Grundlagen der Programmierung (Vorlesung 7)

Ralf Möller, FH-Wedel

- Vorige Vorlesung
  - Boole'sche Logik, Resolution
- Inhalt dieser Vorlesung
  - Prädikatenlogik erster Stufe
- Lernziele
  - Syntax, Semantik
  - Entscheidungsprobleme
  - Anwendungen

Über das was wir machen .... müssen!

- Computer science is no more about computers than astronomy is about telescopes.

E. W. Dijkstra

Motivation

- Aussagenlogik: Aussagen als unteilbares Ganzes (atomare Formeln)
- Beispiel:
  - Wenn es regnet, werde ich naß: $R \rightarrow N$
  - Es regnet: R
  - Also: werde ich naß: N
- Wenn...dann: Wahrheitstabelle der Implikation
  - Wenn die Vorbedingung falsch ist, soll der ganze Implikationsterm wahr sein!
- Aussagenlogik recht mächtig (wir konnten z.B. schließen, daß Supermann nicht existiert)

Probleme (1)

- Gegeben
  - Alle Metalle leiten den Strom (A)
  - Kupfer ist ein Metall (B)
- Gewünschte Folgerung
  - Kupfer leitet den Strom (C)
- In Formeln (vielleicht):
  - $A \land B \to C$

Probleme (2)

- Gegeben
  - Alle Metalle leiten den Strom (A)
  - Eisen ist ein Metall (D)
- Gewünschte Folgerung
  - Eisen leitet den Strom (E)
- In Formeln (vielleicht):
  - $A \wedge D \rightarrow E$
- Neue Formeln für alle möglichen Metalle erforderlich!
- Gemeinsamkeiten nicht repräsentiert

Motivation (2)

- In Anwendungen ergeben sich Aussagen z.B. durch Analyse natürlichspracher Sätze (siehe Supermann-Beispiel)
- Sätze haben eine grammatische Struktur
- Wir betrachten einfach Satzstrukturen:
  - Subjekt-Prädikat: Ich schlafe
  - Subjekt-Prädikat-Objekt: Ich verfolge die Vorlesung

Subjekt-Prädikat-Strukturen

- Beispiel: Energie ist wertvoll
- Nutzung: Beschreibung von Eigenschaften
- Eigenschaften heißen Prädikate: Wertvoll-sein
- Wir betrachten einstellige Prädikate, die Eigenschaften eines „Subjekts“ (auch Individuum genannt) beschreiben
- Formalisierung:
  - Prädikate mit Großbuchstaben: P, Q, R, ...
  - Subjekte mit Kleinbuchstaben: x, y, z, ...

Einstellige Prädikate

- Notation: Wertvoll(x), P(x), ...
- Subjekte wie x bezeichnet man auch als Variablen
- Belegung der Variable: Übergang zur Aussage:
  - Wertvoll(blaue-Mauritius)
  - Die blaue Mauritius ist wertvoll
- Mögliche Belegungen für x aus vorgegebener Grundmenge

Subjekt-Prädikat-Objekt-Strukturen

- Beispiel: Edelgard ist mit Wolfgang verheiratet
- Variablen für Subjekt (Edelgard) und Objekt (Wolfgang) benötigt
- Prädikat beschreibt Beziehung (oder Relation) zwischen Subjekt und Objekt

Zweistellige Prädikate

- Verheiratetet-mit(x, y), P(x, y)
- Verheiratetet-mit(Edelgard, Wolfgang)

Verallgemeinerung: n-stellige Prädikate

- Blankenese liegt zwischen Wedel und Altona.
- Prädikat: Zwischen
- Dreistellig
- Im allgemeinen: $P(x_1, x_2, ..., x_n)$

Notation

- Manchmal ist die Notation $P(x,y)$ ungewohnt
- Beispiel: Prädikat Kleiner-als (<)
- Infix-Notation: $x < y$

Verknüpfung von Aussagen

- Beispiel: 2 und 3 sind Teiler von 6
- Steht für
  - 2 ist Teiler von 6
  - 3 ist Teiler von 6
- In Prädikatenschreibweise
  - Teiler-von(2, 6) $\wedge$ Teiler-von(3, 6)
- Beispiel: 4 ist nicht Teiler von 6
  - $\neg$Teiler-von(4, 6)

Namen für Funktionen

- Bei vielen Anwendungen bequem:
  Einführung von **Namen** für Funktionen
  - f, g, h, ... (rein syntaktische Namen, Funktorvariablen)
  - f_1, f_2, f_3, ...
- Funktoren haben eine festgelegte Stelligkeit und werden auf Variablen angewendet
- Terme: f(x, y)
  - Manchmal auch Infix-Schreibweise

Anwendung von Namen für Funktionen

- Beschreibung eines Objekts, das sich aus der Verknüpfung von x und y ergibt
- Beispiel:
  - Wenn y größer als 0, dann ist x+y größer als x
  - $(y > 0) \rightarrow ((x + y) > x)$
  - Oder: $>(y, 0) \rightarrow >(+(x, y), x)$

Quantisieren von Aussagen

- Eingangsbeispiel „Alle Metalle leiten den Strom" nicht von Subjekt-Prädikat-Struktur erfaßt
- Einstelliges Prädikat Leitet-den-Strom bezieht sich nicht auf einen einzelnen Gegenstand
- Vielmehr wird ausgesagt, daß *alle* Subjekte, die Metalle sind, diese Eigenschaft besitzen
- Formalisierung durch **Allquantor** (auch: Universalquantor, Generalisator)
- Für *alle* x gilt: wenn x ein Metall ist, dann leitet x den Strom

Quantisieren von Aussagen (2)

- Für alle x gilt: Metall(x) $\rightarrow$ Leitet-Strom(x)
- Notation: $\forall$ x (Metall(x) $\rightarrow$ Leitet-Strom(x))
- Man beachte: Es muß nicht notwendigerweise überhaupt Metalle geben! Die Für-alle-Aussage ist ja dann nicht falsch
- Manchmal möchte man die **Existenz** aber fordern
- Es *gibt ein* x: Metall(x), oder genauer aber synonym:
- Es *gibt mindestens ein* x: Metall(x)
- Notation: $\exists$x (Metall(x)) **Existenzquantor**

Syntax der Prädikatenlogik

Danksagung

- Die Folien zur Prädikatenlogik nach dem Buch "Logik für Informatiker" von Uwe Schöning wurden übernommen von Javier Esparza (http://wwwbrauer.in.tum.de/lehre/logik/SS99/)

Variablen, Symbole, Terme

Eine *Variable* hat die Form x_i mit $i = 1,2,3\ldots.$
Ein *Prädikatensymbol* hat die Form P_i^k und ein *Funktionssymbol* hat die Form f_i^k mit $i = 1,2,3\ldots$ und $k = 0,1,2\ldots.$ Hierbei heißt i jeweils der *Unterscheidungsindex* und k die *Stellenzahl* (oder Stelligkeit). Wir definieren nun die *Terme* durch einen induktiven Prozeß:

1. Jede Variable ist ein Term.

2. Falls f ein Funktionssymbol mit der Stellenzahl k, und falls $t_1,\ldots,t_k$ Terme sind, so ist auch $f(t_1,\ldots,t_k)$ ein Term.

Hierbei sollen auch Funktionssymbole der Stellenzahl 0 eingeschlossen sein, und in diesem Fall sollen die Klammern wegfallen. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstanten*.

Formeln

Nun können wir (wiederum induktiv) definieren, was *Formeln* (der Prädikatenlogik) sind.

1. Falls P ein Prädikatsymbol der Stelligkeit k ist, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine Formel.

2. Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.

3. Für alle Formeln F und G sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.

4. Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so sind auch $\exists xF$ und $\forall xF$ Formeln. Das Symbol $\exists$ wird *Existenzquantor* und $\forall$ *Allquantor* genannt.

Atomare Formeln nennen wir genau die, die gemäß 1. aufgebaut sind. Falls F eine Formel ist und F als Teil einer Formel G auftritt, so heißt F *Teilformel* von G.

Freie und gebundene Variablen, Aussagen

Alle Vorkommen von Variablen in einer Formel werden in *freie* und *gebundene* Vorkommen unterteilt. Dabei heißt ein Vorkommen der Variablen x in der Formel F gebunden, falls x in einer Teilformel von F der Form $\exists x G$ oder $\forall x G$ vorkommt. Andernfalls heißt dieses Vorkommen von x frei.

Eine Formel ohne Vorkommen einer freien Variablen heißt *geschlossen* oder eine *Aussage*.
Die *Matrix* einer Formel F ist diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes Vorkommen von $\exists$ bzw. $\forall$, samt der dahinterstehenden Variablen gestrichen wird. Symbolisch bezeichnen wir die Matrix der Formel F mit F^*.

Aufgabe

NF: Nicht-Formel F: Formel, aber nicht Aussage A: Aussage

	NF	F	A
$\forall x P(a)$			
$\forall x \exists y (Q(x,y) \vee R(x,y))$			
$\forall x Q(x,x) \to \exists x Q(x,y)$			
$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x,x)$			
$\forall P(x)$			
$P(x) \to \exists x$			
$\forall \exists P(x)$			
$\forall x \neg \forall y Q(x,y) \wedge R(x,y)$			
$\exists z (Q(z,x) \vee R(y,z)) \to \exists y (R(x,y) \wedge Q(x,z))$			
$\exists x (\neg P(x) \vee P(a))$			
$P(x) \to \exists x P(x)$			
$\exists x \forall y ((P(y) \to Q(x,y)) \vee \neg P(x))$			

Semantik der Prädikatenlogik

Struktur, passende Strukturen

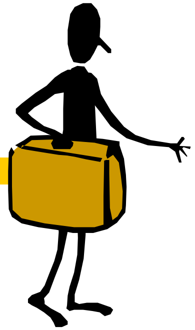
Eine *Struktur* ist ein Paar $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ wobei $U_\mathcal{A}$ eine beliebige aber nicht leere Menge ist, die die *Grundmenge* von $\mathcal{A}$ (oder der *Grundbereich*, der *Individuenbereich*, das *Universum*) genannt wird. Ferner ist $I_\mathcal{A}$ eine Abbildung, die

- jedem k–stelligen Prädikatensymbol P (das im Definitionsbereich von $I_\mathcal{A}$ liegt) ein k–stelliges Prädikat über $U_\mathcal{A}$ zuordnet,
- jedem k–stelligen Funktionssymbol f (das im Definitionsbereich von $I_\mathcal{A}$ liegt) eine k–stellige Funktion auf $U_\mathcal{A}$ zuordnet,
- jeder Variablen x (sofern $I_\mathcal{A}$ auf x definiert ist) ein Element der Grundmenge $U_\mathcal{A}$ zuordnet.

Sei F eine Formel und $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ eine Struktur. $\mathcal{A}$ heißt zu F *passend*, falls $I_\mathcal{A}$ für alle in F vorkommenden Prädikatsymbole, Funktionssymbole und freien Variablen definiert ist.

Mit anderen Worten, der Definitionsbereich von I_A ist eine Teilmenge von $\{P_i^k, f_i^k, x_i | i = 1, 2, 3, \dots \textit{ und } k = 0, 1, 2., \dots\}$, und der Wertebereich von I_A ist eine Teilmenge aller Prädikate und Funktionen auf U_A, sowie der Elemente von U_A. Wir schreiben abkürzend statt $I_A(P)$ einfach P^A, statt $I_A(f)$ einfach f^A und statt $I_A(x)$ einfach x^A.

Zusammenfassung, Kernpunkte



- Prädikatenlogik
  - Syntax, Formeln
  - Semantik, Belegung, Modell
  - Entscheidungsprobleme
  - Äquivalente Transformation von Formeln
  - Normalformen
- Anwendungsmotivation:
  - Bedingungen in Algorithmen
- Beweistechniken

Was kommt beim nächsten Mal?

- Spezifikationen
- Algorithmen
- Anweisungen
  - Syntax
  - Semantik