Trabajo Práctico

Simulación de la SDE de Vasicek, Verificación Numérica y Precio de un Contrato Forward de Tasa

Finanzas Computacionales

1 Modelo continuo: SDE de Vasicek

La dinámica de la tasa corta r_t bajo la medida riesgo-neutral es:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t,$$

donde:

- r_t: tasa corta instantánea,
- $\kappa > 0$: velocidad de reversión a la media,
- θ: nivel de largo plazo,
- $\sigma > 0$: volatilidad del proceso,
- W_t: movimiento browniano estándar.

Interpretación intuitiva

- El término determinístico $\kappa(\theta - r_t)\,dt$ empuja la tasa hacia su media de largo plazo θ.
- Si $r_t < \theta$, el drift es positivo y la tasa tiende a subir.
- Si $r_t > \theta$, el drift es negativo y la tasa tiende a bajar.
- El término aleatorio σdW_t introduce shocks de corto plazo.

2 Solución analítica de r_T

La solución exacta del proceso de Vasicek es:

$$r_T = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa T} + \sigma \int_0^T e^{-\kappa(T-s)}\,dW_s.$$

En particular:

$$\mathbb{E}[r_T] = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa T},$$

$$\mathrm{Var}(r_T) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa T}\right).$$

3 Simulación del modelo por Euler–Maruyama

Discretizamos $[0, T]$ en M pasos de tamaño $\Delta t = T/M$. El esquema de Euler–Maruyama es:

$$r_{t_{k+1}} = r_{t_k} + \kappa(\theta - r_{t_k})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z_k, \qquad Z_k \sim \mathcal{N}(0,1).$$

4 Validación numérica del modelo

Se solicita verificar que Monte Carlo reproduce correctamente la distribución analítica de r_T.

Para valores fijos de los parámetros $(r_0, \kappa, \theta, \sigma, T)$:

1. Simulen N trayectorias de r_t hasta el tiempo T usando Euler–Maruyama.
2. Estimen:
$$\hat{\mu}_{MC} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_T^{(i)}, \qquad \hat{\sigma}^2_{MC} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_T^{(i)} - \hat{\mu}_{MC})^2.$$
3. Comparen con los valores analíticos:
$$\mu_{\text{exacta}} = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa T},$$
$$\sigma^2_{\text{exacta}} = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa T}).$$
4. Tabulen el error absoluto y relativo:
$$\text{Error abs.} = |\hat{\mu}_{MC} - \mu_{\text{exacta}}|, \qquad \text{Error rel.} = \frac{|\hat{\mu}_{MC} - \mu_{\text{exacta}}|}{|\mu_{\text{exacta}}|}.$$
5. Grafiquen histograma de $r_T^{(i)}$ junto con la densidad normal teórica:
$$r_T \sim \mathcal{N}(\mu_{\text{exacta}}, \sigma^2_{\text{exacta}}).$$

Este análisis confirma que el método numérico es correcto.

5 Contrato Forward de tasa

Consideramos un contrato Forward firmado en $t = 0$ que liquida en T, con payoff:

$$\text{Payoff} = r_T - K.$$

El valor teórico en $t = 0$ es:

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s\, ds}\,(r_T - K)\right].$$

Se estimará mediante simulación Monte Carlo.

6 Simulación del factor de descuento

El factor de descuento aproximado en Monte Carlo es:

$$D_T \approx \exp\left(-\sum_{k=0}^{M-1} r_{t_k}\Delta t\right).$$

$$\text{Payoff}^{(i)} = D_T^{(i)}(r_T^{(i)} - K).$$

7 Estimación Monte Carlo estándar

El estimador es:

$$\hat{V}_0^{(MC)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \text{Payoff}^{(i)}.$$

Se debe computar para:

$$N \in \{10^2,\ 5 \cdot 10^2,\ 10^3,\ 5 \cdot 10^3,\ 10^4,\ 5 \cdot 10^4\}.$$

Registrar: valor estimado, varianza y error relativo.

8 Análisis final solicitado

Se solicita:

1. Estimar el precio del Forward para cada N.
2. Calcular la varianza del estimador.
3. Estimar el error relativo (valor de referencia con $N_{\text{ref}} = 10^6$).
4. Graficar error vs. N.
5. Comentar los resultados.