Fachhochschule Wedel
Prof. Dr. Ralf Möller 27.6.2002

Aufgaben zur Übergangsprüfung Grundlagen der Programmierung im SS 2002 (WI)
Zeit: 60 Minuten, erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen ausschließlich an den freien Stellen nach den jeweiligen Aufgaben ein (ggf. auf der jeweiligen Rückseite weiterschreiben). Sollten Unklarheiten oder Mehrdeutigkeiten bei der Aufgabenstellung auftreten, so notieren Sie bitte, wie Sie die Aufgabe interpretiert haben.

Viel Erfolg !
Diese Klausur besteht einschließlich dieses Deckblattes aus 5 Seiten.

Aufgabe 1.

Gegeben sei folgende aussagenlogische Formel: $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge B)$
Transformieren Sie diese Formel in konjunktive Normalform.

Ein möglicher Lösungsweg:
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (A \wedge B) \equiv$
$(\neg \neg(A \vee B) \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg(A \vee B) \vee \neg(A \wedge B)) \equiv$
$((A \vee B) \vee (A \wedge B)) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee \neg B)) \equiv$
$((A \vee B \vee A) \wedge (A \vee B \vee B)) \wedge ((\neg A \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee \neg B)) \equiv$
$((A \vee B) \wedge (A \vee B)) \wedge ((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \equiv$
$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Aufgabe 2.

Es sei P ein zweistelliges Prädikatensymbol, Q ein einstelliges Prädikatensymbol, a eine Konstante, f ein einstelliges Funktionssymbol, und es seien x, y, z Variablen. Eine Struktur, die diesen Symbolen Werte zuordnet, ist gegeben durch $A = (U_A, I_A)$ mit $U_A = \{7, 8, 9\}$. Die Interpretationsfunktion I_A sei so definiert, daß sich folgende Abbildungen ergeben:

$a^A = 7$
$x^A = 8$
$y^A = 9$
$Q^A = \{7, 9\}$
$P^A = \{(7, 8), (7, 9), (8, 9)\}$
$f^A = \{(7, 8), (8, 9), (9, 7)\}$

Bestimmen Sie den jeweiligen Wahrheitswert der folgenden Formeln bezüglich A. Gehen Sie dabei schrittweise vor und geben Sie auch Werte aller Teilformeln an. Bei Teilformeln mit Quantoren bestimmen Sie die Wahrheitswerte, indem Sie die quantifizierte Variable (z) jeweils an alle Werte aus U_A binden.

1. $(Q(a) \wedge P(a, x)) \rightarrow (Q(f(a)) \vee P(a, y))$
2. $P(a, y) \wedge \exists z\, P(z, a)$
3. $\forall z\, (Q(z) \vee \neg P(a, z))$

Für welche Formeln ist A ein Modell?

Lösung:

1. $F1 = (Q(a) \wedge P(a, x)) \rightarrow (Q(f(a)) \vee P(a, y))$
   $A(F1) = A((Q(a) \wedge P(a, x)) \rightarrow (Q(f(a)) \vee P(a, y)))$

Auswertung der Teilausdrücke von F1 durch die Struktur A:

a	x	y	Q(a)	P(a,x)	f(a)	Q(f(a))	P(a,y)	F1
7	8	9	Q(7)≡wahr	P(7,8)≡wahr	f(7)≡8	Q(8)≡falsch	P(7,9)≡wahr	wahr

Die Struktur A ist also ein Modell für F1.

2. $F2 = P(a, y) \wedge \exists z\, P(z, a)$
   $A(F2) = A(P(a, y) \wedge \exists z\, P(z, a))$

Auswertung der Teilausdrücke von F2 durch die Struktur A:

a	y	P(a,y)
7	9	P(7,9)≡wahr

Zur Bestimmung von $A(\exists z\, P(z, a))$ müssen die z-Varianten von A betrachtet werden (z wird an alle Werte aus U_A gebunden):

z	a	P(z,a)
7	7	P(7,7)≡falsch
8	7	P(8,7)≡falsch
9	7	P(9,7)≡falsch

Da alle Varianten den Wahrheitswert "falsch" für P(z,a) liefern, erhält auch A(∃z P(z, a)) den Wert "falsch".

a	y	P(a,y)	∃z P(z, a)	F2
7	9	P(7,9)≡wahr	falsch	falsch

A ist kein Modell von F2.

3. F3 = ∀z (Q(z) ∨ ¬P(a, z))
   A(F3) = A(∀z (Q(z) ∨ ¬P(a, z)))

Da der Allquantor der äußerste Operator ist, sollte man zuerst die z-Varianten von A betrachten:

a	z	Q(z)	P(a,z)	¬P(a, z)	Q(z) ∨ ¬P(a, z)
7	7	wahr	falsch	wahr	wahr
7	8	falsch	wahr	falsch	falsch
7	9	wahr	wahr	falsch	wahr

Da eine Variante den Wahrheitswert "falsch" liefert, hat auch A(F3) den Wert "falsch".
A ist kein Modell von F3.

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie die schwächste Vorbedingung {V} für die folgenden Anweisungen S und Nachbedingungen {P}, so daß {V} S {P} korrekt ist. Verwenden Sie die in der Vorlesung eingeführten Techniken.

a)
var a, b, c : N_1
S : a:= a * b; b := a div b; a := a div b;
{P}: a + b = c

b)
var x, y : N_0
S : if y > x
    then y,x := x,y
    else y := y + 1
  end if
{P}: $x \geq y$

Zeigen Sie, daß im letzteren Fall die Vorbedingung äquivalent zu $x \neq y$ ist.

Lösung:

a)
var a, b, c : N_1
S : a:= a * b; b := a div b; a := a div b;
{P}: a + b = c

Anwendung der Beweisregeln für Anweisungsfolgen und Zuweisungen:

{V} a:= a * b; b := a div b; a := a div b; {P}
{V} a:= a * b; {V1} b := a div b; {V2} a := a div b; {P}
{V2} = {P [a ← a div b]} = { a + b = c [a ← a div b]} = {a div b + b = c}
{V1} = {V2 [b ← a div b]} = { a div b + b = c [b ← a div b]} = {a div (a div b) + a div b = c}
{V} = {V1 [a ← a*b]} = { a div (a div b) + a div b = c [a ← a*b]} =
    { (a*b) div ((a*b) div b) + (a*b) div b =c} = {(a*b) div a + a =c} =
    {b+a=c}

b)
var x, y : N_0
S : if y > x
    then y,x := x,y
    else y := y + 1
  end if
{P}: $x \geq y$

Anwendung der Beweisregeln für bedingte Anweisungen, Zuweisungen und mehrfache (parallele) Zuweisungen:

$\{V\}$ if $y > x$ then $y,x := x,y$ else $y := y + 1$ end if $\{P\}$
$\{(V1 \wedge B) \vee (V2 \wedge \neg B)\}$ if $y > x$ then $\{V1\}$ $y,x := x,y$ $\{P\}$ else $\{V2\}$ $y := y + 1\{P\}$ end if $\{P\}$
$\{P\}$: $x \geq y$
$\{B\}$: $y > x$
$\{\neg B\} = y \leq x$
$\{V1\} = \{P\ [y \leftarrow x, x \leftarrow y]\} = \{x \geq y\ [y \leftarrow x, x \leftarrow y]\} = \{y \geq x\}$
$\{V2\} = \{P\ [y \leftarrow y{+}1]\} = \{x \geq y\ [y \leftarrow y{+}1]\} = \{x \geq y{+}1\}$
$\{V\} = \{(V1 \wedge B) \vee (V2 \wedge \neg B)\} = \{((y \geq x) \wedge (y > x)) \vee ((x \geq y{+}1) \wedge (y \leq x))\} =$
$\{(y > x) \vee (x \geq y{+}1)\} = \{(x < y) \vee (x \geq y{+}1)\} = \{x \neq y\}$

Aufgabe 4.

Gegeben Sei die Funktion

```
mult(a, b: N_0): N_0
  if b = 0
    then 0
    else a + mult(a, b-1)
  end if
```

Um welche Art der Rekursion handelt es sich bei dieser Definition der Funktion mult? Wandeln Sie die Funktion um in eine endrekursive Form. Verwenden Sie hierzu die in der Vorlesung eingeführte Technik.

Lösung:

Es handelt sich um lineare Rekursion

Umwandlung in Endrekursion:

```
mult-er (a, b, acc: N_0): N_0
  if b = 0
     then  acc
     else mult-er(a,b-1, a+acc)
  end if
```

Initialisierung: mult-er(a,b,0)