Das Verfahren der konjugierten Gradienten

Michael Bauer

7. November 2013

Richtung des steilsten Abstiegs

Sei f wie in (1). Die Richtung des steilsten Abstiegs von f an der Stelle x, d.h. $s \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Richtungsableitung

$$\frac{d}{dt} f(x + t\frac{s}{\|s\|_2})|_{t=0} = (\nabla f(x))^T (\frac{s}{\|s\|_2}) \qquad (1.2)$$

minimal ist, wird durch $s = -\nabla f(x) = b - Ax$ gegeben.

Projektionssatz (Numerik 1)

Für $U \subset V$, U sei ein n-dim. Teilraum von V und ϕ_j eine ONB. Dann existiert ein eindeutiges $u^* \in U$, welches $\|u^* - v\| = \min\limits_{u \in U} \|u - v\|$ erfüllt. Für jedes $v \in V$ wird dieses Problem durch

$$P_U(v) := \sum_{j=1}^{n} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$$

gelöst. $P_U(v)$ ist die orthogonale Projektion bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

$$w_k^{'} := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle w_i,$$

$$w_k = \frac{w_k^{'}}{\|w_k^{'}\|_2}$$

Algorithmus

Die folgenden Teilschritte definieren die Vorgehensweise zur Erzeugung der Lösung x^* durch Näherungen $x^1, x^2, ...$

$U_1 := span\{r^0\}$, wobei $r^0 = b - Ax^0$
dann gilt für $k = 1, 2, 3, ...$, falls $r^{k-1} = b - Ax^{k-1} \neq 0$:

CG_a**:** Bestimme A-orthogonale Basis

$$p^0, ..., p^{k-1} \text{ von } U_k \tag{1}$$

CG_b**:** Bestimme $x^k \in U_k$, so dass

$$\|x^k - x^*\|_A = \min_{u \in U_k} \|x - x^*\|_A \tag{2}$$

CG_c**:** Erweitung des Teilraumes:

$$U_{k+1} := span\{p^0, ..., p^{k-1}, r^k\} \ wobei \ r^k := b - Ax^k \tag{3}$$

d.h.

$$x^k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle x^*, p^j \rangle_A}{\langle p^j, p^j \rangle_A} p^j \tag{4}$$

Krylovraum

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k(r, A) &:= span\{r, Ar, ..., A^{k-1}r\} && mit k \geq 1 \\ \mathcal{K}_k(r, A) &:= \{0\} && mit k = 0 \end{aligned}$$

heißt Krylovraum zur Matrix A und zum Vektor r.
Iterative Krylovraum-Methoden zur Lösung eines GLS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verlangen $x^k \in x^0 + \mathcal{K}_k(r^0, A)$ und $x^n = x^*$, wobei $r^0 = Ax^0 - b$.