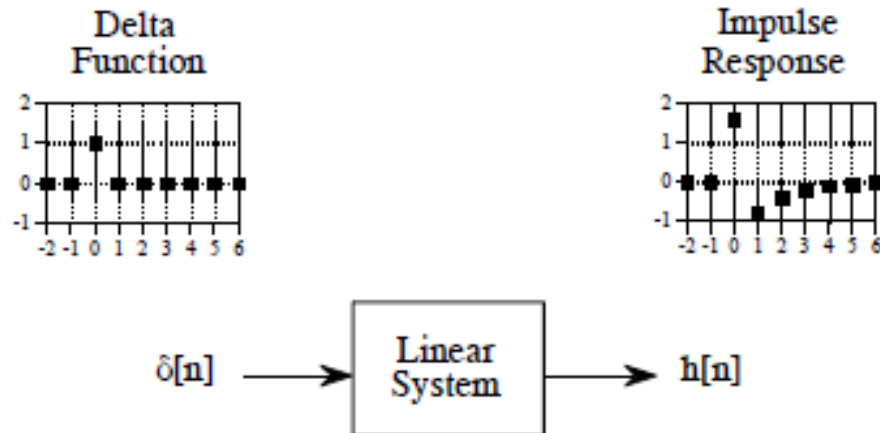


4 – Convolutie

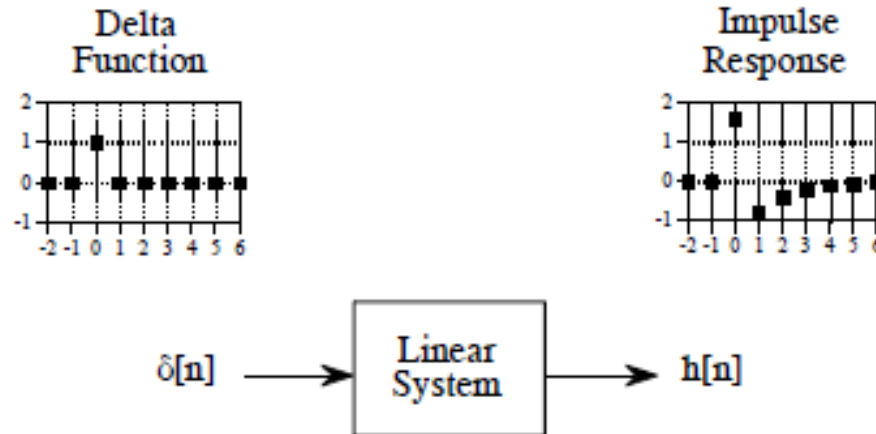
Ing. Patrick Van Houtven

- Is een wiskundige manier om 2 signalen te combineren om een derde signaal te vormen
- Is een zeer belangrijke techniek binnen DSP
 - Door gebruik te maken van impulsdecompositie kunnen systemen beschreven worden via de impuls responsie
 - Convolutie zorgt voor het wiskundig kader aangaande DSP

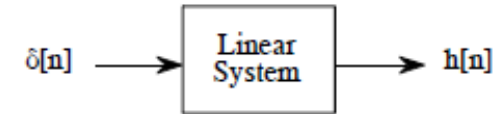
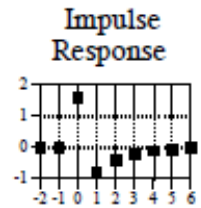
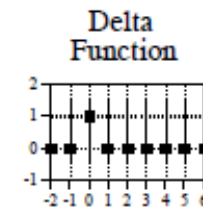
- Delta functie en impuls response
 - $\delta[n]$ = delta functie (unit impulse)
 - Genormaliseerde impuls, $x[0]$ heeft een waarde gelijk aan 1, en alle andere samplewaarden hebben een waarde gelijk aan 0.



- Delta functie en impuls responsie
 - **Impuls responsie**
 - $h[n]$ (impulsresponsie) is het signaal dat het systeem verlaat als er een delta functie aan de ingang wordt aangelegd.
 - $f[n]$ is het symbool dat gebruikt wordt voor impulsresponsie van een digitaal filter



Convolutie

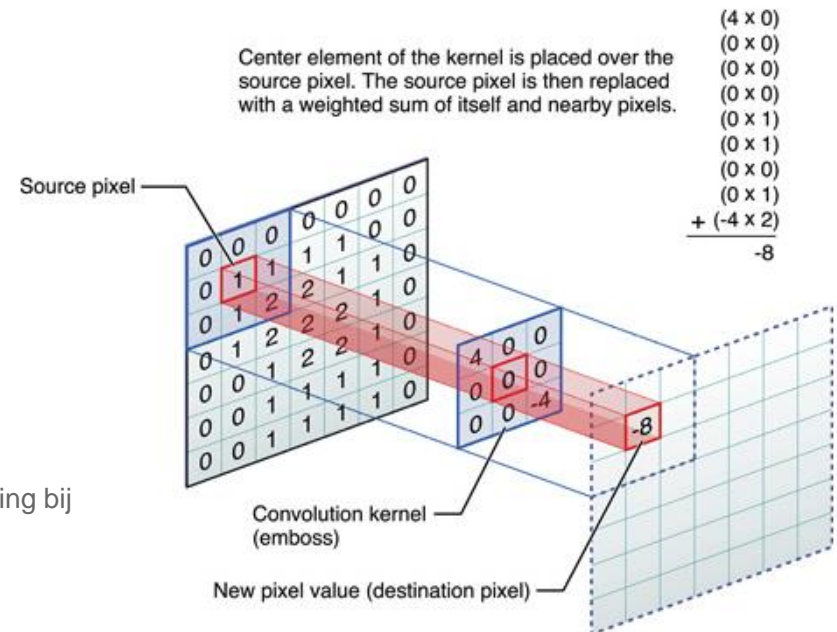


- Delta functie en impuls responsie
 - Impuls responsie
 - Een impuls kan voorgesteld worden als een shifted en scaled delta functie
 - Beschouw een signaal $a[n]$, bestaande uit allemaal nullen behalve uitgang 8 (deze heeft waarde -3) = hetzelfde als delta functie met een verschuiving naar rechts van 8 bits met een vermengvuldiging van -3.
 - Formulevorm: $a[n] = -3 \delta[n-8]$ (notatie veel gebruikt bij DSP)
 - Als $\delta[n]$ resulteert in $h[n] \Rightarrow -3 \delta[n-8]$ resulteert in $-3 h[n-8]$
 - De uitgang is een versie van impulsresponsie dat verschoven is en geschaald in dezelfde verhouding als de delta functie aan de ingang
 - Als je de impulsresponsie kent van een systeem, weet je hoe dit systeem reageert op een impuls.

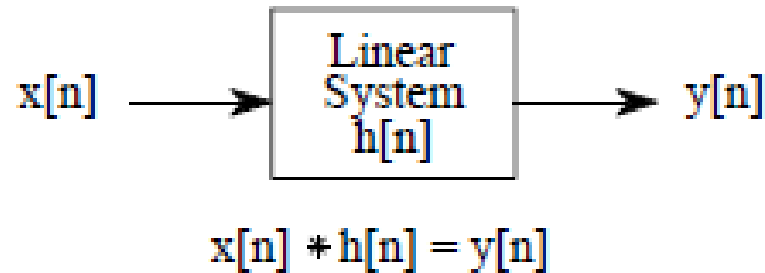
- Hoe verandert een systeem een ingangssignaal in een uitgangssignaal?
 1. Ingangssignaal wordt gedecomposeerd in een set van impulsen
 - Ieder impuls kan aanzien worden als een geschaald en verschoven delta functie
 2. Het resultaat van iedere impuls is een geschaald en verschoven versie van de impulsresponsie
 3. Het uiteindelijke outputsignaal kan gevonden worden door de gevonden geschaalde en verschoven impulsresponsies op te tellen
- Als we de impulsresponsie van een systeem kennen, kunnen we berekenen wat de output van dit systeem zal zijn voor elk mogelijk ingangssignaal.

- Systeem is een filter => impulsresponsie wordt de (filter) kernel of de convolution kernel genoemd
- Systeem doet aan beeldverwerking => impulsresponsie wordt de point spreadfunctie genoemd.
- Convolutie is een wiskundige bewerking zoals een optelling
 - Optelling maakt optelsom van twee getallen en produceert zo een derde getal
 - Convolutie neemt twee signalen en produceert een derde signaal
- In lineaire systemen wordt convolutie gebruikt om de relatie te beschrijven tussen drie signalen:
 - Ingangssignaal
 - Impulsresponsie
 - uitgangssignaal

Voorbeeld convolutie (gewogen som toepassing bij beeldcorrectie)

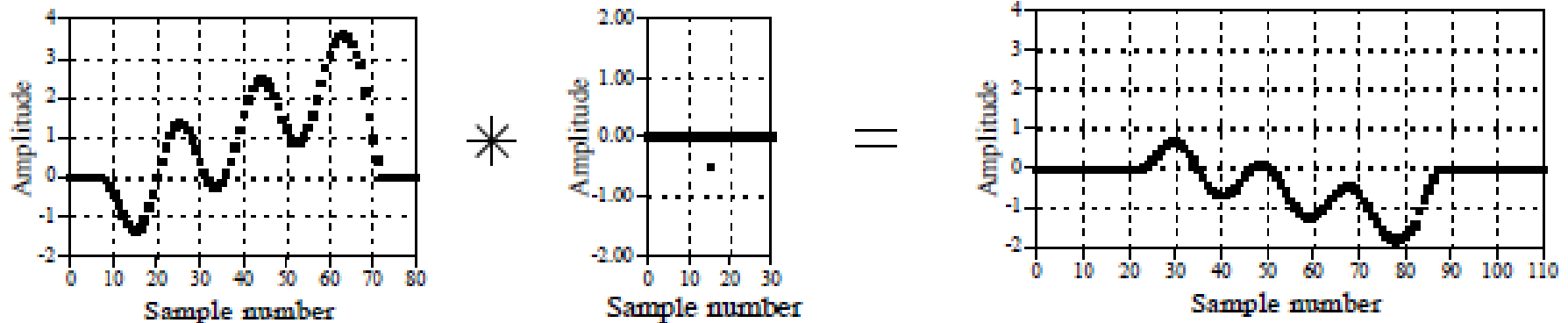


- Notaties als convolutie wordt gebruikt bij een lineair systeem:

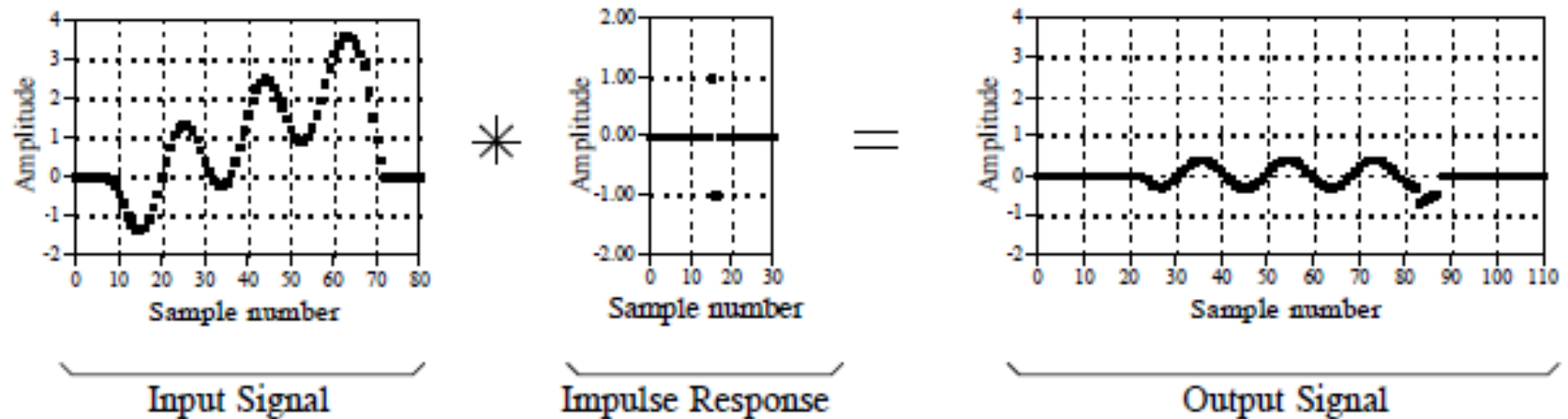


- Convolutie wordt aangegeven door een “*”

a. Inverting Attenuator



b. Discrete Derivative



- Ingangssignalen 81 samples lang; iedere impuls is 31 samples lang
- De wiskunde achter convolutie geeft geen restrictie op de lengte van van de signalen, maar specificeert de lengte van het uitgangssignaal
- De lengte van het outputsignaal is gelijk aan: lengte ingangssignaal + lengte impulsresponsie – 1.
- In ons voorbeeld: $81 + 31 - 1 = 111$ samples lang
 - Input loopt van sample 0 tot 80
 - Impulsresponsie loopt van sample 0 tot 30
 - Uitgangssignaal loopt van sample 0 tot 110

Voorbeeld :



- Stel:
- $x[0] = 4$ $a[0] = -1$
- $x[1]=3$ $a[1] = 2$
- $x[2]= 9$

Voorbeeld :



- Stel:
- $x[0] = 4$ $a[0] = -1$
- $x[1]=3$ $a[1] = 2$
- $x[2]= 9$

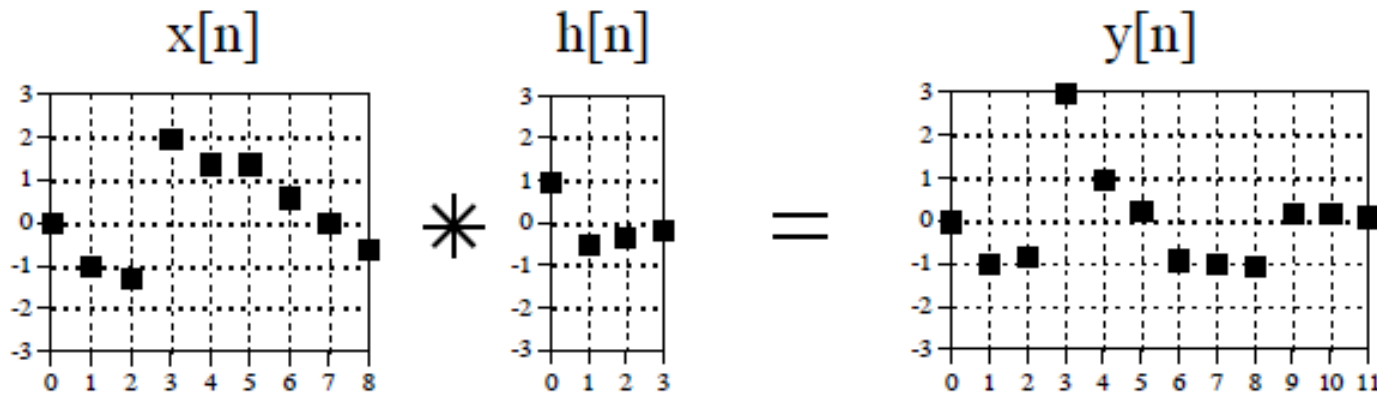
	B0	B1	B2	B3
Y[x0]	-4	8	0	0
Y[x1]	0	-3	6	0
Y[x2]	0	0	-9	18
Y[n]	-4	5	-3	18



- **Gedetailleerde wiskunde voor convolutie in DSP**
 - **Bekijken van uit het gezichtspunt van het ingangssignaal**
 - Wiskunde houdt in het analyseren hoe iedere sample in het ingangssignaal bijdraagt aan een groot aantal punten in het uitgangssignaal
 - Gezichtspunt is interessant vermits het een conceptueel inzicht geeft hoe convolutie zich verhoudt naar DSP
 - **Bekijken vanuit het gezichtspunt van het uitgangssignaal**
 - Wiskunde onderzoekt hoe elke sample in het uitgangssignaal informatie ontvangen heeft van de vele punten in het ingangssignaal.
 - Dit gezichtspunt beschrijft de wiskunde achter convolutie.
- **Vernoemde gezichtspunten zijn 2 verschillende manieren van denken over éénzelfde wiskundige operatie**
- **Beide gezichtspunten typeren één van de moeilijkste taken binnen DSP: het maken van een conceptueel geheel dat past binnen de wiskunde om ideeën te communiceren**

Convolutie : binnenzijde van het Algorithme

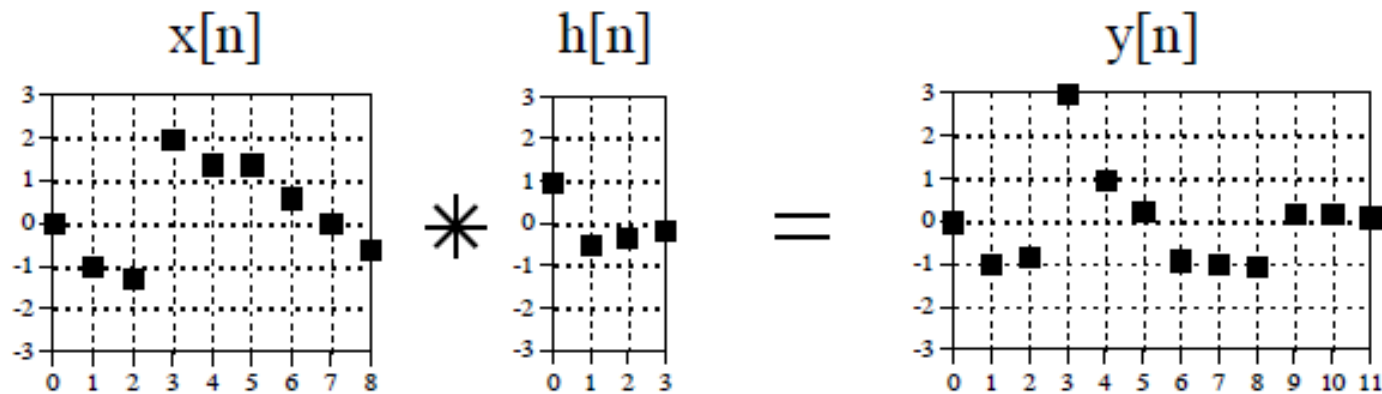
- Stel een 9-punts ingangssignaal $x[n]$ dat door een systeem met een 4-punts impulsresponsie $h[n]$ wordt gestuurd
- Gevolg: $9 + 4 - 1 = 12$ punt uitgangssignaal $y[n]$
- $x[n]$ is convolved met $h[n]$ om $y[n]$ te produceren



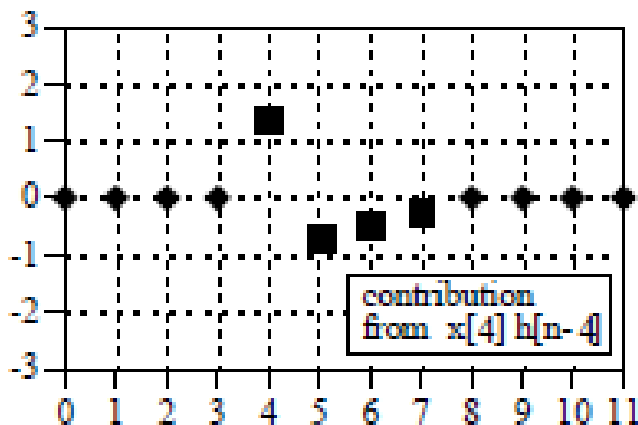
- Principe: decomposeer de ingang \Rightarrow deze door het systeem laten lopen \Rightarrow uitgangssignaal produceren

Convolutie : binnenzijde van het Algorithme

- Bekijken sample $x[4]$ in detail: $x[4]$ heeft een waarde 1,4



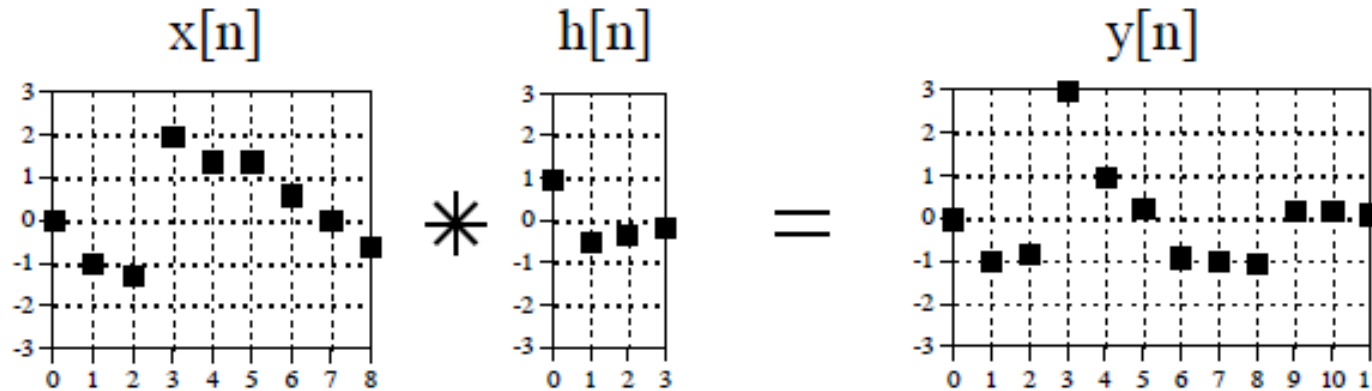
- Signaal decompositeren \Rightarrow impulsresponsie : $1,4\delta[n-4]$
- Systeem passeren \Rightarrow resultaat : $1,4h[n-4]$



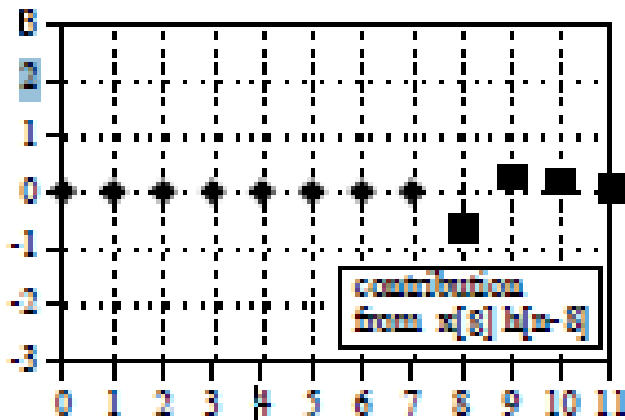
= $h[n]$ x 1,4 en 4 sampels naar rechts verschoven

Convolutie : binnenzijde van het Algorithme

- Bekijken sample $x[8]$ in detail: $x[8]$ heeft een waarde $-0,5$



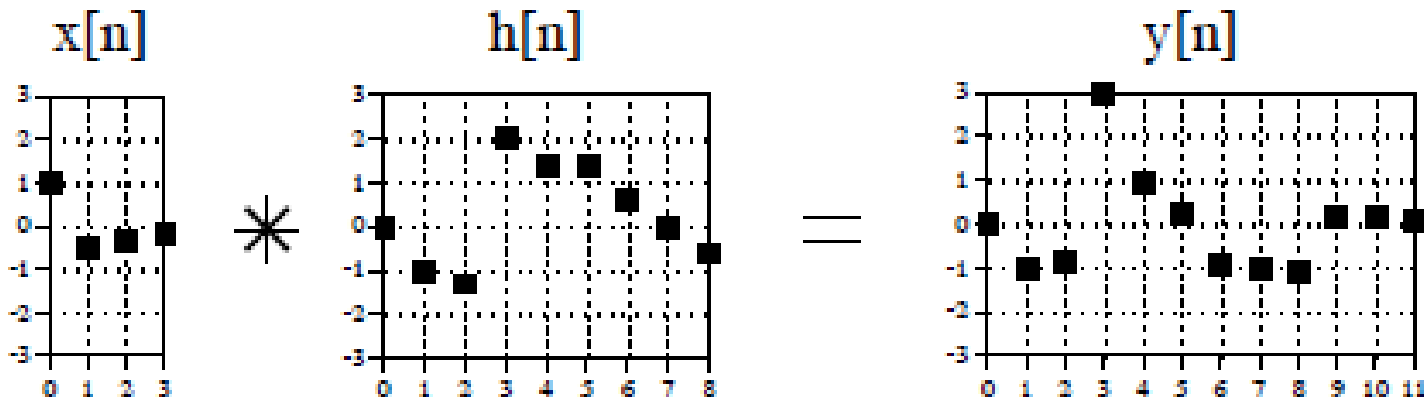
- Signaal decompositeren \Rightarrow impulsresponsie : $-0,5\delta[n-8]$
- Systeem passeren \Rightarrow resultaat : $-0,5h[n-8]$



$= h[n] \times -0,5$ en 8 sampels naar rechts verschoven

Convolutie : inputzijde van het Algoritme

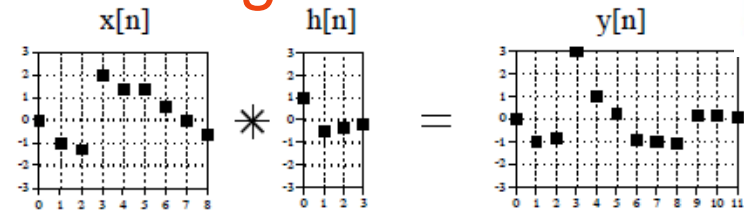
- Stel een 4-punts ingangssignaal $x[n]$ dat door een systeem met een 9-punts impulseresponsie $h[n]$ wordt gestuurd
- Gevolg: $4 + 9 - 1 = 12$ punt uitgangssignaal $y[n]$
- $x[n]$ is convolved met $h[n]$ om $y[n]$ te produceren



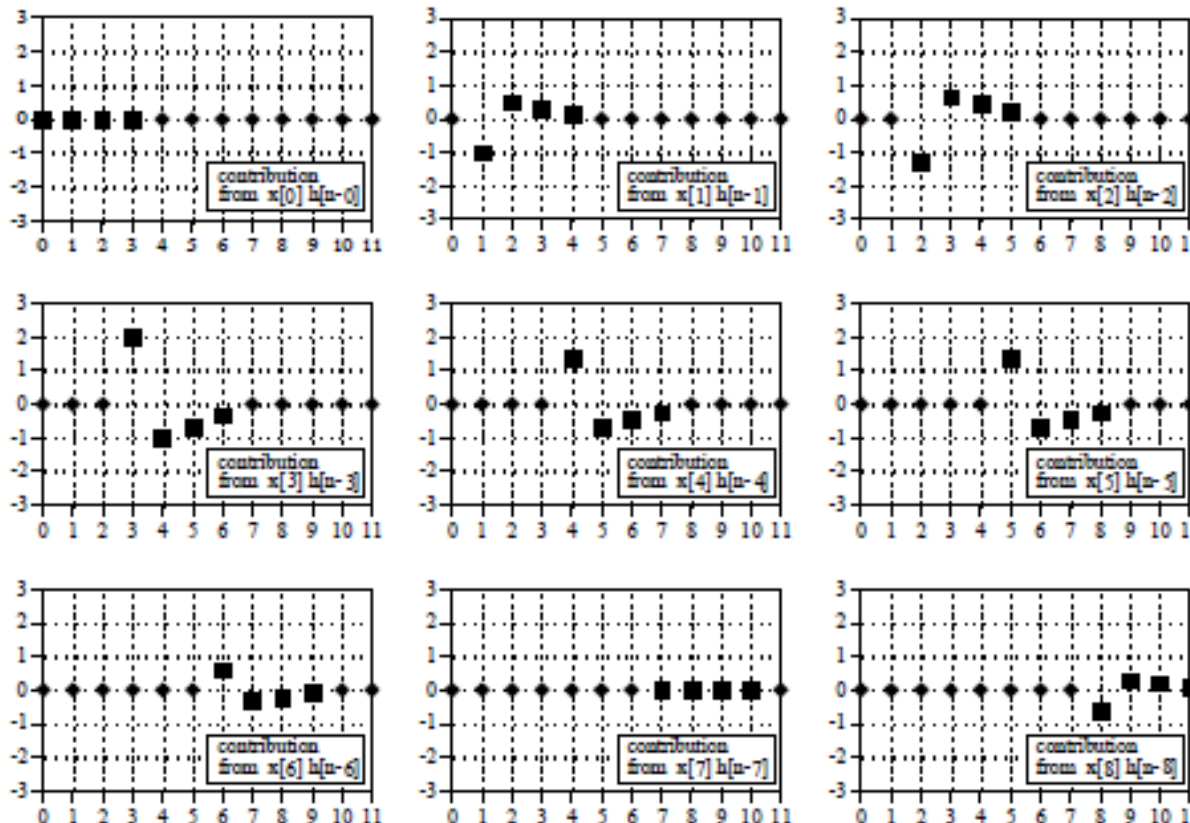
- Uitgang is hetzelfde als voorgaande !

- Tweede gezichtspunt
 - Kijken naar de individuele samples in het uitgangssignaal en zoeken naar de overeenkomstige punten in de ingang.
 - Belangrijk vanuit wiskundig standpunt
 - $y[n]$ = bepaalde combinatie van andere variabelen
 - Sample n in het uitgangssignaal is gelijk aan één combinatie van verschillende waarden in het ingangssignaal en de impulsresponsie
 - Vereist kennis van hoe iedere sample onafhankelijk van alle andere samples kan worden berekend in het outputsignaal

Convolutie: outputzijde van het algoritme

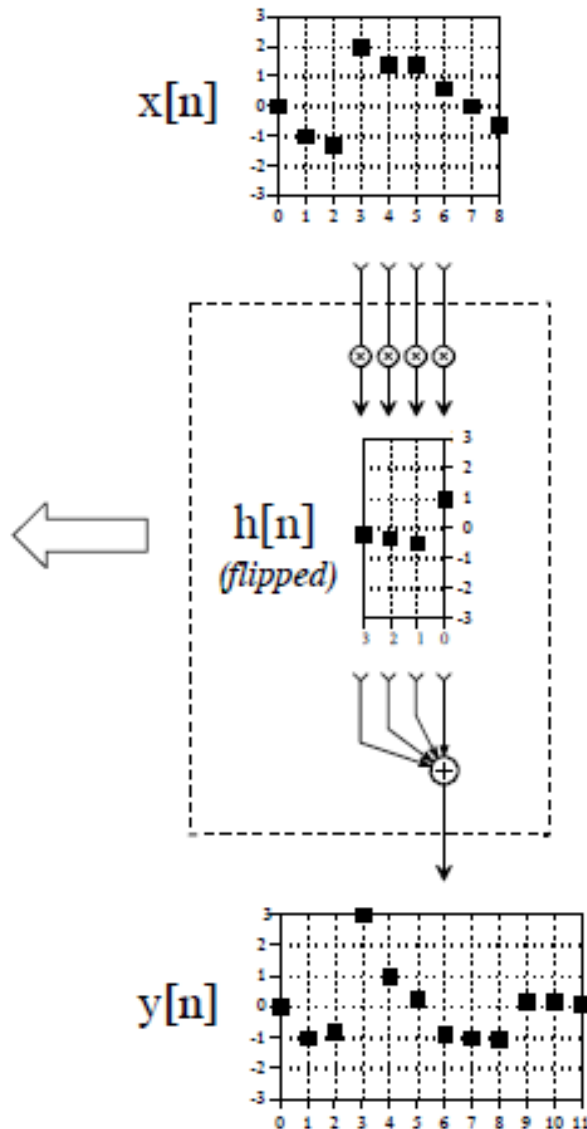


- Voorbeeld: bepalen van $y[6]$
 - Welk van de 9 outputcomponenten bevat een niet-nul sample op de 6^{de} positie => 4 v/d 5 voldoen hieraan ($x[3]$, $x[4]$, $x[5]$ en $x[6]$)
 - $y[6] = x[3]h[3] + x[4]h[2] + x[5]h[1] + x[6]h[0]$



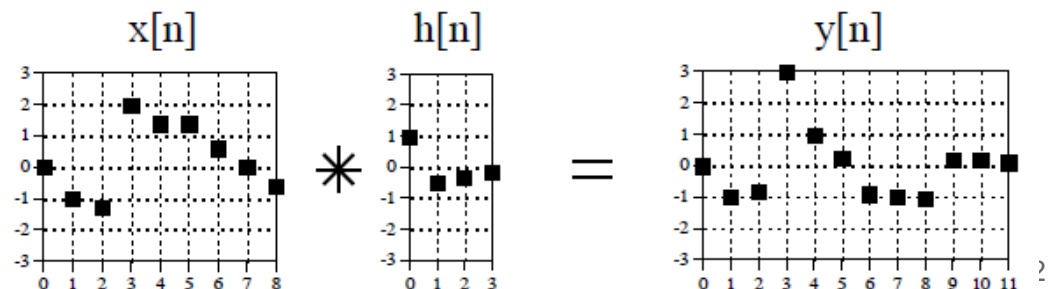
Convolutie: outputzijde van het algoritme

Flow



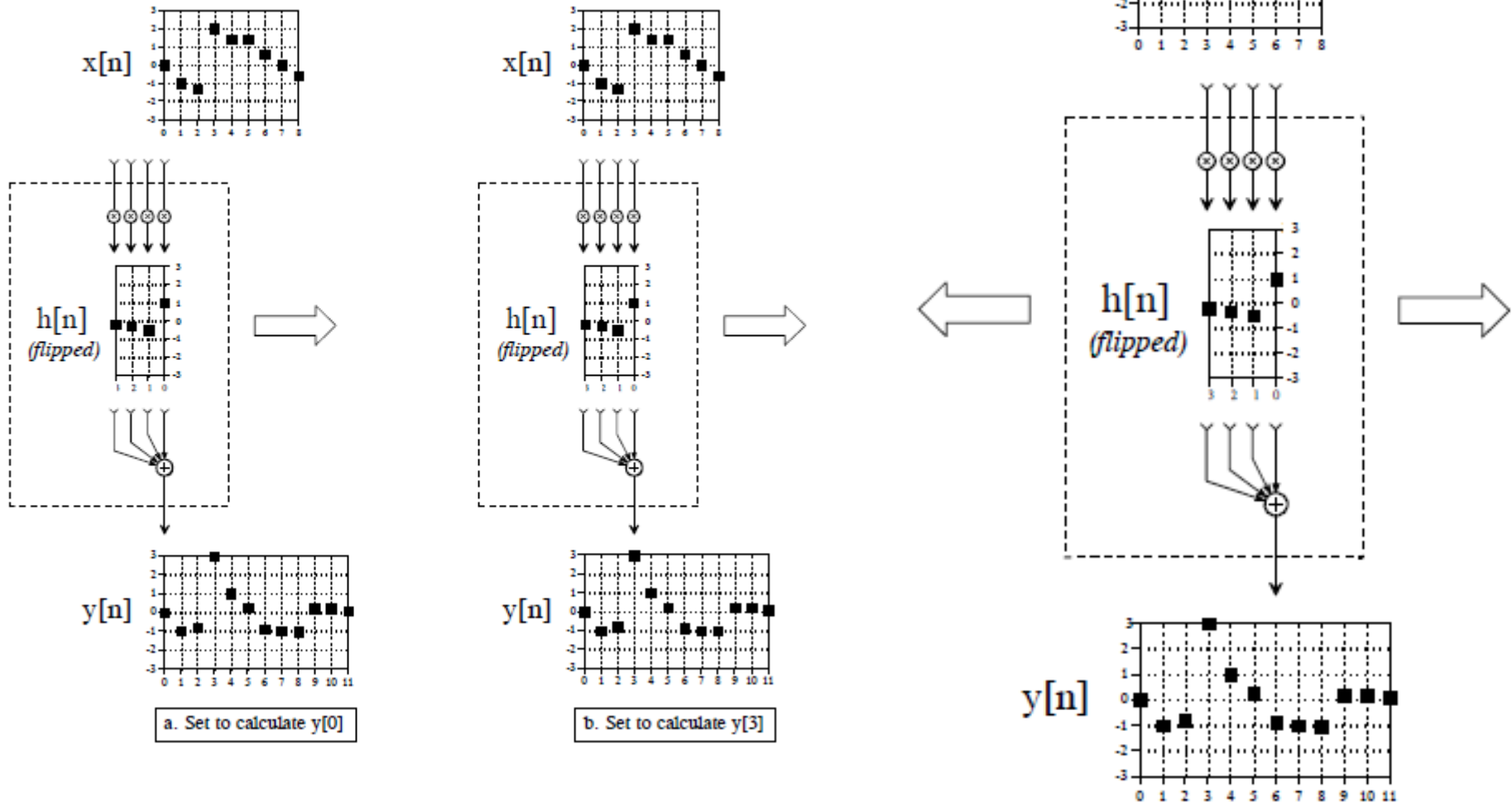
$$y[6] = x[3]h[3] + x[4]h[2] + x[5]h[1] + x[6]h[0]$$

- Impulsresponsie $h[n]$ is in dit geval omgekeerd gebracht ($x[0]$ van achter en $x[3]$ van voor => flipped genoemd)
- Berekenen $y[7]$ => convolutie-systeem verplaatst zich één plaats naar rechts => uitgang voor de juiste uitgang van het systeem
- Binnen het systeem verbindingen naar inputsampels volgens wat nodig is voor het resultaat te bepalen



Convolutie: outputzijde van het algoritme

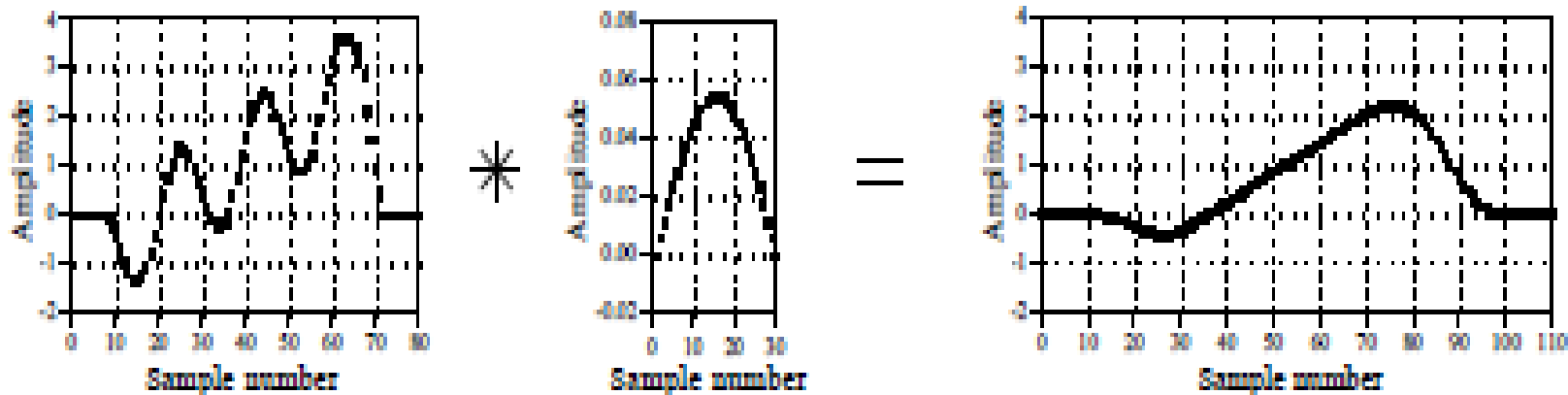
Flow



Padding = extra samples toevoegen met nullen

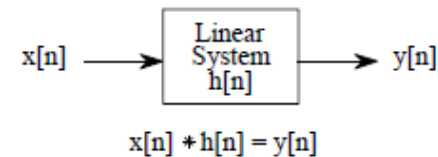
- Ingangssignaal LDF is de som van 2 componenten:
 - 3 cycli van een sinusgolf (stellen een hoge frequentie voor) + langzaam stijgende helling (samengesteld uit lage frequenties)
- De impulsrespons voor de LDF is een vloeiende boog → enkel langzaam veranderende helling golfvorm wordt doorgegeven aan de uitgang
- Ingangssamples 81; impulsresponsie 31 samples (normaal impulsresponsie veel korter dan ingangssamples)

a. Low-pass Filter



Convolutie voor een hoogdoorlaatfilter

- Ingangssignaal HDF is de som van 2 componenten:
 - 3 cycli van een sinusgolf (stellen een hoge frequentie voor)
- De impulsrespons voor de HDF laat enkel de hogere frequenties door



b. High-pass Filter

