MATHEMATIK
5AHWII

Alexander Heim
2021/22

0. Index

1. Differentialgleichungen

1.1 Einführung und Einordnung

Oft kann bei Prozessen nur die Änderung eines Wertes in Abhängigkeit eines anderen Wertes gemessen werden. Z.B.: Luftdruck in Abhängigkeit von der Seehöhe, oder die Aufnahmekapazität eines Kondensators beim Entladen in Abhängigkeit von der Zeit.
=> Eine Differentialgleichung enthält mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion
=> Integration ist eine Lösungsmethode

Eingeteilt werden die Differentialgleichungen nach folgenden Kriterien:

- Ordnung: Die höchste aufretende Ableitung
- Grad: Höchste Potenz der Funktion oder einer ihrer Ableitungen
- Homogenität: Tritt kein Summand auf, der mit der gesuchten Funktion oder einer ihrer Ableitungen in Zusammenhang steht, spricht man von einer homogeneen Differentialgleichung. Tritt so ein Summand auf, spricht man von einer inhomogenen Differentialgleichung.

Beispiele:

$$y^n + y = 0 \text{ ...2. Ordnung, 1. Grades, Homogen}$$
$$y'y^2 + x^4 = 0 \text{ ...1. Ordnung, 2. Grades, Inhomogen}$$
$$y'''(x+2) = y^4 \text{ ... 3. Ordnung, 4. Grades, Homogen}$$

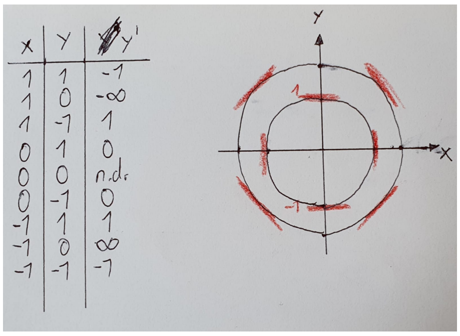
Da die Ordnung angibt, wie oft integriert werden muss, gibt die Ordnung, da unbesimmt integriert wird, die Anzahl der Integrationskonstanten an. Um die Integrationskonstanten zu bestimmen, muss eine entsprechende Anzahl an Anfangs- und Randbedingungen geben sein.

1.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Differentialgleichung 1. Ordnung können auch grafisch gelöst werden. Dazu werden Linienelemente in ein Richtungsfeld eingezeichnet. Ein Linienelement besteht dabei aus der x- und der y-Koordinate sowie der zugehörigen Steigung y'.
Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \text{ ...1. Ordnung, 1. Grades, Homogen}$$

Die Allgemeine Lösung: konzentrische Kreise mit Mittelpunkt (0,0)



Ist eine Anfangsbedingung gegeben (zBs.: y(0)=1), erhält man eine spezielle Lösung. In diesem Fall der Einheitskreis.

1.3 Homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

Diese Differentialgleichungen können rechnerisch mit der Methode des "Trennens der Variablen" gelöst werden.
Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \; / * dx / * y$$
$$y * dy = -x * dx \; / \int$$
$$\int ydy = \int xdx$$
$$\frac{y^2}{z} = -\frac{x^2}{z} + C \; / * z$$
$$y^2 = -x^2 + C$$
$$y^2 = C - x^2 \; / \sqrt{}$$
$$y = \pm\sqrt{C - x^2} \text{ ... Allgemeine Lösung}$$

Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

$$1 = \pm\sqrt{C - 0}$$
$$1 = \pm\sqrt{C} \; /()^2$$
$$1 = c$$

Spezielle Lösung: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$
HÜ: 3.31d, 3.32e, 3.33a