Trabajo Práctico: Valuación de opciones vanilla resolviendo la Ecuación del Calor

Finanzas Computacionales

27 de octubre de 2025

1. Modelo y cambio de variables

Sea $V(S,t)$ el valor de una opción europea (call o put) con precio del subyacente $S > 0$, tasa libre de riesgo $r \geq 0$, volatilidad $\sigma > 0$ y madurez T. La PDE de Black–Scholes es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \qquad 0 \leq t < T,\ S > 0. \tag{1}$$

Condición terminal (payoff) a $t = T$:

$$V(S,T) = \begin{cases} \max(S-K,0) & \text{(call)},\\ \max(K-S,0) & \text{(put)}. \end{cases}$$

Considere el **cambio de variables**:

$$x := \ln S + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \tag{2}$$

$$\tau := \frac{\sigma^2}{2}(T-t), \tag{3}$$

y defina

$$y(x,\tau) := e^{-r\left(T - \frac{2}{\sigma^2}\tau\right)}\, V\left(\exp\!\left[x - \left(\tfrac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\tau\right],\ T - \tfrac{2}{\sigma^2}\tau\right). \tag{4}$$

Con (2)–(4), la PDE (1) se transforma en la **ecuación del calor**:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau}(x,\tau) - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,\tau) = 0, \qquad \tau > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Condición inicial en $\tau = 0$. De (4) y $t = T$ ($\tau = 0$):

$$y(x,0) = e^{-rT}\,\Phi(e^x), \qquad \Phi(S) = \begin{cases} \max(S-K,0) & \text{(call)}\\ \max(K-S,0) & \text{(put)} \end{cases} \tag{6}$$

Ejercicios

1. **Implementación.** Resuelvan la ecuación del calor con el esquema explícito, implícito y Crank-Nicolson. Parámetros sugeridos: $K = 100$, $r = 5\,\%$, $\sigma = 20\,\%$, $T = 1$. Reporten sensibilidad a Δx y $\Delta\tau$.

2. **Retransformación.** Recuperen $V(S,t)$ sobre una grilla en (S,t).

3. **Gráficos.**

- Superficie $V(S,t)$ (o al menos 6 curvas $V(S,t_j)$ para tiempos equiespaciados).
- Comparación con la fórmula cerrada de Black–Scholes (call/put europeo) en $t = 0$ mediante error relativo en función de S.

4. **Convergencia.** Muestren cómo cambia el error $\|V_\Delta - V_{\mathrm{BS}}\|$ al refinar $\Delta x, \Delta\tau$. Pueden suponer que la opción se encuentra ATM.