# Videosessie

matrices

AP HOGESCHOOL ANTWERPEN

AP.BE

# Matrices

- Waarom matrices?

  - Weergeven van grootheden als rijen van getallen (of symbolen)

  - Elk punt op een scherm is “beweegbaar” door gebruik te maken van matrices => transformaties mee uitvoerbaar

# Matrices

Beschouw een foto in grijstinten:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 133 | 132 | 129 | 131 | 134 | 130 | 130 | 128 | 127 | 134 | 126 | 128 | 127 | 124 | 126 |
| 133 | 131 | 129 | 132 | 134 | 130 | 129 | 128 | 128 | 134 | 127 | 128 | 128 | 124 | 126 |
| 134 | 129 | 130 | 130 | 132 | 128 | 127 | 127 | 128 | 130 | 125 | 124 | 128 | 125 | 125 |
| 129 | 129 | 129 | 127 | 130 | 129 | 125 | 122 | 126 | 125 | 125 | 122 | 126 | 124 | 120 |
| 126 | 129 | 127 | 127 | 129 | 128 | 128 | 125 | 125 | 128 | 127 | 124 | 126 | 123 | 123 |
| 128 | 129 | 127 | 119 | 128 | 128 | 127 | 127 | 127 | 125 | 128 | 125 | 122 | 126 | 126 |
| 128 | 127 | 127 | 127 | 128 | 128 | 125 | 127 | 127 | 127 | 129 | 125 | 125 | 124 | 125 |
| 128 | 127 | 127 | 127 | 128 | 128 | 127 | 125 | 125 | 127 | 125 | 125 | 124 | 125 | 124 |
| 126 | 127 | 127 | 124 | 127 | 126 | 127 | 126 | 124 | 126 | 127 | 126 | 122 | 123 | 125 |
| 126 | 127 | 128 | 126 | 127 | 126 | 128 | 130 | 131 | 130 | 125 | 127 | 125 | 127 | 128 |
| 128 | 126 | 126 | 125 | 129 | 127 | 129 | 128 | 128 | 128 | 122 | 126 | 124 | 127 | 129 |
| 128 | 126 | 122 | 128 | 128 | 127 | 128 | 128 | 130 | 128 | 128 | 127 | 124 | 125 | 128 |
| 126 | 124 | 124 | 127 | 129 | 128 | 128 | 128 | 131 | 125 | 128 | 128 | 127 | 129 | 133 |
| 125 | 127 | 127 | 126 | 128 | 129 | 129 | 128 | 129 | 130 | 126 | 128 | 128 | 133 | 137 |

Bij elke pixel (i,j) behoort grijswaarde $A_{i,j}$

Alle A bij elkaar genomen krijgen we een blok getallen, wat we een matrix noemen

# Matrices

- Definitie matrix?

  - Onder een matrix $A$ van het type $(m, n)$ verstaan we een uit $m \times n$ reële getallen bestaand rechthoekig schema met $m$ horizontale rijen en $n$ verticale kolommen

  - Een matrix is een geordend schema van getallen en bezit daarom geen getalwaarde (in tegenstelling tot de later te bespreken determinant)

# Wat zijn matrices

- Rechthoek van getallen in de vorm: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{a_{ij}}$ : de elementen van de matrix; het element staat in de $i^{de}$ rij en de $j^{de}$ kolom

# Wat zijn matrices?

- Rechthoek van getallen in de vorm: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

  - $a_{ij}$ : de elementen van de matrix; het element staat in de i^de rij en de j^de kolom
  - Horizontale lijnen : de rijen van de matrix

# Wat zijn matrices?

- Rechthoek van getallen in de vorm: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

  - $a_{ij}$ : de elementen van de matrix; het element staat in de $i^{de}$ rij en de $j^{de}$ kolom
  - Horizontale lijnen : de rijen van de matrix
  - Verticale lijnen : de kolommen van de matrix

# Wat zijn matrices?

- Rechthoek van getallen in de vorm: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

  - Als m het aantal rijen is en n het aantal kolommen spreekt men van een $m \times n$ matrix.
  - Als $m = n$ spreekt men van een vierkante matrix
  - $m = 1$ => rijmatrix of rijvector;
  - $n = 1$ => kolommatrix of kolomvector

# Begrippen bij een matrix

- Nulmatrix O
  - Alle elementen zijn gelijk aan 0 => $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Hoofddiagonaal
  - Loopt van linksboven naar rechtsonder $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$

- Nevendiagonaal
  - Loopt van rechtsboven naar rechtsonder $\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$

# Speciale vierkante matrices

## .1 Diagonaalmatrix

Een vierkante matrix met n rijen $A=(a_{ik})$ wordt een diagonaalmatrix genoemd als alle buiten de hoofdiagonaal gelegen elementen nul zijn.

$a_{ik} = 0$ als $i \neq k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

# Speciale vierkante matrices

## .2 Eenheidsmatrix

Een diagonaalmatrix met n rijen met de diagonaalelementen $a_{ii}$
wordt een eenheidsmatrix E met n elementen genoemd

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices

## .3 Driehoeksmatrix

De vierkante matrix met n rijen wordt aangeduid als driehoeksmatrix als alle elementen boven of onder de hoofdiagonaal nul zijn. Er is een onderscheid tussen onder- en bovendriehoeksmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Onderdriehoeksmatrix van de orde 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bovendriehoeksmatrix van de orde 4

# Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 1x1- matrix

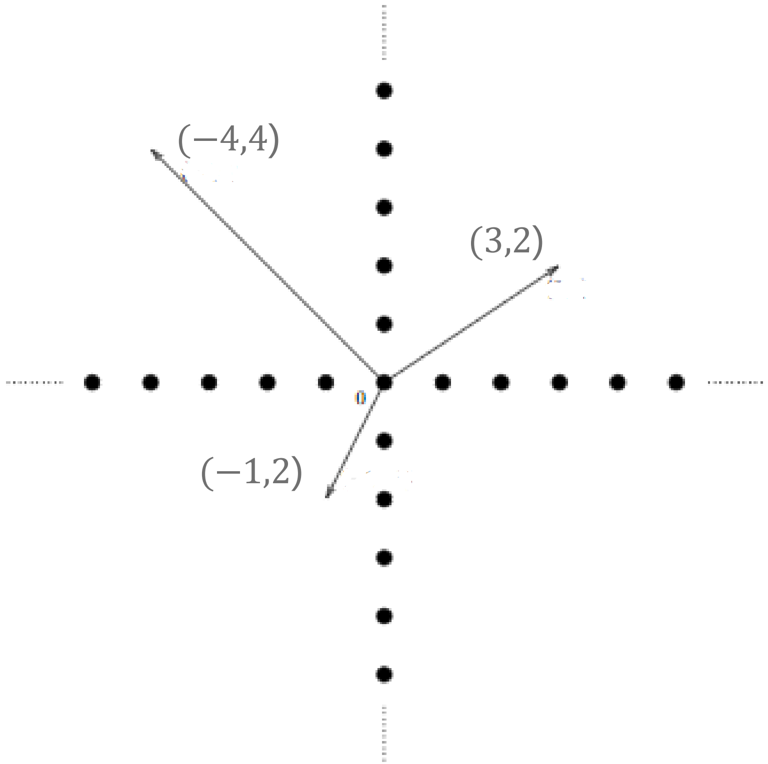
$$A = | \, a_{11} \, | \rightarrow \text{Het getal } a_{11} \text{ zelf}$$

- Determinant 2x2-matrix

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow D = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

# Determinant van een vierkante matrix

- De determinant van een vierkante matrix is een **scalaire weergave** van het volume van de matrix.
- De determinant beschrijft de **relatieve geometrie van de vectoren** waaruit de rijen van de matrix bestaan.
- Meer specifiek vertelt de determinant van een matrix A je het volume van een doos met zijden gegeven door rijen van A.



# Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 3x3- matrix
  - Minor
    - Als in een vierkante matrix van een element de rij en kolom wordt geschrapt en de determinant van de resterende elementen uitgerekend wordt, bekomt men de minor van dit element

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$Minor\ van\ het\ element\ a_{22} = a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}$$

# Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 3x3- matrix
  - Minor
    - Als in een vierkante matrix van een element de rij en kolom wordt geschrapt en de determinant van de resterende elementen uitgerekend wordt, bekomt men de minor van dit element

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$Minor\ van\ het\ element\ a_{31} = a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22}$$

# Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 3x3- matrix
  - cofactor
    - De cofactor van een element wordt bekomen door de minor van dit element te vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$; waarbij $i$ het rijnummer is en $j$ het kolomnummer van het element

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$cofactor\ of\ \ coëfficiënt\ van\ het\ element\ a_{22} = (-1)^{(2+2)}.(a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31})$$

# Determinant van een vierkante matrix

- Determinant 3x3- matrix
  - cofactor
    - De cofactor van een element wordt bekomen door de minor van dit element te vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$; waarbij $i$ het rijnummer is en $j$ het kolomnummer van het element

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$cofactor\ of\ \ coëfficiënt\ van\ het\ element\ a_{23} = (-1)^{(2+3)}.(a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{32})$$

# Determinant van een 3X3 vierkante matrix

- ***De determinant van een vierkante matrix is de som van de producten van de elementen van een willekeurige rij (of kolom) met hun respectievelijke cofactoren***

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{1+1} . a_{11} . \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} . a_{12} . \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} . a_{13} . \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{1+1} . a_{11} . (a_{22} . a_{33} - a_{23} . a_{32}) + (-1)^{1+2} . a_{12} . (a_{21} . a_{33} - a_{31} . a_{23})$$
$$+(-1)^{1+3} . a_{13} . (a_{21} . a_{32} - a_{22} . a_{31})$$

# Determinant van een 3X3 vierkante matrix

- Determinant (alternatieve rekenwijze)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg|$$

$$D = \underline{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}} - \underline{a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}}$$

# Som en verschil van matrices

- Optellen – aftrekken
  - Matrices die opgeteld of afgetrokken worden moeten van dezelfde grootte zijn
  - De gelijknamige elementen van beide matrices worden bij elkaar opgeteld of afgetrokken

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix}$$

# Som en verschil van matrices

- Eigenschappen: Optellen – aftrekken
  - Als A, B en C (=A+B) matrices zijn van dezelfde afmetingen, dan gelden volgende eigenschappen: $(A, BenC \in \mathbb{R}^{mxn})$
    - Gesloten $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
    - Associativiteit $A + (B + C) = (A + B) + C$
    - Neutraal element $A + 0_{m\times n} = A = 0_{m\times n} + A$
    - Symmetrisch element $A + (-A) = 0_{m\times n} = (-A) + A$
    - Commutativiteit $A + B = B + A$

# Scalair veelvoud van een matrix

- Is het vermenigvuldigen van een matrix met een getal

$$\lambda \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12} & \lambda.a_{13} \\ \lambda.a_{21} & \lambda.a_{22} & \lambda.a_{23} \\ \lambda.a_{31} & \lambda.a_{32} & \lambda.a_{33} \end{vmatrix}$$

- Eigenschappen:

$$\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$$

$$(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$$

$$(\lambda.\mu).A = \lambda.(\mu.A)$$

# Getransponeerde matrix

- De getransponeerde matrix van een $m \times n$ matrix A is de $m \times n$ matrix $A^T$ die ontstaat door de rijen van A in kolommen te noteren en omgekeerd, de kolommen van A als rijen te schrijven

  - De eerste rij van A wordt de eerste kolom van $A^T$,
  - De tweede rij van A wordt de tweede kolom van $A^T$, enz ...

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# Bijzondere matrix

## Scheefsymmetrische matrix

De vierkante matrix $A=(a_{ik})$ met n rijen is scheefsymmetrisch als $a_{ik}= -a_{ki}$ met $i,k = 1, 2, \ldots, n$

Hierbij geldt dat $A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -3 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

# Vermenigvuldigen van matrices

- Twee matrices A en B kunnen met elkaar worden vermenigvuldigd als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B.
  - Het aantal rijen van A.B is gelijk aan het aantal rijen van A
  - Het aantal kolommen van A.B is gelijk aan het aantal kolommen van B

# Vermenigvuldigen van matrices

Stel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *en* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matrix A is van het type (2,2) en matrix B is van het typ (2,3)
De rijcomponenten van A en de kolomcomponenten van B bezitten elk twee componenten. We vormen scalaire producten uit telkens een rijvector van A met een kolomvector van B volgens het volgende schema:

$$\begin{array}{r} 1e\ rijvector \rightarrow \\ 2e\ rijvector \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1e & 2e & 3e \end{array} \\ kolomvector \end{array} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

# Vermenigvuldigen van matrices

$$\begin{array}{r} 1e\ rijvector \rightarrow \\ 2e\ rijvector \rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1e & 2e & 3e \\ & kolomvector & \end{array}$$

Stel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $en$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Eerst wordt de eerste rijvector van A achtereenvolgens met iedere kolomvector van B scalair vermenigvuldigd. Vervolgens wordt de tweede rijvector van A scalair met ieder van de drie kolomvectoren van B vermenigvuldigd => er wordt in totaal 6 scalaire producten verkregen:

- $c_{11}$= (1$^e$ rijvector van A)(1$^e$ kolomvector van B) = 1.4 + 5.1 = 9
- $c_{12}$= (1$^e$ rijvector van A)(2$^e$ kolomvector van B) = 1.1 + 5.0 = 1
- $c_{13}$= (1$^e$ rijvector van A)(3$^e$ kolomvector van B) = 1.2 + 5.3 = 17
- $c_{21}$= (2$^e$ rijvector van A)(1$^e$ kolomvector van B) = 2.4 + 3.1 = 11
- $c_{22}$= (2$^e$ rijvector van A)(2$^e$ kolomvector van B) = 2.1 + 3.0 = 2
- $c_{23}$= (2$^e$ rijvector van A)(3$^e$ kolomvector van B) = 2.2 + 3.3 = 13

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 17 \\ 11 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

# Vermenigvuldigen van matrices

- De vorming van een produkt is alleen mogelijk als het aantal kolommen van A overeenstemt met het aantal rijen van B.
- Het matrixprodukt A.B is van het type (m, p).
- Het matrixelement $c_{ik}$ van het matrixprodukt A.B is het scalaire produkt van de i-de rijvector en de k-de kolomvector van B.
- In het algemeen is $A.B \neq B.A$, dat wil zeggen de matrixvermenigvuldiging is een niet-commutatieve rekenkundige bewerking.

Wetten voor de matrixvermenigvuldiging

- Associatieve wet : $A\,(BC) = (AB).C$
- Distributieve wet: $A\,(B+C) = AB + AC$

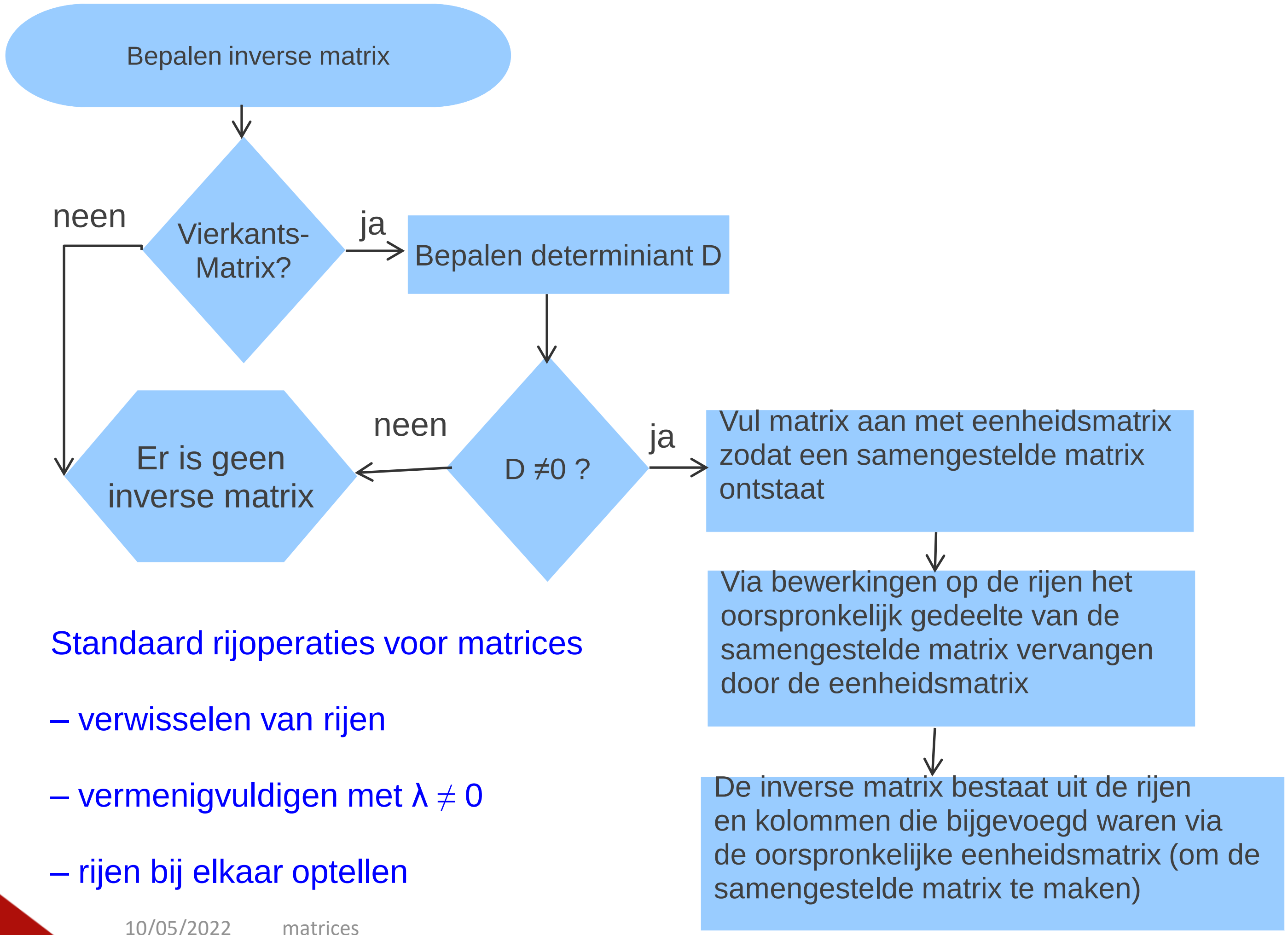
  $(A+B)\,C = AC + BC$

Overige regels:

- $(AB)^T = B^T \,.\, A^T$
- $AE = EA = A$

# Inverse matrix

- B is de inverse matrix van A als $A.B = B.A = I_n$; met $I_n$ de eenheidsmatrix.
- De inverse matrix van A wordt weergegeven als $A^{-1}$
- Inverse matrix kan enkel bestaan voor een vierkante matrix
- Veel vierkante matrices hebben geen inverse matrix
  - Determinant van nxn matrix A = 0 => geen inverse matrix => A wordt singulier genoemd
  - Determinant van nxn matrix A ≠ 0 => inverse matrix => A wordt regulier genoemd
- Als een vierkante matrix inverteerbaar is, dan is de inverse matrix uniek.  Dit wil zeggen dat er maar één matrix $A^{-1}$ bestaat waarvoor geldt $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$ als $A^{-1}$ bestaat




Standaard rijoperaties voor matrices

– verwisselen van rijen

– vermenigvuldigen met $\lambda \neq 0$

– rijen bij elkaar optellen

# Wat kan je met matrixberekening doen?

Stel volgende situatie:

In een studentenhuis staan:

- 2 bakken cola en 3 bakken cola zero,
- 4 bakken fruitsap (appel) en 2 bakken fruitsap (appelsien)
- 6 bakken bier en 2 bakken alcoholvrij bier

De studenten willen juist voor het examen nog een feestje geven. Maar men vreest een tekort, daarom wordt nog het volgende bijbesteld:

- 2 bakken cola en 2 bakken cola zero
- 3 bakken fruitsap (appel) en 4 bakken fruitsap (appelsien)
- 5 bakken bier en 2 bakken alcoholvrij bier

# Wat kan je met matrixberekening doen?

Een student IT komt op het idee om aan voorraadbeheer te doen. Hij doet het volgende:

- Aanmaken van een voorraadmatrix V
- Aanmaken van een bestelmatrix B

$$V = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

# Wat kan je met matrixberekening doen?

- Aanmaken van een voorraadmatrix V
- Aanmaken van een bestelmatrix B

$$V = \begin{array}{r} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{array}{r} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

De nieuwe voorraad komt in de matrix $N_V$

$$N_V = \begin{array}{r} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}$$

# Wat kan je met matrixberekening doen?

$$V = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad N_V = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}$$

$N_V$ wordt bekomen door de overeenkomstige elementen van matrix V en B op te tellen.

Enkel gelijksoortige matrices kunnen worden opgeteld!

Wanneer bakken worden leeggedronken zou je nog een matrix $L_G$ met leeggoed kunnen maken; deze bevat de lege bakken

# Wat kan je met matrixberekening doen?

$$B = \begin{array}{r} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Een eventuele verdubbeling van de bestelling kan worden verwezenlijkt door de matrix $B$ te vermenigvuldigen met een scalair

Verdubbeling bestelling $= 2 \times B = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}$

***Algemeen:*** $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$ ***en*** $\boldsymbol{B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}}$ ***is*** $\boldsymbol{\lambda \times B = [\lambda b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}}$

# Hoeveel vezels, eiwit, vet en koolhydraten bevat een bepaalde maaltijd?

***Stel dat een ontbijt bestaat uit chocolademelk (halfvol), croissant, volkorenbrood en mager kalkoenbeleg.***

***Per 100g van een voedingsmiddel van het ontbijt zit het volgende in:***

| | Eiwit | Vet | Koolhydraten | vezels |
|---|---|---|---|---|
| Croisssant | 9,2 g | 26,3 g | 50,3 g | 2,3 g |
| Volkorenbrood | 11,1 g | 2,3 g | 44 g | 6,4 g |
| Kalkoen | 22,6 g | 1,4 g | 0,6 g | 0 g |
| chocolademelk | 3,2 g | 1,6 g | 12,9 g | 0 g |

# Hoeveel vezels, eiwit, vet en koolhydraten bevat een bepaalde maaltijd?

***Stel dat je een app wil maken waarbij je per ontbijt wil weergeven hoeveel eiwit (E), vet (V), koolhydraden (KH) en vezels (Ve) zijn opgenomen***

***Omrekenen waarden tabel naar hoeveelheden bij 1 g en deze in – matrix-vorm opslaan***

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{Chr} & \text{Volk.} & \text{Kalk} & \text{choc} \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ E \\ KH \\ Ve \end{array} & \begin{vmatrix} 0,263 & 0,023 & 0,014 & 0,016 \\ 0,092 & 0,112 & 0226 & 0,032 \\ 0,503 & 0,44 & 0,006 & 0,129 \\ 0,023 & 0,064 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

## Hoeveel vezels, eiwit, vet en koolhydraten bevat een bepaalde maaltijd?

***De hoeveelheid croissant, volkorenbrood, kalkoen en chocomelk tijdens het ontbijt worden ingenomen worden in een afzonderlijke matrix opgeslagen***

$$B = \begin{array}{c} \text{Croissant} \\ \text{Volkorenbrood} \\ \text{Kalkoen} \\ \text{Chocolademelk} \end{array} \begin{vmatrix} cr \\ vo \\ ka \\ ch \end{vmatrix}$$

## Hoeveel vezels, eiwit, vet en koolhydraten bevat een bepaalde maaltijd?

***Stel dat het ontbijt bestond uit : 50 g chroissant, 24 g Volkorenbrood, 12 g kalkoen en 250 g chocolademelk***

$$B = \begin{array}{c} \textit{Croissant} \\ \textit{Volkorenbrood} \\ \textit{Kalkoen} \\ \textit{Chocolademelk} \end{array} \begin{vmatrix} 50 \\ 24 \\ 12 \\ 250 \end{vmatrix}$$

***Hoeveel eiwit, vet, koolhydraten en vezels zijn er opgenomen?***

## Hoeveel eiwit, vet, koolhydraten en vezels zijn er opgenomen?

$$Opname = B \times A$$

$$B = \begin{array}{c} Croissant \\ Volkorenbrood \\ Kalkoen \\ Chocolademelk \end{array} \begin{vmatrix} 50 \\ 24 \\ 12 \\ 250 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c|cccc|} & Chr & Volk. & Kalk & choc \\ V & 0,263 & 0,023 & 0,014 & 0,016 \\ E & 0,092 & 0,092 & 0226 & 0,032 \\ KH & 0,503 & 0,44 & 0,006 & 0,129 \\ Ve & 0,023 & 0,064 & 0 & 0 \end{array}$$

$$Opname \begin{vmatrix} Vet \\ eiwit \\ KH \\ vezels \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 \\ 24 \\ 12 \\ 250 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0,263 & 0,023 & 0,014 & 0,016 \\ 0,092 & 0,112 & 0226 & 0,032 \\ 0,503 & 0,44 & 0,006 & 0,129 \\ 0,023 & 0,064 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Opname_{11} = 50 \times 0,263 + 24 \times 0,023 + 12 \times 0,014 + 250 \times 0,016$$

$$Opname_{11} = 17,87\ g\ vet$$

# Hoeveel eiwit, vet, koolhydraten en vezels zijn er opgenomen?

$$Opname = B \times A$$

$$B = \begin{array}{c} Croissant \\ Volkorenbrood \\ Kalkoen \\ Chocolademelk \end{array} \begin{vmatrix} 50 \\ 24 \\ 12 \\ 250 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ V \\ E \\ KH \\ Ve \end{array} \begin{array}{cccc} Chr & Volk. & Kalk & choc \\ \hline 0,263 & 0,023 & 0,014 & 0,016 \\ 0,092 & 0,092 & 0226 & 0,032 \\ 0,503 & 0,44 & 0,006 & 0,129 \\ 0,023 & 0,064 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} vet \\ eiwit \\ KH \\ vezels \end{array} \begin{vmatrix} 17,87\ g \\ eiwit \\ KH \\ vezels \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 \\ 24 \\ 12 \\ 250 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0,263 & 0,023 & 0,014 & 0,016 \\ 0,092 & 0,112 & 0226 & 0,032 \\ 0,503 & 0,44 & 0,006 & 0,129 \\ 0,023 & 0,064 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Opname_{21} = 50 \times 0,092 + 24 \times 0,112 + 12 \times 0,226 + 250 \times 0,32$$

$$Opname_{21} = 18g\ eiwit$$

## Hoeveel eiwit, vet, koolhydraten en vezels zijn er opgenomen?

$$Opname = B \times A$$

$$B = \begin{array}{r} Croissant \\ Volkorenbrood \\ Kalkoen \\ Chocolademelk \end{array} \begin{vmatrix} 50 \\ 24 \\ 12 \\ 250 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ V \\ E \\ KH \\ Ve \end{array} \begin{array}{cccc} Chr & Volk. & Kalk & choc \\ \hline 0,263 & 0,023 & 0,014 & 0,016 \\ 0,092 & 0,092 & 0226 & 0,032 \\ 0,503 & 0,44 & 0,006 & 0,129 \\ 0,023 & 0,064 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} vet \\ eiwit \\ KH \\ vezels \end{array} \begin{vmatrix} 17,87\ g \\ 18,0\ g \\ 64,89\ g \\ 2,69\ g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 \\ 24 \\ 12 \\ 250 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0,263 & 0,023 & 0,014 & 0,016 \\ 0,092 & 0,112 & 0226 & 0,032 \\ 0,503 & 0,44 & 0,006 & 0,129 \\ 0,023 & 0,064 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**Algemeen:** $A = |a_{ij}| \in \mathbb{R}^{m \times p}$ **en** $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ **is** $C = A \times B$

**Met** $C_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \ldots + a_{in} \times b_{nj}$

$$c_{ij} = \sum_{k-1}^{n} a_{ik} \times b_{kj} \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

# Cryptologie: gebruik van matrices om te coderen en decoderen

- Stel volgende overeenkomst:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| U | V | W | X | Y | Z | = | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | … |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | … |

- Voorbeeld:

| E | L | E | K | T | R | O | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 12 | 5 | 11 | 20 | 18 | 15 | 14 |

# Cryptologie: gebruik van matrices om te coderen en decoderen

- Voorbeeld:

| E | L | E | K | T | R | O | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 12 | 5 | 11 | 20 | 18 | 15 | 14 |

- Hoe coderen?

➢ stap 1 : De letters in $2 \times 1$ matrices plaatsen en omzetten in getallen

➢ Stap 2 : voer de encryptie (codering) uit

➢ Stap 3 : decoderen

# Stap 1 : De letters in een $2 \times 1$ matrices plaatsen en omzetten in getallen

- Voorbeeld:

| E | L | E | K | T | R | O | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 12 | 5 | 11 | 20 | 18 | 15 | 14 |

- $\begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix}$ (als het woord oneven is, de laatste oneven plaats met '-' opvullen)

- $\begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix}$

## Stap 2 : encryptie

- Voorbeeld: $\begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix}$ ➔ $\begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix}$
- Kies een willekeurige vierkante matrix met dimentsie 2 bv: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$
- Bereken:
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \times 1 + 12 \times 1 \\ 5 \times 0 + 12 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 \\ 24 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \times 1 + 11 \times 1 \\ 5 \times 0 + 11 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 \\ 22 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \times 1 + 18 \times 1 \\ 20 \times 0 + 18 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 38 \\ 36 \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \times 1 + 14 \times 1 \\ 15 \times 0 + 14 \times 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 \\ 28 \end{vmatrix}$

## Stap 2 : encryptie

- De encrypted boodschap wordt: $\begin{vmatrix}17\\24\end{vmatrix}\begin{vmatrix}16\\22\end{vmatrix}\begin{vmatrix}38\\36\end{vmatrix}\begin{vmatrix}29\\28\end{vmatrix}$
- Terug omzetten naar letters: $\begin{vmatrix}Q\\X\end{vmatrix}\begin{vmatrix}P\\V\end{vmatrix}\begin{vmatrix}K\\I\end{vmatrix}\begin{vmatrix}B\\A\end{vmatrix}$ ➔ QXPVKIBA

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| U | V | W | X | Y | Z | = | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | … |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | … |

Terug omzetten naar letters:
Van getallen groter dan 27 trek je (veelvouden van) 27 af. (38-27 = 11 => K)
Getallen kleiner dan 1 tel je (veelvouden van) 27 bij. (-20 + 27 = 7 => G)

# Stap 3 : decoderen

- De encrypted boodschap wordt: $\begin{vmatrix}17\\24\end{vmatrix} \begin{vmatrix}16\\22\end{vmatrix} \begin{vmatrix}38\\36\end{vmatrix} \begin{vmatrix}29\\28\end{vmatrix}$ ➔ QXPVKIBA
- Terug omzetten:
  - ***De persoon die de boodschap ontvangt moet de vermenigvuldiging met de sleutel $\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\end{vmatrix}$ terug ongedaan maken. Dit komt neer om een matrix te vinden die weer de oorspronkelijke getallen teruggeeft:***
  - Inverse matrix van de sleutel bepalen
    - Indien $A$ een inverste matrix $A^{-1}$ heeft, moet $A \times A^{-1} = I = A^{-1} \times A$
    - $I$ = eenheidsmatrix

# Stap 3 : decoderen : Bepalen van inverse matrix van de sleutel:

***Inverse matrix*** $A^{-1}$ ***Eenheidsmatrix*** $I$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Uit regels van vermenigvuldiging:

$$I_{11} = 1 = a \times 1 + c \times 1 \Longrightarrow a + c = 1$$

# Stap 3 : decoderen : Bepalen van inverse matrix van de sleutel:

***Inverse matrix $A^{-1}$***   ***Eenheidsmatrix $I$***

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Uit regels van vermenigvuldiging:

$$I_{11} = 1 = a \times 1 + c \times 1 \Longrightarrow a + c = 1$$
$$I_{21} = 0 = a \times 0 + c \times 2 \Longrightarrow 2c = 0$$

# Stap 3 : decoderen : Bepalen van inverse matrix van de sleutel:

***Inverse matrix*** $\boldsymbol{A^{-1}}$

***Eenheidsmatrix I***

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Uit regels van vermenigvuldiging:

$$I_{11} = 1 = a \times 1 + c \times 1 \Longrightarrow a + c = 1$$
$$I_{21} = 0 = a \times 0 + c \times 2 \Longrightarrow 2c = 0$$
$$I_{12} = 0 = b \times 1 + d \times 1 \Longrightarrow b + d = 0$$

# Stap 3 : decoderen : Bepalen van inverse matrix van de sleutel:

***Inverse matrix*** $\boldsymbol{A^{-1}}$ ***Eenheidsmatrix*** $\boldsymbol{I}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Uit regels van vermenigvuldiging:

$$I_{11} = 1 = a \times 1 + c \times 1 \Longrightarrow a + c = 1$$
$$I_{21} = 0 = a \times 0 + c \times 2 \Longrightarrow 2c = 0$$
$$I_{12} = 0 = b \times 1 + d \times 1 \Longrightarrow b + d = 0$$
$$I_{22} = 1 = b \times 0 + d \times 2 \Longrightarrow 2d = 1$$

## Stap 3 : decoderen : Bepalen van inverse matrix van de sleutel:

***Inverse matrix*** $\boldsymbol{A^{-1}}$ ***Eenheidsmatrix*** $\boldsymbol{I}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Uit regels van vermenigvuldiging:

$$I_{11} = 1 = a \times 1 + c \times 1 \Longrightarrow \boldsymbol{a + c = 1}$$
$$I_{21} = 0 = a \times 0 + c \times 2 \Longrightarrow \boldsymbol{2c = 0}$$
$$I_{12} = 0 = b \times 1 + d \times 1 \Longrightarrow \boldsymbol{b + d = 0}$$
$$I_{22} = 1 = b \times 0 + d \times 2 \Longrightarrow \boldsymbol{2d = 1}$$

$$\boldsymbol{2d = 1 \Longrightarrow d = 0,5}$$
$$\boldsymbol{2c = 0 \Rightarrow a + c = 1 \Rightarrow a = 1; c = 0}$$
$$\boldsymbol{b + d = 0 \text{ en } d = 0,5 \Rightarrow b = -0,5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix}$$

## Stap 3 : decoderen : terug vormen van oorstpronkelijke tekst:

$$\begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}]{\text{encryptie}} \begin{vmatrix} 17 \\ 24 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 16 \\ 22 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 38 \\ 36 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 29 \\ 28 \end{vmatrix} \rightarrow \text{QXPVKIBA}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-0,5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,5} \end{vmatrix}$$

Decodering :

- $\begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 17 \\ 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 17 - 0,5 \times 24 \\ 0 \times 17 + 0,5 \times 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \\ L \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 16 \\ 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 16 - 0,5 \times 22 \\ 0 \times 17 + 0,5 \times 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \\ K \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 38 \\ 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 38 - 0,5 \times 36 \\ 0 \times 38 + 0,5 \times 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T \\ R \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 29 \\ 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 29 - 0,5 \times 28 \\ 0 \times 29 + 0,5 \times 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 \\ 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O \\ N \end{vmatrix}$