

DSP

5. Eigenschappen van Convolutie

Ing. Patrick Van Houtven
26 september 2011



artesis

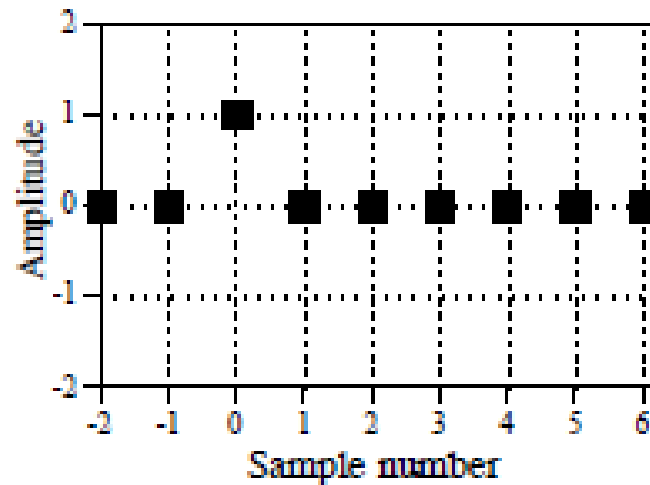
technologie



- Kenmerken lineair systeem volledig bepaald door reactie van het systeem op een impuls
 - Basis van veel digitaal signaalverwerking
 - Digitale filters
 - Echo-onderdrukking interlokale telefoongesprekken (wordt bereikt door het genereren van een impuls als antwoord op de impulsreactie van galmeffect)
- Dit hoofdstuk gaat dieper in op de eigenschappen en gebruik van convolutie op diverse gebieden



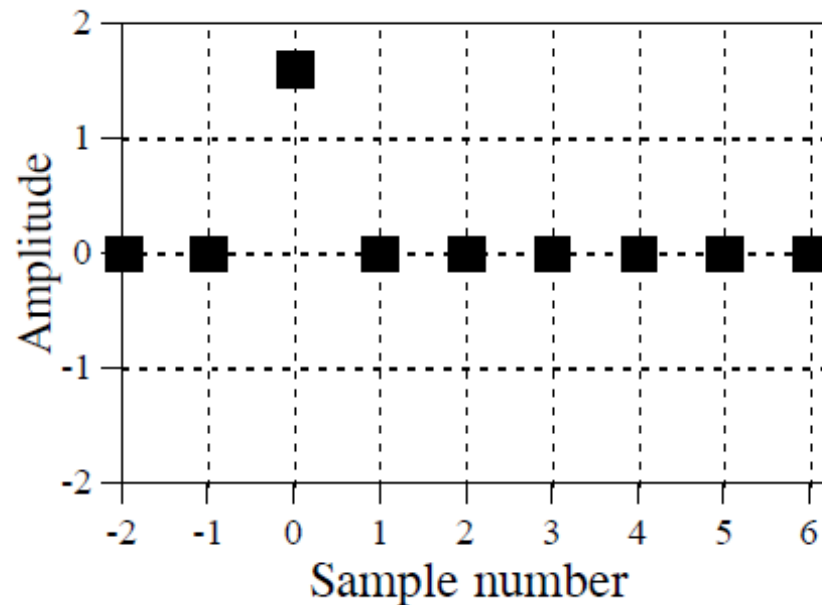
- Delta functie:
 - Eenvoudigste impulsresponsie
 - D.w.z. een impuls van de ingang levert een identieke impuls op de uitgang op
 - Signalen worden doorgegeven zonder te veranderen
 - Wiskundige notatie: $x[n] * \delta[n] = x[n]$
 - Deltafunctie is een identiteit voor convolutie zoals één de identiteit voor vermenigvuldiging is ($a \times 1 = a$)





- Delta functie:
 - Lichte aanpassing delta functie
 - Delta functie groter => versterking
 - Delta functie kleiner => verzwakking

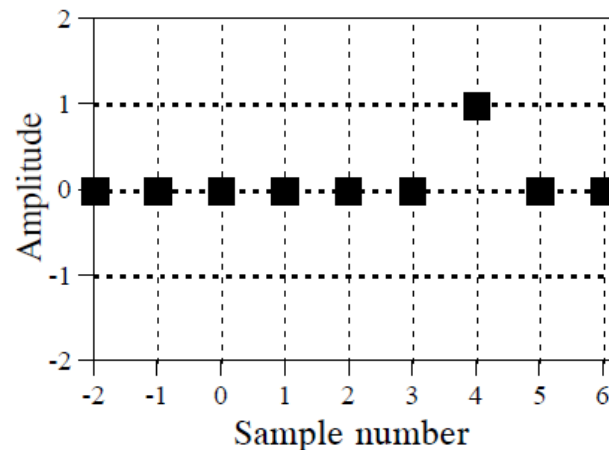
$$x[n] * k\delta[n] = kx[n]$$





- Delta functie:
 - Delta functie met een verschuiving
 - Resulteert in een systeem met een identieke verschuiving tussen input en output
 - Kan omschreven worden als een signaalvertraging of vooruitschuiven van het signaal (afhankelijk van de richting van verschuiving) door de parameter s

$$x[n] * \delta[n+s] = x[n+s]$$



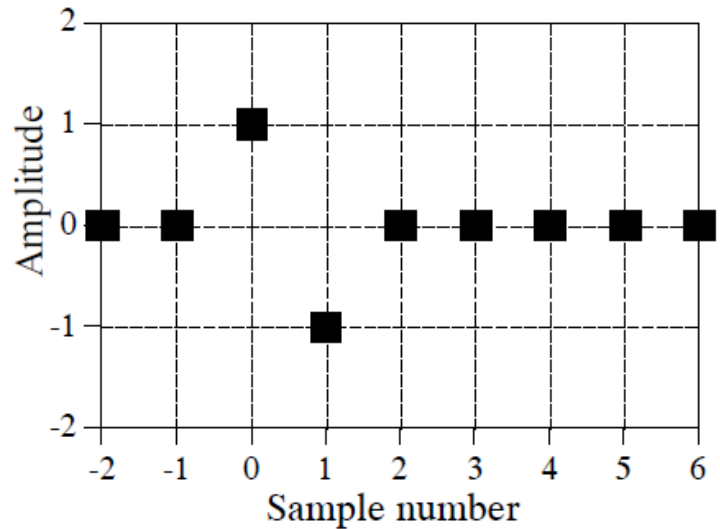


- Integraal-differentiaal tegenhangers
 - Bewerkingen via convolutie op discrete signalen kunnen deze veranderen op een manier die sterk lijken op integratie en differentiatie.
 - Termen afgeleide en integraal hebben betrekking op handelingen op continue signalen
 - Bij discrete signalen spreekt men van “het eerste verschilsignaal” als eerste afgeleide en “running sum” of lopende som voor een integraal
 - Discrete afgeleide en discrete integraal zijn termen die in dit verband ook vaak voorkomen

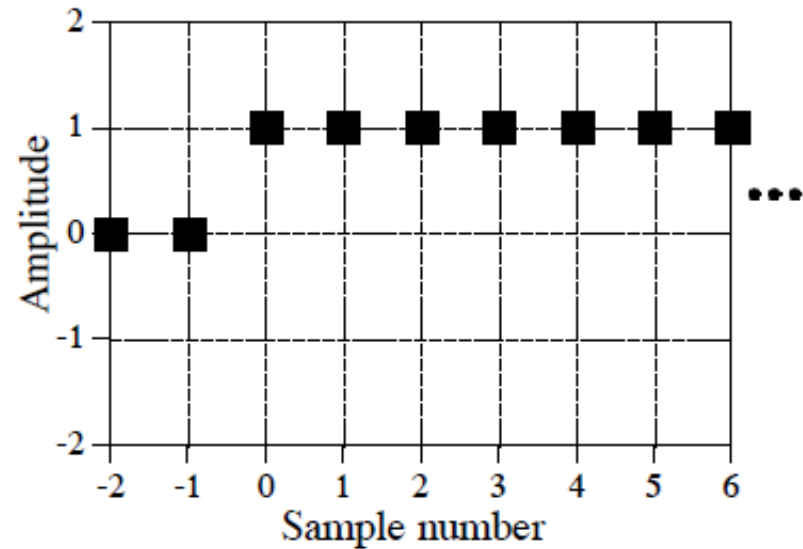
Gemeenschappelijke impulsresponse



- Integraal-differentiaal tegenhangers

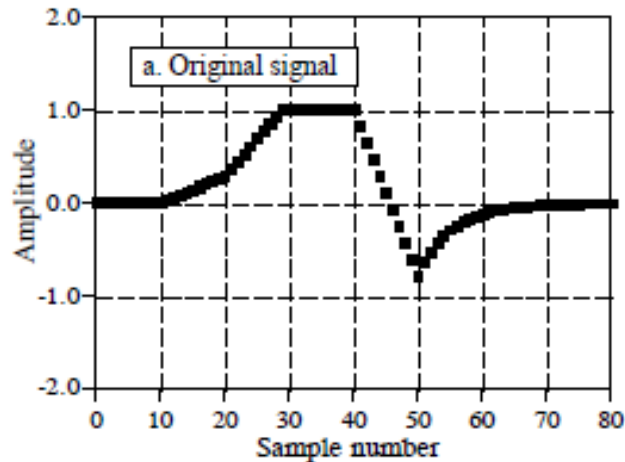


Eerste verschil of discrete
afgeleide
(first difference)



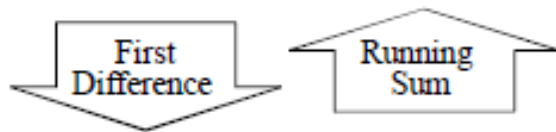
Lopende som of discrete
integratie
(running sum)

Gemeenschappelijke impulsresponse

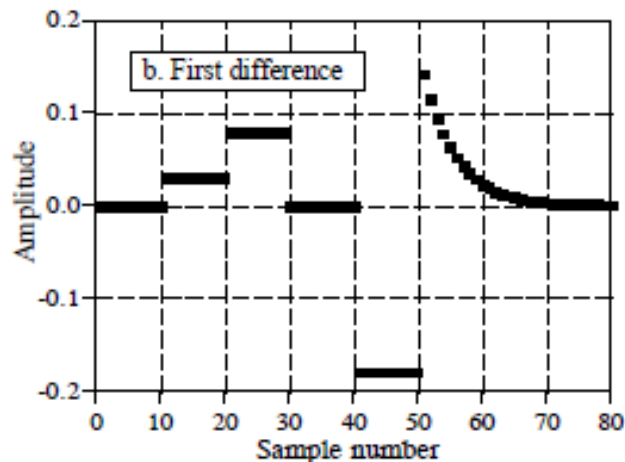


1^{ste} afgeleide = richtingscoëfficiënt = indicatie helling van functie

Van origineel discreet signaal eerste discrete afgeleide nemen => amplitude in elk punt van eerste discrete afgeleide is gelijk aan de helling in de oorspronkelijke locatie in het oorspronkelijke signaal.

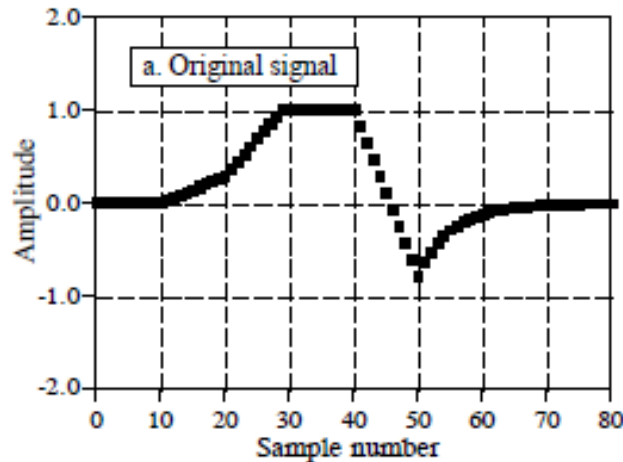


Onderste figuur via discrete integratie terug bovenste figuur bekomen (omgekeerde bewerking van discrete
Elke sample in het uitgangssignaal is een gewogen som van samples uit de input.



Iedere sample uitgangssignaal is een gewogen som van samples uit de input => op die manier kan de eerste afgeleide worden berekend

Gemeenschappelijke impulsresponse

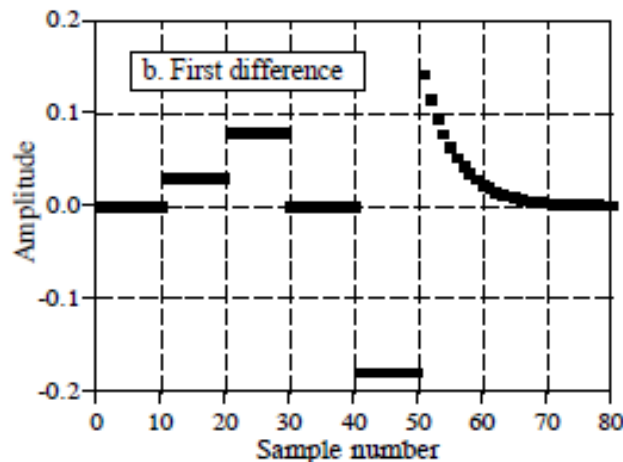


Berekenen eerste discrete afgeleide

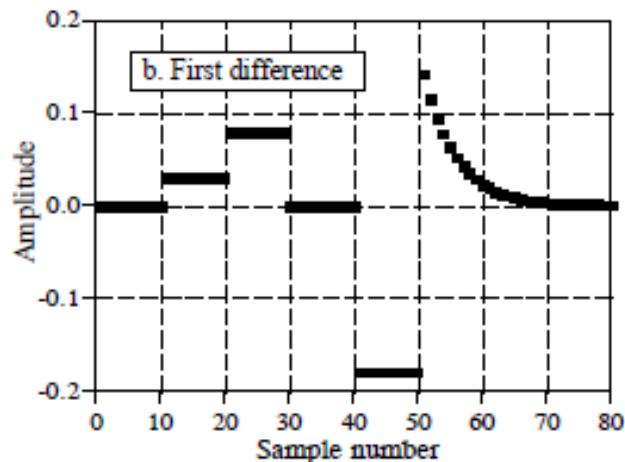
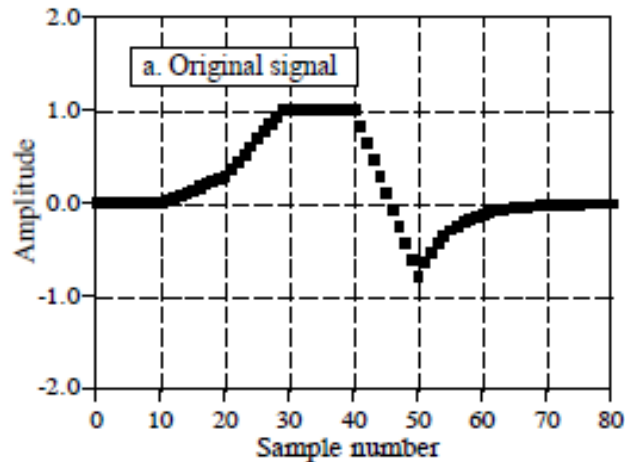
$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Of iedere sample in het uitgangssignaal is het verschil tussen twee aangrenzende samples in het ingangssignaal

Andere veel gebruikte methode is de helling symmetrisch bepalen rond het punt dat onderzocht wordt. Vb: $y[n] = (x[n+1] - x[n-1])/2$



Gemeenschappelijke impulsresponse



Berekenen discrete integratie

$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Iedere sample in de discrete integratie kan bepaald worden door alle punten in het origineel signaal op te tellen langs de linkerzijde van de samplelokatie.

Vb integratie is gekend tot $y[40]$

$y[41]$ kan dan op volgende wijze worden berekend:

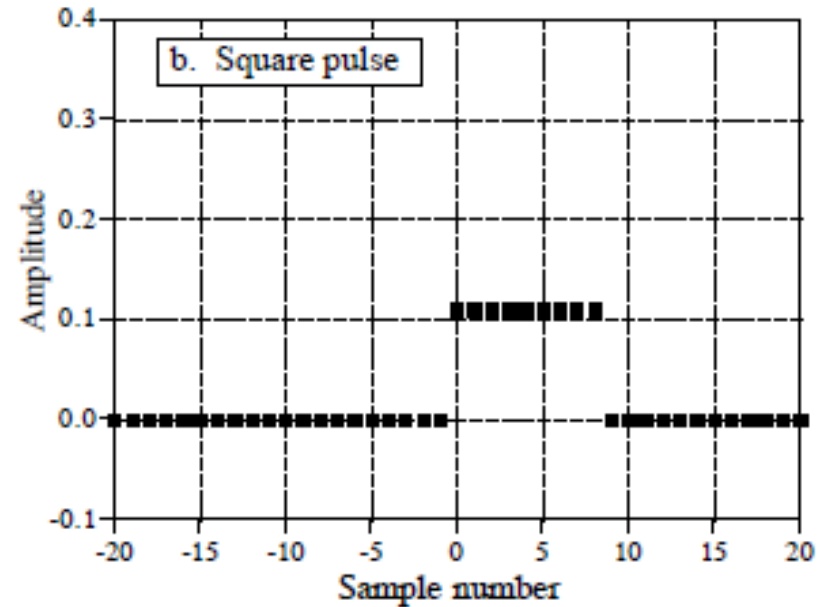
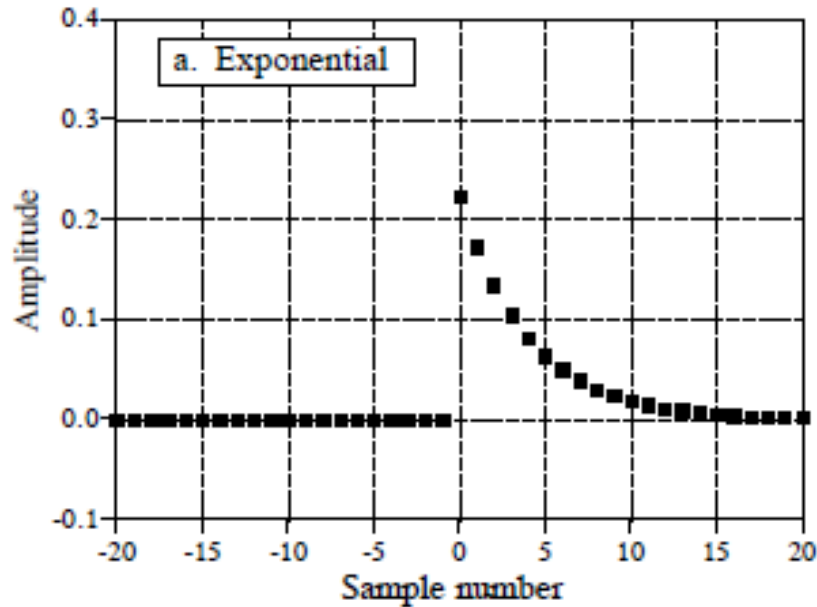
$$y[41] = x[41] + y[40].$$

Relaties van dit type worden aangeduid als **recursievergelijking** of verschilvergelijking



- Bespreken algemene vorm van impulsresponsie (kernel) bij LDF en HDF
- **Opbouw LDF**
 - Bestaat uit een groep aangrenzende positieve punten.
 - In elke sample van het uitgangssignaal wordt een gewogen gemiddelde gemaakt van een groot aantal aan elkaar grenzende punten van het ingangssignaal
 - Dit gemiddelde vlakkt het signaal af waardoor hoogfrequente componenten worden verwijderd
 - Sommige LDF-kernels bevatten enkele negatief geschaalde samples in de staart van hun karakteristiek. Dit wordt gedaan om ruisonderdrukking, signaalscheiding, ... te bekomen
 - De afsnijfrequentie wordt bekomen door de impulsresponsie (kernel) breder of smaller te maken
 - LDF heeft een versterking van 1 bij $f = 0$ (DC), en de som van de punten in de impulsresponsie moet gelijk zijn aan 1

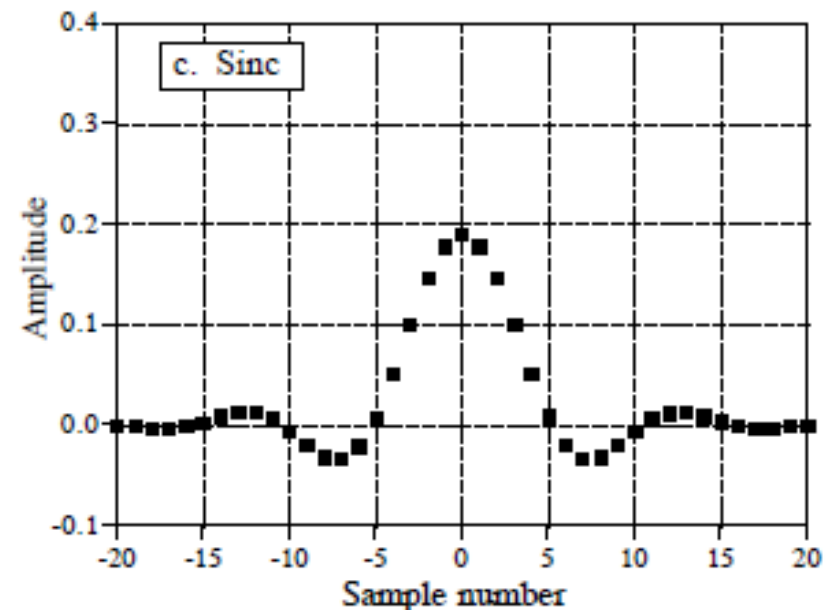
Laag- en hoogdoorlaat filters



Exponentiële functie is de eenvoudigste recursieve filter

Rechthoekspuls wordt gebruikt voor ruisonderdrukking met behoud van randscherpte

Sinc-functie gebruikt om een bepaalde frequentieband af te scheiden van een andere frequentieband.



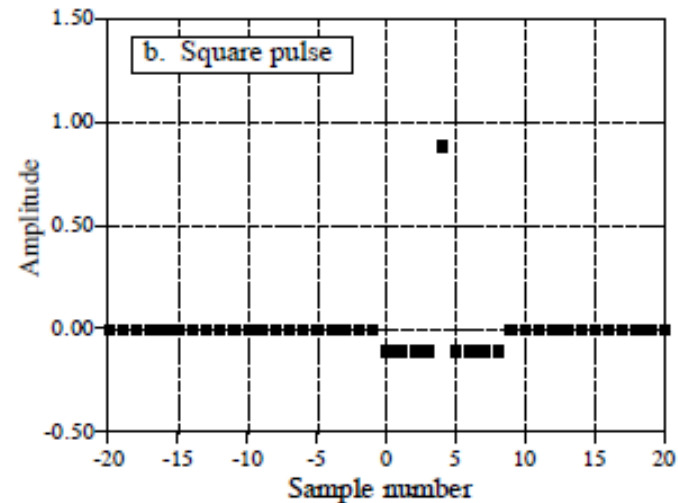
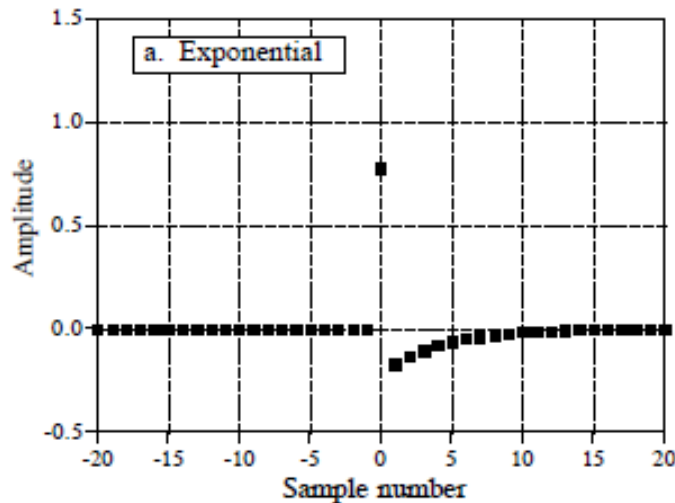


- Hoogdoorlaatfilter

- Afgeleid van LDF (algemene strategie in filterontwerp, ontwerp eerst filter als LDF; transformeer dan filter naar gewenst type)
- LDF \Rightarrow HDF-transformatie
 - Deltafunctie passeert het volledige signaal, LDF impulsresponsie enkel het LF-gedeelte
 - Superpositie een filterkernel die bestaat uit een deltafunctie min de LDF-kernel levert enkel de hogere frequenties \Rightarrow HDF-filter
 - Deltafunctie meestal toegevoegd in het centrum van symmetrie of bij sample 0 als de filterkernel niet symmetrisch is
 - HDF hebben geen versterking bij de DC ($f=0$)

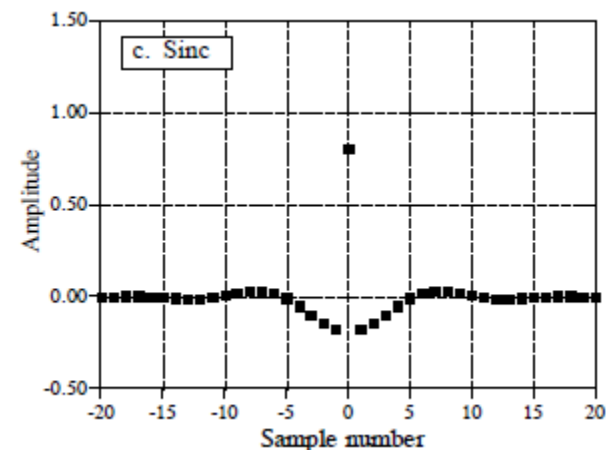


- Hoogdoorlaatfilter



Typische HDF-kernel (impulsresponsie) wordt gevormd door het aftrekken van de overeenkomstige LDF-kernel uit een deltafunctie

Een typische kenmerk voor HDF is dat de HD-kernel is een piek die omgeven is door veel aangrenzende samples.



Causal and noncausal signals (signalen met een oorzakelijk verband of niet)

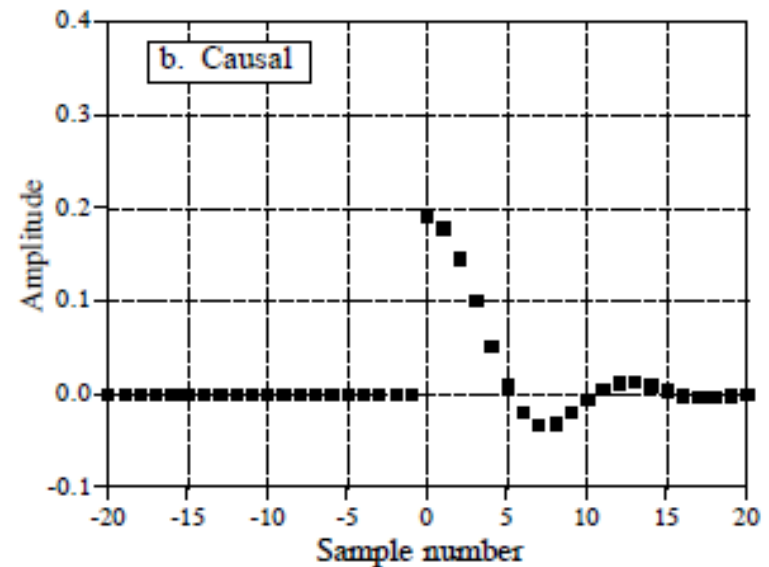
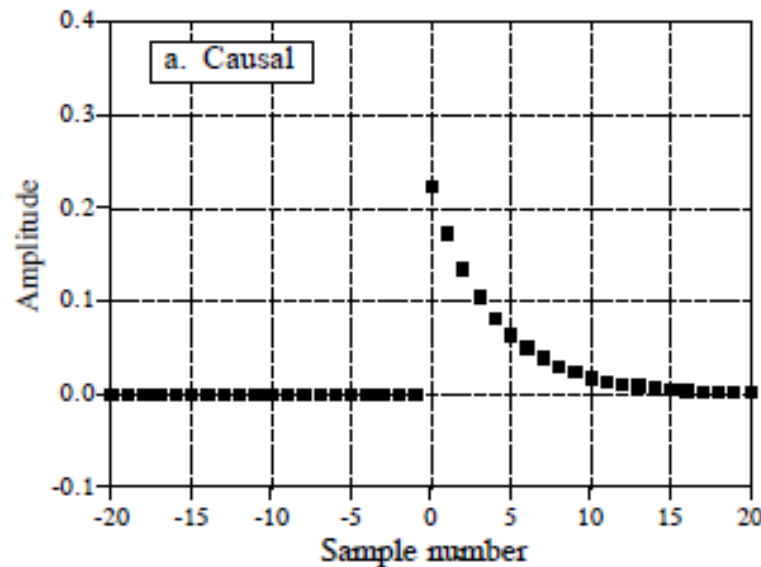


- Stel een eenvoudig analoog systeem.
 - Korte puls op ingang => reactie op de uitgang
 - Reactie is er gekomen nadat er een impuls op de ingang was => oorzakelijk verband (causal)
- DSP bootst werkelijkheid na => moet hetzelfde principe van oorzakelijk verband volgen
 - Gevolg waarde van samplenummer 8 in het ingangssignaal kan enkel maar invloed uitoefenen in het uitgangssignaal op sample nummer 8 of hoger. Werkt DSP op deze manier => spreekt van causal
- Digitale verwerking hoeft niet perse op bovenvermelde manier te werken. Vermits zowel in- als uitgang getallen opslaan in arrays binnen een computer kan eender welk gedeelte van het inputsignaal effect hebben op eender welk gedeelte van het uitgangssignaal => spreekt van noncausal of niet oorzakelijk verband

Causal and noncausal signals (signalen met een oorzakelijk verband of niet)



- Oorzakelijk verband**

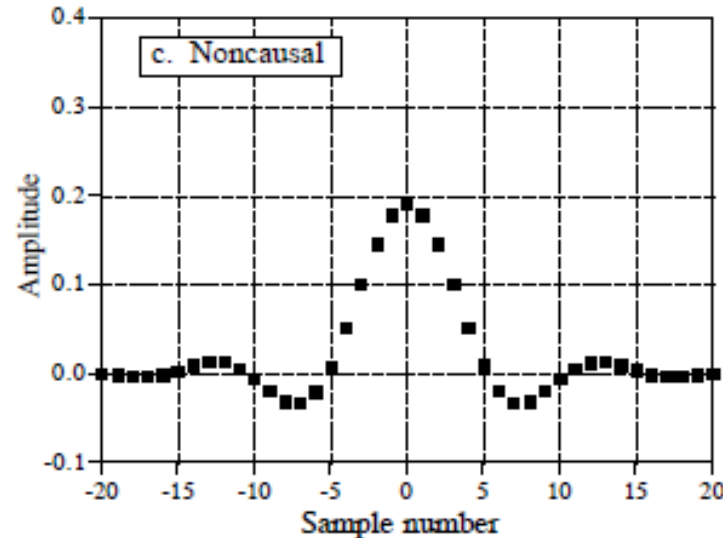


- Impulsreactie van een causal systeem moet een waarde hebben van 0 voor alle negatieve genummerde samples (of het nu een impulsresponsie is of niet)
- Vergelijk met convolutie: de term causal slaat op eender welk signaal waar al de negatieve samplenummers een waarde nul hebben (impulsresponsie of niet)

Causal and noncausal signals (signalen met een oorzakelijk verband of niet)



- **Niet-oorzakelijk verband**



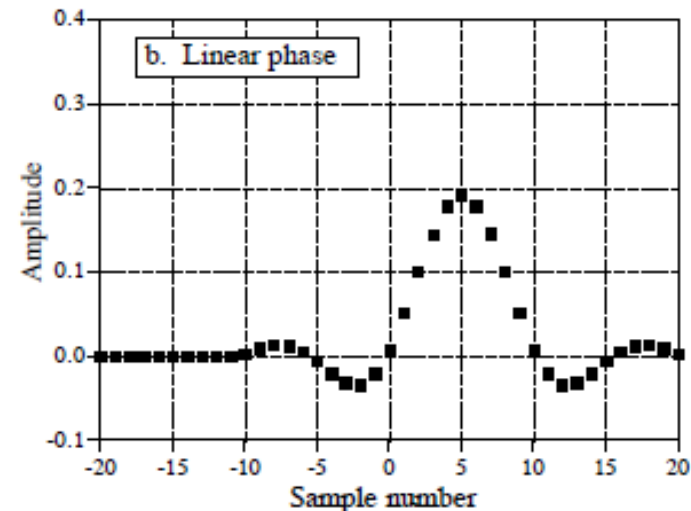
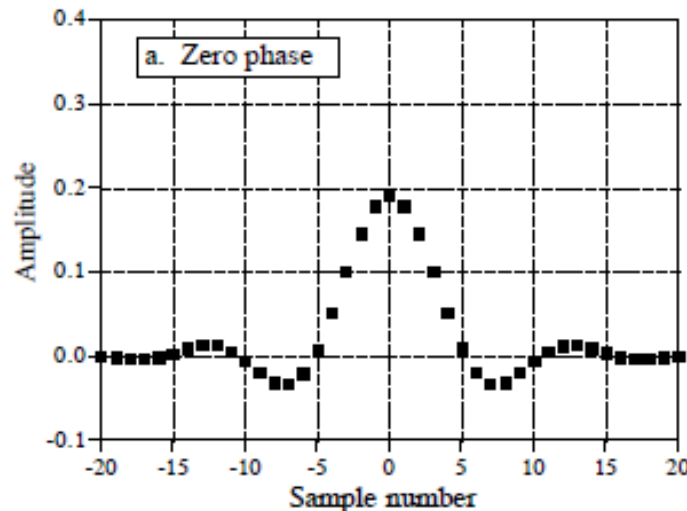
- Eender welk noncausal signaal met een eindig nummer van samples kan omgevormd worden in een causal signaal door het simpelweg te verschuiven

Geen faseverschuiving, lineaire en niet-lineaire faseverschuiving



- Signaal heeft geen faseverschuiving (zero-phase) als het een links-rechts symmetrie heeft rond de sample nummer 0.
- Signaal heeft een lineaire faseverschuiving als het een links-rechts symmetrie heeft rond een ander punt dan 0 => eender welk lineair fasesignaal kan omgevormd worden tot een signaal zonder faseverschuiving door het eenvoudigweg te verschuiven naar het nulpunt
- Signaal heeft een niet lineaire faseverschuiving als het geen links-rechts symmetrie heeft.

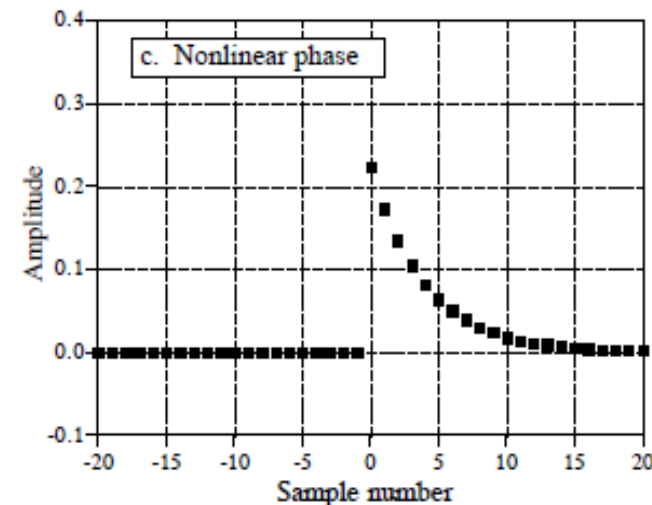
Geen faseverschuiving, lineaire en niet-lineaire faseverschuiving



Voorbeelden van faselineariteit

Signalen met een links-rechts symmetrie hebben een lineaire fase. Als de symmetrie-as plaatsvindt op sample 0 \Rightarrow faseverschuiving = 0° . Elke lineaire faseverschuiving kan omgezet worden naar 0° door de symmetrie te verschuiven naar sample 0

Signalen zonder links-rechts symmetrie \Rightarrow geen lineaire fase en hebben een compleet verschillend concept.



Geen faseverschuiving, lineaire en niet-lineaire faseverschuiving



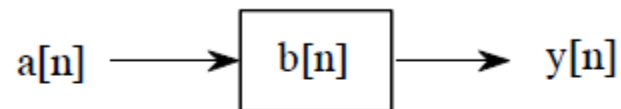
- Verband fase en symmetrie
 - Antwoord ligt in het frequentiespectrum
 - Bestaat het frequentiespectrum van een signaal uit 2 delen (de omvang en de fase)
 - Het frequentiespectrum van een signaal dat symmetrisch rond 0 ligt heeft een fase die nul is. Het faseverloop loopt via een rechte lijn => lineaire fase
 - Een niet-symmetrisch signaal heeft een fase die niet volgens een rechte lijn verloopt => heeft een niet-lineaire fase.



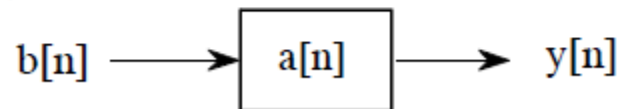
- Commutatieve eigenschap:

$$a[n] * b[n] = b[n] * a[n]$$

IF



THEN





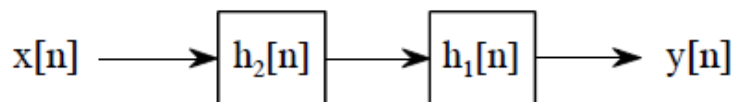
- Associatieve eigenschap:

$$(a[n] * b[n]) * c[n] = a[n] * (b[n] * c[n])$$

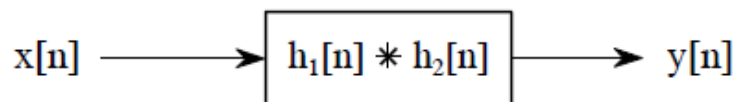
IF



THEN



ALSO



Associatieve eigenschap zorgt ervoor dat de volgorde van systemen kan worden herschikt zonder invloed op de algemene werking van de cascade

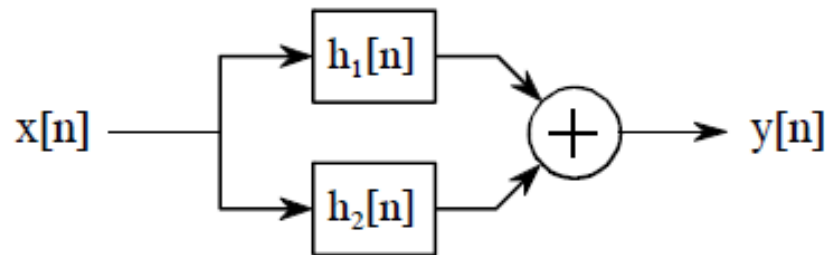
Twee of meer systemen in cascade kunnen worden vervangen door één enkel systeem



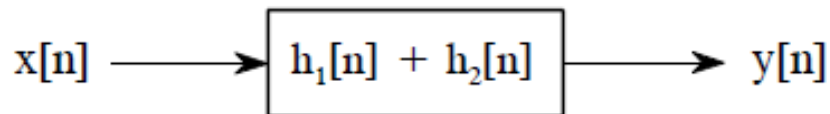
- Distributieve eigenschap:

$$a[n] * b[n] + a[n] * c[n] = a[n] * (b[n] + c[n])$$

IF



THEN



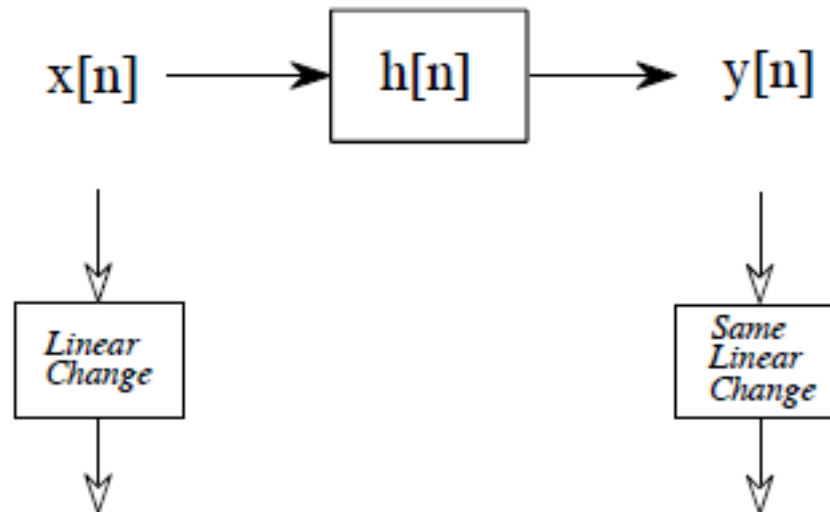
De distributieve eigenschap laat zien dat parallelle systemen met toegevoegde uitgangen kunnen worden vervangen door een enkel systeem.

De impuls respons van het vervangende systeem is gelijk aan de som van de impuls reacties van alle originele systemen.

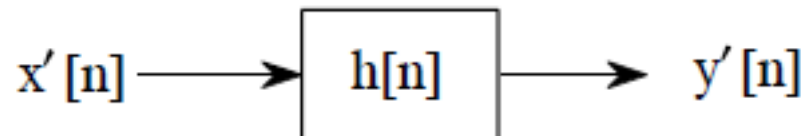


- Wat is de relatie tussen een verandert ingangssignaal en de verandering in het uitgangssignaal?
 - Het uitgangssignaal verandert precies op dezelfde lineaire manier als het ingangssignaal was verandert.

IF



THEN



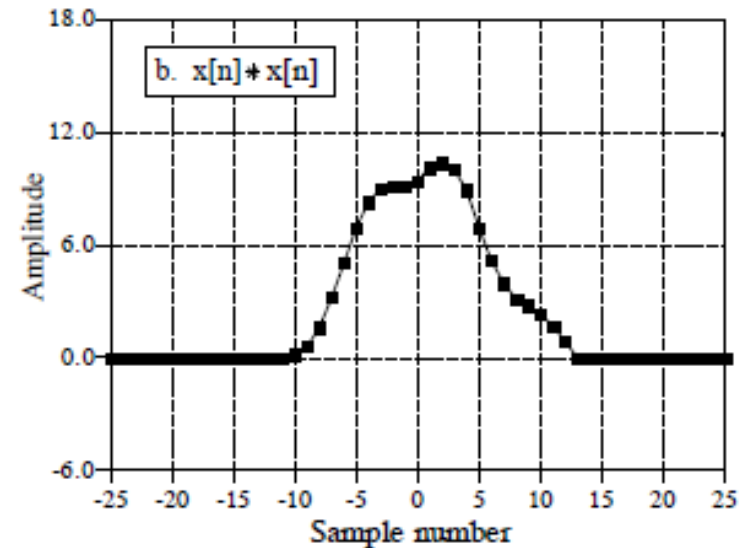
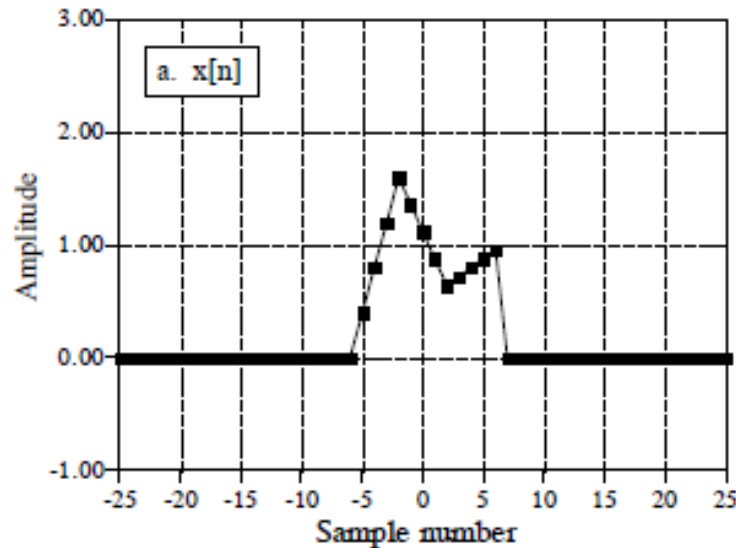


- De centrale limietstelling
 - Stelt dat een Gaussische verdeling als resultaat wordt waargenomen als de beschouwde variabele de som is van verschillende random processen. Ook al hebben de componenten binnen de beschouwde processen geen Gaussische distributie, de som van de processen heeft er wel één.
 - Dit betekent dat een pulsvormig signaal verschillende keren convolved met zichzelf, een Gaussische verdeling wordt geproduceerd

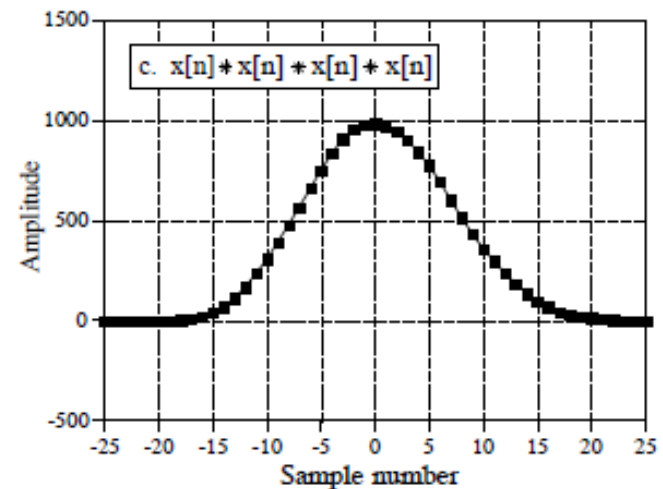
Overdracht tussen in- en uitgang

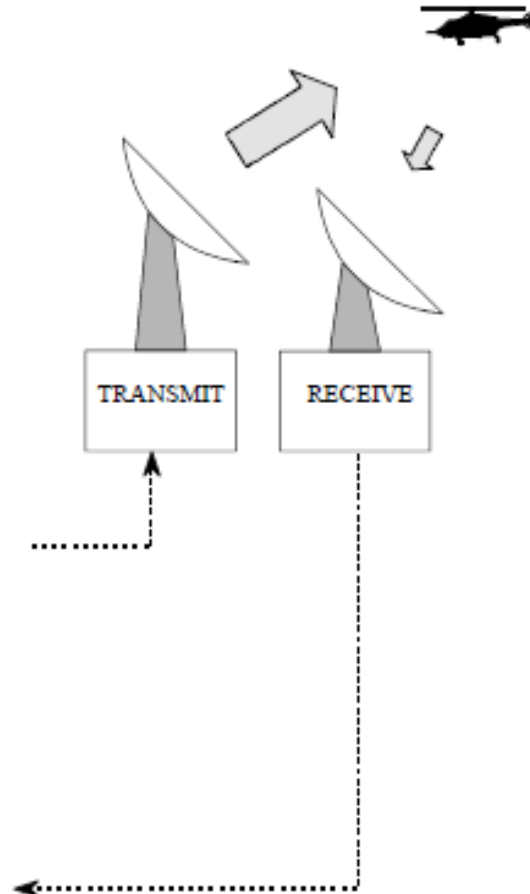
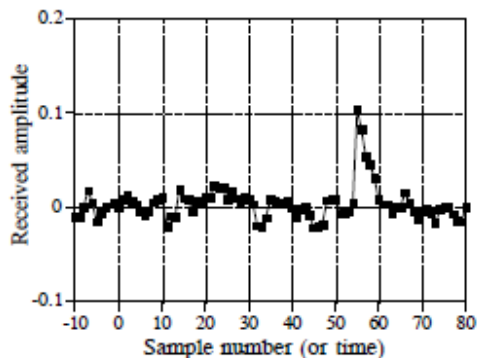
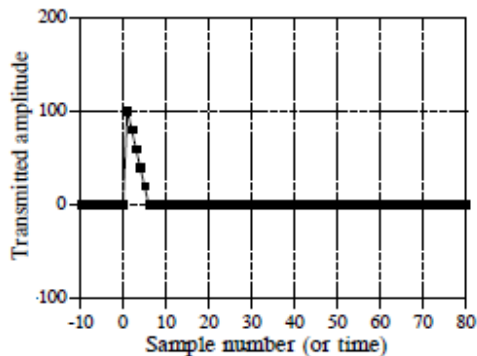


- De centrale limietstelling



(b) Puls van (a) een keer convolved met zichzelf
(c) puls convolved met zichzelf drie keer





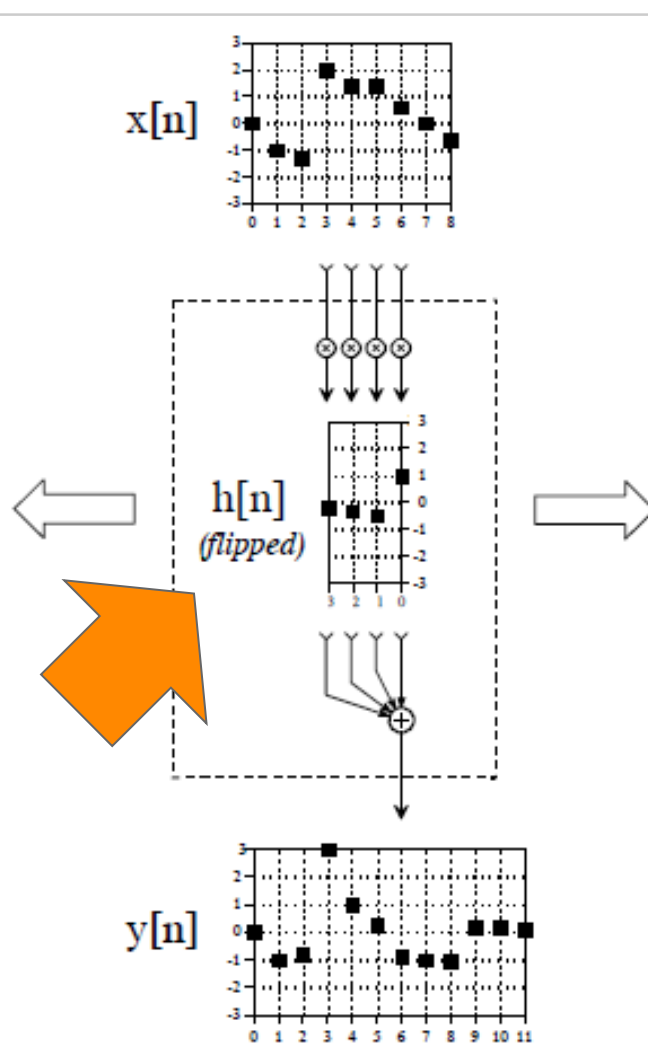
Net als andere echolocatiesystemen zendt radar een korte puls uit die wordt weerspiegeld door een object dat wordt onderzocht. In de ontvanger komt een weerkaatste golfvorm die verschoven is in de tijd plus willekeurige ruis.

Het signaal terug detecteren in een ruisomgeving is een fundamenteel probleem. Via correlatie kan men dit probleem oplossen

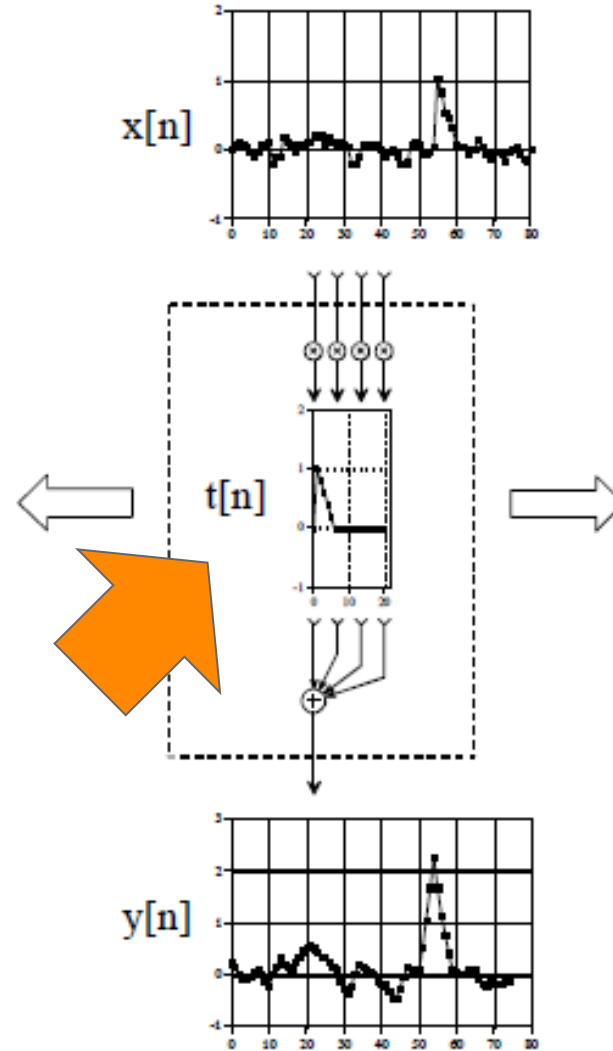


- Is een wiskundige bewerking die vergelijkbaar is met convolutie
 - Correlatie gebruikt 2 signalen om een derde signaal te produceren (idem convolutie)
 - Het derde signaal wordt de cross-correlatie genoemd van de 2 ingangssignalen
- Signaal dat met zichzelf correleerd => resulterend signaal wordt **autocorrelatie** genoemd
- *In de statistiek spreekt men van correlatie als er een min of meer (lineaire) samenhang blijkt te zijn tussen twee reeksen metingen of de mogelijke waarden van twee toevalsvariabelen. De sterkte van deze samenhang wordt beschreven met de correlatiecoëfficiënt.*

Correlatie



Convolutie
 $a[n] * b[n] = c[n]$



Correlatie
 $a[n] * b[-n] = c[n]$



- *Laat je niet misleiden door de wiskundige gelijkens tussen convolutie en correlatie*
 - *Beiden vertegenwoordigen een verschillende DSP-procedure*
 - *Convolutie = relatie tussen de input van een systeem, het uitgangssignaal en de impulsreactie*
 - *Correlatie = een manier om een bekende golfvorm te detecteren in een ruisomgeving*
 - *De vergelijkbare wiskunde is slechts toeval*