

Fakultät für Mathematik

Universität Regensburg

Ein Vergleich des Verfahrens der konjugierten Gradienten und Mehrgittermethoden, angewandt auf die diskretisierte Poisson-Gleichung

Bachelor-Arbeit

Michael Bauer

Matrikel-Nummer 1528558

Erstprüfer Prof. Garcke

Zweitprüfer Prof. ...

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	IV
Tabellenverzeichnis	V
Symbolverzeichnis	VI
1 Einleitung	1
2 Diskretisierung der Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2	3
2.1 Definition (Poisson-Gleichung)	3
2.2 Bemerkungen	4
2.3 Finite Differenzen-Methode für die Poisson-Gleichung	4
2.3.1 (Zentraler) Differenzenquotient zweiter Ordnung	4
2.3.2 Diskretisierung von Ω	5
3 Iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme	9
3.1 Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren)	9
3.1.1 Das allgemeine Jacobi-Iterationsverfahren	9
3.1.2 Das Jacobi-Iterationsverfahren für die Poisson-Gleichung	10
3.2 Das Gauß-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren)	11
3.2.1 Das allgemeine Gauss-Seidel-Iterationsverfahren	11
3.2.2 Das Gauss-Seidel-Iterationsverfahren für die Poisson-Gleichung	12
3.3 Warum Einzelschritt- und Gesamtschrittverfahren?	12
3.4 Das Verfahren der konjugierten Gradienten	13
3.4.1 Definition (A-orthogonal)	13
3.4.2 Satz - Minimierungsfunktion	13
3.4.3 Lemma - (A-orthogonaler) Projektionssatz	14

Inhaltsverzeichnis

3.4.4	Allgemeiner Algorithmus der konjugierten Gradienten	15
3.4.5	Numerischer Algorithmus der konjugierten Gradienten	16
3.4.6	Satz - Verallgemeinerung des Startvektors	17
3.4.7	Lemma (Zusammenhang zu Krylovräumen)	18
4	Mehrgitterverfahren	19
4.1	Grundideen	19
4.1.1	Beweis der Residuungleichung	19
4.2	Der Zweigitter-Algorithmus	20
4.3	Der Mehrgitter-Algorithmus	21
5	Zusammenfassung	23
A	Anhang	25
A.1	Quelltexte	25

Abbildungsverzeichnis

2.1	5-Punkt-Differenzenstern im Gitter	6
2.2	Gitter	6

Tabellenverzeichnis

5.1	eine sinnlose Tabelle	23
5.2	eine kompliziertere Tabelle	23

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

Symbol	Bedeutung
a	der Skalar a
\vec{x}	der Vektor \vec{x}
\mathbf{A}	die Matrix \mathbf{A}

1 Einleitung

Viele Prozesse in den Naturwissenschaften, wie Biologie, Chemie und Physik, aber auch der Medizin, Technik und Wirtschaft lassen sich auf partielle Differentialgleichungen (PDG) zurückführen. Aus diesem Grund ist das Interesse an ihnen sehr groß. Solche Gleichungen zu lösen ist allerdings nicht immer möglich, oder sehr aufwendig. Eine der bekanntesten PDGs ist die Poisson-Gleichung – eine elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie wurde vom Mathematiker und Physiker Simeon Denis Poisson aufgestellt und findet vor allem in der Physik Anwendung, da sie dem elektrostatischen Potential und dem Gravitationspotential genügt. Methoden aus der numerischen Mathematik ermöglichen uns das Lösen von partiellen Differentialgleichungen mittels computerbasierter Algorithmen. Hierbei wird jedoch nicht das Ergebnis direkt ausgerechnet, sondern versucht eine exakte Lösung zu approximieren. Diese Approximationen werden mittels Computerprogrammen realisiert und aus diesem Grund ist ein effizientes, numerisch stabiles Verfahren unabdingbar. Im folgenden werden wir zwei Methoden kennenlernen, die genau diese Kriterien erfüllen. Um nun die Lösung einer partiellen Differentialgleichung bestimmen zu können, müssen wir uns im Vorfeld Gedanken darüber machen, wie wir diese am besten erhalten. Eine der zentralen Methoden der Numerik sind Finite Differenzen. Hierbei führen wir die PDG, die auf einem gewissen Gebiet definiert ist auf das Einheitsquadrat zurück, legen ein Gitter darüber und erhalten durch diese Diskretisierung ein lineares Gleichungssystem. Da für lineare Gleichungssysteme direkte Lösungsverfahren, wie beispielsweise der Gauß-Algorithmus, existieren, bekommen wir unter Maschinengenauigkeit ein exaktes Ergebnis für die PDG. Wir werden allerdings sehen, dass der Rechenaufwand für große Systeme ungünstig ist. Eine weitere Möglichkeit zur Lösung sind iterative Verfahren. Diese haben nicht nur den Vorteil, dass sie nun mit hohen Dimension (z.B. einer xyx -Matrix) kein Problem mehr haben, sondern auch wesentlich schneller gegen die exakte Approximation konvergieren. Da es eine Vielzahl an iterativen Lösungsverfahren gibt, werden wir uns hier auf das Verfahren der konjugierten Gradienten (mit Vorkonditionierung) und Mehrgittermethoden beschränken. Beide Ver-

1 Einleitung

fahren haben gewisse Vorzüge, die wir gegeneinander abwägen und so einen Vergleich der Verfahren erhalten werden. Abschließend werden wir uns noch der Implementierung beider Verfahren widmen und ein konkretes Beispiel sehen.

2 Diskretisierung der Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2

Um nun die Poisson-Gleichung zu diskretisieren, werden wir diese zunächst definieren. Außerdem werden wir die Methode der finiten Differenzen einführen, um dann ein Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}x = b$ zu erhalten.

2.1 Definition (Poisson-Gleichung)

Sei $\Omega = (0,1) \times (0,1) \in \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, offenes Gebiet des \mathbb{R}^2 . Gesucht wird eine Funktion $u(x, y)$, die

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ in } \Omega \quad (2.1)$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ in } \partial\Omega \quad (2.2)$$

löst. Dabei bezeichnet $\Delta := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ den Laplace-Operator. Für die Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2 gilt dann:

$$-\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ in } \Omega \quad (2.3)$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ in } \partial\Omega \quad (2.4)$$

(2.2) und (2.4) nennt man Dirichlet-Randbedingung.

2.2 Bemerkungen

- Die Funktion $u(x, y)$ ist häufig formelmäßig nicht darstellbar und wird mit Hilfe von numerischen Verfahren in Ω genähert (Parallele numerische Verfahren/Seite 18 unten)
- Man kann zeigen, dass, wenn $\partial\Omega$ aus glatten Liniensegmenten (z.B. Geraden) zusammengesetzt ist und $f(x, y) \in C^1(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$ gilt, die Gleichungen (2.1),(2.2) bzw. (2.3),(2.4) eine eindeutige Lösung besitzen (Dahmen, Reusken Seite 463).

Um diese (elliptische) partielle Differentialgleichung nun in Ω zu diskretisieren, bedarf es der Hilfe der Finiten Differenzen Methode:

2.3 Finite Differenzen-Methode für die Poisson-Gleichung

2.3.1 (Zentraler) Differenzenquotient zweiter Ordnung

Wir betrachten ein $(x, y) \in \Omega$ beliebig. Dann gilt für $h > 0$ mit der Taylorformel

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h\partial_x u(x, y) + \frac{h^2}{2!}\partial_{xx}u(x, y) + \frac{h^3}{3!}\partial_{xxx}u(x, y) + \dots \quad (2.5)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h\partial_x u(x, y) + \frac{h^2}{2!}\partial_{xx}u(x, y) - \frac{h^3}{3!}\partial_{xxx}u(x, y) + \dots \quad (2.6)$$

Analog können wir diese Betrachtung für $u(x, y+h)$ und $u(x, y-h)$ machen.

Löst man nun (2.5) und (2.6) jeweils nach $\partial_{xx}u(x, y)$ auf und addiert die zwei Gleichungen, so erhält man:

$$\partial_{xx}u(x, y) + O(h^2) = \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2} \quad (2.7)$$

Ebenso lösen wir nach $\partial_{yy}u(x, y)$ auf und erhalten analog:

$$\partial_{yy}u(x, y) + O(h^2) = \frac{u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)}{h^2} \quad (2.8)$$

Diese Näherungen nennt man auch (zentralen) Differenzenquotienten der zweiten Ableitung, wobei $O(h^2)$ ein Term zweiter Ordnung ist und später vernachlässigt wird/werden

2 Diskretisierung der Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2

kann. Somit erhalten wir für $\Delta u(x, y)$ die Näherung

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ &\approx \frac{u(x-h, y) + u(x+h, y) - 4u(x, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h)}{h^2}\end{aligned}\quad (2.9)$$

2.3.2 Diskretisierung von Ω

Mit einem zweidimensionalen Gitter, der Gitterweite h , wobei $h \in \mathbb{Q}$ mit $h = \frac{1}{n}$ und $n \in \mathbb{N}_{>1}$, wird nun das Gebiet Ω diskretisiert. Die Zahl $(n-1)$ gibt uns an, wie viele Gitterpunkte es jeweils in x- bzw. y-Richtung gibt.

Für $i = 1, \dots, (n-1)$ und $j = 1, \dots, (n-1)$ kann man dann $u(x, y)$ auch in der Form $u(x_i, y_j)$ schreiben. Dabei gilt dann:

$$u(x_i, y_j) := u(ih, jh) \quad (2.10)$$

und für Ω lässt sich ein Ω_h einführen, so dass:

$$\Omega_h := \{u(ih, jh) | 1 \leq i, j \leq (n-1)\} \quad (2.11)$$

Betrachten wir nun noch den Rand von Ω bzw. Ω_h , dann gilt:

$$\overline{\Omega}_h := \{u(ih, jh) | 0 \leq i, j \leq n\} \quad (2.12)$$

Mit der Formel (2.9) ergibt sich nun für $\Delta u(x, y)$ die diskretisierte Form:

$$\begin{aligned}\Delta_h u(x, y) &:= \frac{u(x-h, y) + u(x+h, y) - 4u(x, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h)}{h^2} \\ &= \frac{u(x_i-h, y_i) + u(x_i+h, y_i) - 4u(x_i, y_i) + u(x_i, y_i-h) + u(x_i, y_i+h)}{h^2} \\ &= \frac{u(ih-h, jh) + u(ih+h, jh) - 4u(ih, jh) + u(ih, jh-h) + u(ih, jh+h)}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \frac{u(x, y+h)}{u(x, y)}, & 1, & \frac{u(x, y-h)}{u(x, y)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x+h, y) \\ u(x, y) \\ u(x-h, y) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.13)$$