

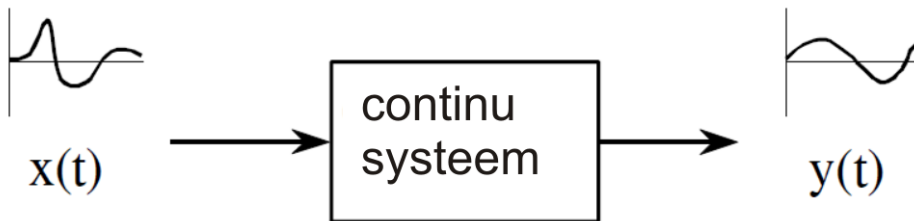
## 3 – Lineaire systemen

Ing. Patrick Van Houtven

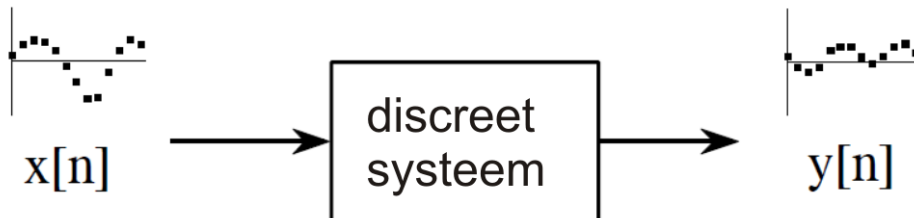
- Signalen en systemen
  - Opsplitsing te verwerken signaal in aantal eenvoudige componenten die ieder individueel een gedeelte van het signaal verwerken
  - Voordeel : ingewikkeld probleem opgelost worden aan de hand van een aantal eenvoudige problemen
  - Enkel toepasbaar op een lineair systeem
- Voorbeeld van systemen
  - Verbeteren van een foto
  - Echo-effecten uit geluidssignaal halen
  - Systemen die een bepaald fysisch proces vertegenwoordigen dat we willen analyseren (radar en sonar via reflectie karakteristieken object zichtbaar maken)

- **Gebaseerd op superpositieprincipe**

- Opsplitsing te verwerken signaal in aantal eenvoudige componenten die ieder individueel een gedeelte van het signaal verwerken
- Voordeel : ingewikkeld probleem opgelost worden aan de hand van een aantal eenvoudige problemen
- Enkel toepasbaar op een lineair systeem



Continu signaal :  $x(t)$   
Discreet signaal  $x[n]$



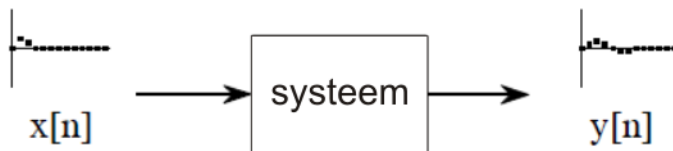
Tijdsdomein : kleine letters  
Frequentiedomein : hoofdletters

- Vereisten voor lineariteit

- Homogeniteit

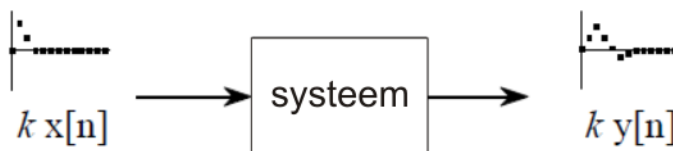
- Verandering amplitude in hetingangssignaal veroorzaakt een overeenkomstige verandering in amplitude van het uitgangssignaal
    - als eeningangssignaal  $x[n]$  resulteert in een uitgangssignaal  $y[n]$ , resulteert eeningangssignaal van  $kx[n]$  een uitgangssignaal van  $ky[n]$ . Dit voor elk ingangssignaal en constante  $k$ .

Als



Weerstand als voorbeeld homogeen systeem:  $u(t) = f(i(t))$  (wet van Ohm)

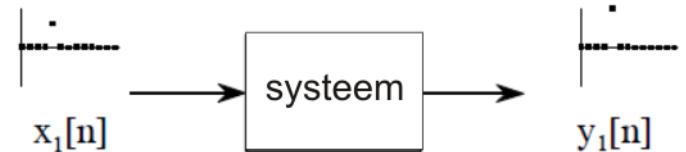
Dan



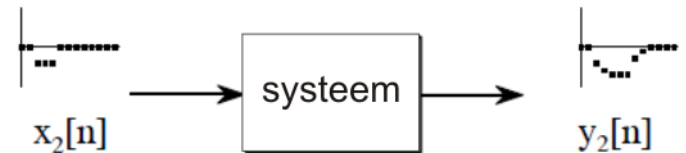
Weerstand als geen homogeen systeem  
 $P(t) = u(t)^2 / R$  - vermogen verandert kwadratisch t.o.v spanning => geen lineair systeem

- Vereisten voor lineariteit
  - **Additiviteit**
    - Verschillende aangelegde signalen gaan door het systeem zonder interactie met elkaar
    - Vb: telefoneren met achtergrondgeluid
  - Voorbeeld niet additief systeem
    - Mengtrap zender

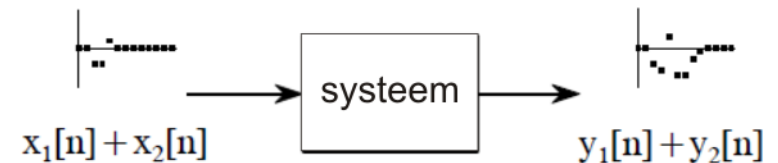
Als



En Als

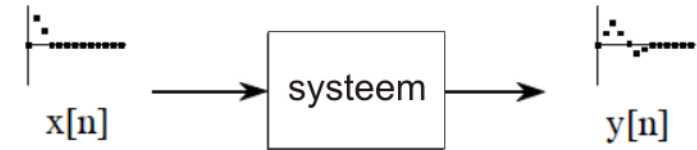


Dan

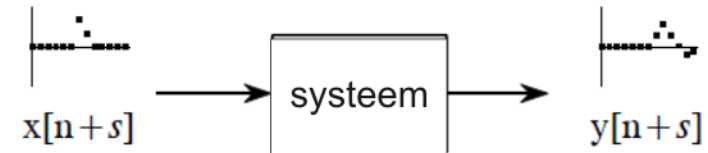


- **Vereisten voor lineariteit**
  - **Shift invariantie**
    - Voor ieder ingangssignaal  $x[n]$  en iedere constante  $s$  geldt dat als een ingangssignaal  $x[n]$  resulteert in een uitgangssignaal  $y[n]$ , een ingangssignaal  $x[n+s]$  resulteert in een uitgangssignaal  $y[n+s]$
    - Geeft aan dat de karakteristieken van een systeem niet in tijd veranderen
    - Toevoeging  $s$  kan de golfvorm versnellen of vertragen
      - $s = -12 \Rightarrow$  verschuiving naar rechts met 12 sampels
      - $s = +3 \Rightarrow$  verschuiving naar links met 3 sampels

Als



Dan



- **Bijkomende eigenschappen lineariteit**
  - **Eigenschap statische lineariteit**
    - Definieert hoe een systeem reageert als het ingangssignaal niet verandert
    - Vb: karakteristiek diode (statisch in doorlaatgebied)
    - Responsie statische systeem = ingangssignaal vermenigvuldigd met een constante
    - Grafiek statisch systeem is steeds een rechte

- **Bijkomende eigenschappen lineariteit**
  - **Eigenschap: gedrag sinusoiden**
    - Ingangssignaal sinus  $\Rightarrow$  uitgangssignaal ook een sinus met exact dezelfde frequentie (sinusgolven enige die deze eigenschap hebben)
    - Blokgolf aanleggen (bestaat uit sinussen)  $\Rightarrow$  geen reden om aan te nemen aan uitgang sinussen nog in dezelfde fase zijn als ingang  $\Rightarrow$  blokgolf kan vervormd eruit komen.
    - Lineair systeem kan een faseverschuiving en amplitudeverandering veroorzaken
  - Niet alle systemen zijn lineair als een sinus aan de ingang wordt aangelegd en een sinus aan de uitgang verschijnt (denk aan PLL)



- **Voorbeelden lineaire systemen**

- Golven zoals geluidsgolven en elektro-magnetische golven
- Elektrische circuits die bestaan uit weerstanden, condensatoren en spoelen
- Elektronische circuits zoals versterkers en filters
- Systemen die beschreven kunnen worden door differentiaalvergelijkingen zoals weerstand-condensator-spoelnetwerken
- Vermenigvuldiging met een constante (versterken – verzwakken van het signaal)
- Signaalveranderingen zoals echo's, resonanties en het wazig maken van een beeld
- Een eenheidsysteem waarbij de uitgang steeds gelijk is aan de ingang
- Het nul-systeem waarbij de uitgang steeds gelijk is aan 0, ongeacht het ingangssignaal
- Differentiatie en integratie, de analoge operaties van een eerste afgeleide, som van discrete signalen
- Kleine verstoringen in een niet-lineair systeem zoals een klein signaal dat wordt versterkt door een transistor
- Convolutie: een wiskundige bewerking waarbij elke waarde in de uitvoer wordt uitgedrukt als de som van de waarden in de input, vermenigvuldigd met een set van wegingscoëfficiënten.
- Recursie: een techniek die vergelijkbaar is met convolutie, met uitzondering van eerder berekende waarden in de uitgang die worden gebruikt als aanvulling op de waarden van de input

- **Voorbeelden niet lineaire systemen**

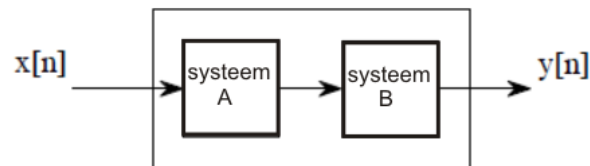
- Systemen die geen statische lineariteit bevatten zoals bijvoorbeeld de relatie tussen vermogen en spanning over een weerstand
- Systemen waarbij aan de ingang een sinus wordt aangelegd en de uitgang deze niet weergeeft zoals piekdetectie, sinus-blokgolfomzettingen, cross-oververvorming, sinusvervormingen (clippen), sweepgeneratie, ...
- Vermenigvuldigen van een signaal door een ander signaal zoals bijvoorbeeld amplitudemodulatie.
- Verzadigings- of saturatieverschijnsel van elektronische versterkers, transformatoren, ...
- Systemen met een bepaalde threshold zoals logische poorten (digitale techniek)

- **Speciale eigenschappen van lineariteit**

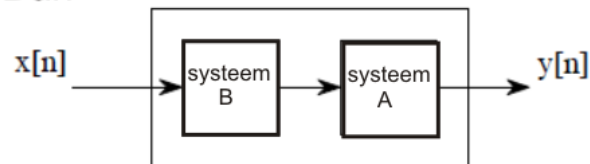
- **Commutatief**

- volgorde van de lineaire systemen in cascade kan worden gewijzigd zonder effect te hebben op de karakteristieken van de volledige cascadeschakeling.
- Vb filter gevolgd door versterker
- Houd echter wel rekening dat elektronische schakelingen niet-lineaire effecten kunnen bevatten dat de volgorde van de schakeling wel belangrijk kan maken, denk bijvoorbeeld aan interferentie, bepaalde DC-offset, ruis, slew rate vervorming, ...)

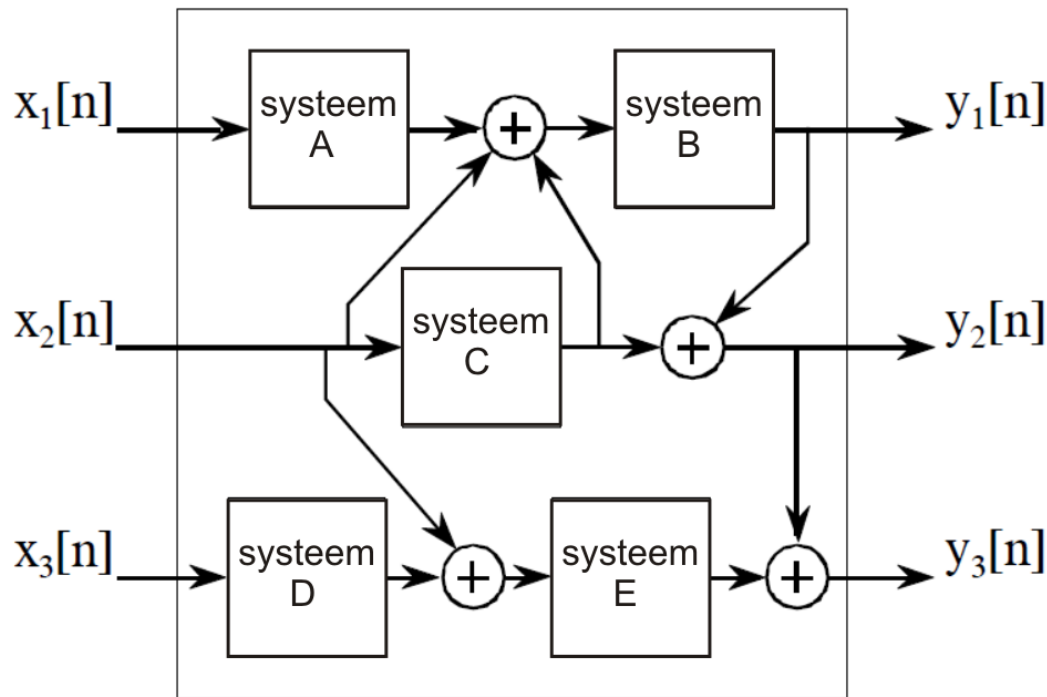
Als



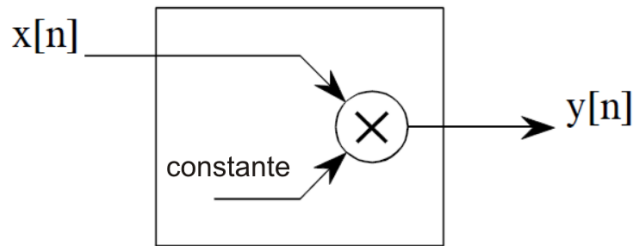
Dan



- **Speciale eigenschappen van lineariteit**
  - Meerdere ingangen en uitgangen

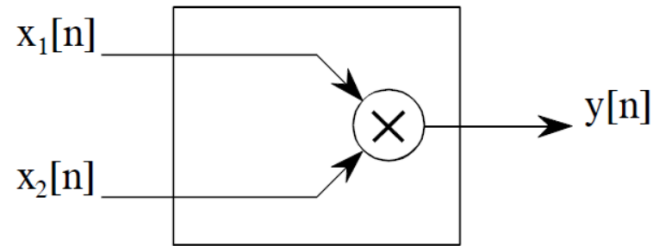


- Speciale eigenschappen van lineariteit
  - Vermenigvuldiging



## Lineair

Vermenigvuldiging met een constante



## Niet-Lineair

Vermenigvuldiging van 2 signalen

- **Speciale eigenschappen van lineariteit**
  - Hoe rekening houden met parasitaire signalen?
    - Vb parasitaire signalen: een DC-offset of thermische ruis, binnen een elektronisch systeem.
    - **Is de toevoeging van deze signalen nu lineair of niet-lineair?**
      - Het antwoord is afhankelijk van waar we deze stoorsignalen afkomstig houden.
        - Als we ze bekijken als signalen die afkomstig zijn van het systeem zelf,
          - dan moeten we ze als niet-lineair beschouwen.
          - De reden hiervoor is dat dan een sinusvormig ingangssignaal geen zuiver sinusvormig uitgangssignaal creëert.
        - stoorsignaal beschouwen als een extern signaal dat via een afzonderlijke ingang wordt ingevoerd in het (multi-input) systeem => kan als een lineair proces beschouwd worden vermits er enkel een optelling van het stoorsignaal door het systeem vereist wordt.

•

- **Synthese**
  - Is enige manier waarop signalen gecombineerd kunnen worden
  - Gebruik maken van “scaling” (vermenigvuldiging met constante) gevolgd door een bepaalde toevoeging
- **Decompositie of ontleding (opsplitsen)**
  - Omgekeerde bewerking van synthese
  - Signaal wordt onderverdeeld in twee of meer additieve componenten
- **Decompositie wordt meer toegepast dan synthese**
  - Oneindig mogelijke decomposities voor een bepaald signaal
  - Vb: getallen 10 en 15
    - Synthese:  $10 + 15 = 25$
    - Decompositie:  $13 + 12$ ;  $8 + 17$ ;  $13,5 + 11,5$ ; ...

•

- **Voorbeeld toepassing decompositie binnen signaalverwerking:**
  - **Spraaksynthese (kunstmatig produceren van menselijke spraak)**
    - Unit selection method
      - Fragmenten menselijke spraak opgenomen en opgeslagen
        - Worden op een intelligente manier aan elkaar verbonden
      - Toepasbaar in call-centers
      - Interactieve Voice Response (IVR)-systemen
        - meestal uitgerust met spraaksynthese (automatisch voorlezen van bestandsinformatie (beursberichten ....))

•



- Voorbeeld toepassing synthese binnen signaalverwerking:
  - Vocoder

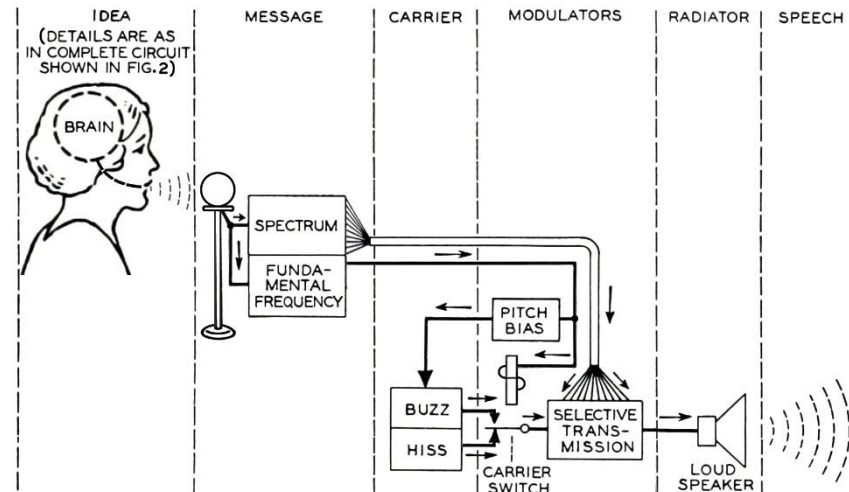
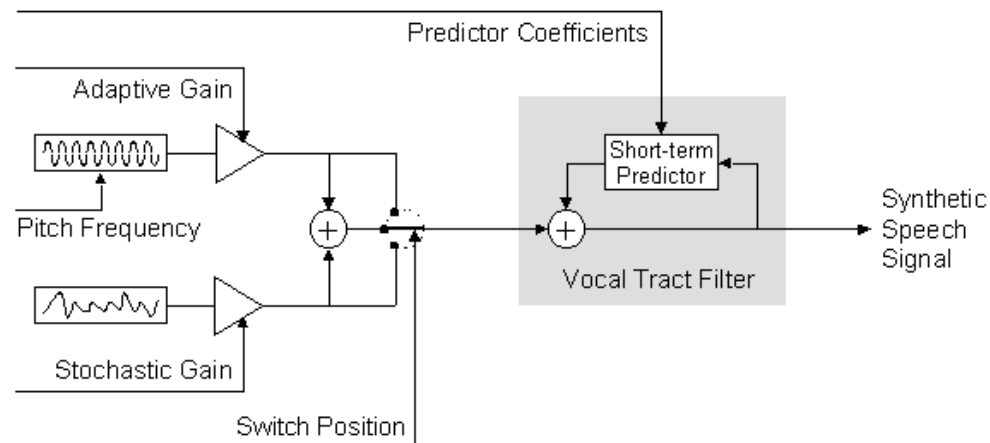
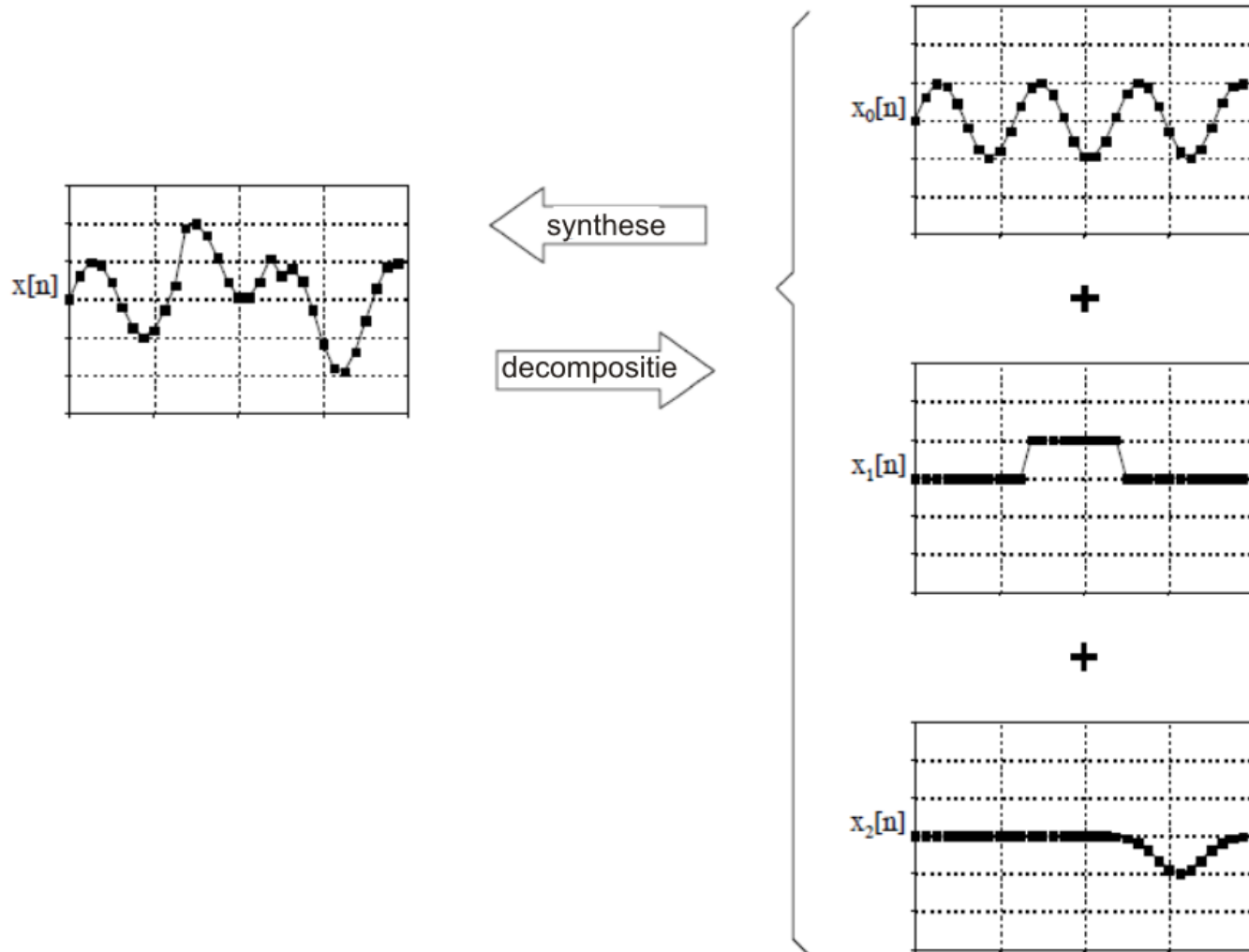


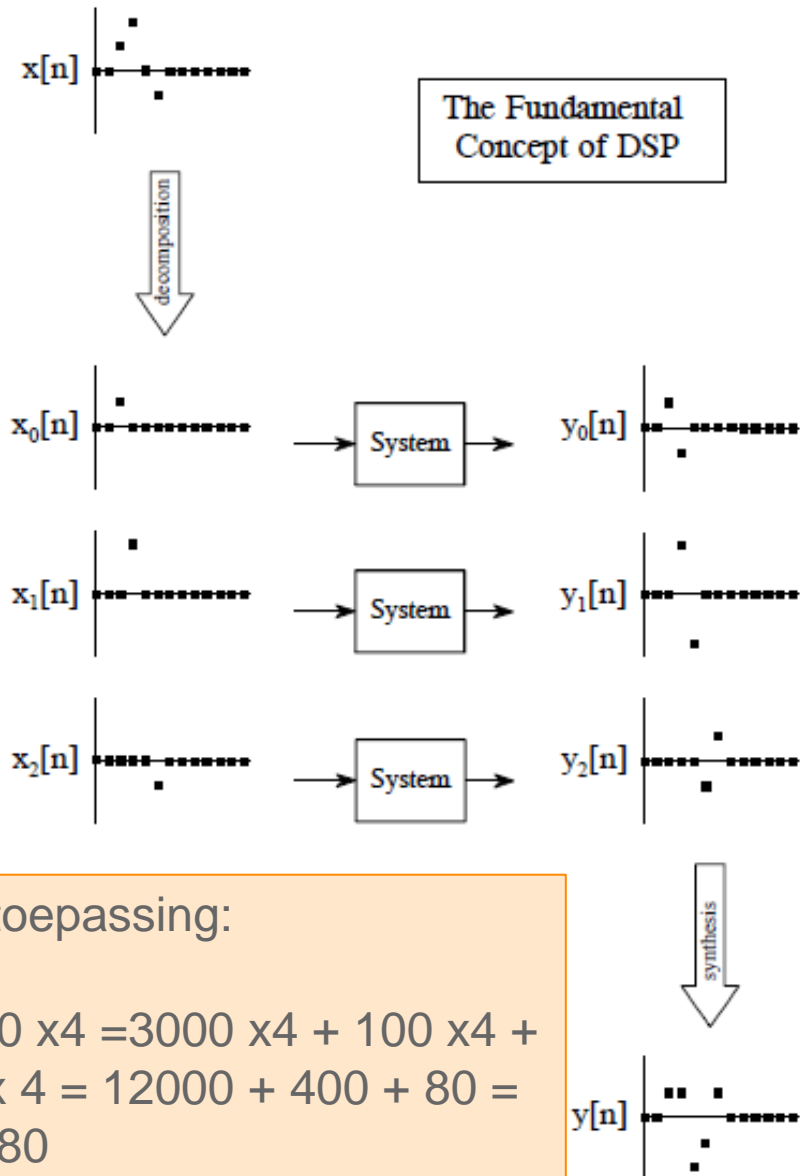
Fig. 7—Schematic circuit of the vocoder.



# Superpositie als basisbouwsteen binnen DSP



# Superpositie als basisbouwsteen binnen DSP



$x[n]$  passeert door een systeem en genereert  $y[n]$   
Input  $x[n]$  kan gedecomposeerd worden tot een aantal eenvoudiger signalen  $x_0[n]$ ,  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$ ,

Ieder ingangsc component passeert individueel het systeem  $\Rightarrow$  resulteert in een aantal uitgangssignalen  $y_0[n]$ ,  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ ,

Uiteindelijk uitgangssignaal  $y[n]$  is de som van de uitgangssignalen.

In plaats van te zoeken hoe signalen kunnen veranderd worden door een ingewikkeld systeem is het gemakkelijker het signaal op te splitsen en te laten doorlopen via eenvoudiger systemen

Vb toepassing:

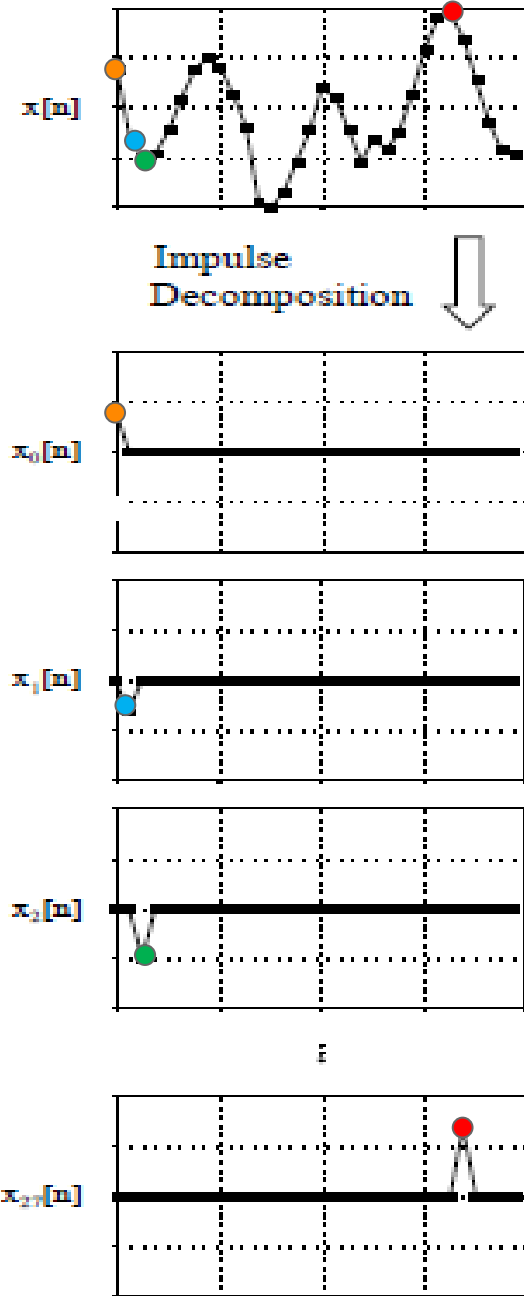
$$3120 \times 4 = 3000 \times 4 + 100 \times 4 + 20 \times 4 = 12000 + 400 + 80 = 12480$$

- **Doel** : ingewikkeld systeem vervangen door vele eenvoudige systemen
- **Manieren voor decompositie**
  - Impulsdecompositie
  - Step decompositie
  - Even/oneven decompositie (even/odd decompositie)
  - Interlaced decompositie
  - Fourierdecompositie

# Decomposities

- **Impulsdecompositie**

- N-sample signaal opsplitsen in N component signalen
- Ieder component signaal
  - bestaat uit N samples.
  - Telkens één bepaalde sample uit het N-samplesignaal met de andere samplewaarden op 0.
- Impuls = een enkel punt dat niet 0 is in een string van nullen

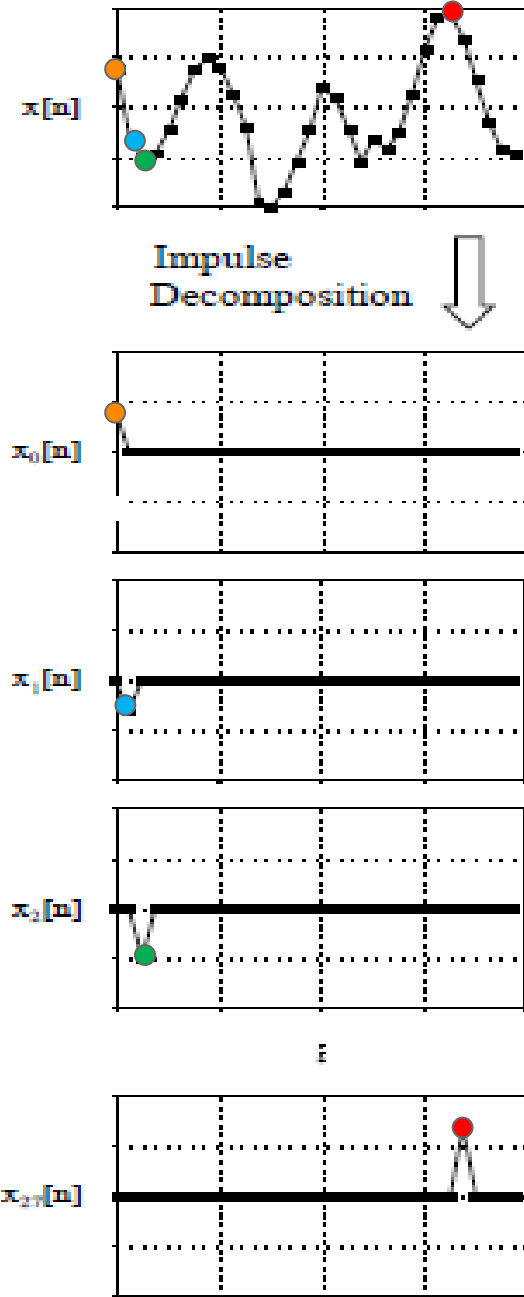


# Decomposities

- **Impulsdecompositie**

- Voordelen impulsdecompositie

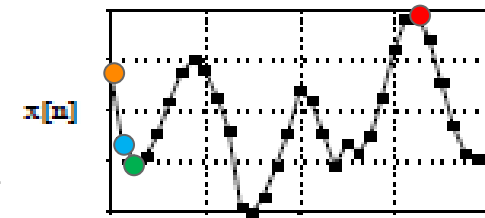
- Een N-sample signaal wordt opgesplitst in N component signalen.
- Signalen kunnen onderzocht worden per samplestap
- Systemen kunnen onderzocht worden hoe ze reageren op impulsen => weten hoe systeem reageert op een bepaalde impuls => systeemoutput kan berekend worden voor een bepaalde input = **convolution**



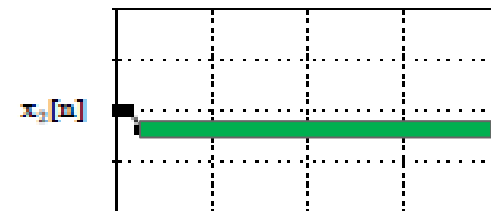
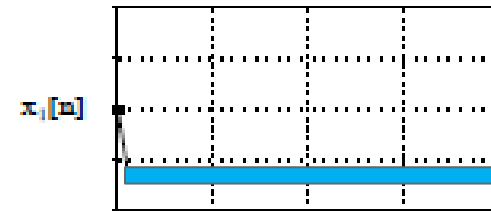
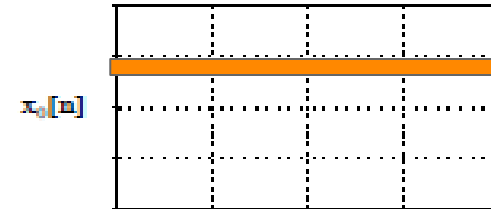
# Decomposities

- **Stapdecompositie**

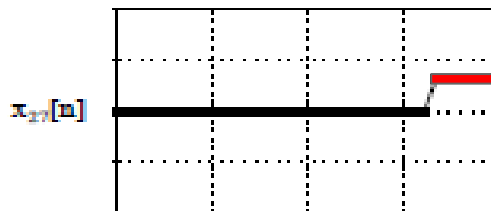
- N-sample signaal opsplitsen in N component signalen
- Ieder component signaal
  - bestaat uit N samples.  $(x_0[n] + x_1[n] + \dots + x_{n-1}[n])$
  - $x_0[n]$  bestaat uit N samples op het niveau van  $x_0[n]$
  - Alle andere component signalen: sampleniveau blijft 0 tot de samplewaarde van het component signaal, dan niveau van betreffende sample - het niveau van de voorgaande tot einde
  - Vb  $x_5[n] \Rightarrow 0$  van  $x_0[n]$  tot  $x_4[n]$ , niveau  $x_5[n] - x_4[n]$  vanaf  $x_5[n]$  tot einde
- Voordeel impulsdecompositie
  - Signalen kunnen onderzocht worden per samplestap
  - Beschrijft signalen aan de hand van het verschil tussen opeenvolgende samples
  - Beschrijft hoe systemen een respons geven op een verandering van het ingangssignaal



Step  
Decomposition



⋮



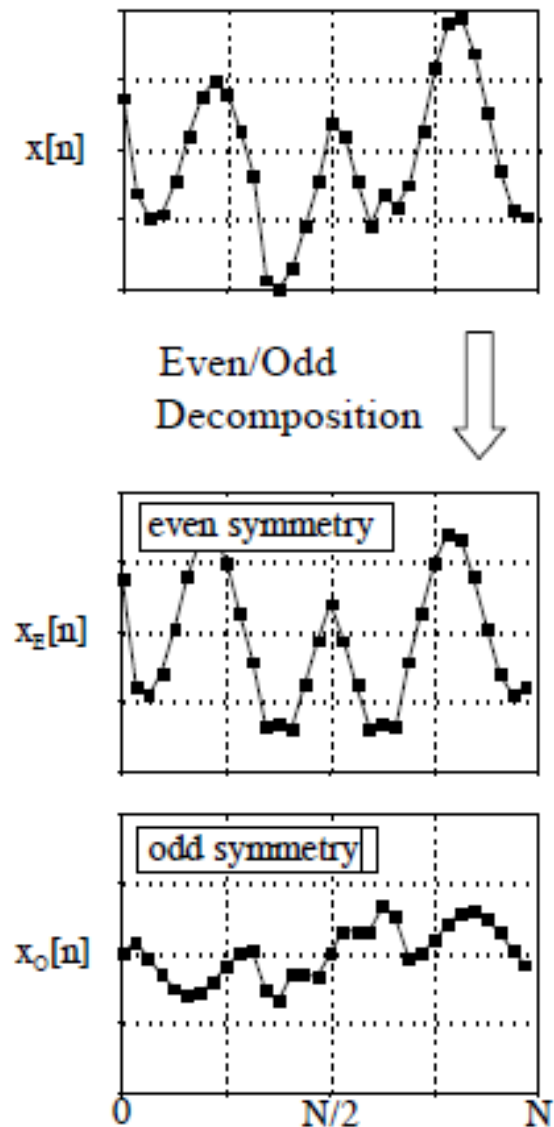
⋮

# Decomposities

- **Even/oneven decompositie**
- Signaal opsplitsen in 2 componentensignalen (één met even symmetrie en één met oneven symmetrie)
  - Signaal indexen tussen 0 en N-1
  - N-punt signaal heeft een even symmetrie als het een spiegelbeeld heeft rond punt N/2 (dit is sample  $N/2 - \frac{1}{2}$ )
    - $x[N/2 + 1] = x[N/2 - 1]$
    - $x[N/2 + 2] = x[N/2 - 2]$
  - N-punt signaal heeft oneven symmetrie als rond het center dezelfde magnitude maar tegenovergesteld in teken]
    - $x[N/2 + 1] = -x[N/2 - 1]$
    - $x[N/2 + 2] = -x[N/2 - 2]$

$$x_E[n] = \frac{x[n] + x[N-n]}{2}$$

$$x_O[n] = \frac{x[n] - x[N-n]}{2}$$



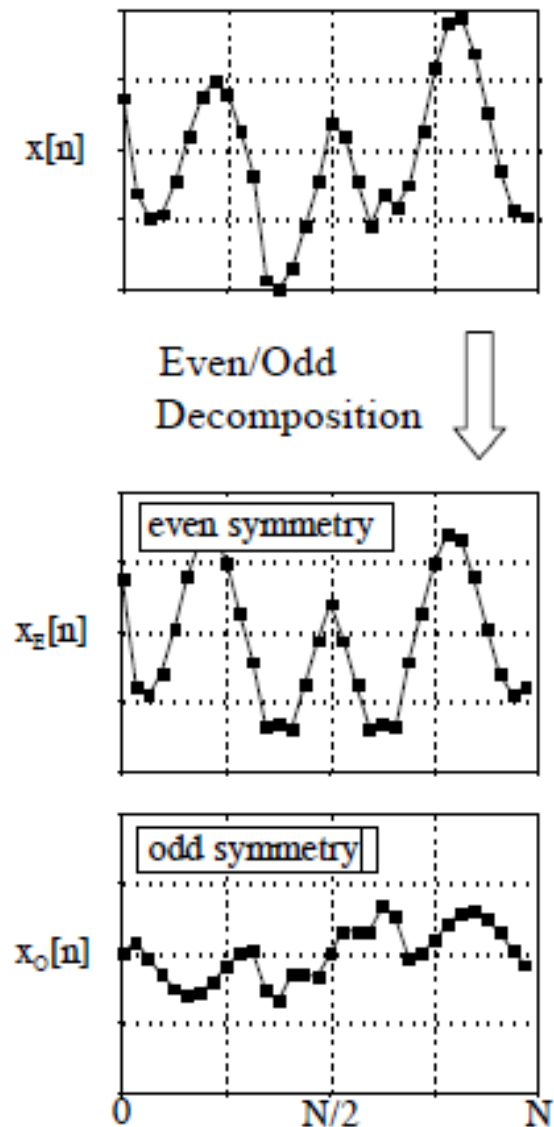


# Decompositions

- **Even/oneven decompositie**
- Maakt deel uit van circulaire symmetrie (belangrijk concept binnen DSP)
  - Gebaseerd op de theorie om het einde van het signaal te verbinden met het begin van het signaal  $x[N-1]$  ligt naast  $x[0]$
  - Zijn eigenlijk twee punten van symmetrie aanwezig :  $x[0]$  en  $x[n/2]$ 
    - Even signaal
      - Symmetrie rond  $x[0] \Rightarrow x[1] = x[N-1]$  enz..
      - $x[0]$  en  $x[N/2]$  zijn gelijk aan de overeenstemmende punten in het originele signaal
    - Oneven signaal
      - Punt  $x[0]$  en punt  $x[N/2]$  hebben steeds een waarde 0.

$$x_E[n] = \frac{x[n] + x[N-n]}{2}$$

$$x_O[n] = \frac{x[n] - x[N-n]}{2}$$

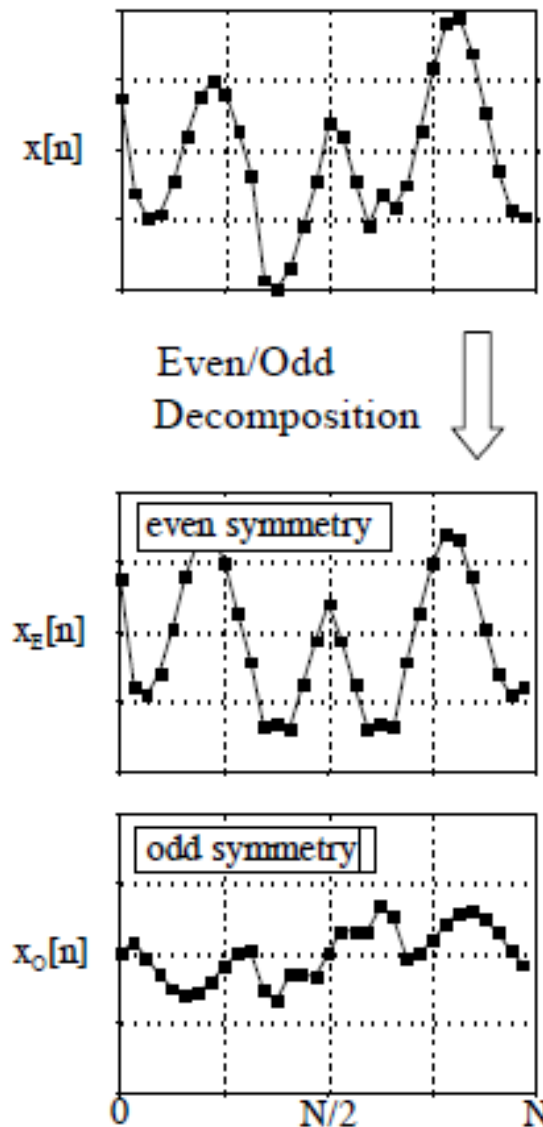


# Decomposities

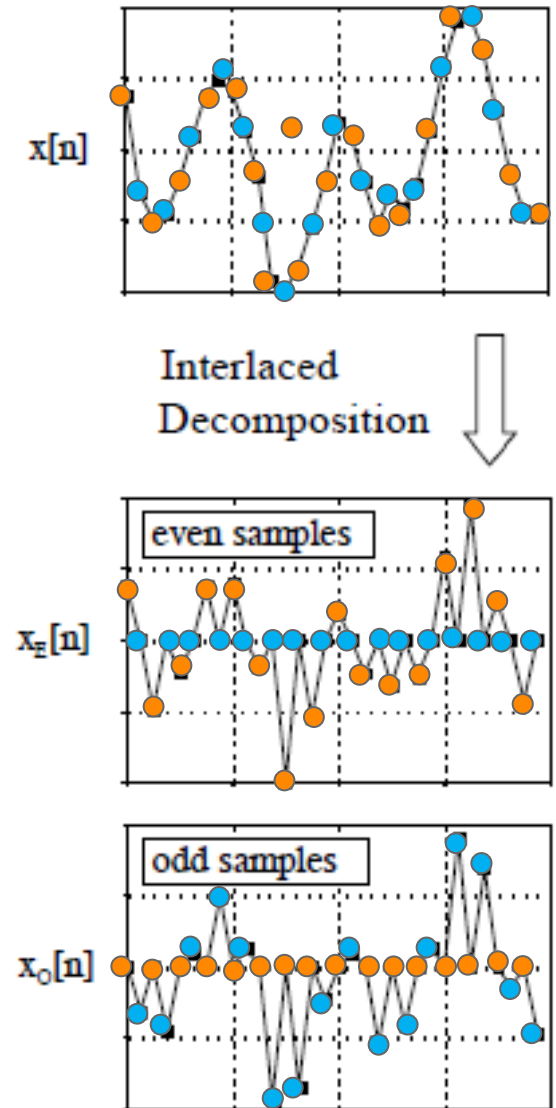
- **Even/oneven decompositie**
- Waarom circulaire symmetrie?
  - Reden hiervoor is een DSP-techniek die Fourier Analyse noemt
    - Wiskunde achter Fourier analyse bekijkt het signaal alsof het circulair is
    - Voorlopig belangrijk te weten dat onderstaande vergelijkingen gebruikt kunnen worden voor decompositie vermits de even en oneven delen samengeteld kunnen worden om het originele signaal te reconstrueren

$$x_E[n] = \frac{x[n] + x[N-n]}{2}$$

$$x_O[n] = \frac{x[n] - x[N-n]}{2}$$



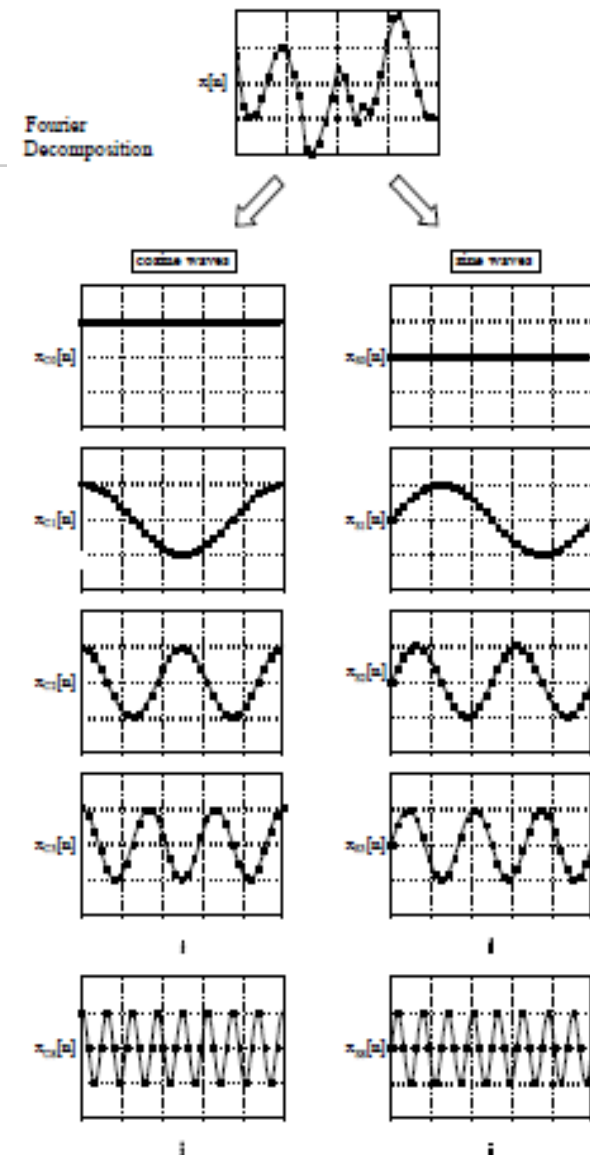
- **Interlaced Decompositie**
- Opsplitsen signaal in even en oneven component
  - Vinden even component: alle oneven samplenummers op 0 zetten
  - Vinden oneven component: alle even signalen op 0 zetten
- **Interlaced decompositie is de basis voor de Fast Fourier Transformatie (FFT)** = zeer belangrijk binnen DSP
  - FFT is een groep van algoritmen (ontwikkeld in de jaren '60) om de verwerkingstijd voor Fourier decompositie te verminderen
  - FFT vermeerderd de snelheid met een factor honderd tot duizend(en)
- Strategie FFT
  - Reduceert het signaal tot elementaire componenten via herhaaldelijk gebruik te maken van de interlaced transformaties
  - Berekent de Fourier decompositie van de individuele componenten
  - Synthyseert de antwoorden samen in een map en geeft het finale antwoord



# Decomposities

- **Fourier Decompositie**

- Niet zo vanzelfsprekend; zeer wiskundig model
- Ieder N-punt signaal kan gedecomposeerd worden in N/2-signalen, de helft van hun zijn sinus-signalen, de andere helft zijn cosinussignalen
- De laagste frequentiecosinusgolf ( $x_{co}[n]$ ) maakt 0 complete cycli over de N-samples => DC-signaal
- De volgende cosinus-componenten maken één, twee en 3 volledige cyclussen over de N samples
- Analooog voor sinuscomponent
- Vermits de frequentie is vast => het enige dat kan veranderen bij verschillende signalen die moeten gedecomposeerd worden is de amplituden van ieder van de sinus- en cosinusgolven

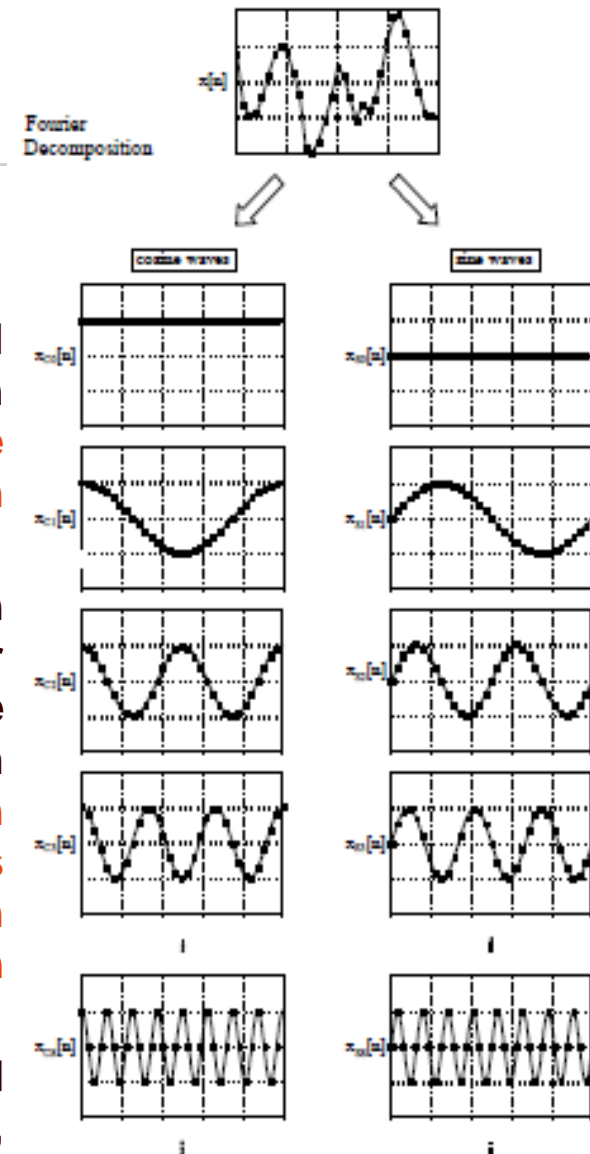


# Decomposities

- **Fourier Decompositie**

- **Belang Fourier Decompositie**

- Een breed scala van signalen zijn samengesteld uit verschillende sinuscomponenten (denk aan muziek). **Fourier decompositie geeft een directe analyse van de informatie die in deze signalen vervat zit**
    - Sinusinput in een lineair systeem levert een sinusoutput op => systemen kunnen hier bekeken worden op hoe amplitude en fase veranderen van sinussen die door het systeem passeren **Vermits een ingangssignaal kan opgesplitst worden in sinussen en de kennis beschikbaar is hoe het systeem reageert op een sinusinput => output van systeem kan worden gevonden**
    - Fourier decompositie is de basis voor een breed en krachtig wiskundig gebied: Fourier analyse, Laplace en Z-transformatie **De meest geavanceerde DSP-algoritmes zijn gebaseerd op een bepaald aspect van deze technieken**



# Bepaal de oneven decompositie volgens de N-1-methode

- Gegeven de samples:

- $x[0] = 2$
- $x[1] = -4$
- $x[2] = 9$
- $x[3] = 4$
- $x[4] = -6$
- $x[5] = -4$
- $x[6] = -4$
- $x[7] = 2$

Signaal indexen tussen 0 en N-1

N-punt signaal heeft een even symmetrie als het een spiegelbeeld heeft rond punt  $N/2 - 1/2$

$$x[N/2 + 1] = x[N/2 - 1]$$

$$x[N/2 + 2] = x[N/2 - 2]$$

$$x_E[n] = \frac{x[n] + x[N-n]}{2}$$

$$x_O[n] = \frac{x[n] - x[N-n]}{2}$$