Matematica 3

Voy a ir haciendo los resumenes de las teorias en este word, para tener la info por si quiero chequear algo, probablemente no vaya a ninguna teoria asique ire leyendo las filiminas/libro e ire haciendo aca todo el analisis, resumen, anotaciones de lo que vaya leyendo y temas de la materia.

Las practicas las hare en el cuaderno.

Repaso:

Metodos de conteo:

Principio fundamental de conteo: Suponga que se pueden realizar k operaciones. Si hay n1 maneras de realizar la primera operación y si para cada una de esas maneras hay n2 maneras de realizar la segunda operación, y si para cada una de esas elecciones de esas de esas maneras de realizar las dos primeras operaciones hay n3 maneras de realizar la tercera operación y así sucesivamente, entonces el número total de maneras de realizar la secuencia de las k operaciones es n1 \* n2 \* n3 \* …nk.

Permutaciones: Constituye un ordenamiento de un conjunto de elementos. Por ejemplo, hay 6 permutaciones de las letras A, B y C: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

N! = “n factorial”

Para cualquier entero positivo n,n! = n(n-1)(n-2)…(3)(2)(1)

El numero de permutaciones de n objetos es n!

El numero de permutaciones de k objetos elegidos de un grupo de n elementos es, Pk,n = n! / (n-k)!

El número de permutaciones de k objetos elegidos de un grupo de n elementos donde cada elemento se puede elegir más de una vez es NK

Combinaciones: A cada grupo distinto de elementos que se puede seleccionar, sin importar el orden, se le llama combinación.

El razonamiento utilizado para deducir el número de combinaciones de los tres elementos elegidos se puede generalizar para deducir una expresión para (N sobre K)

El numero de combinaciones de K elementos elegidos de un grupo de N elementos es: (N sobre K) = N! / K!(N-K)!

El número de maneras de dividir un grupo de n elementos en grupos de K1, ... ,Kr elementos, donde K1 +...+ Kr = N es: N! / K1!...Kr!

Principio de suma: Si A1, A2, …, An son conjuntos tales que Ai ∩ Aj = ∅, si i ≠ j , entonces el número de elementos de A1 ∪ A2 ∪…,∪ An es igual a la suma del número de elementos de cada conjunto, en símbolos # ( A1 ∪ A2 ∪…,∪ An) = #A1 + # A2 +…,+ #An

1 – PROBABILIDAD:

1.1 Espacios muestrales y eventos:

Experimentos aleatorios:

Simbolizamos con ε a un experimento aleatorio.

A medida que el experimento se repite, los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Pero si el experimento se repite un gran número de veces, y registramos la proporción de veces que ocurre un determinado resultado, veremos que esa proporción tiende a estabilizarse en un valor determinado a medida que aumenta el número de veces que se repite el experimento. Por ejemplo, consideremos el experimento de lanzar un dado y observar el número de la cara superior. Supongamos que tiramos el dado N veces, y sea n el número de veces que sale el número 5 en los N tiros del dado. Entonces n/N es la proporción de veces que sale el número 5 en los N tiros. Si el dado es normal a medida que N aumenta, n/N tiende a estabilizarse en un número que es 1/6.

Espacio Muestral: Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Al espacio muestral lo anotamos con la letra S.

Ej1: Si ε : tirar un dado y observar el número en la cara de arriba, entonces podemos tomar como espacio muestral a S = {1,2,3,4,5,6}.

Ej2: Si ε : lanzar una moneda tres veces y contar el número total de caras obtenidas entonces podemos considerar S = {3,2,1,0}.

Ej3: Si ε : tirar un dado las veces necesarias hasta que sale un 6 por primera vez, y contar el número de tiros realizados, entonces S = { 4,3,2,1 ,.....} = N , donde N es el conjunto de los números naturales.

Ej4: Si ε : medir el tiempo de vida de una lamparita eléctrica, entonces S = {t ∈ R,t ≥ 0} donde R es el conjunto de los números reales.

Se llama evento o suceso a todo subconjunto del espacio muestral.

Ej1: En el experimento dado en el ejemplo 1), un evento de S sería A = { 6,4,2 } pues A ⊂ S . Podemos expresar al evento A con palabras de la siguiente manera A: “sale un número par”.

Observaciones:

El conjunto ∅ es un evento (pues el conjunto ∅ está incluido en todo conjunto, en particular ∅ ⊂ S ). Es el evento que nunca ocurre.

El espacio muestral S es un evento (pues todo conjunto está incluido en sí mismo), y S siempre ocurre.

Si A es un evento, AC es un evento. AC ocurre si y solo si no ocurre A

Importante recordar las propiedades sobre el algebra de conjuntos. Algunas pueden ser muy especificas.

Leyes de idempotencia, asociativas, conmutativas, distributivas, de identidad, de complemento, de morgan.

Conjunto Producto: Por ejemplo, si A = { 3,2,1 } y B = { 8,7 }, entonces A× B = {(7,1);(8,1);(7,2);(8,2);(7,3);(8,3)}

Si A y B son dos eventos tales que A ∩ B = ∅ , se dice que son disjuntos o mutuamente excluyentes.

Los eventos con un solo elemento son eventos elementales o simples.

Dado que en un experimento aleatorio a medida que n aumenta la frecuenta relativa (probabilidad) de A tiende a esatabilizarse en un numero, pero no se puede repetir infinitas veces un experimento. Se requiere asigna a cada evento A un numero que no dependa de la experimentacion. Por este motivo procedemos como sigue:

Definición axiomática de probabilidad:

Pag 7. Propiedades basicas o axiomas que entiendo habria que saberlos bien para usarlos a la hora de fundamentar alguna decision que tome.

Observación: en general vale la siguiente propiedad P(B − A) = P(B) − P(A ∩ B)

- Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B)

1.2 El espacio muestral finito:

La suma de las probabilidades de los eventos elementales es igual a 1. Al saber que el espacio muestral es finito, separamos a este en eventos elementales y listo.

Si B es un conjunto de eventos elementales, para calcular la probabilidad de B se suman las probabilidades de los eventos elementales que lo componen.

Si todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad de suceder, entonces dividimos a 1 en la cantidad de eventos elementales y nos da lo probabilidad de cada uno

1.3 Espacios muestrales infinitos:

Los únicos espacios muestrales infinitos no numerables que consideraremos son aquellos de medida geométrica finita m(S) tales como longitud, área o volumen, y en los cuales un punto se selecciona al azar. La probabilidad de un evento A, esto es aquella en la que el punto seleccionado pertenece a A, es entonces la relación entre m(A) a m(S) , es decir

P(A) = longitud de A / longitud de S o P(A) = area de A / area de S o P(A) = volumen de A / volumen de S

Ver ejemplo pag 14 que se busca un punto en un circulo.

2- PROBABILIDAD CONDICIONAL:

2.1 Definicion: Basicamente es realizar la probabilidad de que algo suceda teniendo en cuenta un suceso anterior positivo por ejemplo la probabilidad de sacar una bola blanca en una segunda sacada habiendo sacado una bola blanca anteriormente. Osea esta el caso en el que en la primer sacada es saca una bola o se saca una de otro color lo cual afecta a la probabilidad de la segunda sacada.

-Sean A y B dos eventos de un espacio muestral S. La probabilidad condicional de B dado A se define como:

P(B/A) = P(A interseccion B)/P(A) si P(A) != 0 (La misma definicion es para B)

En algunos casos se podra calcular P(B/A) reduciendo el espacio muestral y en otras no por lo que habra que usar la definicion anterior.

si A y B son eventos de un espacio muestral S equiprobable, entonces: P(B/A) = P(A interseccion B)/ P(A) = a las cantidades de la interseccion y P(A).

Teorema de la multiplicacion: basicamente que la probabilidad de la interseccion es igual a P(A/B)\*P(A).

P (A1 ∩ A2 ∩ A3) = P (A1) P (A2/A1) P (A3/ A1 ∩ A2)

2.2 Teorema de la probabilidad total: demostraciones falopas.

Teorema de Baves: siguen las demostraciones falopas.

Ejemplos que sirven para entender

2.3 Independencia: dos eventos A y B son independientes si P(B / A) = P (B) , y son dependientes de otro modo.

Si son independientes la probabilidad de P(B/A) = P(B) ya que A este caso podriamos decir que no importa. (SI A no es 0).

-A y B son independientes y si solo si P(A ∩ B) = P(A) \* P(B)

Obviamente si trabajamos con tamaños grandes la probabiliad no se ve muy afectada si sacamos una unidad por lo cual un conjunto de eventos A,B se pueden tratar como independientes aunque no lo sean.

-Si dos eventos A y B son independientes entonces A y BC son independientes

Independencia de mas de dos eventos:

La noción de independencia de eventos se puede ampliar a n eventos de la siguiente manera:

P(A1, interseccion A2, interseccion An) = P(A1)\*(PA2)\*P(AN).

Cuando hablamos de probabilidades en porcentajes hay que tener en cuenta el uso de logaritmos y estamos calculando que un caso con x probabilidad ocurra en x cantidad de casos.

3 – VARIABLES ALEATORIAS:

3.1 Generalidades:

Definición: Sea E un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado a él. Una variable aleatoria es una función que asigna a cada elemento de S un número real.

.Las variables aleatorias se anotan con letras mayusculas.

Dada una v.a X a su imagen se la anota RX y se la denomina rango o recorrido de X.

Las variables aleatorias se clasifican según su rango. Sea X es una v.a con rango RX . Si RX es un conjunto finito o infinito numerable entonces se dice que X es una v.a discreta y Si RX es un conjunto infinito no numerable entonces X es una v.a continua.

El rango RX es considerado un nuevo espacio muestral, y sus subconjuntos son eventos.

Definicion: siendo A c S y B c RX, A y B son EQUIVALENTES si A={ s existe en S; X(s) existe en B}

Con esta idea para encontrar la probabilidad del evento A hay que igualarlo con el evento B que seria el evento A pero explicitamente por decirlo de alguna forma. Ej A=”No sale cara en 3 tiradas” B={s,s,s} = 1/8

3.2 Variables aleatorias discretas:

.Funcion de probabilidad o de frecuencia de la v.a X = P(x)

.Distribucion de la probabilidad de X: seria mostrar cual es la probabilidad de cada evento.

Si P(X = xi) = 1/N para cada i entonces se dice que X tiene distribución uniforme discreta.

Funcion de distribucion acumulada (F.d.a): F(x) = P(X <= x) -infinito< x < +infinito

En el caso de ser X una v.a discreta: F(x) = P(X <= x)= Exponencial(con xi menor a x) P(xi) -infinito< x < +infinito

Lo anterior seria la definicion que se usa para definir cual es la probabilidad de que suceda cada evento.

En general si X es una v.a. discreta cualquiera, su F.d.a. será una función escalonada.

3.3 Esperanza de una variable aleatoria discreta: se realiza con la sumatoria de todas las probabilidades de que suceda el evento definido por la v.a. Ej: X = “numero de caras obtenidas” => RX ={0,1,2,3} la esperanza de X es = 0 \* 1/8 + 1\*3/8 + 2\* 3/8 + 3\* 1/8 = 3/2 = 1.5

Esperanza de una funcion:

Teorema: Si X es una v.a. discreta con rango RX y distribución de probabilidad p(x), entonces la esperanza de cualquier función h(X) es igual a E(h(X)) = Sumatoria (x) h(x) \* p(x)

Propiedades de la esperanza: Observaciones:

1.Para cualquier constante a,E(aX)=aE(X)

2.Para cualquier constante b, E(X+b) = E(X) + b

Varianza de una variable aleatoria: nose una verga

Siendo la esperanza E(X) = u

V(X) = E(X2) – u2

Propiedades de la varianza: Observaciones:

1. V(aX) = a2V(X)

2. V(X+b) = V(X)

3.4 Variables Aleatorias discretas importantes:

Distribucion binomial

Sea E un experimento aleatorio. Sea A un evento asociado a E y anotamos P( . A) = p

Supongamos un experimento aleatorio E0

ε que cumple los siguientes requisitos:

1- se realizan n repeticiones independientes de E , donde n se fija de antemano.

2- las repeticiones son idénticas, y en cada repetición de E observamos si ocurre A o no ocurre A (cuando A ocurre se dice que se obtuvo un “éxito”, caso contrario se obtuvo un “fracaso”)

3- la probabilidad de éxito es constante de una repetición a otra de E, y es igual a p

Se dice entonces que E0 es un experimento binomial

Osea basicamente las Probabilidades no varian si se repite E. Ej: tirar una moneda.

Si las probabilidades varian muy poco, cosa que practicamente no afecte, se cuenta como un experimento binomial.

La variable aleatorio binomial y su distribucion: normalmente lo importante es saber el numero total de exitos mas que saber que repeticion produjo el éxito.

Sea la v.a X: “Numero de exitos en las N repeticiones de E” se dice que X es una v.a binomial.

P(X <= k) es la F.d.a de X evaluada en k, es decir F(k) = P(X <= k)

Seax X -- B(n,p), entonces E(X) = np y V(X) = np(1-p)

Distribucion geometrica: basicamente hay que calcular la cantidad de fallos hasta el primer acierto

P(X=k) = (1-p)k-1 p con k = 1,2,…

Ejemplo: La probabilidad de que una computadora que corre cierto sistema operativo se descomponga en determinado día es de 0.1. Determinar la probabilidad de que la máquina se descomponga por pri- mera vez en el duodécimo día, después de la instalación del sistema operativo.

Se define la v.a X: “numero de dias hasta que la computadora se descompone por primera vez”

Entonces X – G(0.1), se pide calcular la P(X=12)

P(X=12) = (1 – p)12-1 p = 0.911 \* 0.1 = 0.031381

Sea X – G(p) entonces E(X) = 1/p y V(X) = 1-p/p2

Distribucion binomial negativa: igual a la anterior pero con N veces ósea seria el calculo de en cuantas “tiradas” salen N cantidad de casos como se quiere. La formula es igual a la anterior pero se eleva el numero de tiradas – N

Distribución hipergeométrica: básicamente cuantos M = éxitos, se sacan de una población ósea un conjunto los que no son éxitos se definen como fracasos (N-M).

Considerando la v.a X. Se dice que X tiene una distribución hipergeométrica con parámetros n, M y N. Con n siendo la cantidad de objetos que se “sacan” sin reemplazo.

Notacion: X--H(n,M,N)

P(X) = ({M/X} \* {N-M/n-k}) / {N/n}

El X puede ser que no este explicito pero si te dicen que la condición sea que saquen una cantidad habría que calcular los X que cumplen ósea Si X< 2 habria que calcular la P(1) y P(0) y sumarlas obviamente, por ejemplo. Pueden haber mil casos distintos pero seguramente haya que calcularlo.

E(X) = n\*M/N y V(X)= n\*M/N{N-M/N}\*{N-n/N-1}

Distribucion de Poisson: Una v.a. X con rango RX = {2,1,0 ,...} se dice tener distribución de Poisson con parámetro λ , si para algún λ > 0 P(X = k) = e-λ λk / k! k =0,1,2,…

. para valores de λ “pequeños” la distribución es asimétrica, a medida que λ aumenta, la distribución tiende a ser cada vez más simétrica

Si X – P(λ) entonces E(X) = λ y V(X) = λ

Aplicaciones de la distribución de Poisson:

La v.a. Poisson tiene un gran rango de aplicaciones, una de ellas es la aproximación para una v.a. binomial con parámetros n y p cuando n es grande y p es pequeño de manera tal que np → λ , específicamente, sea X ~ B(n, p) y sea λ = np , entonces para n grande y p chico:

P(X = k) = e- λ \* λk / k!

Es decir cuando n es grande, p chico y np es “moderado” entonces la v.a. binomial con parámetros n y p tiene una distribución que se aproxima a la de una Poisson con parámetro λ = np.

Proceso de Poisson: ?