Prof. Dr. H. Abels, Dr. Y. Liu
Fakultät Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 2014
23.04.2014

Partielle Differentialgleichungen I

Übungsblatt 3

Abgabe bis Freitag, den 2.5.14 um 10:00 Uhr

Ü1 (Transportgleichung)(4 Punkte)

(a) Sei $a \in C_b^1(\mathbb{R}^n)^n$. Zeigen Sie: Die Differentialgleichung

$$(*) \begin{cases} \frac{d}{dt} X_t(x) & = a(X_t(x)) \\ X_t(x)|_{t=0} & = x \end{cases}$$

besitzt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung, die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} X_t \circ X_s &= X_{t+s} \qquad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}, \\ X_0 &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

Folgern Sie, dass $X_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein C^1-Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung X_{-t} ist.

(b) Wir betrachten jetzt die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + a(x) \cdot \nabla u(x,t) &= \quad 0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) &= \ u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit $a \in C_b^1(\mathbb{R}^n)^n$ und Anfangswerten $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutige klassische Lösung der Transportgleichung, die gegeben ist durch

$$u(x,t) = u_0(X_{-t}(x))\,.$$

Ü2 (Eindimesionale Erhaltungsgleichung)(4 Punkte)

Gegeben sei die quasi-lineare partielle Differentialgleichung

$$(1) \begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x F(u(x,t)) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,T)\,, \\ \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

wobei $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe C^2-Funktion ist und $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R})$. (Für $F(u) = \frac{u^2}{2}$ erhält man die Burgers Gleichung.) Zeigen Sie:

(a) Falls u_0 monoton wachsend ist, so hat (1) eine eindeutige klassische Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

(b) Sei nun F eine strikt konvexe C^2-Funktion. Falls es $x_1 < x_2$ mit $u_0(x_1) > u_0(x_2)$ gibt, so existiert ein $T^* > 0$, so dass (1) keine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T))$ für alle $T > T^*$ besitzt.

Hinweis: Es kann helfen zunächst den Fall $F(u) = \frac{u^2}{2}$ zu betrachten.

Ü3 (Stetige schwache Lösungen)(4 Punkte)

Es sei $h \in C^1([0,\infty))$ streng monoton wachsend mit $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$, $h(0) = 0$ und definiere

$$\Omega_\pm = \{(x,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \,|\, x \gtrless h(t)\}\,.$$

Außerdem seien $F \in C^1(\mathbb{R})$ und $u \in C_b^0([0,\infty) \times \mathbb{R})$ mit $u_{|\Omega_\pm} \in C^1(\overline{\Omega_\pm})$ und

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x F(u(x,t)) = 0 \qquad \text{für alle } (x,t) \in \Omega_\pm$$

und $u_0(x) := u(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass u ist eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + \partial_x F(u(x,t)) &= 0 \qquad && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist. Folgern Sie, dass jede klassische Lösung von (1) auch eine schwache Lösung ist.