Algoritmi e Strutture Dati

Analisi di algoritmi ricorsivi: Il Teorema master (*)

Punto della situazione

- Abbiamo imparato i concetti fondamentali di complessità (temporale o spaziale) di un algoritmo, e quelli di delimitazione superiore (*upper bound*) e inferiore (*lower bound*) alla complessità (temporale o spaziale) di un problema
- Ad esempio, l'algoritmo di ricerca sequenziale di un elemento in un insieme non ordinato di n elementi ha complessità temporale $T(n) = O(n)$, in quanto su alcune istanze costa $\Theta(n)$, mentre su altre costa $o(n)$. Ne consegue che l'*upper bound* al problema della ricerca di un elemento in un insieme non ordinato di n elementi è pari a $O(n)$
- Invece, il *lower bound* temporale del problema della ricerca di un elemento in un insieme non ordinato di n elementi è pari a $\Omega(n)$: infatti, ogni algoritmo di risoluzione deve per forza di cose guardare tutti gli elementi dell'insieme per decidere se l'elemento cercato appartiene o meno ad esso! Quindi, l'algoritmo di ricerca sequenziale è ottimo!
- Infine, l'algoritmo di ricerca binaria di un elemento in un insieme ordinato di n elementi ha complessità temporale $T(n) = O(\log n)$, mentre, per quanto ne sappiamo al momento, il *lower bound* temporale del problema della ricerca di un elemento in un insieme ordinato di n elementi è quello banale di $\Omega(1)$. Vedremo più avanti che anche questo algoritmo è ottimo!

Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

Approfondimento: correttezza dell'algoritmo di ricerca binaria

algoritmo `ricercaBinariaIter`$(array\ L,\ elem\ x) \rightarrow boolean o$

$a \leftarrow 1$
$b \leftarrow$ lunghezza di L
while $(\ L[\lfloor(a+b)/2\rfloor] \neq x\ )$ **do**
  $m \leftarrow \lfloor(a+b)/2\rfloor$
  if $(\ L[m] > x\ )$ **then** $b \leftarrow m-1$
  else $a \leftarrow m+1$
  if $(\ a > b\ )$ **then return** non trovato
return trovato

Approfondimento: correttezza dell'algoritmo di ricerca binaria

- Per dimostrare la correttezza notiamo prima di tutto che se x non è presente nell'array, la ricerca giungerà a confrontare x con un array composto da un solo elemento, ovvero con a=b. Dopodiché, se L[m=a=b]>x, si porrà b=m-1=a-1, mentre se L[m=a=b]<x, si porrà a=m+1=b+1, ovvero in entrambi i casi b<a e quindi verrà correttamente restituito non trovato.
- Se invece x è contenuto nell'array, la dimostazione procede per induzione su n.
  - La base d'induzione è n=1, cioè L contiene il solo valore L[1]=x: in questo caso si avrà a=b=1, e alla prima iterazione si avrà che $L[\lfloor(a+b)/2\rfloor]=L[1]=x$, e quindi si esce immediatamente dal ciclo WHILE restituendo trovato;
  - Per n>1, posto che l'algoritmo sia corretto per ogni array di dimensione $\leq n-1$, la correttezza complessiva deriva dall'osservazione che o il test $L[\lfloor(a+b)/2\rfloor]=x$ è immediatamente vero, e quindi viene restituito trovato, oppure si riduce la dimensione dello spazio di ricerca a un array di dimensione $\leq n-1$, e quindi la correttezza segue dall'ipotesi induttiva.

Ricerca binaria in forma ricorsiva

L'algoritmo di ricerca binaria può essere riscritto ricorsivamente come:

```
algoritmo ricercaBinariaRic(array L, elemento x) → booleano
    n ← lunghezza di L
    if ( n = 0 ) then return non trovato
    i ← ⌈n/2⌉
    if ( L[i] = x ) then return trovato
    else if ( L[i] > x ) then return ricercaBinariaRic(L[1; i − 1],x)
        else return ricercaBinariaRic(L[i + 1; n],x)
```

Si noti che è equivalente ad $i=\lfloor (a+b)/2 \rfloor$

Come analizzarlo?

Equazioni di ricorrenza

Il tempo di esecuzione dell'algoritmo può essere descritto tramite l'equazione di ricorrenza:

dove $\Theta(1)$ è il costo (costante) che viene speso all'interno di ogni chiamata ricorsiva (si noti che utilizzo il simbolo $\leq$ perché l'algoritmo può terminare in una qualsiasi chiamata ricorsiva).

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) + T(\lceil n/2 \rceil - 1) & \text{se } n \geq 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n=0 \end{cases}$$

Mostreremo tre metodi per risolvere equazioni di ricorrenza: iterazione, sostituzione, e teorema Master

Metodo dell'iterazione

Idea: "srotolare" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente solo dalla dimensione n del problema iniziale (già visto per `Fibonacci6`)

Nel caso della ricerca binaria, semplificando leggermente la relazione di ricorrenza a $T(n) \le \Theta(1) + T(n/2)$:

$$T(n) \le \Theta(1) + T(n/2) \le \Theta(1) + (\Theta(1) + T(n/4))$$

$$\le \le \Theta(1) + (\Theta(1) + (\Theta(1) + T(n/8))) \le \ldots$$

$$\le \left(\sum_{j=1\ldots i} \Theta(1) \right) + T(n/2^i) = i \cdot \Theta(1) + T(n/2^i)$$

Per $i = \lfloor \log n \rfloor + 1$: $T(n) \le \Theta(1) \cdot \Theta(\log n) + T(0) = \Theta(\log n)$
ovvero $T(n) = O(\log n)$

Esercizi di approfondimento

Risolvere usando il metodo dell'iterazione le seguenti equazioni di ricorrenza:

- $T(n) = n + T(n-1), \quad T(1)=1;$

- $T(n) = 9\,T(n/3) + n, \quad T(1)=1;$

  (soluzione sul libro di testo: Esempio 2.4)

Metodo della sostituzione

Idea: "indovinare" una soluzione, ed usare l'induzione matematica per provare che la soluzione dell'equazione di ricorrenza è effettivamente quella intuita

Esempio: $T(n) = n + T(n/2)$, $T(1)=1$

Ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \leq c \cdot n$ per una costante c opportuna, ovvero $T(n) = O(n)$, e verifichiamolo:

- **Passo base:** $T(1)=1 \leq c \cdot 1$ per ogni $c \geq 1$ OK
- **Passo induttivo:** $T(n)= n + T(n/2) \leq n+c \cdot (n/2) = n(1+c/2)$
  Ma $n(1+c/2) \leq c\, n$ per $c \geq 2$, quindi $T(n) \leq c \cdot n$ per $c \geq 2$

Teorema Master

Permette di analizzare algoritmi basati sulla tecnica del *divide et impera*:

- dividi il problema (di dimensione iniziale n) in $a \geq 1$ sottoproblemi di dimensione n/b, b>1
- risolvi i sottoproblemi ricorsivamente
- ricombina le soluzioni

Sia f(n) il tempo speso nella chiamata ricorsiva (escluse le sottochiamate ricorsive), incluso quindi il tempo per dividere e ricombinare istanze di dimensione n. La relazione di ricorrenza è data da:

$$T(n) = \begin{cases} a\,T(n/b) + f(n) & \text{se } n>1 \\ \Theta(1) & \text{se } n=1 \end{cases}$$

Esempio: algoritmo `fibonacci6`

algoritmo `fibonacci6`$(\mathit{intero}\ n) \rightarrow \mathit{intero}$

$A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M \leftarrow$ `potenzaDiMatrice`$(A, n-1)$

return $M[1][1]$

funzione `potenzaDiMatrice`$(\mathit{matrice}\ A,\ \mathit{intero}\ k) \rightarrow \mathit{matrice}$

if $(k \leq 1)$ **then** $M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

else $M \leftarrow$ `potenzaDiMatrice`$(A, \lfloor k/2 \rfloor)$

$M \leftarrow M \cdot M$

if (k è dispari) **then** $M \leftarrow M \cdot A$

return M

a=1, b=2, f(n)=Θ(1)

Esempio: algoritmo di ricerca binaria

algoritmo `ricercaBinariaRic`$(array\ L,\ elemento\ x) \rightarrow booleano$

$n \leftarrow$ lunghezza di L
if $(\ n = 0\ )$ **then return** non trovato
$i \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
if $(\ L[i] = x\ )$ **then return** trovato
else if $(\ L[i] > x\ )$ **then return** `ricercaBinariaRic`$(L[1;i-1],x)$
  else return `ricercaBinariaRic`$(L[i+1;n],x)$

a=1, b=2, f(n)=$\Theta(1)$

Algoritmo `fibonacci2`

algoritmo `fibonacci2`*(intero n)* → *intero*
  if (n≤2) **then return** 1
  else return `fibonacci2`(n-1) +
              `fibonacci2`(n-2)

Ricorsivo? Sì

Divide et impera?

No, perché la dimensione dei sottoproblemi è $\Theta(n)$, e non $\Theta(n/b)$ con $b>1$

Teorema Master (o teorema principale)

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} a\,T(n/b) + f(n) & \text{se } n>1 \\ \Theta(1) & \text{se } n=1 \end{cases}$$

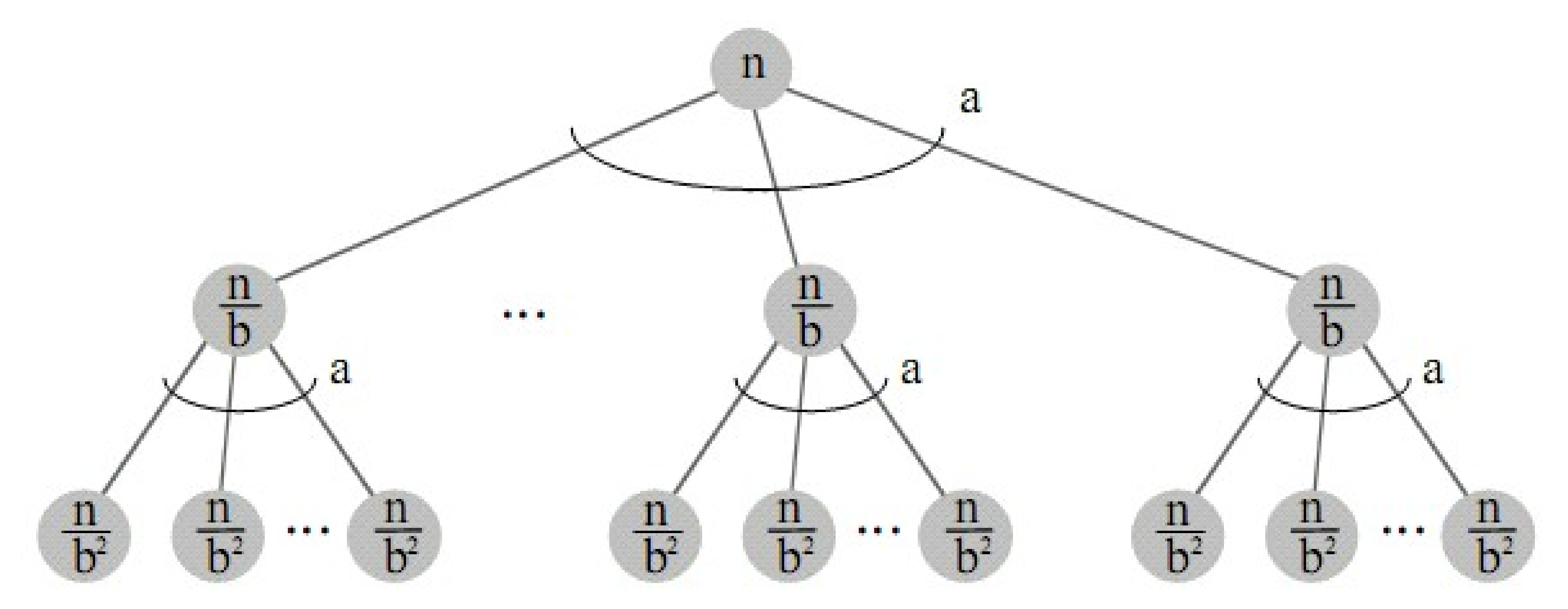
ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon>0$
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon>0$

(ma sotto l'ulteriore ipotesi che f(n) soddisfi la *condizione di regolarità*: $a\,f(n/b) \le c\,f(n)$ per qualche $c<1$ ed n sufficientemente grande)

Dimostrazione del caso 1

Albero della ricorsione



Proprietà dell'albero della ricorsione

- Proprietà 1: il numero di nodi a livello i dell'albero della ricorsione è a^i (ricorda che la radice è a livello 0)
- Proprietà 2: i sottoproblemi a livello i dell'albero della ricorsione hanno dimensione n/b^i
- Proprietà 3: il contributo al tempo di esecuzione di un nodo a livello i (escluso tempo sottochiamate ricorsive, che vengono conteggiate esplicitamente) è $f(n/b^i)$
- Proprietà 4: il numero di livelli dell'albero è (circa) $\log_b n$

$$T(n)=\sum_{i=0}^{\log_b n} a^i f(n/b^i)$$

…quindi, nel caso 1

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$$

$$\Rightarrow \quad a^i f(n/b^i) = O(a^i (n/b^i)^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{\log_b a - \varepsilon} (a / b^{\log_b a - \varepsilon})^i) =$$
$$= O(n^{\log_b a - \varepsilon} (a\, b^{\varepsilon} / b^{\log_b a})^i) =$$
$$= O(n^{\log_b a - \varepsilon} (b^{\varepsilon})^i)$$

$$\mathbf{T(n)} = \sum_{i=0,\dots,\log_b n} O(n^{\log_b a - \varepsilon} (b^{\varepsilon})^i) = O(n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{i=0,\dots,\log_b n} (b^{\varepsilon})^i) =$$
$$= O\left(n^{\log_b a - \varepsilon} \frac{b^{\varepsilon(\log_b n + 1)} - 1}{b - 1}\right) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\left(\frac{b^{\varepsilon} n^{\varepsilon} - 1}{b^{\varepsilon} - 1}\right)\right) =$$
$$= O(n^{\log_b a - \varepsilon}(n^{\varepsilon})) = \mathbf{O(n^{\log_b a})}$$

Inoltre, $T(n) \geq a^{\log_b n} ? f(1) = a^{\log_b n} ? \Theta(1)$ (ultimo termine sommatoria slide precedente)

e poiché $a^{\log_b n} = b^{\log_b (a^{\log_b n})} = b^{\log_b n \cdot \log_b a} = n^{\log_b a}$, ne consegue $T(n)=\Omega(n^{\log_b a})$ da cui la tesi.

I casi 2 e 3 possono essere mostrati in modo analogo. QED

Esempi (per tutti assumiamo $T(1)=\Theta(1)$)

1) $T(n) = 2T(n/2) + n$

   $a=2$, $b=2$, $f(n)=n=\Theta(n^{\log_2 2})$ ➡ caso 2 TM

   ➡ $T(n)=\Theta(n^{\log_2 2} \log n) = \Theta(n \log n)$

2) $T(n) = 3T(n/9) + 7$

   $a=3$, $b=9$, $f(n)=7=O(n^{\log_9 3 - \varepsilon})$ ➡ caso 1 TM

   ➡ $T(n) =\Theta(n^{\log_9 3})=\Theta(\sqrt{n})$

3) $T(n) = 3T(n/9) + n$

   $a=3$, $b=9$, $f(n)=n=\Omega(n^{\log_9 3 + \varepsilon})$

   inoltre $3(n/9) \leq c\, n$ per $1/3\leq c<1$ (ipotesi di regolarità)

   ➡ caso 3 del TM ➡ $T(n)=\Theta(n)$

Esempi

4) $T(n) = 2T(n/2)+n \log n$

$a=2$, $b=2$ e quindi ovviamente non ricade nel caso 1 perché

$f(n)=n \log n \neq O(n \quad) \equiv O(n \quad)$

inoltre $f(n) \neq \Theta\ (n \quad)$, e quindi non ricade nel caso 2,

infine non esiste alcun $\varepsilon > 0$ per cui $f(n)=\Omega(n \quad)\equiv\Omega(n^{1+\varepsilon})$ $\log_2 2-\varepsilon$ $1-\varepsilon$

(infatti, per ogni $\varepsilon > 0$) $\log_2 2$

$\log_2 2+\varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{\log n}{n^{\varepsilon}} = 0$$

non rientra nemmeno nel caso 3 e quindi non si può applicare il teorema Master!

Esempi

5) $T(n) = 3T(n/3)+n/\log^4 n$

$a=3$, $b=3$ e quindi non ricade nel caso 2 perché

$f(n)= n/\log^4 n \neq \Theta(n\ ) \equiv O(n)$

inoltre ovviamente non rientra nel caso 3 perché $f(n) \neq \Omega(n^{1+\varepsilon})$

infine non esiste alcun $\varepsilon > 0$ per cui $f(n)=O(n\ )\equiv O(n^{1-\varepsilon})$ $\log_3 3$

(infatti, per ogni $\varepsilon > 0$)

$\log_3 3-\varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n/\log^4 n}{n^{1-\varepsilon}} = \frac{n^{\varepsilon}}{\log^4 n} = \infty$$

non rientra nemmeno nel caso 1 e quindi non si può applicare il teorema Master!