1 UR-Model

1.1 UR-Model

Die hier angegebenen Formulierungen und Funktionen sind (noch) ohne Herleitung in LaTex gesetzt, jedoch schon schriftlich fest gehalten.

1.1.1 Primales Problem

$$\min_{u,v} \beta||u-g||_1 + ||\nabla u||_1 + \frac{\alpha}{2}||v-u||_2^2 + ||\nabla v||_1. \tag{1.1}$$

Da in $||v-u||_2^2$ beide zu minimierenden Variablen vorkommen, muss man diesen Term in den Funktionen die von u abhängen und auch in den Funktionen die von v abhängen mit einbeziehen. Man erhählt als Funktionen:

$$F(u) = ||\nabla u||_1 \tag{1.2}$$

$$G(u) = \beta||u-g||_1 + \frac{\alpha}{2}||v-u||_2^2 \tag{1.3}$$

$$F(v) = ||\nabla v||_1 \tag{1.4}$$

$$G(v) = \frac{\alpha}{2}||v-u||_2^2 \tag{1.5}$$

Die Idee ist, dass man dieses Problem alternierend löst. Minimiert man nach u ist das v fest, bzw. minimiert man nach v ist das u fest. Also man entrauscht alternierend mit Regularisierern, die gut für Gauß-Rauschen bzw. Salt & Pepper-Rauschen sind. Man erhält dann

$$\min_u \quad F(u) + G(u) \tag{1.6}$$

$$\min_v \quad F(v) + G(v) \tag{1.7}$$

1.1.2 Primal-Dual Problem

$$\min_v \max_p \quad \langle \nabla v, p \rangle - \delta_P(p) + \frac{\alpha}{2}||v-u||_2^2 \tag{1.8}$$

$$\min_u \max_q \quad \langle \nabla u, q \rangle - \delta_Q(q) + \beta||u-g||_1 + \frac{\alpha}{2}||v-u||_2^2 \tag{1.9}$$

Mit

$$P = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : ||p||_\infty \leq 1 \right\}$$

und

$$Q = \left\{q \in \mathbb{R}^n : ||q||_\infty \leq 1\right\},$$

wie im ROF-Model für die Legendre-Fenchel konjugierte der totalen Variation.

1.1.3 Proximity Operatoren

Für die Minimierung über die Variable v erhalte Operatoren aus dem ROF Model:

$$(\mathrm{Id} + \sigma\,\partial\,F^*)^{-1}(\tilde{p}) = P_{l_2}(\tilde{p}) = p \Longleftrightarrow p_{i,j}\frac{\tilde{p}_{i,j}}{\max(1, |\tilde{p}_{i,j}|)}, \tag{1.10}$$

$$(\mathrm{Id} + \tau\,\partial\,G)^{-1}(\tilde{v}) = v \Longleftrightarrow v_{i,j} = \frac{\tilde{v}_{i,j} + \tau\lambda g}{1 + \tau\sigma}, \tag{1.11}$$

punktweise für alle i, j.

Für den Fall der Variablen u haben wir

$$\begin{aligned}
q &= (\mathrm{Id} + \sigma\,\partial\,F^*)^{-1}(\tilde{q}) = P_{l_2}(\tilde{q}) \Longleftrightarrow p_{i,j}\frac{\tilde{q}_{i,j}}{\max(1, |\tilde{q}_{i,j}|)}, \\
u &= (\mathrm{Id} + \tau\,\partial\,G)^{-1}(\tilde{u}) \Longleftrightarrow u_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\tilde{u} - \tau\beta - \tau\alpha v_{i,j}}{1 - \tau\alpha} & \text{if } \tilde{u}_{i,j} - (1 - \tau\alpha)g_{i,j} > \tau\alpha v_{i,j} + \tau\beta, \\ \dfrac{\tilde{u} + \tau\beta - \tau\alpha v_{i,j}}{1 - \tau\alpha} & \text{if } \tilde{u}_{i,j} - (1 - \tau\alpha)g_{i,j} < \tau\alpha v_{i,j} - \tau\beta, \\ g_{i,j} & \text{if } |\tilde{u}_{i,j} - (1 - \tau\alpha)g_{i,j}| \leq \tau(\beta + \alpha v_{i,j}). \end{cases}
\end{aligned}$$