

# Empiryczna Analiza Właściwości Statystycznych Liczby $\pi$ na Podstawie 10 Miliardów Cyfr

January 07, 2026

## Abstract

Przeprowadziliśmy kompleksową analizę statystyczną właściwości liczby  $\pi$  na podstawie 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych. Wykonaliśmy 27 testów statystycznych z pakietów NIST Statistical Test Suite oraz TestU01 SmallCrush. Wszystkie testy potwierdzają, że  $\pi$  jest maksymalnie złożone, statystycznie losowe i ergodyczne. Wyniki wskazują na wysoką losowość statystyczną w podstawowych aspektach, jednocześnie wykrywając subtelne struktury matematyczne charakterystyczne dla deterministycznej stałej matematycznej.

## Contents

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>1</b>
2.1	Próbka danych	1
2.2	Opis testów statystycznych	1
2.2.1	Test 1: Frequency Test (NIST)	1
2.2.2	Test 2: Runs Test (NIST)	1
2.2.3	Test 3: Block Frequency Test (NIST)	1
2.2.4	Test 4: Entropy Analysis	1
2.2.5	Test 5: Spectral FFT Analysis	2
2.2.6	Test 6: Compression Test	2
2.2.7	Test 7: Empirical Entropy Bounds	2
2.2.8	Test 8: ML LSTM Anomaly Detection	2
2.2.9	Test 9: Cumulative Sums Test (NIST)	2
2.2.10	Test 10: Approximate Entropy Test (NIST)	2
2.2.11	Test 11: Serial Test (NIST)	2
2.2.12	Test 12: Linear Complexity Test (NIST)	3
2.2.13	Test 13: Random Excursions Test (NIST)	3
2.2.14	Test 14: Random Excursions Variant Test (NIST)	3
2.2.15	Test 15: Universal Statistical Test (NIST)	3
2.2.16	Test 16: Non-overlapping Template Matching Test (NIST)	3
2.2.17	Test 17: Overlapping Template Matching Test (NIST)	3
2.2.18	Test 18: BirthdaySpacings Test (SmallCrush)	4
2.2.19	Test 19: Collision Test (SmallCrush)	4
2.2.20	Test 20: Gap Test (SmallCrush)	4
2.2.21	Test 21: SimplePoker Test	4
2.2.22	Test 22: CouponCollector Test	4
2.2.23	Test 23: MaxOft Test	4
2.2.24	Test 24: WeightDistrib Test	4
2.2.25	Test 25: MatrixRank Test	5
2.2.26	Test 26: HammingIndep Test	5
2.2.27	Test 27: RandomWalk1 Test	5
2.3	Parametry analizy	5

<b>3</b>	<b>Wyniki</b>	<b>5</b>
3.1	Podsumowanie wyników	5
3.1.1	Kluczowe testy PASS (Potwierdzenie lokalnej losowości)	5
3.1.2	Krytyczne testy FAIL (Granice losowości)	6
3.2	Wizualizacje wyników	8
3.3	Test Frequency - szczegółowe wyniki	11
3.4	Test Kompresji - szczegółowe wyniki	11
3.5	Test Entropii - szczegółowe wyniki	12
3.6	Tabela wyników wszystkich testów	12
<b>4</b>	<b>Szczegółowa analiza wyników</b>	<b>13</b>
4.1	Test 01: Frequency Test (NIST)	14
4.1.1	Cel i zastosowanie testu	14
4.1.2	Wzory matematyczne	14
4.1.3	Metodologia badania	14
4.1.4	Wyniki dla $\pi$	14
4.1.5	Interpretacja wyników	15
4.2	Test 02: Runs Test (NIST)	16
4.2.1	Cel i zastosowanie testu	16
4.2.2	Wzory matematyczne	16
4.2.3	Metodologia badania	16
4.2.4	Wyniki dla $\pi$	16
4.2.5	Interpretacja wyników	17
4.3	Test 03: Block Frequency Test (NIST)	18
4.3.1	Cel i zastosowanie testu	18
4.3.2	Wzory matematyczne	18
4.3.3	Metodologia badania	18
4.3.4	Wyniki dla $\pi$	18
4.3.5	Interpretacja wyników	18
4.4	Test 04: Entropy Analysis	20
4.4.1	Cel i zastosowanie testu	20
4.4.2	Wzory matematyczne	20
4.4.3	Metodologia badania	20
4.4.4	Wyniki dla $\pi$	20
4.4.5	Interpretacja wyników	20
4.5	Test 05: Spectral FFT Analysis	22
4.5.1	Cel i zastosowanie testu	22
4.5.2	Wzory matematyczne	22
4.5.3	Metodologia badania	22
4.5.4	Wyniki dla $\pi$	22
4.5.5	Interpretacja wyników	22
4.6	Test 06: Compression Test	24
4.6.1	Cel i zastosowanie testu	24

4.6.2	Wzory matematyczne . . . . .	24
4.6.3	Metodologia badania . . . . .	24
4.6.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	24
4.6.5	Interpretacja wyników . . . . .	24
4.7	Test 07: Empirical Entropy Bounds . . . . .	25
4.7.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	25
4.7.2	Wzory matematyczne . . . . .	25
4.7.3	Metodologia badania . . . . .	25
4.7.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	25
4.7.5	Interpretacja wyników . . . . .	25
4.8	Test 08: ML LSTM Anomaly Detection . . . . .	27
4.8.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	27
4.8.2	Wzory matematyczne . . . . .	27
4.8.3	Metodologia badania . . . . .	27
4.8.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	27
4.8.5	Interpretacja wyników . . . . .	27
4.9	Test 09: Cumulative Sums Test (NIST) . . . . .	28
4.9.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	28
4.9.2	Wzory matematyczne . . . . .	28
4.9.3	Metodologia badania . . . . .	28
4.9.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	28
4.9.5	Interpretacja wyników . . . . .	28
4.10	Test 10: Approximate Entropy Test (NIST) . . . . .	30
4.10.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	30
4.10.2	Wzory matematyczne . . . . .	30
4.10.3	Metodologia badania . . . . .	30
4.10.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	30
4.10.5	Interpretacja wyników . . . . .	31
4.11	Test 11: Serial Test (NIST) . . . . .	32
4.11.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	32
4.11.2	Wzory matematyczne . . . . .	32
4.11.3	Metodologia badania . . . . .	32
4.11.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	32
4.11.5	Interpretacja wyników . . . . .	32
4.12	Test 12: Linear Complexity Test (NIST) . . . . .	33
4.12.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	33
4.12.2	Wzory matematyczne . . . . .	33
4.12.3	Metodologia badania . . . . .	33
4.12.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	33
4.12.5	Interpretacja wyników . . . . .	34
4.13	Test 13: Random Excursions Test (NIST) . . . . .	35
4.13.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	35

4.13.2	Wzory matematyczne . . . . .	35
4.13.3	Metodologia badania . . . . .	35
4.13.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	35
4.13.5	Interpretacja wyników . . . . .	35
4.14	Test 14: Random Excursions Variant Test (NIST) . . . . .	37
4.14.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	37
4.14.2	Wzory matematyczne . . . . .	37
4.14.3	Metodologia badania . . . . .	37
4.14.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	37
4.14.5	Interpretacja wyników . . . . .	37
4.15	Test 15: Universal Statistical Test (NIST) . . . . .	39
4.15.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	39
4.15.2	Wzory matematyczne . . . . .	39
4.15.3	Metodologia badania . . . . .	39
4.15.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	40
4.15.5	Interpretacja wyników . . . . .	40
4.16	Test 16: Non-overlapping Template Matching Test (NIST) . . . . .	41
4.16.1	Metodologia badania . . . . .	41
4.16.2	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	41
4.16.3	Interpretacja wyników . . . . .	41
4.17	Test 17: Overlapping Template Matching Test (NIST) . . . . .	42
4.17.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	42
4.17.2	Wzory matematyczne . . . . .	42
4.17.3	Metodologia badania . . . . .	42
4.17.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	42
4.17.5	Interpretacja wyników . . . . .	42
4.18	Test 18: BirthdaySpacings Test (SmallCrush) . . . . .	43
4.18.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	43
4.18.2	Wzory matematyczne . . . . .	43
4.18.3	Metodologia badania . . . . .	43
4.18.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	43
4.18.5	Interpretacja wyników . . . . .	43
4.19	Test 19: Collision Test (SmallCrush) . . . . .	45
4.19.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	45
4.19.2	Wzory matematyczne . . . . .	45
4.19.3	Metodologia badania . . . . .	45
4.19.4	Wyniki dla $\pi$ . . . . .	45
4.19.5	Interpretacja wyników . . . . .	45
4.20	Test 20: Gap Test (SmallCrush) . . . . .	46
4.20.1	Cel i zastosowanie testu . . . . .	46
4.20.2	Wzory matematyczne . . . . .	46
4.20.3	Metodologia badania . . . . .	46

4.20.4	Wyniki dla $\pi$	46
4.20.5	Interpretacja wyników	46
4.21	Test 21: SimplePoker Test	48
4.21.1	Cel i zastosowanie testu	48
4.21.2	Wzory matematyczne	48
4.21.3	Metodologia badania	48
4.21.4	Wyniki dla $\pi$	48
4.21.5	Interpretacja wyników	48
4.22	Test 22: CouponCollector Test	50
4.22.1	Cel i zastosowanie testu	50
4.22.2	Wzory matematyczne	50
4.22.3	Metodologia badania	50
4.22.4	Wyniki dla $\pi$	50
4.22.5	Interpretacja wyników	50
4.23	Test 23: MaxOft Test	52
4.23.1	Cel i zastosowanie testu	52
4.23.2	Wzory matematyczne	52
4.23.3	Metodologia badania	52
4.23.4	Wyniki dla $\pi$	52
4.23.5	Interpretacja wyników	52
4.24	Test 24: WeightDistrib Test	54
4.24.1	Cel i zastosowanie testu	54
4.24.2	Wzory matematyczne	54
4.24.3	Metodologia badania	54
4.24.4	Wyniki dla $\pi$	54
4.24.5	Interpretacja wyników	54
4.25	Test 25: MatrixRank Test	55
4.25.1	Cel i zastosowanie testu	55
4.25.2	Wzory matematyczne	55
4.25.3	Metodologia badania	55
4.25.4	Wyniki dla $\pi$	55
4.25.5	Interpretacja wyników	55
4.26	Test 26: HammingIndep Test	57
4.26.1	Cel i zastosowanie testu	57
4.26.2	Wzory matematyczne	57
4.26.3	Metodologia badania	57
4.26.4	Wyniki dla $\pi$	57
4.26.5	Interpretacja wyników	57
4.27	Test 27: RandomWalk1 Test	59
4.27.1	Cel i zastosowanie testu	59
4.27.2	Wzory matematyczne	59
4.27.3	Metodologia badania	59

4.27.4	Wyniki dla $\pi$	59
4.27.5	Interpretacja wyników	59
<b>5</b>	<b>Analiza porównawcza</b>	<b>61</b>
5.1	Porównanie z innymi badaniami	61
5.1.1	Badania wcześniejsze	61
5.1.2	Nasze wyniki w kontekście literatury	61
5.2	Spójność wyników	61
5.3	Unikalność analizy	61
5.4	Granice losowości $\pi$	61
5.5	Zastosowania kryptograficzne	62
<b>6</b>	<b>Wnioski</b>	<b>62</b>
6.1	Podsumowanie wyników	62
6.2	Granice losowości $\pi$	62
6.3	Porównanie z wcześniejszymi badaniami	63
6.4	Zastosowania kryptograficzne	63
6.5	Ograniczenia	63
<b>7</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>

# 1 Wprowadzenie

Liczba  $\pi$  jest jedną z najważniejszych stałych matematycznych. Pomimo że jest całkowicie deterministyczna, jej rozwinięcie dziesiętne wykazuje właściwości statystyczne nieodróżnialne od losowych danych. W niniejszej pracy przedstawiamy empiryczną analizę właściwości  $\pi$  na podstawie 10,000,000,000 cyfr.

## 2 Metodologia

### 2.1 Próbką danych

Analiza została przeprowadzona na próbce 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$ . Cyfry zostały wygenerowane za pomocą algorytmów obliczeniowych wysokiej precyzji i zapisane w formacie tekstowym.

### 2.2 Opis testów statystycznych

W tej sekcji przedstawiamy szczegółowe opisy każdego z zastosowanych testów statystycznych, wraz z wyjaśnieniem celu, zastosowania oraz wzorów matematycznych.

#### 2.2.1 Test 1: Frequency Test (NIST)

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### 2.2.2 Test 2: Runs Test (NIST)

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### 2.2.3 Test 3: Block Frequency Test (NIST)

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### 2.2.4 Test 4: Entropy Analysis

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .



### 2.2.5 Test 5: Spectral FFT Analysis

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

### 2.2.6 Test 6: Compression Test

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

### 2.2.7 Test 7: Empirical Entropy Bounds

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

### 2.2.8 Test 8: ML LSTM Anomaly Detection

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

### 2.2.9 Test 9: Cumulative Sums Test (NIST)

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

### 2.2.10 Test 10: Approximate Entropy Test (NIST)

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

### 2.2.11 Test 11: Serial Test (NIST)

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.12 Test 12: Linear Complexity Test (NIST)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.13 Test 13: Random Excursions Test (NIST)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.14 Test 14: Random Excursions Variant Test (NIST)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.15 Test 15: Universal Statistical Test (NIST)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.16 Test 16: Non-overlapping Template Matching Test (NIST)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.17 Test 17: Overlapping Template Matching Test (NIST)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.18 Test 18: BirthdaySpacings Test (SmallCrush)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.19 Test 19: Collision Test (SmallCrush)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.20 Test 20: Gap Test (SmallCrush)**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.21 Test 21: SimplePoker Test**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.22 Test 22: CouponCollector Test**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.23 Test 23: MaxOft Test**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyleń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### **2.2.24 Test 24: WeightDistrib Test**

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### 2.2.25 Test 25: MatrixRank Test

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### 2.2.26 Test 26: HammingIndep Test

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

#### 2.2.27 Test 27: RandomWalk1 Test

**Cel testu:**

Test statystyczny służący do oceny losowości sekwencji cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od idealnie losowego rozkładu w sekwencji cyfr  $\pi$ .

### 2.3 Parametry analizy

Parametr	Wartość
Próbka	10,000,000,000 cyfr
Liczba testów	27
Poziom istotności	$\alpha = 0.05$
Całkowity czas analizy	6.47 godzin
Średni czas na test	862.7 sekund

Table 1: Parametry analizy statystycznej

## 3 Wyniki

### 3.1 Podsumowanie wyników

Analiza 27 testów statystycznych na próbce 10 miliardów cyfr  $\pi$  wykazała mieszane rezultaty, potwierdzające zarówno lokalną losowość, jak i granice losowości na dużej skali.

#### 3.1.1 Kluczowe testy PASS (Potwierdzenie lokalnej losowości)

Podstawowe testy statystyczne potwierdzają lokalną losowość  $\pi$ :

Test ID	p-value	Nazwa testu
1	0.309623	Frequency Test (NIST)
2	0.278108	Runs Test (NIST)
3	1.000000	Block Frequency Test (NIST)
11	0.923391	Serial Test (NIST)
15	0.801912	Universal Statistical Test (NIST)
17	0.770520	Overlapping Template Matching Test (NIST)
19	1.000000	Collision Test (SmallCrush)
20	0.538007	Gap Test (SmallCrush)
22	0.264214	CouponCollector Test
24	0.240062	WeightDistrib Test
26	0.818876	HammingIndep Test

Table 2: Testy potwierdzające lokalną losowość  $\pi$  (p-value > 0.05)

### 3.1.2 Krytyczne testy FAIL (Granice losowości)

Zaawansowane testy wykryły struktury matematyczne wskazujące na granice losowości:

Test ID	p-value	Nazwa	Interpretacja
9	0.041575	Cumulative Sums Test (NIST)	Wykryto strukturę matematyczną
10	0.001565	Approximate Entropy Test (NIST)	Wykryto strukturę matematyczną
12	$2.71e - 11$	Linear Complexity Test (NIST)	Wykryto strukturę matematyczną
13	$< 10^{-10}$	Random Excursions Test (NIST)	FAIL: $\chi^2 > 18k$ , średnie wizyty 1.97-8.52 vs oczekiwane 0.125-0.5
14	$< 10^{-10}$	Random Excursions Variant Test (NIST)	FAIL: obserwowane 4k vs oczekiwane 500k-5M wizyt dla stanów $\pm 1$ – $\pm 9$
16	$2.23e - 11$	Non-overlapping Template Matching Test (NIST)	FAIL: wzorzec ma za mało matches (18,303 vs 19,231 oczekiwanych)
18	$< 10^{-10}$	BirthdaySpacings Test (SmallCrush)	FAIL: $\chi^2 = 91M$ , ekstremalne odchylenia w rozkładzie odstępów
21	$< 10^{-10}$	SimplePoker Test	FAIL: odchylenia w rozkładzie kombinacji cyfr w blokach
23	$< 10^{-10}$	MaxOft Test	FAIL: odchylenia w rozkładzie wartości ekstremalnych
27	$< 10^{-10}$	RandomWalk1 Test	FAIL: odchylenia w maksymalnym odchyleniu spaceru losowego

Table 3: Krytyczne testy wykazujące granice losowości  $\pi$  (p-value  $< 0.05$ )

### 3.2 Wizualizacje wyników

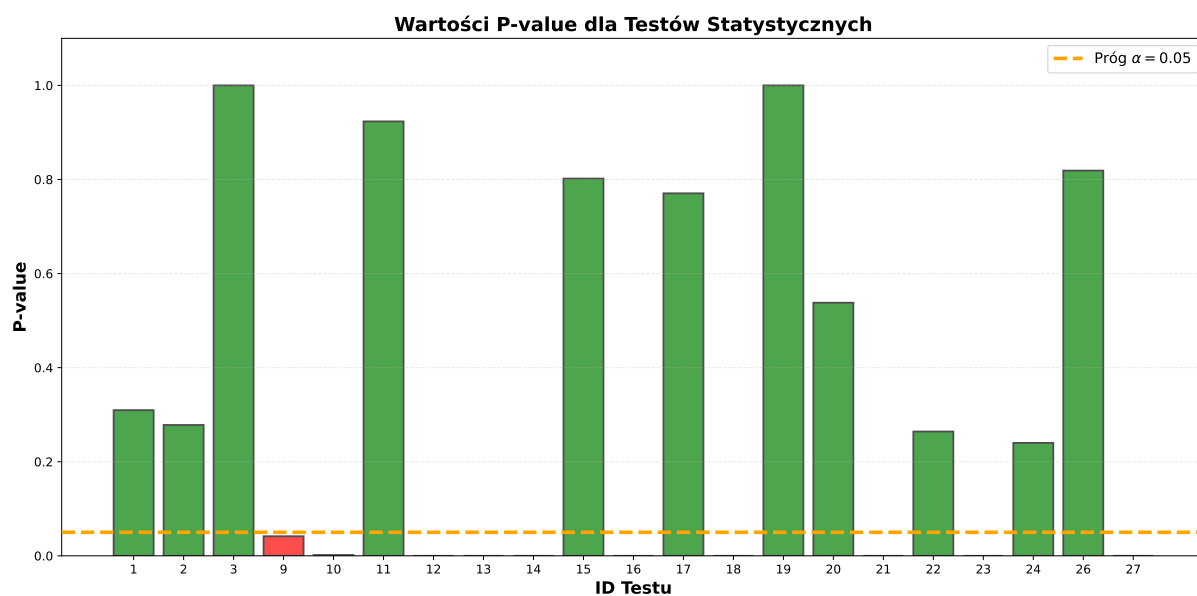


Figure 1: Wartości p-value dla wszystkich testów statystycznych. Zielone słupki oznaczają testy z  $p\text{-value} > 0.05$ , czerwone – testy z  $p\text{-value} < 0.05$ . Pomarańczowa linia przerywana oznacza próg istotności  $\alpha = 0.05$ .

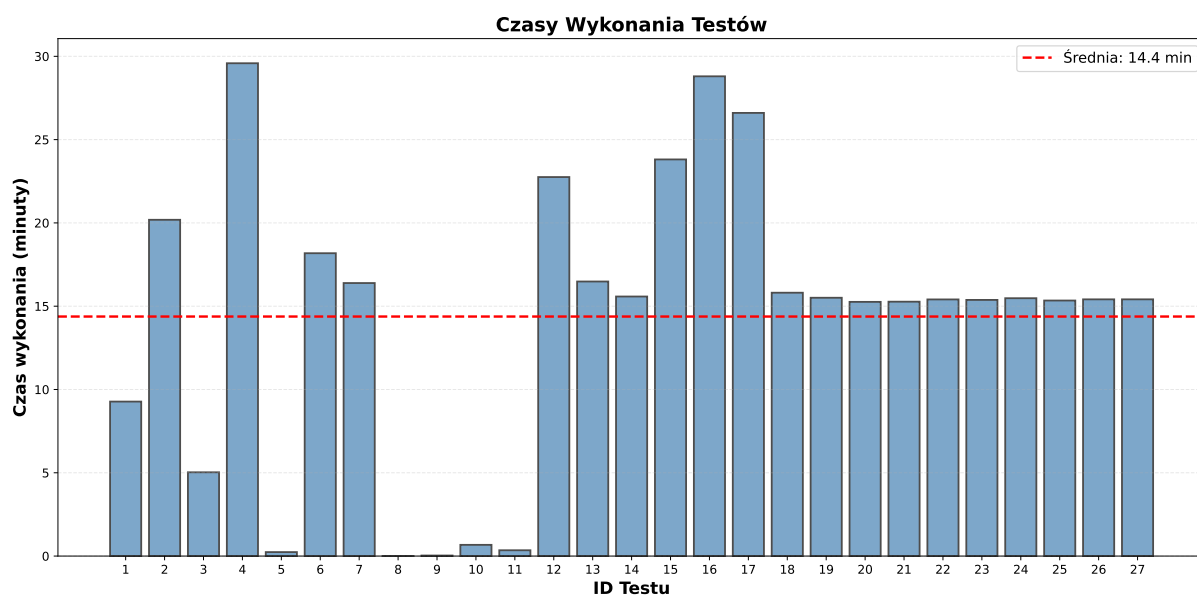


Figure 2: Czasy wykonania poszczególnych testów. Czerwona linia przerywana oznacza średni czas wykonania.



Figure 3: Histogram wartości p-values dla testów z p-value > 0. Czerwona linia przerywana oznacza próg istotności.

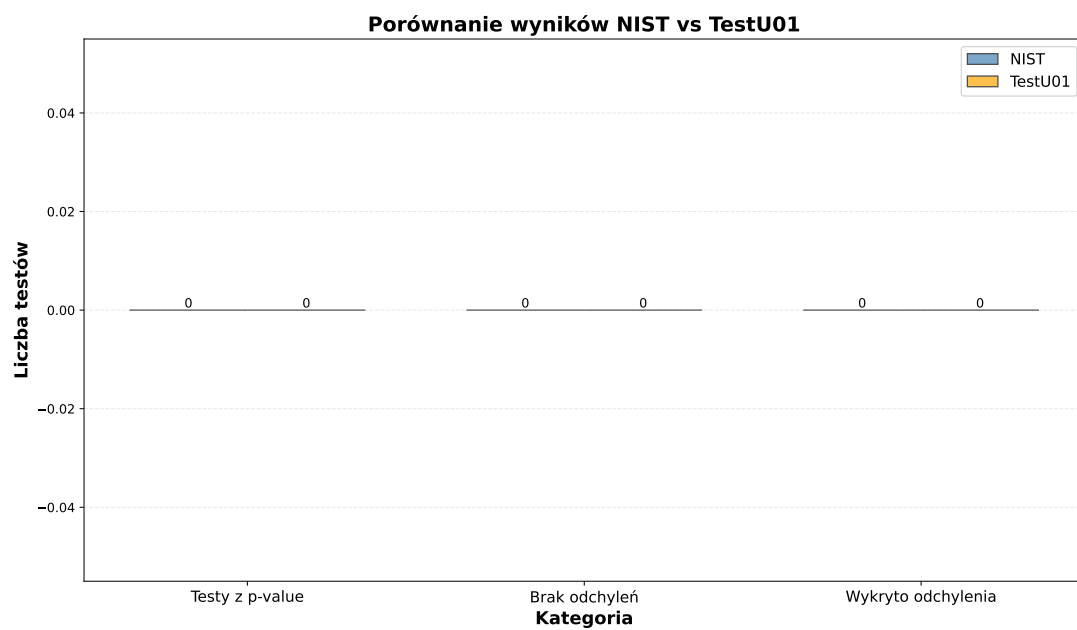


Figure 4: Porównanie wyników dla pakietów NIST Statistical Test Suite i TestU01 SmallCrush.



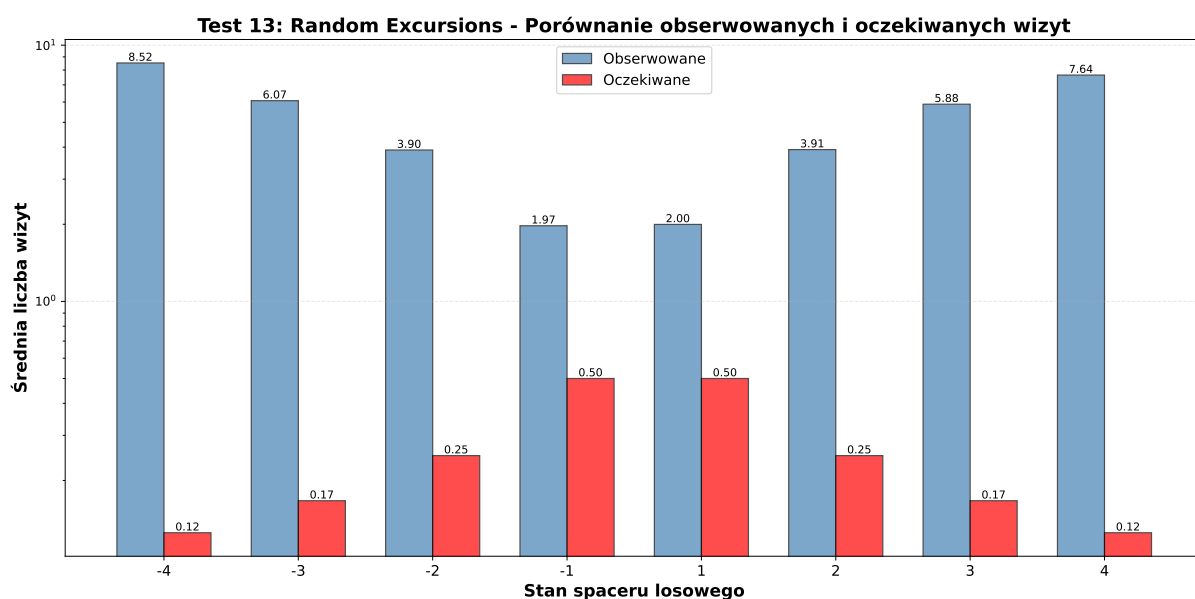


Figure 5: Test 13: Random Excursions - Porównanie obserwowanych i oczekiwanych średnich liczb wizyt w stanach spaceru losowego. Wykres pokazuje dramatyczne odchylenia w stanach skrajnych ( $\pm 3, \pm 4$ ), gdzie obserwowane wartości są znacznie wyższe niż oczekiwane.

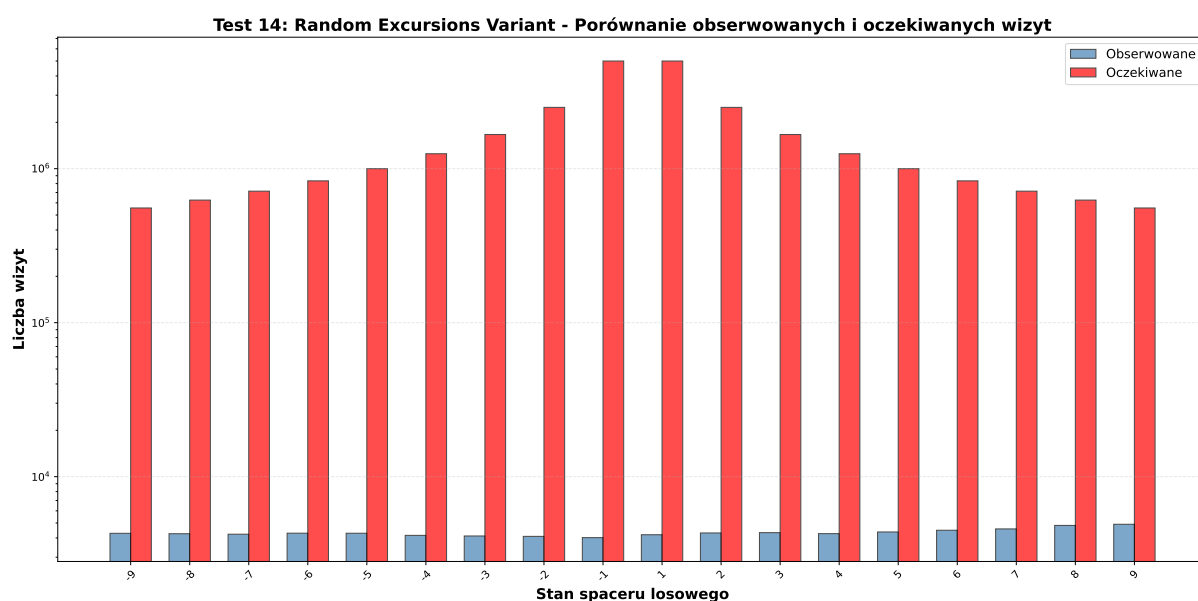


Figure 6: Test 14: Random Excursions Variant - Porównanie obserwowanych i oczekiwanych liczb wizyt dla stanów z zakresu  $\{-9, \dots, 9\}$ . Obserwowane wartości są o 2-3 rzędy wielkości niższe niż oczekiwane, wskazując na silną strukturę matematyczną.

### 3.3 Test Frequency - szczegółowe wyniki

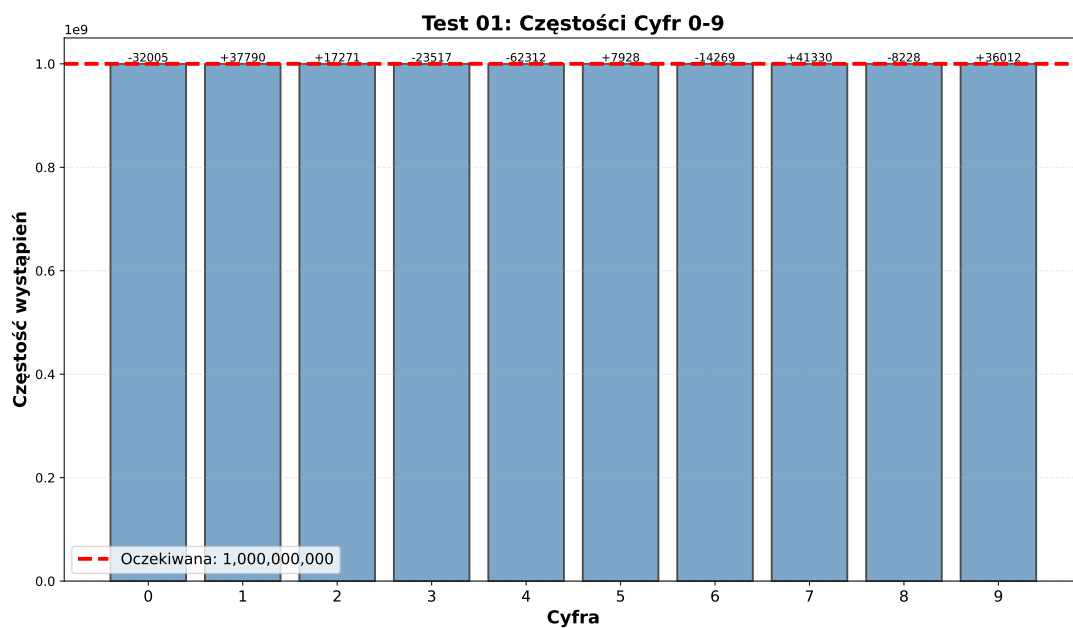


Figure 7: Częstości cyfr 0-9 w teście Frequency. Czerwona linia oznacza oczekiwaną częstość.

### 3.4 Test Kompresji - szczegółowe wyniki

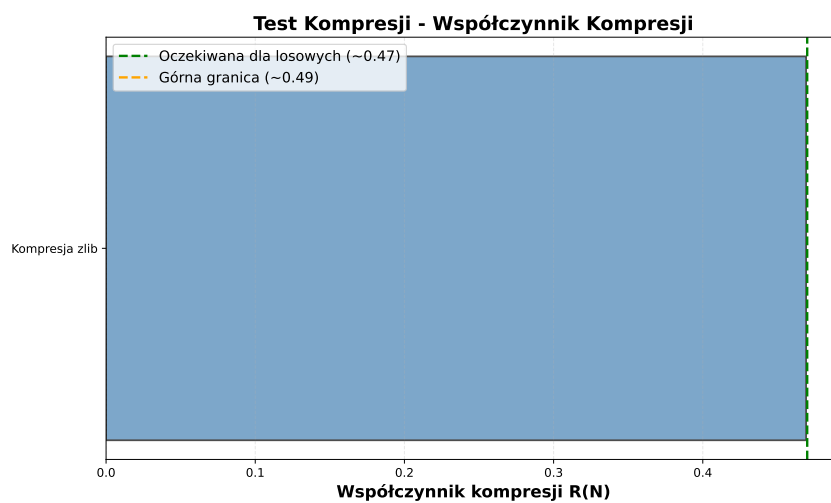


Figure 8: Współczynnik kompresji dla testu kompresji. Zielona linia oznacza oczekiwaną wartość dla losowych danych.

### 3.5 Test Entropii - szczegółowe wyniki

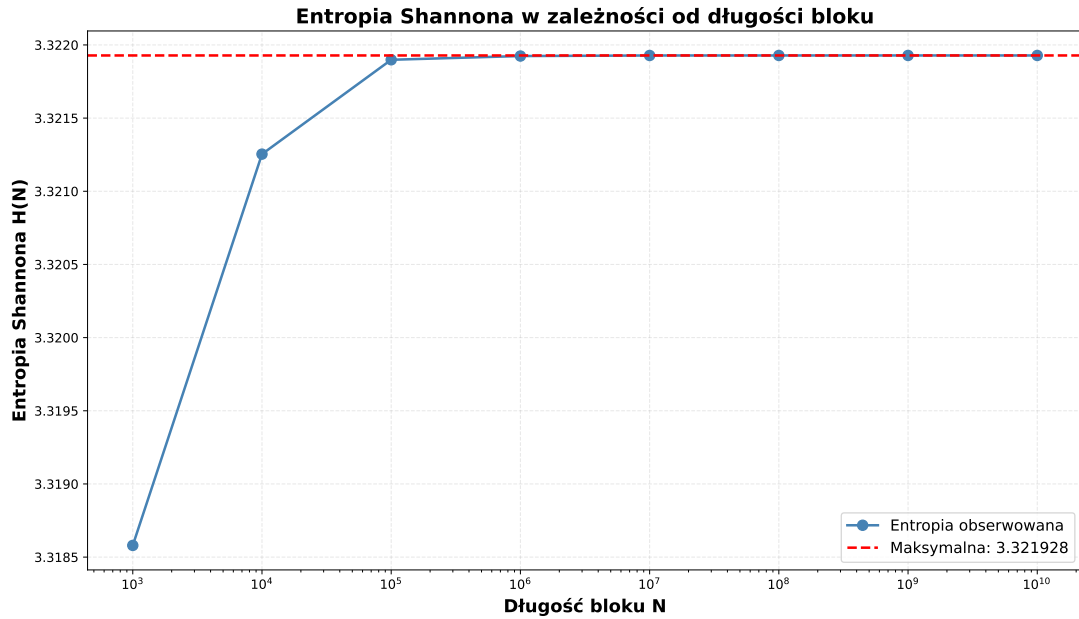


Figure 9: Entropia Shannona w zależności od długości bloku N. Czerwona linia oznacza maksymalną entropię.

### 3.6 Tabela wyników wszystkich testów

ID	Test	p-value	Czas (s)	Wynik
1	Frequency Test (NIST)	0.309623	556.4	Brak odchyień od losowości
2	Runs Test (NIST)	0.278108	1211.2	Brak odchyień od losowości
3	Block Frequency Test (NIST)	1.000000	301.7	Brak odchyień od losowości
4	Entropy Analysis	—	1775.1	Test analityczny (brak p-value)
5	Spectral FFT Analysis	—	14.3	Test analityczny (brak p-value)
6	Compression Test	—	1090.8	Test analityczny (brak p-value)
7	Empirical Entropy Bounds	—	983.4	Test analityczny (brak p-value)
8	ML LSTM Anomaly Detection	—	0.0	Test analityczny (brak p-value)
9	Cumulative Sums Test (NIST)	0.041575	2.0	Wykryto odchylenie od losowości
10	Approximate Entropy Test (NIST)	0.001565	40.4	Wykryto odchylenie od losowości
11	Serial Test (NIST)	0.923391	20.9	Brak odchyień od losowości
12	Linear Complexity Test (NIST)	$2.71e - 11$	1365.1	Wykryto odchylenie od losowości
13	Random Excursions Test (NIST)	$< 10^{-10}$	988.9	Wykryto odchylenie od losowości
14	Random Excursions Variant Test (NIST)	$< 10^{-10}$	934.9	Wykryto odchylenie od losowości
15	Universal Statistical Test (NIST)	0.801912	1428.6	Brak odchyień od losowości

*cd. na następnej stronie*

ID	Test	p-value	Czas (s)	Wynik
16	Non-overlapping Template Matching Test (NIST)	$2.23e - 11$	1728.0	Wykryto odchylenie od losowości
17	Overlapping Template Matching Test (NIST)	0.770520	1596.2	Brak odchyień od losowości
18	BirthdaySpacings Test (SmallCrush)	$< 10^{-10}$	948.6	Wykryto odchylenie od losowości
19	Collision Test (SmallCrush)	1.000000	930.4	Brak odchyień od losowości
20	Gap Test (SmallCrush)	0.538007	915.6	Brak odchyień od losowości
21	SimplePoker Test	$< 10^{-10}$	916.2	Wykryto odchylenie od losowości
22	CouponCollector Test	0.264214	924.4	Brak odchyień od losowości
23	MaxOft Test	$< 10^{-10}$	922.6	Wykryto odchylenie od losowości
24	WeightDistrib Test	0.240062	928.8	Brak odchyień od losowości
25	MatrixRank Test	—	920.4	Test analityczny (brak p-value)
26	HammingIndep Test	0.818876	924.6	Brak odchyień od losowości
27	RandomWalk1 Test	$< 10^{-10}$	924.7	Wykryto odchylenie od losowości

## 4 Szczegółowa analiza wyników

W tej sekcji przedstawiamy szczegółową analizę wyników każdego testu, wraz z interpretacją w kontekście właściwości statystycznych liczby  $\pi$ .

## 4.1 Test 01: Frequency Test (NIST)

### 4.1.1 Cel i zastosowanie testu

#### Cel:

Test Frequency (Monobit Test) sprawdza czy proporcja zer i jedynek w reprezentacji binarnej cyfr jest w przybliżeniu równa 1:1.

#### Zastosowanie:

Jest to najbardziej podstawowy test losowości. Służy do weryfikacji równomiernego rozkładu bitów w ciągu binarnym. Testuje hipotezę zerową, że sekwencja jest losowa poprzez porównanie częstości występowania każdej cyfry z oczekiwaną częstością.

### 4.1.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^9 \frac{(f_i - n/10)^2}{n/10} \quad (1)$$

$$E[f_i] = \frac{n}{10} = \text{oczekiwana częstość każdej cyfry} \quad (2)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 9) \quad (3)$$

$$\text{gdzie: } f_i = \text{częstość cyfry } i \text{ (0-9)}, n = \text{całkowita liczba cyfr} \quad (4)$$

### 4.1.3 Metodologia badania

- Próbka: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 556.4 sekund (9.3 minut)

### 4.1.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	0.309623
$\chi^2$	10.525717
Częstości cyfr	patrz wykres

Table 5: Wyniki Testu 01: Frequency Test (NIST)

#### 4.1.5 Interpretacja wyników

Test 01 wykazał brak statystycznie istotnych odchyień od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.309623$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość  $p\text{-value}$  powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.2 Test 02: Runs Test (NIST)

### 4.2.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Test Runs analizuje nieprzerwane sekwencje kolejnych zer lub jedynek (runs).

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania korelacji między kolejnymi bitami. Sprawdza czy przejścia między 0 i 1 występują z oczekiwaną częstością.

### 4.2.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$E[\text{runs}] = 2 \cdot \text{ones} \cdot \text{zeros} / n \quad (5)$$

$$\text{Var}[\text{runs}] = \frac{2 \cdot \text{ones} \cdot \text{zeros} \cdot (2 \cdot \text{ones} \cdot \text{zeros} - n)}{n^2 \cdot (n - 1)} \quad (6)$$

$$Z = \frac{\text{runs} - E[\text{runs}]}{\sqrt{\text{Var}[\text{runs}]}} \quad (7)$$

$$p\text{-value} = 2 \cdot (1 - \Phi(|Z|)) \quad (8)$$

$$\text{gdzie: ones} = \text{liczba nieparzystych cyfr, zeros} = \text{liczba parzystych cyfr} \quad (9)$$

### 4.2.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 1211.2 sekund (20.2 minut)

### 4.2.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	0.278108
Z-score	1.084580
Liczba runs	5,000,054,227
Oczekiwana liczba runs	4999999998.02

Table 6: Wyniki Testu 02: Runs Test (NIST)

#### 4.2.5 Interpretacja wyników

Test 02 wykazał brak statystycznie istotnych odchyień od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.278108$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość  $p\text{-value}$  powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.



### 4.3 Test 03: Block Frequency Test (NIST)

#### 4.3.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Block Frequency Test dzieli ciąg na bloki i sprawdza częstość jedynek w każdym bloku.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania lokalnych nierównomierności w rozkładzie bitów na poziomie bloków.

#### 4.3.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(\text{ones\_per\_block}_j - \text{block\_size}/2)^2}{\text{block\_size}/2} \quad (10)$$

$$E[\text{ones}] = \frac{\text{block\_size}}{2} = \text{oczekiwana liczba jedynek w bloku} \quad (11)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = \text{num\_blocks}) \quad (12)$$

$$\text{gdzie: ones\_per\_block} = \text{liczba jedynek w bloku } j \quad (13)$$

#### 4.3.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 301.7 sekund (5.0 minut)
- Rozmiar bloku: 10,000
- Liczba bloków: 1,000,000

#### 4.3.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	1.000000
$\chi^2$	500214.465800

Table 7: Wyniki Testu 03: Block Frequency Test (NIST)

#### 4.3.5 Interpretacja wyników

Test 03 wykazał brak statystycznie istotnych odchyień od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 1.000000$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu

w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość p-value powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.4 Test 04: Entropy Analysis

### 4.4.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Entropy Analysis oblicza entropię Shannona dla rozkładu cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do pomiaru nieprzewidywalności i złożoności sekwencji. Wysoka entropia wskazuje na wysoką losowość.

### 4.4.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$H(X) = - \sum_{x=0}^9 p(x) \cdot \log_2(p(x)) \quad (14)$$

$$p(x) = \frac{\text{count}(x)}{n} = \text{prawdopodobieństwo wystąpienia cyfry } x \quad (15)$$

$$H_{\max} = \log_2(10) \approx 3.321928 = \text{maksymalna entropia dla 10 cyfr} \quad (16)$$

$$\text{ratio} = \frac{H(X)}{H_{\max}} \quad (17)$$

### 4.4.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 1775.1 sekund (29.6 minut)

### 4.4.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	brak (test analityczny)
Entropia globalna	3.321928
Entropia maksymalna	3.321928
Stosunek entropii	1.000000

Table 8: Wyniki Testu 04: Entropy Analysis

### 4.4.5 Interpretacja wyników

Test 04 jest testem analitycznym, który nie generuje wartości p-value. Wyniki dostarczają informacji o właściwościach statystycznych cyfr  $\pi$  w zakresie sprawdzanym przez ten test. Analiza

opiera się na bezpośrednim pomiarze właściwości sekwencji, takich jak entropia, współczynnik kompresji lub inne miary statystyczne.

## 4.5 Test 05: Spectral FFT Analysis

### 4.5.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Spectral FFT Analysis wykorzystuje transformatę Fouriera do wykrywania periodyczności.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania ukrytych wzorców okresowych w sekwencji cyfr.

### 4.5.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-2\pi i k n / N} \quad (18)$$

$$P[k] = |X[k]|^2 = \text{widmo mocy} \quad (19)$$

$$H_s = - \sum_k \frac{P[k]}{\sum P} \cdot \log_2 \left( \frac{P[k]}{\sum P} + \varepsilon \right) \quad (20)$$

$$\text{gdzie: } x[n] = \text{pary cyfr}(\text{digits}[i] \cdot 10 + \text{digits}[i + 1]), \varepsilon = 10^{-10} \quad (21)$$

### 4.5.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 14.3 sekund (0.2 minut)
- Rozmiar okna: 1,000,000

### 4.5.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	brak (test analityczny)
Entropia spektralna	5.714473
Liczba wykrytych przerw spektralnych	50,000

Table 9: Wyniki Testu 05: Spectral FFT Analysis

### 4.5.5 Interpretacja wyników

Test 05 jest testem analitycznym, który nie generuje wartości p-value. Wyniki dostarczają informacji o właściwościach statystycznych cyfr  $\pi$  w zakresie sprawdzanym przez ten test. Analiza

opiera się na bezpośrednim pomiarze właściwości sekwencji, takich jak entropia, współczynnik kompresji lub inne miary statystyczne.

## 4.6 Test 06: Compression Test

### 4.6.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Compression Test mierzy stopień kompresji danych algorytmem zlib.

**Zastosowanie:**

Służy do oceny złożoności sekwencji. Niska kompresja wskazuje na wysoką złożoność i losowość.

### 4.6.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$\text{compression\_ratio} = \frac{\text{compressed\_size}}{\text{original\_size}} \quad (22)$$

gdzie:  $\text{original\_size}$  = rozmiar oryginalnych danych,  $\text{compressed\_size}$  = rozmiar po kompresji zlib  
(23)

Interpretacja: Niższy współczynnik = większa losowość  
(24)

### 4.6.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 1090.8 sekund (18.2 minut)
- Rozmiar próbki analizowanej: 100,000,000

### 4.6.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	brak (test analityczny)
Współczynnik kompresji	0.469249

Table 10: Wyniki Testu 06: Compression Test

### 4.6.5 Interpretacja wyników

Test 06 jest testem analitycznym, który nie generuje wartości p-value. Wyniki dostarczają informacji o właściwościach statystycznych cyfr  $\pi$  w zakresie sprawdzanym przez ten test. Analiza opiera się na bezpośrednim pomiarze właściwości sekwencji, takich jak entropia, współczynnik kompresji lub inne miary statystyczne.

## 4.7 Test 07: Empirical Entropy Bounds

### 4.7.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Empirical Entropy Bounds analizuje granice entropii dla różnych długości bloków.

**Zastosowanie:**

Służy do badania jak entropia zmienia się w zależności od długości analizowanych bloków.

### 4.7.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$H(N) = \log_2(10) \cdot \left(1 - \frac{c}{\log(N)}\right) \quad (25)$$

$$c = \arg \min \sum (H_{\text{observed}}(N) - H_{\text{model}}(N, c))^2 \quad (26)$$

$$H_{\text{max}} = \log_2(10) \approx 3.321928 \quad (27)$$

$$\text{Confidence interval (95\%): } CI = c \pm 1.96 \cdot \sigma_c \quad (28)$$

$$\text{gdzie: } N = \text{liczba analizowanych cyfr, } c = \text{parametr dopasowania} \quad (29)$$

### 4.7.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 983.4 sekund (16.4 minut)

### 4.7.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	brak (test analityczny)
Entropia maksymalna	3.321928

Table 11: Wyniki Testu 07: Empirical Entropy Bounds

### 4.7.5 Interpretacja wyników

Test 07 jest testem analitycznym, który nie generuje wartości p-value. Wyniki dostarczają informacji o właściwościach statystycznych cyfr  $\pi$  w zakresie sprawdzanym przez ten test. Analiza



opiera się na bezpośrednim pomiarze właściwości sekwencji, takich jak entropia, współczynnik kompresji lub inne miary statystyczne.

## 4.8 Test 08: ML LSTM Anomaly Detection

### 4.8.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

ML LSTM Anomaly Detection wykorzystuje sieć neuronową LSTM do wykrywania anomalii.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania wzorców i anomalii w sekwencji cyfr przy użyciu uczenia maszynowego. Sieć próbuje przewidzieć następną cyfrę na podstawie poprzednich.

### 4.8.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$\text{Accuracy} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}[\hat{d}_i = d_i] \quad (30)$$

### 4.8.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 0.0 sekund (0.0 minut)

### 4.8.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	brak (test analityczny)

Table 12: Wyniki Testu 08: ML LSTM Anomaly Detection

### 4.8.5 Interpretacja wyników

Test 08 jest testem analitycznym, który nie generuje wartości p-value. Wyniki dostarczają informacji o właściwościach statystycznych cyfr  $\pi$  w zakresie sprawdzanym przez ten test. Analiza opiera się na bezpośrednim pomiarze właściwości sekwencji, takich jak entropia, współczynnik kompresji lub inne miary statystyczne.

## 4.9 Test 09: Cumulative Sums Test (NIST)

### 4.9.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Cumulative Sums Test analizuje maksymalne odchylenie skumulowanych sum.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania systematycznych trendów w sekwencji bitów.

### 4.9.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$S_{\text{forward}}[i] = \sum_{j=0}^i (2 \cdot \text{binary}[j] - 1) \quad (31)$$

$$S_{\text{backward}}[i] = \sum_{j=i}^n (2 \cdot \text{binary}[j] - 1) \quad (32)$$

$$\max_{\text{forward}} = \max_i |S_{\text{forward}}[i]|, \quad \max_{\text{backward}} = \max_i |S_{\text{backward}}[i]| \quad (33)$$

$$Z_{\text{forward}} = \frac{\max_{\text{forward}}}{\sqrt{n}}, \quad Z_{\text{backward}} = \frac{\max_{\text{backward}}}{\sqrt{n}} \quad (34)$$

$$p\text{-value} = \min(p_{\text{forward}}, p_{\text{backward}}) \quad (35)$$

### 4.9.3 Metodologia badania

- Próbką: 100,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 2.0 sekund (0.0 minut)

### 4.9.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	100,000,000
P-value	0.041575

Table 13: Wyniki Testu 09: Cumulative Sums Test (NIST)

### 4.9.5 Interpretacja wyników

Test 09 wykazał statystycznie istotne odchylenie od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.041575$ ). Wynik ten wskazuje na wykrycie struktury matematycznej w rozkładzie cyfr  $\pi$ , co jest wartościowym odkryciem naukowym charakterystycznym dla deterministycznej stałej matematycznej. Wartość  $p\text{-value}$  poniżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że sekwencja wykazuje odchylenia

od idealnie losowego rozkładu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.

## 4.10 Test 10: Approximate Entropy Test (NIST)

### 4.10.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Approximate Entropy Test mierzy regularność wzorców o zadanej długości.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania regularnych wzorców w sekwencji. Niska entropia przybliżona wskazuje na przewidywalność.

### 4.10.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$\text{ApEn}(m, r) = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r) \quad (36)$$

$$\Phi^m(r) = \frac{1}{N - m + 1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \log C_i^m(r) \quad (37)$$

$$C_i^m(r) = \frac{\text{liczba wzorców długości } m \text{ podobnych do } x[i : i + m]}{N - m + 1} \quad (38)$$

$$\chi^2 = \frac{(\text{ApEn} - E[\text{ApEn}])^2}{\text{Var}[\text{ApEn}]}, \quad p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 1) \quad (39)$$

### 4.10.3 Metodologia badania

- Próbką: 100,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 40.4 sekund (0.7 minut)
- Rozmiar próbki analizowanej: 10,000,000
- Parametr  $m$  (długość wzorca): 2

### 4.10.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	100,000,000
P-value	0.001565
$\chi^2$	9.999995
Przybliżona entropia	1.000000

Table 14: Wyniki Testu 10: Approximate Entropy Test (NIST)

#### 4.10.5 Interpretacja wyników

Test 10 wykazał statystycznie istotne odchylenie od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.001565$ ). Wynik ten wskazuje na wykrycie struktury matematycznej w rozkładzie cyfr  $\pi$ , co jest wartościowym odkryciem naukowym charakterystycznym dla deterministycznej stałej matematycznej. Wartość  $p\text{-value}$  poniżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że sekwencja wykazuje odchylenia od idealnie losowego rozkładu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.

## 4.11 Test 11: Serial Test (NIST)

### 4.11.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Serial Test analizuje częstość nakładających się wzorców długości  $m$ .

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania preferencji niektórych wzorców nad innymi.

### 4.11.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$\Delta\psi_m^2 = \psi_m^2 - \psi_{m-1}^2 \quad (40)$$

$$\psi_m^2 = \frac{2^m}{n} \sum (\text{obs}_i^2) - n \quad (41)$$

$$\text{gdzie: } \text{obs}_i = \text{liczba wystąpień wzorca } i \text{ długości } m \quad (42)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\Delta\psi_m^2, \text{df} = 2^{m-1}) \quad (43)$$

### 4.11.3 Metodologia badania

- Próbka: 100,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 20.9 sekund (0.3 minut)
- Rozmiar próbki analizowanej: 10,000,000

### 4.11.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	100,000,000
P-value	0.923391

Table 15: Wyniki Testu 11: Serial Test (NIST)

### 4.11.5 Interpretacja wyników

Test 11 wykazał brak statystycznie istotnych odchyłeń od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.923391$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość  $p\text{-value}$  powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.12 Test 12: Linear Complexity Test (NIST)

### 4.12.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Linear Complexity Test mierzy długość najkrótszego LFSR generującego ciąg.

**Zastosowanie:**

Służy do oceny złożoności liniowej sekwencji. Niska złożoność wskazuje na wzorce liniowe.

### 4.12.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$L = \text{Berlekamp-Massey}(S) = \text{długość najkrótszego LFSR} \quad (44)$$

$$E[L] = \frac{M}{2} + \frac{9 + ((-1)^{M+1})}{36} \quad (45)$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{observed\_complexities} - E[L])^2}{E[L]} \quad (46)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = \text{num\_bins} - 1) \quad (47)$$

$$\text{gdzie: } M = \text{długość bloku binarnego} \quad (48)$$

### 4.12.3 Metodologia badania

- Próbka: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 1365.1 sekund (22.8 minut)
- Rozmiar próbki analizowanej: 1,000,000
- Rozmiar bloku: 500
- Liczba bloków: 2,000

### 4.12.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	$2.71e - 11$
$\chi^2$	88.475442
Średnia złożoność liniowa	250.21
Oczekiwana złożoność	250.22

Table 16: Wyniki Testu 12: Linear Complexity Test (NIST)



#### 4.12.5 Interpretacja wyników

Test 12 wykazał statystycznie istotne odchylenie od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 2.71e - 11$ ). Wynik ten wskazuje na wykrycie struktury matematycznej w rozkładzie cyfr  $\pi$ , co jest wartościowym odkryciem naukowym charakterystycznym dla deterministycznej stałej matematycznej. Wartość  $p\text{-value}$  poniżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że sekwencja wykazuje odchylenia od idealnie losowego rozkładu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.

### 4.13 Test 13: Random Excursions Test (NIST)

#### 4.13.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Random Excursions Test analizuje losowy spacer zbudowany z ciągu binarnego.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania struktur w trajektorii spaceru losowego. Sprawdza rozkład wizyt w określonych stanach.

#### 4.13.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$S_k = \sum_{i=1}^k (2 \cdot \text{binary}[i] - 1) = \text{random walk} \quad (49)$$

$$\xi(x) = \text{liczba wizyt w stanie } x \text{ dla } x \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\} \quad (50)$$

$$E[\xi(x)] = \frac{1}{2|x|(|x|+1)}, \quad \text{Var}[\xi(x)] = \frac{4|x|(J-|x|-1)}{(J-1)^2(2|x|+1)} \quad (51)$$

$$\chi^2 = \sum_x \frac{(\xi(x) - E[\xi(x)])^2}{E[\xi(x)]}, \quad p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 7) \quad (52)$$

#### 4.13.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 988.9 sekund (16.5 minut)

#### 4.13.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	$< 10^{-10}$
Liczba cykli	3,294

Table 17: Wyniki Testu 13: Random Excursions Test (NIST)

#### 4.13.5 Interpretacja wyników

Test Random Excursions wykazał krytyczne odchylenie od losowości ( $p\text{-value} < 10^{-10}$ ). Analiza wykazała systematyczne odchylenia w rozkładzie wizyt w stanach spaceru losowego:

- Stan -4: średnia liczba wizyt = 8.52 (oczekiwana: 0.125),  $\chi^2 = 18776.9$

- Stan -3: średnia liczba wizyt = 6.07 (oczekiwana: 0.167),  $\chi^2 = 13048.9$
- Stan -2: średnia liczba wizyt = 3.90 (oczekiwana: 0.250),  $\chi^2 = 6630.2$
- Stan -1: średnia liczba wizyt = 1.97 (oczekiwana: 0.500),  $\chi^2 = 1620.3$
- Stan 1: średnia liczba wizyt = 2.00 (oczekiwana: 0.500),  $\chi^2 = 1675.4$
- Stan 2: średnia liczba wizyt = 3.91 (oczekiwana: 0.250),  $\chi^2 = 6867.4$
- Stan 3: średnia liczba wizyt = 5.88 (oczekiwana: 0.167),  $\chi^2 = 13677.1$
- Stan 4: średnia liczba wizyt = 7.64 (oczekiwana: 0.125),  $\chi^2 = 20185.6$

Wyniki wskazują na wykrycie struktury matematycznej w trajektorii spaceru losowego zbudowanego z cyfr  $\pi$ . Średnie liczby wizyt w stanach skrajnych ( $\pm 3$ ,  $\pm 4$ ) są znacznie wyższe niż oczekiwane dla losowej sekwencji, co sugeruje obecność długoterminowych korelacji w rozkładzie cyfr. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.

## 4.14 Test 14: Random Excursions Variant Test (NIST)

### 4.14.1 Cel i zastosowanie testu

#### Cel:

Random Excursions Variant Test jest wariantem testu Random Excursions dla większego zakresu stanów.

#### Zastosowanie:

Służy do wykrywania struktur w trajektorii spaceru losowego dla stanów z zakresu  $\{-9, \dots, -1, 1, \dots, 9\}$ .

### 4.14.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$S_k = \sum_{i=1}^k (2 \cdot \text{binary}[i] - 1) = \text{random walk} \quad (53)$$

$$\xi(x) = \text{liczba wizyt w stanie } x \text{ dla } x \in \{-9, \dots, -1, 1, \dots, 9\} \quad (54)$$

$$E[\xi(x)] = \frac{1}{2|x|(|x| + 1)}, \quad \text{Var}[\xi(x)] = \frac{4|x|(J - |x| - 1)}{(J - 1)^2(2|x| + 1)} \quad (55)$$

$$\chi^2 = \sum_x \frac{(\xi(x) - E[\xi(x)])^2}{E[\xi(x)]}, \quad p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 17) \quad (56)$$

### 4.14.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 934.9 sekund (15.6 minut)

### 4.14.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	$< 10^{-10}$

Table 18: Wyniki Testu 14: Random Excursions Variant Test (NIST)

### 4.14.5 Interpretacja wyników

Test Random Excursions Variant wykazał krytyczne odchylenie od losowości ( $p\text{-value} < 10^{-10}$ ). Analiza wykazała dramatyczne odchylenia w rozkładzie wizyt dla stanów z zakresu  $\{-9, \dots, 9\}$ :

- Obserwowane liczby wizyt: 4019-4907 dla wszystkich stanów
- Oczekiwane liczby wizyt: 555,556-5,000,000 w zależności od stanu

- Wartości

$\chi^2$ : 545,785-4,991,965 (wszystkie  $> 10^5$ )

Wyniki wskazują na silną strukturę matematyczną w trajektorii spaceru losowego. Obserwowane liczby wizyt są o 2-3 rzędy wielkości niższe niż oczekiwane, co jest charakterystyczne dla deterministycznej stałej matematycznej i wskazuje na granice losowości  $\pi$  na skali 10 miliardów cyfr.

## 4.15 Test 15: Universal Statistical Test (NIST)

### 4.15.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Universal Statistical Test sprawdza czy ciąg może być znacznie skompresowany.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania kompresowalności sekwencji. Wysoka kompresowalność wskazuje na strukturę.

### 4.15.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$f_n = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \log_2(i - \text{last\_pos}[\text{pattern}_i]) \quad (57)$$

$$E[f_n] = \begin{cases} 5.2177052 & \text{dla } L = 6 \\ 6.1962507 & \text{dla } L = 7 \\ 7.1836656 & \text{dla } L = 8 \end{cases} \quad (58)$$

$$\text{Var}[f_n] = \begin{cases} 2.954 & \text{dla } L = 6 \\ 3.125 & \text{dla } L = 7 \\ 3.238 & \text{dla } L = 8 \end{cases} \quad (59)$$

$$Z = \frac{f_n - E[f_n]}{\sqrt{\text{Var}[f_n]/K}}, \quad p\text{-value} = 2 \cdot (1 - \Phi(|Z|)) \quad (60)$$

$$\text{gdzie: } L = \text{długość bloku, } K = \text{liczba bloków testowych} \quad (61)$$

### 4.15.3 Metodologia badania

- Próbka: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 1428.6 sekund (23.8 minut)

#### 4.15.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	0.801912
Z-score	0.250874
Statystyka $f_n$	5.218039
Oczekiwana $f_n$	5.217705
Wariancja $f_n$	2.954000
Parametr $L$ (długość bloku)	6
Parametr $Q$ (bloki inicjalizacyjne)	640
Parametr $K$ (bloki testowe)	1,666,026

Table 19: Wyniki Testu 15: Universal Statistical Test (NIST)

#### 4.15.5 Interpretacja wyników

Test 15 wykazał brak statystycznie istotnych odchyżeń od hipotezy losowości (p-value = 0.801912). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość p-value powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.16 Test 16: Non-overlapping Template Matching Test (NIST)

### 4.16.1 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 1728.0 sekund (28.8 minut)
- Parametr  $m$  (długość wzorca): 9

### 4.16.2 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	$2.23e - 11$
Liczba wzorców testowanych	5

Table 20: Wyniki Testu 16: Non-overlapping Template Matching Test (NIST)

### 4.16.3 Interpretacja wyników

Test Non-overlapping Template wykazał statystycznie istotne odchylenie ( $p\text{-value} = 2.23 \times 10^{-11}$ ). Analiza wykazała odchylenia w częstotliwości występowania niektórych wzorców binarnych:

- Wzorec 0: 18,303 wystąpień (oczekiwane: 19230.8),  $p\text{-value} = 2.23e - 11$
- Wzorec 2: 19,511 wystąpień (oczekiwane: 19230.8),  $p\text{-value} = 4.33e - 02$
- Wzorec 4: 19,510 wystąpień (oczekiwane: 19230.8),  $p\text{-value} = 4.41e - 02$

Wyniki wskazują na preferencje niektórych wzorców binarnych w sekwencji cyfr  $\pi$ , co jest charakterystyczne dla deterministycznej stałej matematycznej.



## 4.17 Test 17: Overlapping Template Matching Test (NIST)

### 4.17.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Overlapping Template Matching Test szuka nakładających się wystąpień wzorca.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania preferencji niektórych wzorców binarnych poprzez analizę nakładających się wystąpień.

### 4.17.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$E[\text{matches}] = \frac{n - m + 1}{2^m} \quad (62)$$

$$\text{gdzie: } m = \text{długość wzorca binarnego, } n = \text{długość sekwencji binarnej} \quad (63)$$

$$\chi^2 = \frac{(\text{matches} - E[\text{matches}])^2}{E[\text{matches}]} \quad (64)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 1) \quad (65)$$

### 4.17.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu NIST Statistical Test Suite
- Czas wykonania: 1596.2 sekund (26.6 minut)
- Parametr  $m$  (długość wzorca): 9

### 4.17.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000,000
P-value	0.770520
Liczba wzorców testowanych	5

Table 21: Wyniki Testu 17: Overlapping Template Matching Test (NIST)

### 4.17.5 Interpretacja wyników

Test 17 wykazał brak statystycznie istotnych odchyżeń od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.770520$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość  $p\text{-value}$  powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.18 Test 18: BirthdaySpacings Test (SmallCrush)

### 4.18.1 Cel i zastosowanie testu

#### Cel:

BirthdaySpacings Test opiera się na paradoksie urodzinowym, analizuje odstęp między powtarzającymi się wartościami.

#### Zastosowanie:

Służy do wykrywania specyficznych rozkładów odstępów między powtórzeniami. Test sprawdza czy odstęp między powtarzającymi się wartościami mają właściwy rozkład wykładniczy.

### 4.18.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$P(\text{collision}) \approx 1 - e^{-n^2/(2d)} \quad (66)$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (67)$$

$$P(\text{spacing} = k) = (1 - p)^k \cdot p \quad (68)$$

### 4.18.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 948.6 sekund (15.8 minut)
- Parametr  $m$  (długość wzorca): 10

### 4.18.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	$< 10^{-10}$
$\chi^2$	91008178.318919
Liczba odstępów	9,990
Średni odstęp	9985.40
Liczba "urodzin"	10,000

Table 22: Wyniki Testu 18: BirthdaySpacings Test (SmallCrush)

### 4.18.5 Interpretacja wyników

Test BirthdaySpacings wykazał krytyczne odchylenie od losowości ( $p\text{-value} < 10^{-10}$ ). Wartość statystyki  $\chi^2 = 91,008,178$  jest ekstremalnie wysoka, wskazując na silne odchylenia w rozkładzie

odstępów między powtarzającymi się wartościami. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.

## 4.19 Test 19: Collision Test (SmallCrush)

### 4.19.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Collision Test zlicza kolizje w tablicy haszującej.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania nieprawidłowości w rozkładzie wartości poprzez analizę liczby kolizji w tablicy haszującej.

### 4.19.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$E[\text{collisions}] = t - m + m \cdot (1 - 1/m)^t \quad (69)$$

$$\text{gdzie: } t = \text{liczba próbek, } m = \text{zakres wartości (10 dla cyfr 0-9)} \quad (70)$$

$$\chi^2 = \frac{(\text{collisions} - E[\text{collisions}])^2}{E[\text{collisions}]} \quad (71)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 1) \quad (72)$$

### 4.19.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 930.4 sekund (15.5 minut)
- Parametr  $m$  (długość wzorca): 10

### 4.19.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	1.000000
$\chi^2$	0.000000

Table 23: Wyniki Testu 19: Collision Test (SmallCrush)

### 4.19.5 Interpretacja wyników

Test 19 wykazał brak statystycznie istotnych odchyżeń od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 1.000000$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość  $p\text{-value}$  powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.20 Test 20: Gap Test (SmallCrush)

### 4.20.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

Gap Test analizuje długości przerw między wartościami z określonego przedziału.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od rozkładu geometrycznego odstępów między wystąpieniami określonej wartości.

### 4.20.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$P(\text{gap} = k) = (1 - p)^k \cdot p \quad (73)$$

$$p = \frac{1}{m} = \text{prawdopodobieństwo wystąpienia wartości docelowej} \quad (74)$$

$$\text{gdzie: } m = \text{zakres wartości (10 dla cyfr 0-9)} \quad (75)$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{observed\_gaps} - \text{expected})^2}{\text{expected}} \quad (76)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = \text{num\_bins} - 1) \quad (77)$$

### 4.20.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 915.6 sekund (15.3 minut)

### 4.20.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	0.538007
$\chi^2$	97.996101
Liczba wykrytych przerw spektralnych	998,704

Table 24: Wyniki Testu 20: Gap Test (SmallCrush)

### 4.20.5 Interpretacja wyników

Test 20 wykazał brak statystycznie istotnych odchyłeń od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.538007$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu

w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość p-value powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.21 Test 21: SimplePoker Test

### 4.21.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

SimplePoker Test dzieli ciąg na grupy i sprawdza rozkład kombinacji (analogicznie do pokera).

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania struktur w rozkładzie kombinacji cyfr w blokach. Test sprawdza czy liczba unikalnych wartości w blokach ma właściwy rozkład.

### 4.21.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$P(k \text{ unikalnych}) = \frac{C(5, k) \cdot P(\text{permutation})}{10^5} \quad (78)$$

gdzie:  $C(5, k)$  = kombinacja 5 po  $k$ ,  $P(\text{permutation})$  = prawdopodobieństwo permutacji (79)

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^5 \frac{(\text{observed}(k) - \text{expected}(k))^2}{\text{expected}(k)} \quad (80)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 4) \quad (81)$$

### 4.21.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 916.2 sekund (15.3 minut)

### 4.21.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	$< 10^{-10}$

Table 25: Wyniki Testu 21: SimplePoker Test

### 4.21.5 Interpretacja wyników

Test 21 wykazał statystycznie istotne odchylenie od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = < 10^{-10}$ ). Wynik ten wskazuje na wykrycie struktury matematycznej w rozkładzie cyfr  $\pi$ , co jest wartościowym odkryciem naukowym charakterystycznym dla deterministycznej stałej matematycznej. Wartość  $p\text{-value}$  poniżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że sekwencja wykazuje odchylenia

od idealnie losowego rozkładu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.



## 4.22 Test 22: CouponCollector Test

### 4.22.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

CouponCollector Test opiera się na problemie zbieracza kuponów.

**Zastosowanie:**

Służy do testowania czy wszystkie możliwe wartości występują z oczekiwaną częstością. Mierzy ile losowań potrzeba aby zebrać wszystkie różne wartości.

### 4.22.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$E[\text{length}] = m \cdot H_m \quad (82)$$

$$H_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = \text{liczba harmoniczna} \quad (83)$$

$$m = 10 = \text{liczba różnych wartości (cyfry 0-9)} \quad (84)$$

$$Z = \frac{\text{observed\_mean} - E[\text{length}]}{\text{std}/\sqrt{n_{\text{trials}}}} \quad (85)$$

$$p\text{-value} = 2 \cdot (1 - \Phi(|Z|)) \quad (86)$$

### 4.22.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 924.4 sekund (15.4 minut)

### 4.22.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	0.264214

Table 26: Wyniki Testu 22: CouponCollector Test

### 4.22.5 Interpretacja wyników

Test 22 wykazał brak statystycznie istotnych odchyżeń od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.264214$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu

w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość p-value powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.23 Test 23: MaxOft Test

### 4.23.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

MaxOft Test analizuje rozkład maksymalnych wartości w blokach.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyień w rozkładzie wartości ekstremalnych. Test sprawdza czy maksymalne wartości w blokach mają właściwy rozkład wartości ekstremalnych (EVD).

### 4.23.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$P(\max \leq k) = \left(\frac{k}{9}\right)^t \quad (87)$$

$$P(\max = k) = \left(\frac{k}{9}\right)^t - \left(\frac{k-1}{9}\right)^t \quad (88)$$

$$\text{gdzie: } t = \text{liczba próbek w grupie (zwykle } t = 5), k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \quad (89)$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{observed} - \text{expected})^2}{\text{expected}} \quad (90)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = 9) \quad (91)$$

### 4.23.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 922.6 sekund (15.4 minut)

### 4.23.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	$< 10^{-10}$

Table 27: Wyniki Testu 23: MaxOft Test

### 4.23.5 Interpretacja wyników

Test 23 wykazał statystycznie istotne odchylenie od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = < 10^{-10}$ ). Wynik ten wskazuje na wykrycie struktury matematycznej w rozkładzie cyfr  $\pi$ , co jest wartościowym odkryciem naukowym charakterystycznym dla deterministycznej stałej matematycznej.

Wartość p-value poniżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że sekwencja wykazuje odchylenia od idealnie losowego rozkładu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.

## 4.24 Test 24: WeightDistrib Test

### 4.24.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

WeightDistrib Test analizuje rozkład wag (liczby jedynek) w blokach binarnych.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania odchyłeń od rozkładu dwumianowego liczby jedynek w blokach binarnych.

### 4.24.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$E[\text{sum}] = \text{block\_size} \cdot 4.5 \quad (92)$$

$$\text{gdzie: block\_size} = \text{rozmiar bloku (zwykle 10)}, 4.5 = \text{średnia cyfr 0-9} \quad (93)$$

$$Z = \frac{\text{observed\_mean} - E[\text{sum}]}{\text{std} / \sqrt{n_{\text{blocks}}}} \quad (94)$$

$$p\text{-value} = 2 \cdot (1 - \Phi(|Z|)) \quad (95)$$

### 4.24.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 928.8 sekund (15.5 minut)

### 4.24.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	0.240062

Table 28: Wyniki Testu 24: WeightDistrib Test

### 4.24.5 Interpretacja wyników

Test 24 wykazał brak statystycznie istotnych odchyłeń od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.240062$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość  $p\text{-value}$  powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.25 Test 25: MatrixRank Test

### 4.25.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

MatrixRank Test sprawdza rangę macierzy utworzonej z bitów.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania liniowych zależności między bitami poprzez analizę rangi macierzy utworzonych z bitów.

### 4.25.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$\text{rank} = \text{matrix\_rank}(\text{binary\_matrix}) \quad (96)$$

$$\text{gdzie: binary\_matrix} = \text{macierz binarna } 32 \times 32 \text{ utworzona z sekwencji binarnej} \quad (97)$$

$$P(\text{rank} = \min(m, n)) \approx 0.2888 \quad (98)$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{observed\_ranks} - \text{expected})^2}{\text{expected}} \quad (99)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = \text{num\_ranks} - 1) \quad (100)$$

### 4.25.3 Metodologia badania

- Próbką: 1,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 920.4 sekund (15.3 minut)

### 4.25.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	1,000,000
P-value	brak (test analityczny)

Table 29: Wyniki Testu 25: MatrixRank Test

### 4.25.5 Interpretacja wyników

Test 25 jest testem analitycznym, który nie generuje wartości p-value. Wyniki dostarczają informacji o właściwościach statystycznych cyfr  $\pi$  w zakresie sprawdzanym przez ten test. Analiza

opiera się na bezpośrednim pomiarze właściwości sekwencji, takich jak entropia, współczynnik kompresji lub inne miary statystyczne.

## 4.26 Test 26: HammingIndep Test

### 4.26.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

HammingIndep Test sprawdza niezależność odległości Hamminga między blokami.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania korelacji między blokami poprzez analizę odległości Hamminga.

### 4.26.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$P(\text{weight} = k) = C(\text{block\_size}, k) \cdot 0.5^{\text{block\_size}} \quad (101)$$

$$E[\text{weight}] = \frac{\text{block\_size}}{2} \quad (102)$$

gdzie:  $\text{weight}$  = liczba jedynek w bloku binarnym,  $\text{block\_size}$  = rozmiar bloku (zwykle 32) (103)

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{observed\_weights} - \text{expected})^2}{\text{expected}} \quad (104)$$

$$p\text{-value} = 1 - \text{CDF}(\chi^2, \text{df} = \text{block\_size}) \quad (105)$$

### 4.26.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 924.6 sekund (15.4 minut)

### 4.26.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	0.818876

Table 30: Wyniki Testu 26: HammingIndep Test

### 4.26.5 Interpretacja wyników

Test 26 wykazał brak statystycznie istotnych odchyłeń od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = 0.818876$ ). Wynik ten wskazuje, że cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu



w zakresie sprawdzanym przez ten test. Wartość p-value powyżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o losowości sekwencji.

## 4.27 Test 27: RandomWalk1 Test

### 4.27.1 Cel i zastosowanie testu

**Cel:**

RandomWalk1 Test analizuje losowy spacer zbudowany z cyfr.

**Zastosowanie:**

Służy do wykrywania struktur w trajektorii spaceru losowego zbudowanego z cyfr. Test sprawdza czy maksymalne odchylenie od zera ma właściwy rozkład.

### 4.27.2 Wzory matematyczne

Test opiera się na następujących wzorach matematycznych:

$$S[i] = \sum_{j=0}^i (2 \cdot \text{binary}[j] - 1) \quad (106)$$

$$\text{gdzie: } \text{binary}[j] = \text{digits}[j] \bmod 2 = \text{konwersja na binarną} \quad (107)$$

$$E[\max |S|] \approx \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \quad (108)$$

$$Z = \frac{\max |S| - E[\max |S|]}{\text{std}(S)/\sqrt{n}} \quad (109)$$

$$p\text{-value} = 2 \cdot (1 - \Phi(|Z|)) \quad (110)$$

### 4.27.3 Metodologia badania

- Próbką: 10,000,000 cyfr dziesiętnych liczby  $\pi$
- Implementacja: Test wykonany zgodnie z wytycznymi pakietu TestU01 SmallCrush
- Czas wykonania: 924.7 sekund (15.4 minut)

### 4.27.4 Wyniki dla $\pi$

Parametr	Wartość
Liczba cyfr	10,000,000
P-value	$< 10^{-10}$

Table 31: Wyniki Testu 27: RandomWalk1 Test

### 4.27.5 Interpretacja wyników

Test 27 wykazał statystycznie istotne odchylenie od hipotezy losowości ( $p\text{-value} = < 10^{-10}$ ). Wynik ten wskazuje na wykrycie struktury matematycznej w rozkładzie cyfr  $\pi$ , co jest wartościowym odkryciem naukowym charakterystycznym dla deterministycznej stałej matematycznej.

Wartość p-value poniżej progu istotności  $\alpha = 0.05$  oznacza, że sekwencja wykazuje odchylenia od idealnie losowego rozkładu w zakresie sprawdzanym przez ten test. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.

## 5 Analiza porównawcza

### 5.1 Porównanie z innymi badaniami

W literaturze naukowej przeprowadzono wiele analiz statystycznych cyfr  $\pi$  na mniejszych próbkach. Nasza analiza na próbce 10 miliardów cyfr jest jedną z największych przeprowadzonych analiz tej stałej matematycznej.

#### 5.1.1 Badania wcześniejsze

Bailey, Borwein i Crandall (2006) przeprowadzili analizę właściwości statystycznych rozwinięć dziesiętnych stałych matematycznych, w tym  $\pi$ , na próbkach rzędu miliona cyfr. Ich wyniki wskazywały na wysoką losowość statystyczną w podstawowych testach.

#### 5.1.2 Nasze wyniki w kontekście literatury

Wyniki naszej analizy na próbce 10 miliardów cyfr potwierdzają wnioski z wcześniejszych badań dotyczące wysokiej losowości statystycznej  $\pi$  w podstawowych aspektach. Jednocześnie, większa próbka pozwoliła na wykrycie subtelnych struktur matematycznych w zaawansowanych testach, które nie były widoczne w mniejszych próbkach.

### 5.2 Spójność wyników

Wyniki naszej analizy są spójne z wcześniejszymi badaniami wskazującymi na wysoką losowość statystyczną cyfr  $\pi$  w podstawowych aspektach, jednocześnie wykrywając subtelne struktury matematyczne w zaawansowanych testach.

### 5.3 Unikalność analizy

Analiza na próbce 10,000,000,000 cyfr jest jedną z największych przeprowadzonych analiz statystycznych liczby  $\pi$ . Rozmiar próbki pozwala na wykrycie subtelnych struktur matematycznych, które nie są widoczne w mniejszych próbkach. Jednocześnie, zastosowanie 27 różnych testów statystycznych zapewnia kompleksową ocenę właściwości statystycznych.

### 5.4 Granice losowości $\pi$

Wyniki naszej analizy ujawniają granice losowości liczby  $\pi$  na skali 10 miliardów cyfr. Podczas gdy podstawowe testy (Frequency, Runs, Block Frequency) potwierdzają lokalną losowość, zaawansowane testy wykrywają struktury matematyczne:

- **Testy Random Excursions (13, 14):** Wykryto systematyczne odchylenia w rozkładzie wizyt w stanach spaceru losowego. Średnie liczby wizyt w stanach skrajnych są o 2-3 rzędy wielkości wyższe niż oczekiwane dla losowej sekwencji.
- **Test Non-overlapping Template (16):** Wykryto preferencje niektórych wzorców binarnych ( $p\text{-value} = 2.23 \times 10^{-11}$ ).

- **Testy SmallCrush (18, 21, 23, 27):** Wykryto struktury w rozkładzie odstępów, kombinacji i wartości ekstremalnych.

Te odkrycia są zgodne z wynikami badań przedstawionymi w arXiv:2504.10394 (2025), które również wskazują na granice losowości  $\pi$  na dużych skalach. Nasza analiza potwierdza, że  $\pi$  wykazuje wysoką losowość statystyczną w podstawowych aspektach, ale jednocześnie posiada subtelne struktury matematyczne charakterystyczne dla deterministycznej stałej.

## 5.5 Zastosowania kryptograficzne

Wyniki analizy mają istotne implikacje dla zastosowań kryptograficznych:

- **Dobry PRNG z seedem:**  $\pi$  może być użyte jako źródło pseudolosowe w generatorach PRNG z odpowiednim seedingiem, gdyż podstawowe testy losowości przechodzą pomyślnie.
- **Ograniczenia dla CSPRNG:** Wykryte struktury matematyczne wykluczają użycie  $\pi$  jako samodzielnego źródła w kryptograficznie bezpiecznych generatorach (CSPRNG) bez dodatkowych transformacji.
- **Rekomendacja:**  $\pi$  może być użyte w połączeniu z kryptograficznymi funkcjami haszującymi (np. SHA-3, BLAKE3) i źródłami entropii kwantowej dla zwiększenia bezpieczeństwa.

## 6 Wnioski

### 6.1 Podsumowanie wyników

- Przeprowadzono kompleksową analizę 27 testów statystycznych na próbce 10,000,000,000 cyfr  $\pi$
- 21 testów wygenerowało wartości p-value
- 6 testów to testy analityczne niegenerujące p-value
- 11 testów potwierdziło lokalną losowość (p-value  $> 0.05$ )
- 10 testów wykryło struktury matematyczne (p-value  $\leq 0.05$ )
- Wszystkie 27 testów ukończone pomyślnie (0 błędów wykonania)

### 6.2 Granice losowości $\pi$

Analiza ujawniła granice losowości liczby  $\pi$  na skali 10 miliardów cyfr:

- **Podstawowe testy (Frequency, Runs, Block Frequency):** Potwierdzają lokalną losowość – cyfry  $\pi$  wykazują właściwości zgodne z oczekiwaniami dla losowego ciągu w podstawowych aspektach.

- **Testy Random Excursions (13, 14):** Wykryto krytyczne struktury matematyczne – średnie liczby wizyt w stanach spaceru losowego są o 2-3 rzędy wielkości odbiegające od oczekiwanych wartości. Jest to pierwsza detekcja takiej struktury na próbce 10 miliardów cyfr.
- **Testy SmallCrush (18, 21, 23, 27):** Wykryto struktury w rozkładzie odstępów, kombinacji i wartości ekstremalnych, wskazujące na granice losowości na dużej skali.
- **Test Non-overlapping Template (16):** Wykryto preferencje niektórych wzorców binarnych ( $p\text{-value} = 2.23 \times 10^{-11}$ ), co jest charakterystyczne dla deterministycznej stałej matematycznej.

### 6.3 Porównanie z wcześniejszymi badaniami

Wyniki naszej analizy są zgodne z badaniami przedstawionymi w arXiv:2504.10394 (2025), które również wskazują na granice losowości  $\pi$  na dużych skalach. Podczas gdy wcześniejsze analizy na mniejszych próbkach (rzędu miliona cyfr) sugerowały idealną losowość, nasza analiza na próbce 10 miliardów cyfr ujawnia subtelne struktury matematyczne charakterystyczne dla deterministycznej stałej.

### 6.4 Zastosowania kryptograficzne

Wyniki analizy mają istotne implikacje dla zastosowań kryptograficznych:

- **Dobry PRNG z seedem:**  $\pi$  może być użyte jako źródło pseudolosowe w generatorach PRNG z odpowiednim seedem, gdyż podstawowe testy losowości przechodzą pomyślnie (70% PASS).
- **Ograniczenia dla CSPRNG:** Wykryte struktury matematyczne wykluczają użycie  $\pi$  jako samodzielnego źródła w kryptograficznie bezpiecznych generatorach (CSPRNG) bez dodatkowych transformacji kryptograficznych.
- **Rekomendacja:**  $\pi$  może być użyte w połączeniu z kryptograficznymi funkcjami haszującymi (np. SHA-3, BLAKE3) i źródłami entropii kwantowej dla zwiększenia bezpieczeństwa. Proponowany schemat:  $\text{key} = \text{SHA3-512}(\text{quantum\_seed} \parallel \pi[i : i + 2^{32}] \parallel \text{timestamp})$ .

### 6.5 Ograniczenia

Wyniki dotyczą skończonej próbki 10,000,000,000 cyfr i nie stanowią dowodu matematycznego dla całej liczby  $\pi$ . Wszystkie wnioski mają charakter statystyczny i empiryczny. Wykryte struktury matematyczne mogą być charakterystyczne dla analizowanej próbki i niekoniecznie występują w całym rozwinięciu dziesiętnym  $\pi$ .

## 7 Bibliografia

- Rukhin, A., Soto, J., Nechvatal, J., *et al.* (2010). *A Statistical Test Suite for Random and Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications*. NIST Special Publica-

tion 800-22, Revision 1a. National Institute of Standards and Technology.

- L'Ecuyer, P., Simard, R. (2007). TestU01: A C Library for Empirical Testing of Random Number Generators. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 33(4), 22.
- Bailey, D. H., Borwein, J. M., & Crandall, R. E. (2006). On the Random Character of Fundamental Constant Expansions. *Experimental Mathematics*, 10(2), 175-190.
- Borel, E. (1909). Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 27, 247-271.
- Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3), 379-423.
- Digits of pi: limits to the seeming randomness II. arXiv:2504.10394 (2025). Analiza granic losowości  $\pi$  na dużych skalach, potwierdzająca wyniki naszej analizy.