(F) = 1 \text{ oder } \overline{\mathcal{A}}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{A}}((\neg F)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{\mathcal{A}}(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir schreiben $\mathcal{A}$ statt $\overline{\mathcal{A}}$.

Modelle

Sei F eine Formel und $\mathcal{A}$ eine Belegung.

Falls $\mathcal{A}$ für alle in F vorkommenden atomaren Formeln definiert ist, so heißt $\mathcal{A}$ zu F *passend*.

Sei $\mathcal{A}$ passend zu F:

Falls $\mathcal{A}(F) = 1$	so schreiben wir	$\mathcal{A} \models F$
	und sagen	F *gilt unter* $\mathcal{A}$
	oder	$\mathcal{A}$ *ist ein Modell für* F
Falls $\mathcal{A}(F) = 0$	so schreiben wir	$\mathcal{A} \not\models F$
	etc.	

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Eine Formel F heißt *erfüllbar*, falls F mindestens ein Modell besitzt, andernfalls heißt F *unerfüllbar*.

Eine (endliche oder unendliche!) Menge von Formeln M heißt *erfüllbar*, falls es eine Belegung gibt, die für jede Formel in M ein Modell ist.

Eine Formel F heißt *gültig* (oder *allgemeingültig* oder *Tautologie*) falls jede zu F passende Belegung ein Modell für F ist. Wir schreiben $\models F$, falls F eine Tautologie ist, und $\not\models F$ sonst.

Aufgabe

	Gültig	Erfüllbar	Unerfüllbar
A			
$A \vee B$			
$A \vee \neg A$			
$A \wedge \neg A$			
$A \rightarrow \neg A$			
$\neg A \rightarrow A$			
$A \rightarrow B$			
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$			
$A \rightarrow (A \rightarrow B)$			
$A \leftrightarrow \neg A$			
$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$			

Aufgabe

Gelten die folgenden Aussagen?

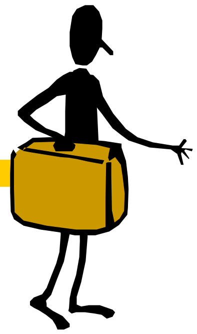
	J/N	Gegenb.
Wenn F gültig dann F erfüllbar		
Wenn F erfüllbar dann $\neg F$ unerfüllbar		
Wenn F gültig dann $\neg F$ unerfüllbar		
Wenn F unerfüllbar dann $\neg F$ gültig		

Aufgabe

Gelten die folgenden Aussagen?

						J/N	Gegenb.
Wenn	$(F \to G)$ gültig	und	F gültig	dann	G gültig		
Wenn	$(F \to G)$ erfüllbar	und	F erfüllbar	dann	G erfüllbar		
Wenn	$(F \to G)$ gültig	und	F erfüllbar	dann	G erfüllbar		

Zusammenfassung, Kernpunkte



- Aussagenlogik
  - Syntax
  - Semantik
  - Entscheidungsprobleme

Was kommt beim nächsten Mal?

- Transformation von aussagenlogischen Formeln
- Boole'sche Algebra