Matrices

- Definitie matrix?

  - Onder een matrix A van het type (m, n) verstaan we een uit $m \times n$ reële getallen bestaand rechthoekig schema met m horizontale rijen en n verticale kolommen

  - Een matrix is een geordend schema van getallen en bezit daarom geen getalwaarde (in tegenstelling tot de later te bespreken determinant)

Wat zijn matrices?

- Rechthoek van getallen in de vorm: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- a_{ij} : de elementen van de matrix; het element staat in de i^{de} rij en de j^{de} kolom
- Horizontale lijnen : de rijen van de matrix
- Verticale lijnen : de kolommen van de matrix

Wat zijn matrices?

- Rechthoek van getallen in de vorm: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

  - Als m het aantal rijen is en n het aantal kolommen spreekt men van een $m \times n$ matrix.
  - Als $m = n$ spreekt men van een vierkante matrix
  - $m = 1$ => rijmatrix of rijvector;
  - $n = 1$ => kolommatrix of kolomvector

Begrippen bij een matrix

- Nulmatrix O
  - Alle elementen zijn gelijk aan 0 => $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Hoofddiagonaal
  - Loopt van linksboven naar rechtsonder

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Nevendiagonaal
  - Loopt van rechtsboven naar rechtsonder

$$\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$$

Speciale vierkante matrices

.1 Diagonaalmatrix

Een vierkante matrix met n rijen $A=(a_{ik})$ wordt een diagonaalmatrix genoemd als alle buiten de hoofdiagonaal gelegen elementen nul zijn.

$a_{ik} = 0$ als $i \neq k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Speciale vierkante matrices

.2 Eenheidsmatrix

Een diagonaalmatrix met n rijen met de diagonaalelementen a_{ii}
wordt een eenheidsmatrix E met n elementen genoemd

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices

.3 Driehoeksmatrix

De vierkante matrix met n rijen wordt aangeduid als driehoeksmatrix als alle elementen boven of onder de hoofdiagonaal nul zijn. Er is een onderscheid tussen onder- en bovendriehoeksmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Onderdriehoeksmatrix van de orde 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bovendriehoeksmatrix van de orde 4

Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 1x1- matrix

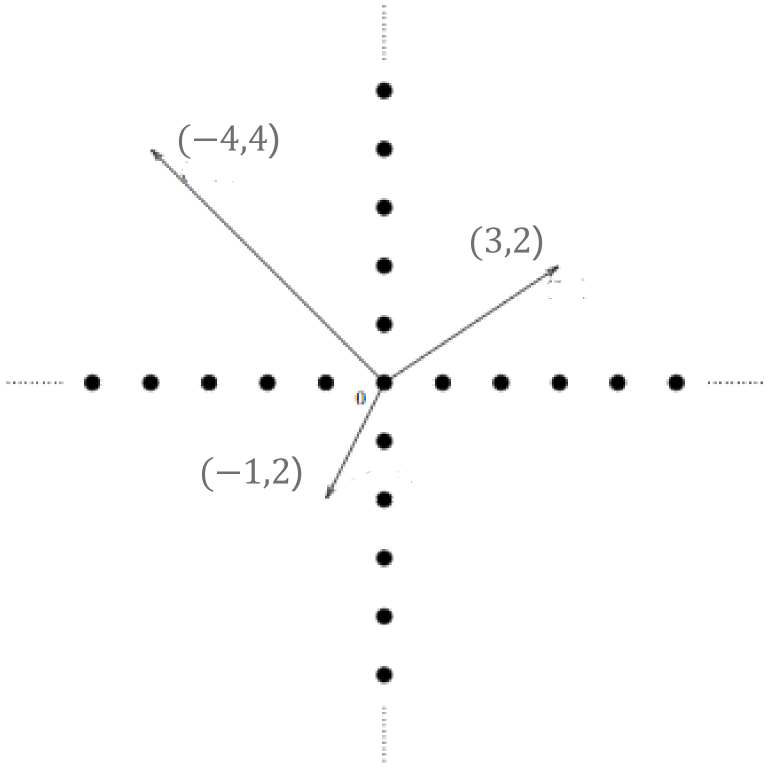
$$A = |\ a_{11}\ | \rightarrow \text{Het getal } a_{11} \text{ zelf}$$

- Determinant 2x2-matrix

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow D = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

Determinant van een vierkante matrix

- De determinant van een vierkante matrix is een **scalaire weergave** van het volume van de matrix.
- De determinant beschrijft de **relatieve geometrie van de vectoren** waaruit de rijen van de matrix bestaan.
- Meer specifiek vertelt de determinant van een matrix A je het volume van een doos met zijden gegeven door rijen van A.



Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 3x3- matrix
  - Minor
    - Als in een vierkante matrix van een element de rij en kolom wordt geschrapt en de determinant van de resterende elementen uitgerekend wordt, bekomt men de minor van dit element

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \boxed{\cancel{a_{22}}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$Minor\ van\ het\ element\ a_{22} = a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}$$

Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 3x3- matrix
  - cofactor
    - De cofactor van een element wordt bekomen door de minor van dit element te vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$; waarbij i het rijnummer is en j het kolomnummer van het element

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$cofactor\ of\ \ coëfficiënt\ van\ het\ element\ a_{22} = (-1)^{(2+2)}.(a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31})$$

Determinant van een 3X3 vierkante matrix

- ***De determinant van een vierkante matrix is de som van de producten van de elementen van een willekeurige rij (of kolom) met hun respectievelijke cofactoren***

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{1+1}.a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{1+1}.a_{11}.(a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}) + (-1)^{1+2}.a_{12}.(a_{21}.a_{33} - a_{31}.a_{23})$$
$$+(-1)^{1+3}.a_{13}.(a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31})$$

Determinant van een 3X3 vierkante matrix

- Determinant (alternatieve rekenwijze)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = \underline{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}} - \underline{a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}}$$

Som en verschil van matrices

- Optellen – aftrekken
  - Matrices die opgeteld of afgetrokken worden moeten van dezelfde grootte zijn
  - De gelijknamige elementen van beide matrices worden bij elkaar opgeteld of afgetrokken

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}$$

Som en verschil van matrices

- Eigenschappen: Optellen – aftrekken
  - Als A, B en C (=A+B) matrices zijn van dezelfde afmetingen, dan gelden volgende eigenschappen: $(A, B en C \in \mathbb{R}^{mxn})$
    - Gesloten $A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
    - Associativiteit $A + (B + C) = (A + B) + C$
    - Neutraal element $A + 0_{m \times n} = A = 0_{m \times n} + A$
    - Symmetrisch element $A + (-A) = 0_{m \times n} = (-A) + A$
    - Commutativiteit $A + B = B + A$

Scalair veelvoud van een matrix

- Is het vermenigvuldigen van een matrix met een getal

$$\lambda \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \lambda.a_{13} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \lambda.a_{23} \\ \lambda.a_{31} & \lambda.a_{32} & \lambda.a_{33} \end{vmatrix}$$

- Eigenschappen:

$$\lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$$

$$(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$$

$$(\lambda.\mu).A = \lambda.(\mu.A)$$

Getransponeerde matrix

- De getransponeerde matrix van een $m \times n$ matrix A is de $m \times n$ matrix A^T die ontstaat door de rijen van A in kolommen te noteren en omgekeerd, de kolommen van A als rijen te schrijven

  - De eerste rij van A wordt de eerste kolom van A^T,
  - De tweede rij van A wordt de tweede kolom van A^T, enz ...

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bijzondere matrix

Scheefsymmetrische matrix

De vierkante matrix $A=(a_{ik})$ met n rijen is scheefsymmetrisch als
$a_{ik}= -a_{ki}$ met $i,k = 1, 2, \ldots, n$
Hierbij geldt dat $A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -3 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldigen van matrices

- Twee matrices A en B kunnen met elkaar worden vermenigvuldigd als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B.
  - Het aantal rijen van A.B is gelijk aan het aantal rijen van A
  - Het aantal kolommen van A.B is gelijk aan het aantal kolommen van B

Vermenigvuldigen van matrices

Stel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *en* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matrix A is van het type (2,2) en matrix B is van het typ (2,3)
De rijcomponenten van A en de kolomcomponenten van B bezitten elk twee componenten. We vormen scalaire producten uit telkens een rijvector van A met een kolomvector van B volgens het volgende schema:

$$\begin{array}{r} \text{1e rijvector} \rightarrow \\ \text{2e rijvector} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{1e} & \text{2e} & \text{3e} \end{array} \\ \text{kolomvector} \end{array} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldigen van matrices

$$\begin{array}{r} 1e\ rijvector \rightarrow \\ 2e\ rijvector \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1e & 2e & 3e \\ & kolomvector & \end{array}$$

Stel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *en* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Eerst wordt de eerste rijvector van A achtereenvolgens met iedere kolomvector van B scalair vermenigvuldigd. Vervolgens wordt de tweede rijvector van A scalair met ieder van de drie kolomvectoren van B vermenigvuldigd => er wordt in totaal 6 scalaire producten verkregen:

- c_{11}= (1^e rijvector van A)(1^e kolomvector van B) = 1.4 + 5.1 = 9
- c_{12}= (1^e rijvector van A)(2^e kolomvector van B) = 1.1 + 5.0 = 1
- c_{13}= (1^e rijvector van A)(3^e kolomvector van B) = 1.2 + 5.3 = 17
- c_{21}= (2^e rijvector van A)(1^e kolomvector van B) = 2.4 + 3.1 = 11
- c_{22}= (2^e rijvector van A)(2^e kolomvector van B) = 2.1 + 3.0 = 2
- c_{23}= (2^e rijvector van A)(3^e kolomvector van B) = 2.2 + 3.3 = 13

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 17 \\ 11 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldigen van matrices

- De vorming van een produkt is alleen mogelijk als het aantal kolommen van A overeenstemt met het aantal rijen van B.
- Het matrixprodukt A.B is van het type (m, p).
- Het matrixelement c_{ik} van het matrixprodukt A.B is het scalaire produkt van de i-de rijvector en de k-de kolomvector van B.
- In het algemeen is A.B ≠ B.A, dat wil zeggen de matrixvermenigvuldiging is een niet-commutatieve rekenkundige bewerking.

Wetten voor de matrixvermenigvuldiging

- Associatieve wet : A (BC) = (AB).C
- Distributieve wet: A (B+C) = AB + AC

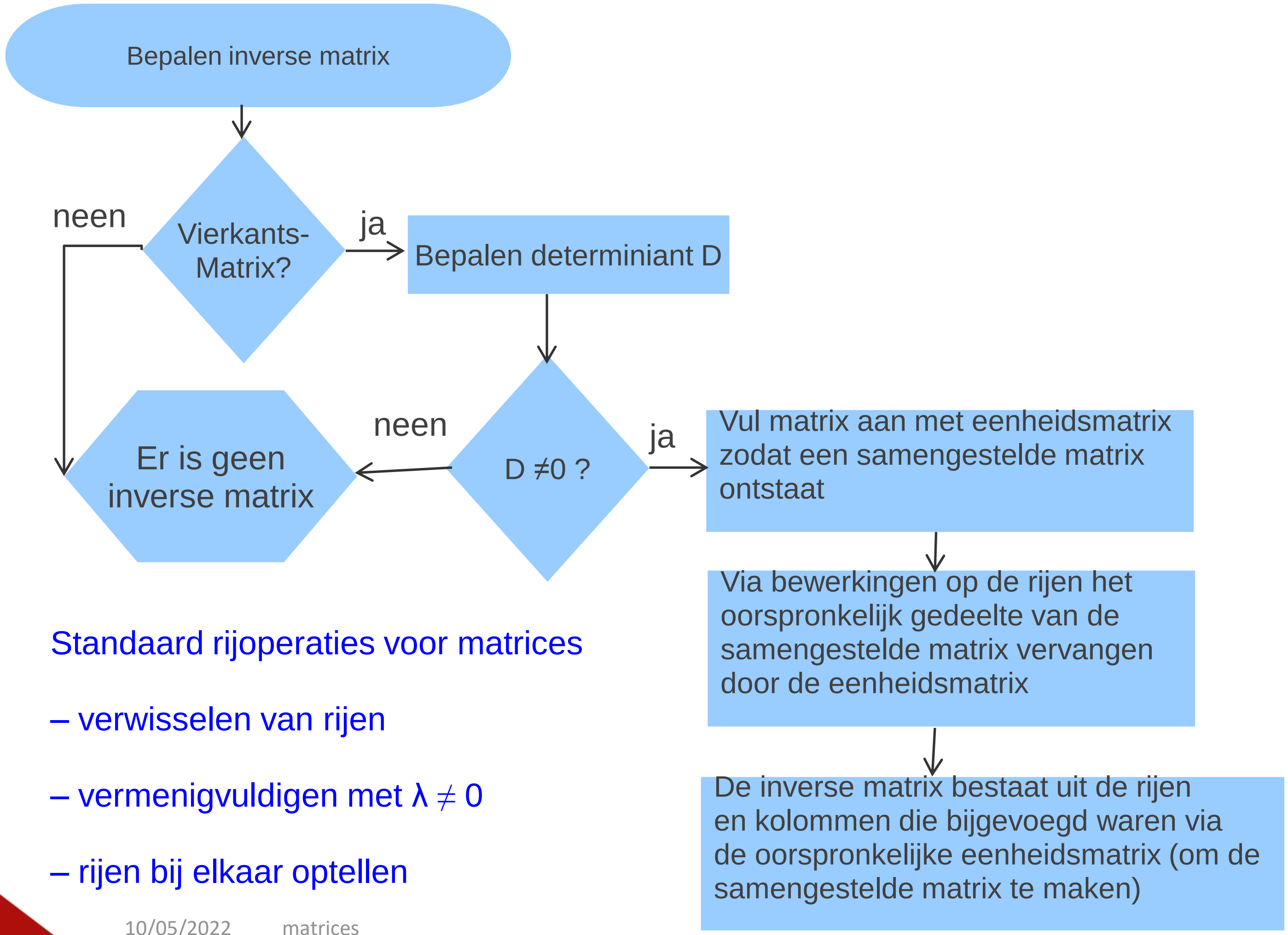
  (A+B) C = AC + BC

Overige regels:

- $(AB)^T = B^T . A^T$
- AE = EA = A

Inverse matrix

- B is de inverse matrix van A als A.B = B.A = I_n; met I_n de eenheidsmatrix.
- De inverse matrix van A wordt weergegeven als A^{-1}
- Inverse matrix kan enkel bestaan voor een vierkante matrix
- Veel vierkante matrices hebben geen inverse matrix
  - Determinant van nxn matrix A = 0 => geen inverse matrix => A wordt singulier genoemd
  - Determinant van nxn matrix A ≠ 0 => inverse matrix => A wordt regulier genoemd
- Als een vierkante matrix inverteerbaar is, dan is de inverse matrix uniek. Dit wil zeggen dat er maar één matrix A^{-1} bestaat waarvoor geldt $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$ als A^{-1} bestaat



Standaard rijoperaties voor matrices

– verwisselen van rijen

– vermenigvuldigen met $\lambda \neq 0$

– rijen bij elkaar optellen

Cryptologie: gebruik van matrices om te coderen en decoderen

- Stel volgende overeenkomst:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U	V	W	X	Y	Z	=	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	…
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	…

- Voorbeeld:

E	L	E	K	T	R	O	N
5	12	5	11	20	18	15	14

Cryptologie: gebruik van matrices om te coderen en decoderen

- Voorbeeld:

E	L	E	K	T	R	O	N
5	12	5	11	20	18	15	14

- Hoe coderen?

➢ stap 1 : De letters in 2×1 matrices plaatsen en omzetten in getallen

➢ Stap 2 : voer de encryptie (codering) uit

➢ Stap 3 : decoderen

Stap 1 : De letters in een 2×1 matrices plaatsen en omzetten in getallen

- Voorbeeld:

E	L	E	K	T	R	O	N
5	12	5	11	20	18	15	14

- $\begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix}$ (als het woord oneven is, de laatste oneven plaats met '-' opvullen)
- $\begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix}$

Stap 2 : encryptie

- Voorbeeld: $\begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix}$ ➔ $\begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix}$
- Kies een willekeurige vierkante matrix met dimentsie 2 bv: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$
- Bereken:
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \times 1 + 12 \times 1 \\ 5 \times 0 + 12 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 \\ 24 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \times 1 + 11 \times 1 \\ 5 \times 0 + 11 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 \\ 22 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \times 1 + 18 \times 1 \\ 20 \times 0 + 18 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 38 \\ 36 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \times 1 + 14 \times 1 \\ 15 \times 0 + 14 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 \\ 28 \end{vmatrix}$

Stap 2 : encryptie

- De encrypted boodschap wordt: $\begin{vmatrix}17\\24\end{vmatrix} \begin{vmatrix}16\\22\end{vmatrix} \begin{vmatrix}38\\36\end{vmatrix} \begin{vmatrix}29\\28\end{vmatrix}$
- Terug omzetten naar letters: $\begin{vmatrix}Q\\X\end{vmatrix} \begin{vmatrix}P\\V\end{vmatrix} \begin{vmatrix}K\\I\end{vmatrix} \begin{vmatrix}B\\A\end{vmatrix}$ ➔ QXPVKIBA

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U	V	W	X	Y	Z	=	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	…
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	…

Terug omzetten naar letters:
Van getallen groter dan 27 trek je (veelvouden van) 27 af. (38-27 = 11 => K)
Getallen kleiner dan 1 tel je (veelvouden van) 27 bij. (-20 + 27 = 7 => G)

Stap 3 : decoderen

- De encrypted boodschap wordt: $\begin{vmatrix}17\\24\end{vmatrix}\begin{vmatrix}16\\22\end{vmatrix}\begin{vmatrix}38\\36\end{vmatrix}\begin{vmatrix}29\\28\end{vmatrix}$ ➔ QXPVKIBA
- Terug omzetten:
  - ***De persoon die de boodschap ontvangt moet de vermenigvuldiging met de sleutel*** $\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\end{vmatrix}$ ***terug ongedaan maken. Dit komt neer om een matrix te vinden die weer de oorspronkelijke getallen teruggeeft:***

  - Inverse matrix van de sleutel bepalen
    - Indien A een inverste matrix A^{-1} heeft, moet $A \times A^{-1} = I = A^{-1} \times A$
    - I = eenheidsmatrix

Stap 3 : decoderen : Bepalen van inverse matrix van de sleutel:

Inverse matrix $\boldsymbol{A^{-1}}$ ***Eenheidsmatrix I***

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Uit regels van vermenigvuldiging:

$$I_{11} = 1 = a \times 1 + c \times 1 \Longrightarrow \boldsymbol{a + c = 1}$$
$$I_{21} = 0 = a \times 0 + c \times 2 \Longrightarrow \boldsymbol{2c = 0}$$
$$I_{12} = 0 = b \times 1 + d \times 1 \Longrightarrow \boldsymbol{b + d = 0}$$
$$I_{22} = 1 = b \times 0 + d \times 2 \Longrightarrow \boldsymbol{2d = 1}$$

$$\boldsymbol{2d = 1 \Longrightarrow d = 0,5}$$
$$\boldsymbol{2c = 0 \Rightarrow a + c = 1 \Rightarrow a = 1; c = 0}$$
$$\boldsymbol{b + d = 0 \ en \ d = 0,5 \Rightarrow b = -0,5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-0,5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,5} \end{vmatrix}$$

Stap 3 : decoderen : terug vormen van oorstpronkelijke tekst:

$\begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix}$ encryptie $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 17 \\ 24 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 16 \\ 22 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 38 \\ 36 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 29 \\ 28 \end{vmatrix} \rightarrow$ QXPVKIBA

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-0,5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,5} \end{vmatrix}$$

Decodering :

- $\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 17 \\ 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 17 - 0{,}5 \times 24 \\ 0 \times 17 + 0{,}5 \times 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 16 \\ 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 16 - 0{,}5 \times 22 \\ 0 \times 17 + 0{,}5 \times 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 38 \\ 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 38 - 0{,}5 \times 36 \\ 0 \times 38 + 0{,}5 \times 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 29 \\ 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 29 - 0{,}5 \times 28 \\ 0 \times 29 + 0{,}5 \times 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix}$