14. Carilah koefisien x^{10} di dalam masing-masing fungsi di bawah ini.
    a. $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)^3$
    b. $(x^4+x^5+x^6+\cdots)^3$
    c. $(x^4+x^5+x^6)(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x+x^2+x^3+\cdots)$
    d. $(x^2+x^4+x^8+\cdots)(x^3+x^6+x^9+\cdots)(x^4+x^8+x^{12}+\cdots)$
15. Carilah koefisien x^{10} dari masing-masing fungsi di bawah ini.
    a. $1/(1-2x)$
    b. $1/(1+x)^2$
    c. $x^4/(1-3x)^3$

BAB VI
RELASI REKURENSI

Jumlah bakteri di dalam suatu koloni bertambah sebanyak dua kali lipat setiap jam. Jika suatu koloni terbentuk dari lima bakteri, berapakah jumlah bakteri di dalam koloni tersebut setelah *n* jam? Untuk menyelesaikan masalah ini, misalkan bahwa jumlah bakteri setelah *n* jam adalah a_n. Karena jumlah bakteri bertambah sebanyak dua kali lipat dalam satu jam, maka berlaku hubungan $a_n = 2a_{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*. Dengan syarat batas $a_0 = 5$, hubungan ini secara unik menentukan a_n untuk semua bilangan bulat non-negatif *n*. Rumusan a_n dapat diturunkan dari informasi tersebut.

Terdapat hubungan penting antara rekursi dengan relasi rekurensi. Algoritma rekursif memberikan penyelesaian dari suatu masalah yang berukuran *n* dalam bentuk penyelesaian dari satu atau lebih kasus pada masalah yang sama teetapi dengan ukuran lebih kecil. Sebagai akibatnya, jika kita menganalisa kompleksitas dari algoritma rekursif, akan diperoleh relasi rekurensi yang menyatakan banyaknya operasi yang diperlukan untuk menyelesaikan suatu masalah berukuran *n* sesuai dengan banyaknya operasi yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah dari satu atau lebih kasus yang berukuran lebih kecil.

A. Definisi Rekursif Fungsi

Definisi rekursif dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah di dalam kombinatorika. Definisi rekursif dari suatu barisan menggunakan satu atau lebih suku awal sebagai syarat awal, dan suatu aturan tertentu untuk menentukan suku-suku selanjutnya. Definisi rekursif yang digunakan untuk menentukan suku-suku tertentu berdasarkan suku-suku yang mendahuluinya dinamakan relasi rekurensi.

Definisi 6.1. Suatu *relasi rekurensi* dari barisan $\{a_n\}$ adalah suatu persamaan yang menyatakan hubungan antara dengan suku-suku yang muncul lebih awal di dalam barisan tersebut, yaitu untuk semua bilangan bulat *n* dengan dengan adalah suatu bilangan bulat non-negatif. Suatu barisan merupakan penyelesaian dari suatu relasi rekurensi jika suku-suku barisan tersebut memenuhi sifat relasi rekurensi yang bersangkutan.

Misalkan dan Definisi rekursif dari fungsi *f* dengan domain *X* terdiri atas tiga bagian, dengan

- **Pernyataan Basis**. Ditetapkan nilai awal dari fungsi Persamaan yang memenuhi nilai awal tersebut dinamakan **syarat awal**.
- **Pernyataan rekursif**. Mencari suatu rumus untuk menghitung dari *k* nilai fungsi sebelumnya, yaitu Rumus ini dinamakan **relasi rekurensi** (atau **rumus relasi**).
- **Pernyataan akhir**. Nilai yang diperoleh adalah nilai fungsi yang valid. Penyataan ini bersifat mutlak, karena itu tidak harus digunakan di dalam definisi rekursif.

Teorema 6.1. Misalkan $a \in W,\ X = \{a, a+1, a+2, \cdots\},$ dan $k \in \mathbb{N}.$ Selanjutnya misalkan juga bahwa $f : X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(a), f(a+1), f(a+2), \cdots, f(a+k+1)$ dapat diketahui. Jika $n \geq a+k$ adalah bilangan bulat positif sehingga $f(n)$ terdefinisi untuk $f(n-1), f(n-2), \cdots, f(n-k),$ maka $f(n-k)$ terdefinisi untuk semua $n \geq a.$

Contoh 6.1. Misalkan $\{a_n\}$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n = 2, 3, 4, \cdots,$ dan misalkan bahwa $a_0 = 3$ dan $a_1 = 5.$ Tentukanlah a_2 dan a_3.

Jawab. Dapat dilihat dari relasi rekurensi bahwa $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ dan juga $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$. Nilai-nilai untuk a_4, a_5, dan suku-suku selanjutnya dapat ditentukan dengan cara yang sama.

Syarat Awal untuk suatu barisan merupakan suku-suku yang mendahului suku pertama, dimana relasi rekurensi mulai berlaku. Pada Contoh 6.1, $a_0 = 3$ dan $a_1 = 5$ merupakan syarat-syarat awal. Relasi rekurensi dan syarat awal menentukan suatu barisan. Hal ini disebabkan karena relasi rekurensi bersama dengan syarat-syarat awal, menyatakan definisi rekursif dari suatu barisan. Sebarang suku pada barisan dapat ditentukan dari syarat awal dengan menggunakan relasi rekurensi beberapa kali. Meskipun demikian, terdapat cara yang lebih baik untuk menentukan suku-suku dalam kelompok tertentu pada barisan yang didefinisikan dengan relasi rekurensi dan syarat awal.

Contoh 6.2. Suatu pesta pernikahan dihadiri oleh *n* orang tamu. Setiap orang berjabat tangan tepat satu kali dengan semua orang lainnya. Definisikanlah secara rekursif banyaknya jabat tangan $h(n)$ yang dilakukan tamu yang hadir di pesta tersebut.

Jawab. Dari masalah ini, tentu saja $h(1) = 0$ karena itu andaikan $n \geq 2$. Misalkan A adalah salah satu tamu yang hadir. Berdasarkan definisi, banyaknya jabat tangan yang dapat dilakukan oleh $n-1$ tamu lainnya adalah $h(n-1)$. Jika A berjabat tangan dengan $n-1$ tamu lainnya tersebut, maka terjadi $h(n-1) + (n-1)$ jabat tangan, dengan $n \geq 2$. Jadi $h(n)$ dapat dinyatakan secara rekursif sebagai berikut:

$$
\begin{array}{ll}
h(1) = 0 & \leftarrow \text{syarat awal} \\
h(n) = h(n-1) + (n-1),\ n \geq 2 & \leftarrow \text{relasi rekurensi}
\end{array}
$$

Penyelesaian relasi rekurensi yang telah dijelaskan pada bagain sebelumnya, hanya dapat diaplikasikan pada beberapa masalah relasi rekurensi sederhana. Pada bagian ini akan dikembangkan metode penyelesaian relasi rekurensi yang lebih luas.

Contoh 6.3. Bunga Majemuk. Andaikan seseorang nasabah menabung uang Rp. 100.000.000 di bank yang memberikan bunga 11% per tahun, dengan bunga yang dibayarkan setiap tahun. Berapa total tabungan nasabah tersebut setelah menabung selama 30 tahun?

Jawab. Untuk menyelesaikan masalah ini, misalkanlah $\mathrm{P_n}$ sebagai jumlah tabungan setelah *n* tahun. Karena banyaknya tabungan setelah *n* tahun sama dengan total tabungan setelah *n* – 1 tahun ditambah bunga untuk tahun ke *n*, maka $\mathrm{P_n}$ dapat dinyatakan sebagai barisan $\{\mathrm{P_n}\}$ yang memenuhi $\mathrm{P_n = P_{n-1} + 0{,}11P_{n-1} = (1{,}11)P_{n-1}}$.

Diketahui syarat batas adalah $\mathrm{P_0} = 100.000.000.$ Selanjutnya dapat digunakan pendekatan iteratif untuk menemukan suatu rumusan dari $\mathrm{P_n}$. Perhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P_1} &= (1{,}11)\mathrm{P_0} \\
\mathrm{P_2} &= (1{,}11)\mathrm{P_1} = (1{,}11)^2\mathrm{P_0} \\
\mathrm{P_3} &= (1{,}11)\mathrm{P_2} = (1{,}11)^3\mathrm{P_0} \\
&\vdots \\
\mathrm{P_n} &= (1{,}11)\mathrm{P_{n-1}} = (1{,}11)^{\mathrm{n}}\mathrm{P_0}.
\end{aligned}
$$

Dengan syarat awal $\mathrm{P_0} = 100.000.000.$, maka $\mathrm{P_n} = (1{,}11)^{\mathrm{n}}\mathrm{P_0}$ dapat diketahui. Validitas jawaban ini dapat dibuktikan dengan induksi matematika. Sebagai langkah basis, dapat dijelaskan bahwa rumus tersebut benar untuk $\mathrm{n} = 0$ karena $\mathrm{P_0}$ adalah syarat awal. Pada langkah hipotesis diasumsikan bahwa $\mathrm{P_n} = (1{,}11)^{\mathrm{n}}\mathrm{P_0}$. Berdasarkan relasi rekurensi dan hipotesis induksi tersebut di atas, diperoleh

$$\mathrm{P_{n+1}} = (1{,}11)\mathrm{P_n} = (1{,}11)(1{,}11)^{\mathrm{n}}\mathrm{P_0} = (1{,}11)^{\mathrm{n+1}}\mathrm{P_0}.$$

Hal ini menunjukkan bahwa rumus eksplisit untuk $\mathrm{P_n}$ adalah pernyataan yang benar. Subtitusi $\mathrm{n} = 30$ ke dalam rumus $\mathrm{P_n} = (1{,}11)^{\mathrm{n}}\mathrm{P_0}$ maka setelah 30 tahun, tabungan nasabah yang bersangkutan adalah $\mathrm{P_{30}} = (1{,}11)^{30}(100.000.000) = 2.289.229.657{,}19.$

Contoh 6.4. Laju pertumbuhan populasi suatu negara adalah 2% per tahun. Carilah relasi rekurensi populasi setelah *n* tahun, jika diketahui jumlah populasi saat ini adalah P_0.

Jawab: Diketahui jumlah populasi saat ini adalah P_0. Pertumbuhan populasi 2% = 0,02 per tahun

Maka:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + 0,02P_0 = 1,02P_0 \\
P_2 &= P_1 + 0,02P_1 = 1,02P_0 + 0,02(1,02P_0) \\
&= 1,02P_0(1+0,02) = 1,02P_0(1,02) \\
&= (1,02)^2 P_0 \\
P_3 &= (1,02)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1,02)^n P_0
\end{aligned}
$$

Contoh 6.5. Suatu bank membayar bunga 4,5% per tahun. Selain itu nasabah mendapatkan juga bonus \$100 setelah bunga dibayarkan. Tentukanlah relasi rekurensi untuk menyatakan jumlah akumulasi tabungan seorang nasabah setelah *n* tahun jika tabungan awalnya adalah \$200.

Jawab. Diketahui: $a_0 = 200$, bonus $= 100$, bunga $= 0.045$ maka,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_0 + (0,045)a_0 + 100 \\
&= (1,045)a_0 + 100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= (1,045)a_1 + 100 \\
&= (1,045)[(1,045)a_0 + 100] + 100 \\
&= (1,045)^2 a_0 + (1,045)(100) + 100 \\
&= (1,045)^2 a_0 + 100[(1,045) + 1)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= (1,045)^3 a_0 + 100(3,045) \\
&\vdots \\
a_n &= (1,045)^n a_0 + 100[(1,045)^{n-1} + (1,045)^{n-2} + (1,045)^{n-3} + \cdots + (1,045) + 1]
\end{aligned}
$$

Contoh 6.6. Enumerasi Kode. Suatu sistem komputer menerima string digit desimal sebagai kode password yang benar jika string tersebut mengandung digit yang terdiri atas sejumlah genap angka 0. Password 1024305462 dapat digunakan untuk mengakses kompoter sedangkan 10024305462 tidak bisa. Misalkan a_n adalah banyaknya kode password *n*-digit yang benar. Carilah relasi rekurensi untuk a_n.

Jawab. Perhatikan bahwa $a_1 = 9$ karena diketahui ada 10 digit tunggal dan hanya satu string 0 yang tidk valid. Relasi rekurensi dari barisan ini dapat dirumuskan dengan menentukan bagaimana suatu string *n*-digit yang valid dapat diperoleh dari $n-1$ digit. Ada dua cara yang dapat dilakukan.

Pertama, string valid yang terdiri atas *n* digit dapat diperoleh dengan menambahkan digit bukan nol terhadap suatu string valid yang terdiri atas $n-1$ digit. Cara ini dapat dilakukan dalam 9 cara. Karena itu suatu berdasarkan cara ini, string valid yang terdiri atas *n* digit dapat dibentuk dengan $9a_{n-1}$ cara.

Kedua, string valid *n*-digit dapat diperoleh dengan menambahkan digit 0 terhadap suatu string invalid yang terdiri atas $n-1$ digit. Hal ini akan menghasilkan string yang terdiri atas digit 0 berjumlah genap, karena string invalid yang panjangnya $n-1$ digit memiliki angka 0 yang berjumlah ganjil. Cara ini dapat dilakukan sebanyak jumlah $(n-1)-\text{digit}$ string yang invalid. Karena ada sebanyak 10^{n-1} string yang panjangnya $n-1$ dan a_{n-1} di antaranya adalah string yang valid, maka ada $10^{n-1}-a_{n-1}$ string *n*-digit valid yang diperoleh dengan cara menambahkan digit 0 pada string invalid yang panjangnya $n-1$ digit. Karena semua string valid tersebut di atas panjangnya *n*-digit dan diperoleh dari salah satu dari kedua cara di atas, maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya string valid yang terdiri atas *n*-digit adalah

$$\begin{aligned} a_n &= 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) \\ &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

Contoh 6.7. Carilah relasi rekurensi untuk C_n yaitu banyaknya cara memasang tanda kurung untuk perkalian dari $n+1$ bilangan, yaitu $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, untuk menandai orde perkalian. Sebagai contoh, $C_3 = 5$ karena ada lima cara memasang tanda kurung untuk menandai orde perkalian bilangan-bilangan $x_{0,} x_1, x_2, x_3$:

$$\begin{array}{lll} ((x_0 \cdot x_1)\cdot x_2)\cdot x_3 & (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2))\cdot x_3 & (x_0 \cdot x_1)\cdot (x_2 \cdot x_3) \\ x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2)\cdot x_3) & x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) & \end{array}$$

Jawab: Untuk menyusun relasi rekurensi dari C_n, dapat dilihat bahwa dengan cara yang bagaimanapun menempatkan tanda kurung untuk menyatakan orde perkalian pada $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdots\cdot x_n$, selalu terdapat satu operator "$\cdot$" yang berada di luar cakupan semua tanda kurung, yaitu operator perkalian yang terakhir dilakukan. Operator ini muncul di antara dua dari $n+1$ bilangan, misalnya antara x_k dan x_{k+1}. Terdapat $C_k C_{n-k-1}$ cara untuk memasang tanda kurung dari $n+1$ bilangan yang akan dikalikan, jika operator yang terakhir muncul di antara x_k dan x_{k+1} karena terdapat C_k cara memasang tanda kurung dalam perkalian bilangan-bilangan $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_k$ dan terdapat C_{n-k-1} cara memasang tanda kurung dalam perkalian bilangan-bilangan $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot x_{k+3} \cdot \cdots \cdot x_n$ untuk menentukan orde perkalian dari $n-k$ bilangan yang akan diperkalikan. Karena operator terakhirnya muncul di antara sebarang dua $n+1$ bilangan, maka:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa syarat awal yang digunakan adalah $C_0 = 1$ dan $C_1 = 1$. Relasi rekurensi ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode fungsi pembangkit sehingga diperoleh $C_n = C(2n, n)/(n+1)$.

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai penyelesaian relasi rekurensi, di bawah ini akan dijelaskan teknik dekomposisi pecahan parsial yang digunakan di dalam kalkulus. Teknik dekomposisi dapat diterapkan untuk mengubah bentuk $p(x)/q(x)$ menjadi bentuk jumlahan dari dua polinomial, dimana derajat $p(x)$ lebih rendah dari $q(x)$ misalnya

$$\frac{6x+1}{(2x-1)(2x+3)} = \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{2x+3}$$

B. Dekomposisi Pecahan Parsial

Jika pecahan pasrial $p(x)/q(x)$ diketahui dengan derajat $p(x)$ lebih rendah dari pada derajat $q(x)$ dan $q(x)$ memiliki faktor yang berbentuk $(ax+b)^m$, maka dekomposisinya mengandung jumlahan yang berbentuk

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m} \tag{6.84}$$

dengan A_i merupakan suatu bilangan rasional. Pada tahap ini mahasiswa sudah dapat menerapkan dekomposisi pecahan parsial dan fungsi pembangkit untuk menyelesaikan relasi rekurensi.

Contoh 6.8. Nyatakanlah $\frac{x}{(1-x)(1-2x)}$ sebagai jumlah dari pecahan parsial tertentu.

Jawab: Karena penyebut mengandung dua faktor linier, maka dapat diasumsikan

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$$

Untuk menentukan nilai A dan B, maka kedua sisi dari kesamaan di atas dikalikan dengan $(1-x)(1-2x)$ sehingga diperoleh:

$$x = A(1-2x) + B(1-x)$$
$$x = A - 2Ax + B - Bx = (A+B) + (-2A-B)x$$
$$\Leftrightarrow (A+B) = 0 \text{ dan } (\text{-2A-B}) = 1$$
$$\Leftrightarrow A = -B \text{ sehingga } -2(-B) - B = 1, B = 1 \Rightarrow A = -1$$

Jadi,

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Contoh 6.9. Nyatakanlah $\frac{x}{1-x-x^2}$ sebagai jumlahan dari pecahan parsial tertentu.

Jawab: Pertama, faktorkan $1-x-x^2$ sebagai berikut:

$$1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$$

dimana $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Perhatikan bahwa $\alpha+\beta = 1$, $\alpha\beta = 1$, dan $\alpha - \beta = \sqrt{5}$.

Selanjutnya misalkan bahwa

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{A}{(1-\alpha x)} + \frac{B}{(1-\beta x)}$$

maka

$$x = A(1-\beta x) + B(1-\alpha x) = (A+B) + (-\beta A - \alpha B)x$$
$$\Leftrightarrow (A+B) = 0 \text{ dan } -\beta A - \alpha B = 1$$
$$\Leftrightarrow A = -B \text{ dan } -\beta(-B) - \alpha B = 1 \Rightarrow (\beta - \alpha)B = 1$$
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (\beta - \alpha) = -\sqrt{5}.$$
$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ A = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Jadi,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)$$

Contoh 6.10. Nyatakanlah $\dfrac{2-9x}{1-6x+9x^2}$ sebagai jumlahan dari pecahan parsial tertentu.

Jawab: Seperti pada Contoh 6.9, langkah pertama menyelesaikan masalah ini adalah dengan memfaktorkan penyebut $1-6x+9x^2 = (1-3x)^2$. Berdasarkan aturan dekomposisi,

$$\frac{2-9x}{1-6x+9x^2} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{(1-3x)^2}$$

Sehingga $2-9x = A(1-3x) + B$. Dari sini akan diperoleh A= 3 dan B = -1.

Oleh karena itu

$$\frac{2-9x}{1-6x+9x^2} = \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{(1-3x)^2}\ \frac{2-9x}{1-6x+9x^2} = \frac{3}{1-3x} - \frac{1}{(1-3x)^2}$$

C. Relasi Rekurensi dan Fungsi Pembangkit Rasional

Barisan Fibonacci didefinisikan dengan relasi rekurensi linier $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Dengan menggunakan relasi ini bersama dengan dua suku pertama dari barisan tersebut maka fungsi pembangkit dapat dirumuskan secara eksplisit. Fungsi pembangkit tersebut merupakan fungsi rasional, yaitu rasio dari dua polinomial. Penurunan fungsi pembangkit tersebut tidak menggunakan bentuk khusus dari relasi rekurensi. Dengan cara yang sama dapat dibuktikan teorema yang menyerupai fungsi pembangkit dari sebarang barisan yang dihasilkan dari relasi rekurensi linier.

B.7. Penyelesaian Relasi Rekurensi

Definisi rekursif dari suatu fungsi *f* tidak memberikan rumusan yang eksplisit untuk $f(n)$ tetapi memberikan prosedur sistematis untuk menentukan $f(n)$ itu sendiri. Pada bagian ini akan digambarkan suatu metode iteratif dalam mencari rumus $f(n)$ dari bentuk relasi rekurensi sederhana. Menyelesaikan relasi rekurensi dari fungsi *f* artinya mencari rumusan eksplisit untuk $f(n)$. Metode iterasi untuk menyelesaikan relasi rekurensi terdiri atas dua langkah:

- Menerapkan rumus rekurensi secara iteratif dan mencari suatu pola tertentu untuk memperkirakan rumus eksplisit.
- Menggunakan induksi untuk membuktikan bahwa rumus tersebut berlaku untuk semua nilai yang mungkin dari bilangan bulat *n*.

Definisi 6.2. Suatu relasi rekurensi homogen linier yang berderajat *k* dan berkoefisien konstan adalah relasi rekurensi yang berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}, \tag{6.85}$$

dimana $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k$ adalah bilangan-bilangan real dan $c_k \neq 0$.

Relasi rekurensi di dalam definisi dikatakan **linier** karena ruas kanan di dalam persamaan tersebut merupakan jumlahan dari suku-suku yang muncul lebih dulu di dalam barisan. Relasi rekurensi juga dikatakan **homogen** karena tidak ada suku yang muncul yang bukan kelipatan dari a_j. Semua koefisien suku-suku dalam barisan tersebut adalah **konstan**, bukan fungsi yang nilainya bergantung pada *n*. **Derajat** dari relasi rekurensi adalah *k* karena a_n dinyatakan sebagai barisan yang suku-sukunya ditentukan oleh suku-suku yang mendahuluinya.

Konsekuensi dari prinsip kedua induksi matematika adalah bahwa suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi di dalam definisi ditentukan secara unik oleh relasi rekurensi ini dan *k* syarat-syarat awal:

$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \cdots, a_{k-1} = C_{k-1}.$

Suatu relasi rekurensi linier berkoefisien konstan dapat dinyatakan dalam bentuk $C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \ \ldots \ + C_k a_{n-k} = f(n).$ Jika $f(n) = 0,$ maka diperoleh relasi rekurensi yang memenuhi

$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ \ldots \ + C_k a_{n-k} = 0.$

Relasi rekurensi seperti ini dinamakan relasi rekurensi homogen dan penyelesaiannya dinamakan penyelesaian homogen. Untuk mencari penyelesaian dari suatu relasi rekurensi perlu diketahui dua jenis penyelesaian, yaitu:

1. Penyelesaian homogen yang diperoleh dari relasi rekurensi linier dengan memilih nilai $f(n) = 0.$
2. Penyelesaian khusus yang memenuhi relasi rekurensi sebenarnya.

Penyelesaian total dari suatu relasi rekurensi adalah jumlah dari penyelesaian homogen dan penyelesaian khusus. Misalkan $a_n^{(h)} = \left(a_0^{(h)}, \ a_1^{(h)}, \ \ldots\right)$ adalah penyelesaian homogen yang diperoleh dan $a_n^{(p)} = \left(a_0^{(p)}, \ a_1^{(p)}, \ \ldots\right)$ adalah penyelesaian khusus yang diperoleh, maka penyelesaian total dari relasi rekurensi yang dimaksud adalah

$$a_n = a^{(h)} + a^{(p)} \tag{6.86}$$

Berikut ini adalah relasi rekurensi homogen linier dengan derajat tertentu. Relasi rekurensi $P_n = (1{,}11)P_{n-1}$ merupakan suatu relasi rekurensi homogen linier berderajat satu. Relasi rekurensi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi homogen linier berderajat dua. Relasi rekurensi $a_n = a_{n-5}$ merupakan relasi rekurensi homogen linier berderajat lima.

Beberapa sifat relasi rekurensi. Relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ tidak linier. Relasi rekurensi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ tidak homogen. Relasi rekurensi $B_n = nB_{n-1}$ tidak memiliki koefisien konstan.

Teorema 6.2. Misalkan suatu barisan a_n dinyatakan sebagai relasi rekurensi linier berderajat *k* dan berkoefisien konstan $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_k,$

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n, \tag{6.87}$$

dan misalkan elemen-elemen $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}$, diketahui. Maka fungsi pembangkit $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$ adalah rasional, karena $A(s) = P(s)/Q(s)$, dimana Q adalah suatu polinomial berderajat k, dan P adalah suatu polinomial berderajat paling tinggi $k - 1$.

Bukti. Pembuktian Teorema 6.2. sama dengan penjelasan untuk barisan Fibonacci. Dengan mengalikan fungsi pembangkit $A(s)$ dengan $c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_k s^k$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
(c_1 s + c_2 s^2 + \cdots &+ c_k s^k) A(s) \\
= c_1 a_0 s &+ c_1 a_1 s^2 + c_1 a_2 s^3 + \cdots + c_1 a_{k-1} s^k + \cdots \\
&+ c_2 a_0 s^2 + c_2 a_1 s^3 + \cdots + c_2 a_{k-2} s^k + \cdots \\
&\qquad + c_3 a_0 s^3 + \cdots + c_3 a_{k-3} s^k + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \\
&\qquad\qquad + c_k a_0 s^k + \cdots \\
= P(s) &+ A(s),
\end{aligned}$$

dimana derajat polinomial P paling tinggi sama dengan $k - 1$. Artinya, koefisien dari s^{n+k} pada ruas kanan dari identitas pertama sama dengan ruas kanan Persamaan 6.2. dengan demikian Teorema 6.2 terbukti. Pada teorema tertentu telah ditunjukkan suatu pernyataan yang lebih spesifik, membuktikan bahwa polinomial Q adalah

$$Q(s) = 1 - c_1 s - c_2 s^2 - \cdots - c_k s^k. \tag{6.88}$$

Penurunan vektor fungsi pembangkit untuk barisan Fibonacci juga menunjukkan generalisasi langsung pada kasus sebarang barisan rekursif. Pada kasus umum, vektor dua dimensi harus diganti dengan vektor k-dimensi

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

dan transformasi matriks A yang terkait dengan relasi rekurensi akan didapatkan dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \tag{6.89}$$

Hasilnya adalah vektor fungsi pembangkit

$$\overline{A}(s) = (I - sA)^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}. \tag{6.90}$$

Contoh 6.11. Gunakan fungsi pembagkit untuk menyelesaikan relasi rekurensi $b_n = 2b_{n-1} + 1$, dengan $b_1 = 1$.

Jawab: Perhatikan bahwa syarat $b_1 = 1$ menghasilkan $b_0 = 0$. Untuk menentukan barisan b_n yang memenuhi relasi rekurensi tersebut di atas, perhatikan fungsi pembangkit yang bersesuaian:

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

maka

$$2g(x) = 2b_1 x^2 + 2b_2 x^3 + \cdots + 2b_{n-1} x^n + \cdots$$

Demikian juga,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

maka

$$\begin{aligned} g(x) - 2xg(x) - \frac{1}{1-x} &= -1 + (b_1 - 1)x + (b_2 - 2b_1 - 1)x^2 + \cdots \\ &\quad + (b_n - 2b_{n-1} - 1)x^n + \cdots \\ &= -1 \end{aligned}$$

Karena $b_1 = 1$ dan $b_n = 2b_{n-1} + 1$ untuk $n \geq 2$,

$$(1-2x)g(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

maka

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)x^n.
\end{aligned}
$$

Tetapi karena

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \text{ maka } b_n = 2^b - 1, n \geq 1.$$

Contoh 6.12. Dengan menggunakan fungsi pembangkit, tentukan relasi rekurensi Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dimana $F_1 = 1 = F_2$.

Jawab: Perhatikan bahwa kedua syarat awal menghasilkan $F_0 = 0.$ Selanjutnya misalkan $g(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + \cdots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan Fibonacci. Karena orde dari F_{n-1} dan F_{n-2} masing-masing lebih rendah sebanyak 1 dan 2 dari orde F_n maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
xg(x) &= F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \cdots + F_{n-1} x^n + \cdots \\
x^2 g(x) &= F_1 x^3 + F_2 x^4 + F_3 x^5 + \cdots + F_{n-2} x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
g(x) - xg(x) - x^2 g(x) &= F_1 x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \cdots \\
&= (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \cdots \\
&= x
\end{aligned}
$$

Karena

$$F_2 = F_1 \text{ dan } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Dengan demikian

$$
\begin{aligned}
(1-x-x^2)g(x) &= x \\
g(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x}\right)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Selanjutnya

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5}g(x) &= \frac{1}{1-\alpha x}-\frac{1}{1-\beta x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^n-\beta^n\right)x^n
\end{aligned}
$$

Maka

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^n-\beta^n)}{\sqrt{5}}x^n$$

Sehingga berdasarkan kesamaan fungsi pembangkit,

$$F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

Yang merupakan bentuk Binet dari F_n.

Contoh 6.13. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dimana $a_0 = 2$ dan

$a_1 = 3$.

Jawab: Misalkan $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$

maka

$$6xg(x) = 6a_0x + 6a_1x^2 + 6a_2x^3 + \cdots + 6a_{n-1}x^n + \cdots$$

dan

$$9x^2g(x) = 9a_0x^2 + 9a_1x^3 + 9a_2x^4 + \cdots + 9a_{n-2}x^n + \cdots$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} g(x) - 6xg(x) - 9x^2g(x) &= a_0 + (a_1 - 6a_0)x + (a_2 - 6a_1 - 9a_0)x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_n - 6a_{n-2} + 9a_{n-2})x^2 + \cdots \\ &= 2 - 9x \end{aligned}$$

sesuai dengan syarat batas yang diberikan. Jadi $(1 - 6x + 9x^2)g(x) = 2 - 9x$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2 - 9x}{1 - 6x + 9x^2} \\ &= \frac{3}{1 - 3x} - \frac{1}{(1 - 3x)^2} \\ &= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)3^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[3^{n+1} - (n+1)3^n\right]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n(2 - n)x^n \end{aligned}$$

Jadi $a_n = (2 - n)3^n, n \geq 0.$

Contoh 6.14. Buktikan bahwa $C_1 3^n + C_2(-2)^n$ adalah penyelesaian umum dari $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$

Bukti

Cara I: $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk yang ekivalen, yaitu

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

Penyelesaian relasi rekurensi ini berbentuk

$$a_n = r^n,$$

jika dan hanya jika

$$r^n = \alpha_1 r^{n-1} + \alpha_2 r^{n-2}$$

dengan

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 6$$

Jadi

$$r^n = r^{n-1} + 6r^{n-2}$$

Selanjutnya, jika kedua ruas dikali dengan $\frac{1}{r^{n-2}}$ maka akan diperoleh

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{6r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

sehingga persamaan karakteristiknya

$$r^2 = r + 6 \Leftrightarrow r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow (r-3)(r+2) = 0$$

Jadi akar-akar karakteristiknya adalah $r = 3$ atau $r = -2$

Dan penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} a_n &= C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n \\ &= C_1(3)^n + C_2(-2)^n \end{aligned}$$

Cara II: Perhatikan bahwa $C_1 3^n + C_2(-2)^n$ adalah solusi umum dari $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ untuk sebarang C_1 dan C_2.

Misalkan $a_n = C_1 3^n + C_2(-2)^n$

maka $\left[C_1 3^n + C_2(-2)^n\right] - \left[C_1 3^{n-1} + C_2(-2)^{n-1}\right] - 6\left[C_1 3^{n-2} + C_2(-2)^{n-2}\right] = 0$

$$\left[C_1 3^n - C_1 3^{n-1} - 6C_1 3^{n-2}\right] + \left[C_2(-2)^n - C_2(-2)^{n-1} - 6C_2(-2)^{n-2}\right] = 0$$

$$C_1 3^n\left[1 - \frac{1}{3} - \frac{6}{9}\right] + C_2(-2)^n\left[1 - \frac{1}{(-2)} - \frac{6}{4}\right] = 0$$

$$C_1 3^n\left[\frac{9}{9} - \frac{3}{9} - \frac{6}{9}\right] + C_2(-2)^n\left[\frac{4}{4} + \frac{2}{4} - \frac{6}{4}\right] = 0$$

$$C_1 3^n(0) + C_2(-2)^n(0) = 0$$

Dari persamaan di atas, maka berlaku untuk sebarang C_1 dan C_2.

Jadi $C_1 3^n + C_2(-2)^n$ adalah penyelesaian umum dari $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$.

Contoh 6.15. Buktikan bahwa $C_1 2^n + C_2 n 2^n$ adalah penyelesaian umum dari $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$

Bukti: Cara I.

Persamaan $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ dapat dinyatakan dalam bentuk yang ekivalen, yaitu:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

sehingga

$$r^n = \alpha_1 r^{n-1} + \alpha_2 r^{n-2}$$

dengan

$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -4$

Jadi,

$r^n = 4r^{n-1} - 4r^{n-2}$

Jika persamaan ini dikali dengan $\frac{1}{r^{n-2}}$ maka akan diperoleh

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{4r^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{4r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

atau

$$r^2 = 4r - 4 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 4r + 4 = 0$$
$$(r-2)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2.$$

Penyelesaian untuk akar-akar yang sama,

$$a_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n = C_1(2)^n + C_2(2)^n$$

Cara II: Perhatikan bahwa $C_1 2^n + C_2 n 2^n$ adalah penyelesaian umum dari

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

jika berlaku sebarang C_1 dan C_2.

Misalkan

$$a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

maka

$$\left[C_1 2^n + C_2 n 2^n\right] - 4\left[C_1 2^{n-1} + C_2(n-1)2^{n-1}\right] + 4\left[C_1 2^{n-2} + C_2(n-2)2^{n-2}\right] = 0$$

$$\left[C_1 2^n - 4C_1 2^{n-1} + 4C_1 2^{n-2}\right] + \left[C_2 n 2^n - 4C_2(n-1)2^{n-1} + 4C_2(n-2)2^{n-2}\right] = 0$$

$$C_1 2^n\left[1-2+1\right] + C_2 2^n\left[n-2(n-1)+(n-2)\right] = 0$$

$$C_1 2^n[0] + C_2 2^n[0] = 0$$

Dari persamaan di atas, maka berlaku untuk sebarang C_1 dan C_2.

Jadi

$$C_1 2^n + C_2 n 2^n$$

adalah penyelesaian umum dari

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0.$$

Contoh 6.16. Selesaikan relasi rekurensi dari $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$, $n \geq 3$.

Jawab: Dengan menggunakan persamaan karakteristik maka diperoleh $x^2 - 4x + 4 = 0$, dengan akar-akarnya adalah $x = 2$ dan $x = 2$. Sehingga penyelesaian umumnya adalah $C_1 2^n + C_2 n 2^n$, karena mempunyai dua akar yang sama.

$n = 1$, maka $2C_1 + 2C_2 = 2$, karena $a_1 = 2$.

$n = 2$, maka $4C_1 + 8C_2 = 6$, karena $a_2 = 6$.

Dari kedua persamaan maka diperoleh $C_1 = \frac{1}{2}$ dan $C_2 = \frac{1}{2}$.

Sehingga penyelesaian dari relasi rekurensi di atas adalah $\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}n2^n = 2^{n-1} + n2^{n-1}$

Contoh 6.17. Selesaikan relasi rekurensi dari $a_1 = 5$, $a_2 = -5$, $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $n \geq 3$.

Jawab: Dengan menggunakan persamaan karakteristik maka diperoleh $x^2 + 6x + 9 = 0$, yang akar-akarnya adalah $x = -3$ dan $x = -3$. Sehingga penyelesaian umumnya adalah $C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n$, karena mempunyai dua akar yang sama.

$n = 1$, maka $-3C_1 - 3C_2 = 5$, karena $a_1 = 5$.

n = 2 , maka $9C_1 + 18C_2 = -5,$ karena $a_2 = -5$.

Dari kedua persamaan maka diperoleh $C_1 = -\frac{25}{9}$ dan $C_2 = \frac{10}{9}$.

Sehingga penyelesaian relasi rekurensi tersebut adalah

$$-\frac{25}{9}(-3)^n + \frac{10}{9}n(-3)^n = (10n - 25n)(-1)^n (3)^{n+2}$$

Contoh 6.18. Selesaikan relasi rekurensi dari

$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} = 8a_{n-3},\ n \ge 3$

Jawab: Cara I. Menggunakan Fungsi Pembangkit

Misalkan penyelesaian a_n dengan menggunakan fungsi pembangkit adalah

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

rekurensi $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 0,\ n \ge 3$ kalikan kedua sisi dengan x^n, maka diperoleh $a_nx^n - 6a_{n-1}x^n + 12a_{n-2}x^n - 8a_{n-3}x^n = 0,\ n \ge 3$.

Jumlahkan kedua sisi dimulai dari n = 3, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n - 6\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n + 12\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n - 8\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^n = 0 .$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n &= a_3x^3 + a_4x^4 + ... \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...) - a_0 - a_1x - a_2x^2 . \\ &= g(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2\end{aligned}$$

Dengan demikian $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = g(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n = a_2x^3 + a_3x^4 + ... &= (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + ...) - a_0x - a_1x^2 \\ &= x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...) - a_0x - a_1x^2 \\ &= x[g(x)] - a_0x - a_1x^2 = x[g(x) - a_0 - a_1x]\end{aligned}$$

Sehingga $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n = x[g(x) - a_0 - a_1x]$

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n = a_1x^3 + a_2x^4 + \dots$$
$$= x^2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\right) - a_0x^2$$
$$= x^2\left[g(x) - a_0\right]$$

Sehingga

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n = x^2\left[g(x) - a_0\right]$$

Demikian juga

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n = a_0x^3 + a_1x^4 + \dots = x^3\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\right) = x^3\left[g(x)\right]$$

Menunjukkan bahwa $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n = x^3\left[g(x)\right]$

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_nx^n - 6\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^n + 12\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n - 8\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^n = 0$$

$$\left[g(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2\right] - 6x\left[g(x) - a_0 - a_1x\right] + 12x^2\left[g(x) - a_0\right] - 8x^3\left[g(x)\right] = 0$$

$$\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]g(x) + \left[6a_1 - 12a_0 - a_2\right]x^2 + \left[6a_0 - a_1\right]x - a_0 = 0$$

$$\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]g(x) = a_0 - \left[6a_1 - 12a_0 - a_2\right]x^2 - \left[6a_0 - a_1\right]x$$

$$g(x) = \frac{a_0 - \left[6a_1 - 12a_0 - a_2\right]x^2 - \left[6a_0 - a_1\right]x}{\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]},\ a_0 = 0\ a_1 = 0,\ a_2 = 1 \text{ maka}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{\left[1 - 6x + 12x^2 - 8x^3\right]} = \frac{x^2}{(1-2x)^3}.$$

dan

$$g(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^3}$$

Dengan menggunakan identitas

$$\frac{1}{(1-2x)^3} = \left(1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots\dots\right)^3 = 1 + \binom{3}{1}2x + \binom{4}{2}(2x)^2 + \binom{5}{3}(2x)^3 + \dots, \text{maka}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^3} = x^2\left[1 + \binom{3}{1}2x + \binom{4}{2}(2x)^2 + \binom{5}{3}(2x)^3 + \ldots\right]$$

$$= \left[x^2 + \binom{3}{1}2x^3 + \binom{4}{2}2^2x^4 + \binom{5}{3}2^3x^5 + \ldots + \binom{n}{n-2}2^{n-2}x^n + \ldots\right]$$

Sehingga koefisien x^n adalah $\binom{n}{n-2}2^{n-2} = (2)^{n-2}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right] = (2)^{n-3}(n(n-1))$.

Jadi $a_n = (2)^{n-3}(n(n-1))$.

Cara II. Menggunakan persamaan karakteristik

Dengan menggunakan persamaan karakteristik diperoleh $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, yang akar-akarnya $x_1 = x_2 = x_3 = 2$. Jadi solusi umumnya adalah $C_1 2^n + C_2 n2^n + C_3 n^2 2^n$, karena mempunyai tiga akar yang sama.

$n = 0$, maka $C_1 = 0$, karena $a_0 = 0$.

$n = 1$, maka $2C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0$ atau, karena $a_1 = 0$.

$n = 2$, maka $4C_1 + 8C_2 + 16C_3 = 2$, karena $a_2 = 1$.

Dari kedua persamaan maka diperoleh $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{8}$ dan $C_3 = \frac{1}{8}$.

Sehingga penyelesaian dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n = n2^{n-3} + n^2 2^{n-3}$.

B.8. Penyelesaian Homogen Dari Relasi Rekurensi

Penyelesaian homogen dari suatu relasi rekurensi linier dapat ditentukan dengan memilih nilai $f(n) = 0$. Penyelesaian homogen dari suatu persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan dinyatakan dalam bentuk $A\alpha^n$, dimana α adalah akar karakteristik dan A adalah konstanta yang nilainya akan ditentukan kemudian untuk memenuhi syarat batas yang diberikan. Substitusi $A\alpha^n$ untuk a_n dari persamaan homogen $C_0a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \ldots + C_ka_{n-k} = 0$, diperoleh

$$C_0Aa^n + C_1Aa^{n-1} + C_2Aa^{n-2} + \ldots + C_kAa^{n-k} = 0. \quad (6.91)$$

Dengan penyederhanakan persamaan tersebut, diperoleh

$$C_0a^n + C_1a^{n-1} + C_2a^{n-2} + \ldots + C_ka^{n-k} = 0 \quad (6.92)$$

Persamaan ini merupakan persamaan karakteristik dari persamaan diferensial yang diberikan. Jadi Jika α adalah akar karakteristik dari persamaan karakteristik ini, maka Aa^n akan memenuhi persamaan homogen. Jadi, penyelesaian homogen yang dicari akan berbentuk Aa^n. Jika persamaan karakteristik memiliki *k* akar karakteristik yang berbeda $(a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_k)$, maka penyelesaian homogen dari relasi rekurensi yang dimaksud adalah

$$a_n^{(h)} = A_1 a_1^{\,n} + A_2 a_2^{\,n} + \ \ldots \ + A_k a_k^{\,n} \tag{6.93}$$

dimana α_i adalah akar karakteristik dari persamaan karakeristik yang diperoleh, sedangkan A_i adalah konstanta yang akan dicari untuk memenuhi syarat batas yang ditentukan.

Contoh 6.19. Tentukan penyelesaian homogen dari relasi rekurensi $b_n + b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$ dengan syarat batas $b_0 = 0,\ \ b_1 = 1.$

Jawab. Relasi rekurensi tersebut adalah relasi rekurensi homogen, karena f(n)=0. Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi $b_n + b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$ adalah

$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$ atau $(\alpha + 3)(\alpha - 2) = 0$

hingga diperoleh akar-akar karakteristik $\alpha_1 = -3$ dan $\alpha_2 = 2$.

Karena akar-akar karakteristiknya berbeda, maka penyelesaian homogennya berbentuk

$b_n^{(h)} = A_1 \alpha_1^{\,n} + A_2 \alpha_2^{\,n} \quad \Rightarrow \quad b_n^{(h)} = A_1 \left(-3\right)^n + A_{2\,.} 2^n.$

Dengan kondisi batas $b_0 = 0$ dan $b_1 = 1$, maka

$b_0^{(h)} = A_1 \left(-3\right)^0 + A_2 2^0 \quad \Rightarrow \ 0 = A_1 + A_2.$

$b_1^{(h)} = A_1 \left(-3\right)^1 + A_2 2^1 \quad \Rightarrow \ 1 = -3\ A_1 + 2A_2.$

bila diselesaikan maka akan diperoleh nilai $A_1 = (-1/5)$ dan $A_2 = 1/5$, sehingga jawab homogen dari relasi rekurensi $b_n + b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$ adalah

$b_n^{(h)} = -\frac{1}{5}\left(-3\right)^n + \frac{1}{5} 2^n.$

Jika akar karakteristik α_1 dari persamaan karakteristik merupakan akar ganda yang berulang sebanyak *m* kali, maka bentuk penyelesaian homogen yang sesuai untuk akar ganda tersebut adalah

$$\left(A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2} + \ \ldots \ + A_{m-2} n^2 + A_{m-1} m + A_m\right) a_1^{\,n} \tag{6.94}$$

dimana A_i adalah konstanta yang akan ditentukan untuk memenuhi syarat batas.

Contoh 6.20. Tentukan, apakah barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi yang dirumuskan dengan $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n = 2, 3, 4, \cdots$ dimana $a_n = 3n$ untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*. Tentukan juga, apakah $\{a_n\}$ adalah penyelesaian relasi rekurensi dan *n* tersebut di atas jika $a_n = 2^n$ dan jika $a_n = 5$.

Jawab. Misalkan $a_n = 3n$ untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*. Maka untuk $n \geq 2$, dapat ditunjukkan bahwa $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 2(n-2) = 3n = a_n$. Oleh sebab itu barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dengan $a_n = 3n$. Selanjutnya andaikan bahwa $a_n = 2^n$ untuk setiap bilangan non-negatif *n*. Perhatikan bahwa $a_0 = 1, a_1 = 2, \text{dan } a_2 = 4$. Karena $2a_1 - a_0 = 2.2 - 1 \ = 3 \neq a_2$, maka diketahui bahwa barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = 2^n$ bukanlah penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut di atas.

Selanjutnya misalkan $a_n = 5$ untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*. Maka untuk $n \geq 2$, dapat ditunjukkan bahwa $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2.5 - 5 = 5 = a_n$.

dengan demikian $\{a_n\}$ dengan $a_n = 5$ merupakan suatu penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut di atas.

Contoh 6.21. Tentukan penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$

Jawab. Relasi rekurensi homogen $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$

Persamaan karakteristiknya adalah $a^2 + 4a + 4 = \ 0$ atau $(a+2)\ (a+2) = 0$

hingga diperoleh akar-akar karakteristik $\alpha_1 = \alpha_2 = -2, \ \ m = 2$.

Akar-akar karakteristiknya sama maka penyelesaian homogennya berbentuk

$$a_n^{(h)} = \left(A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2}\right)\alpha_1^{\ n}, \quad a_n^{(h)} = \left(A_1 n + A_2\right)\left(-2\right)^n .$$

Contoh 6.22. Tentukanlah penyelesaian homogen dari relasi rekurensi $4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$

Jawab: Persamaan karakteristiknya adalah $4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 17\alpha - 4 = 0$ dan akar-akar karakteristiknya adalah ½ , ½ dan 4. Dengan demikian penyelesaian homogen dari relasi rekurensi di atas adalah $a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2)(½)^n + A_3 4^n$

Tidak terdapat prosedur atau metode yang khusus untuk menentukan penyelesaian khusus dari suatu relasi rekurensi linier non-homogen. Tetapi penyelesaian khusus untuk relasi rekurensi linier dengan $f(n) \neq 0$, dapat ditentukan dengan menggunakan model yang disesuaikan dengan $f(n)$. Model yang umum digunakan adalah model polinomial atau model eksponensial.

1. Jika $f(n)$ berbentuk polinomial berderajat *t* dalam *n*:

$$F_1 n^t + F_2 n^{t-1} + \ldots + F_t n + F_{t+1}, \tag{6.95}$$

   maka bentuk dari penyelesaian khusus yang sesuai adalah :

$$P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \ldots + P_t n + P_{t+1} \tag{6.96}$$

2. Jika $f(n)$ berbentuk β^n dan β bukan akar karakteristik dari persamaan homogen, maka jawab khusus berbentuk Pb^n
3. Jika $f(n)$ berbentuk $\left(F_1.n^t + F_2.n^{t-1} + \ldots + F_t.n + F_{t+1}\right)b^n$ dan β <u>bukan</u> akar karakteristik dari persamaan homogen, maka penyelesaian khusus yang sesuai adalah:

$$\left(P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \ldots + P_t n + P_{t+1}\right)b^n \tag{6.97}$$

4. Jika $f(n)$ berbentuk dan β akar karakteristiknya berulang sebanyak $(m-1)$ kali, maka bentuk penyelesaian khusus yang sesuai adalah :

$$n^{m-1}.\left(P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \ldots + P_t n + P_{t+1}\right)b^n \tag{6.98}$$

Contoh 6.23. Jika $a_r - 7a_{r-1} + 10a_{r-2} = 3^r$, tentukanlah penyelesaian khusus dari a_r.

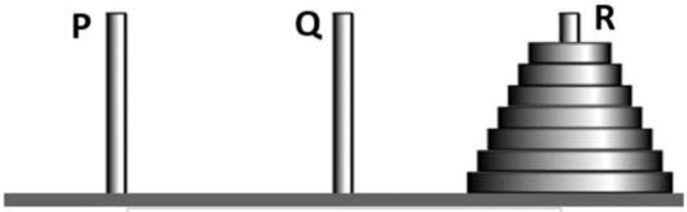
Jawab. Diketahui $f(r)=3^r$. Bentuk $f(r)$ tersebut adalah b^r dengan b = 3 bukan akar karakteristik, maka penyelesaian khusus dari relasi rekurensi tersebut berbentuk $P3^r$. Jadi $a_r = P3^r$.

Contoh 6.24. Menara Brahma (Tower of Hanoi)

Menurut legenda India, pada awal penciptaan, dewa menyusun 64 cakram emas pada salah satu dari tiga tiang emas yang berada di kuil Brahma di Benares (sekarang bernama Varanasi). Rahib yang bertugas diperintahkan untuk memindahkan cakram-cakram tersebut dari tiang P ke tiang R melalui tiang Q sebagai bantuan, dengan syarat sebagai berikut:

- Dalam satu kesempatan, rahib hanya boleh mengangkat satu cakram dari satu tiang ke tiang lainnya.
- Pada saat memindahkan, cakram yang lebih kecil harus diletakkan di atas cakram yang lebih besar.

Jika semua cakram telah dipindahkan ke tiang lainnya, maka dunia akan kiamat.



Gambar 6.1. Menara Hanoi

Misalkan pada tiang P terdapat n cakram dan b_n adalah banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan semua cakram dari tiang P ke tiang R melalui tiang Q sebagai perantara. Tentukanlah b_n secara rekursif.

Penyelesaian

Jika tiang P hanya terdiri dari 1 cakram, maka banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan cincin tersebut adalah 1, dengan kata lain $b_1 = 1$. Selanjutnya asumsikan bahwa $n \geq 2$. Perhatikan ke-$(n-1)$ cakram paling atas pada tiang P. Menurut definisi, diperlukan b_{n-1} langkah untuk memindahkan semua cakram tersebut dari P ke R. Dengan menyelesaikan b_{n-1} langkah maka cakram terbesar yang terletak paling bawah pada tiang

P belum berpindah dari tempatnya; diperlukan 1 langkah untuk memindahkan cakran tersebut ke tiang R. Sekarang, ke-$(n-1)$ cakram di Q dapat dipindahkan dengan $(n-1)$ langkah ke R melalui tiang P. Dengan demikian total langkah untuk memindahkan semua cakram dari P ke R melalui Q adalah $b_{n-1}+1+b_{n-1}=2b_{n-1}+1$. Karena itu b_n dapat ditentukan secara rekursif sebagai berikut:

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{jika n=1}(\text{syarat awal}) \\ 2b_{n-1}+1 & \text{lainnya}(\text{relasi rekurensi}) \end{cases}$$

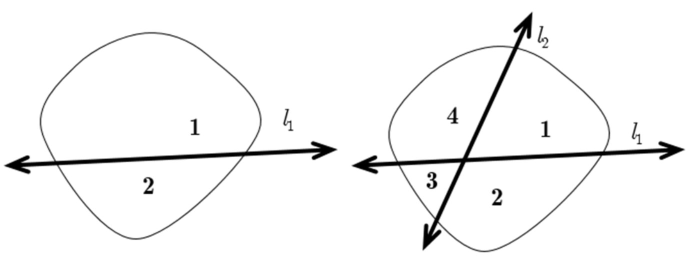
Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} b_4 &= 2b_3+1 & &= 2[2b_2+1]+1 \\ &= 4b_2+2+1 & &= 4[2b_1+1]+2+1 \\ &= 8b_1+4+2+1 & &= 8(1)+4+2+1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Jadi diperlukan 15 langkah untuk memindahkan 4 cakram dari tiang P ke tiang R.

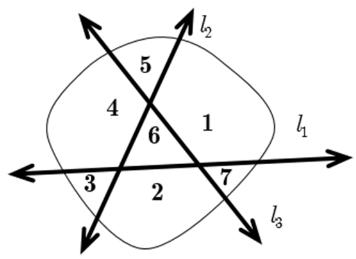
Contoh 6.25. Bayangkan *n* garis terletak pada satu bidang datar sedemikian sehingga tidak terdapat dua garis yang sejajar, dan tidak ada tiga garis yang berpotongan pada satu titik. Misalkan f_n menyatakan banyaknya daerah berbeda pada bidang datar tadi. Definisikanlah f_n secara rekursif.

Penyelesaian. Jika hanya ada satu garis pada bidang datar tersebut, maka $f_1=2$. Misalkan ada garis l_2 pada bidang yang sama, maka garis l_2 berpotongan dengan garis l_1 tepat pada satu titik.



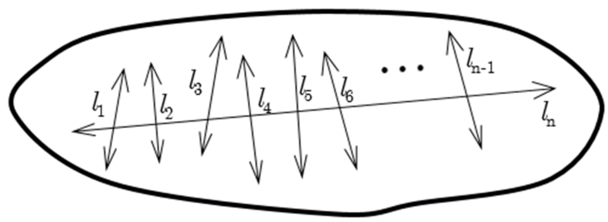
Gambar 6.2. Garis l_1 dan l_2 membagi daerah menjadi dua bagian

Kedua potongan garis l_2 membagi daerah bidang datar menjadi dua bagian, sehingga daerah bidang datar sekarang menjadi empat. Jadi, $f_2 = f_1 + 2 = 4$. Jika ditambahkan lagi garis l_3 maka garis ini terbagi menjadi tiga bagian karena berpotongan dengan garis l_1 dan l_2 masing-masing pada satu titik yang berbeda. Setiap bagian garis membagi daerah yang telah ada menjadi dua bagian, sehingga bertambah tiga daerah. Jadi $f_3 = f_2 + 3 = 7$.



Gambar 6.3. Tiga garis membagi daerah menjadi tujuh bagian

Secara umum, jika ada $n-1$ garis yaitu $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ pada bidang yang sama, maka bidang akan dibagi menjadi f_{n-1} daerah yang terpisah. Jika ditambahkan lagi garis ke-*n,* dan karena tidak ada tiga garis yang saling berpotongan pada titik yang sama, maka garis l_n haruslah memotong garis-garis $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ pada suatu titik lainnya, dan karena itu l_n terbagi menjadi *n* segmen. Setiap segmen garis membagi daerah yang telah ada menjadi dua sub bagian, dengan menambah *n* daerah baru, jadi $f_n = f_{n-1} + n$.



Gambar 6.4. Definisi rekursif *n* garis membagi daerah menjadi $f_{n-1} + n$ bagian

Dengan demikian f_n dapat didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 0 \\ f_{n-1} + n & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Contoh 6.26. Tentukanlah banyaknya jabat tangan yang terjadi jika suatu pesta dihadiri oleh *n* tamu dinyatakan dengan

$h(1) = 0$

dan

$h(n) = h(n-1) + (n-1), n \geq 2$

Selesaikan masalah tersebut dengan relasi rekurensi.

Jawab.

Langkah 1. Mencoba merumuskan $h(n)$:

Dengan menggunakan iterasi,

$$\begin{aligned} h(n) &= h(n-1) + (n-1) \\ &= h(n-2) + (n-2) + (n-1) \\ &= h(n-3) + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\ &\vdots \\ &= h(1) + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Langkah 2. Membuktikan dengan induksi matematika bahwa

$h(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \; n \geq 1$:

Langkah basis: untuk *n* = 1, $h(1) = \frac{1(1-1)}{2} = 0$

sesuai dengan syarat awal. Jadi rumus berlaku untuk *n* = 1.

Langkah induksi: asumsikan bahwa $h(k) = \frac{k(k-1)}{2}, \; k \geq 1.$

Maka berdasarkan prinsip relasi rekurensi, $h(k+1) = h(k) + k,$

dan berasarkan hipotesis induksi,

$$h(k+1) = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1) + 2k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Karena itu, jika rumus berlaku untuk $n = k,$ maka berlaku juga untuk $n = k + 1.$

Jadi berdasarkan prinsip induksi matematika, rumus tersebut di atas berlaku untuk semua $n \geq 1$.

Secara umum, dengan menggunakan iterasi, relasi rekurensi

$a_n = a_{n-1} + f(n)$

dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + f(n) \\
&= [a_{n-2} + f(n-1)] + f(n) = a_{n-2} + f(n-1) + f(n) \\
&= [a_{n-3} + f(n-2)] + f(n-1) + f(n) \\
\\
&= a_{n-3} + f(n-2) + f(n-1) + f(n) \\
&\vdots \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{n} f(i)
\end{aligned}$$

Mahasiswa diharapkan dapat menyelidiki bahwa bentuk tersebut di atas merupakan penyelesaian yang sebenarnya dari masalah relasi rekurensi. Misalnya di dalam Contoh 6.26, jumlah jabat tangan yang terjadi di antara *n* orang, diketahui bahwa $f(n) = n - 1$ dan $h(0) = 0$, sehingga penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut adalah

$$\begin{aligned}
h(n) &= h(0) + \sum_{i=1}^{n} f(i) = 0 + \sum_{i=1}^{n} f(i-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

Contoh 6.27. Perhatikan dari Contoh 6.24 bahwa banyaknya langkah yang dilakukan untuk memindahkan *n* cakram dari tiang P ke R dapat dinyatakan dengan:

$b_1 = 1$

$b_n = 2b_{n-1} + 1, n \geq 2$

Selesaikanlah relasi rekurensi tersebut.

Jawab:

Langkah 1: Merumuskan bentuk b_n :

Dengan menggunakan iterasi,

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2b_{n-1} + 1 \\
&= 2[2b_{n-2} + 1] + 1 = 2^2 b_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2[2b_{n-3} + 1] + 2 + 1 = 2^3 b_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&\vdots \\
&= 2^{n-1} b_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}
$$

Langkah 2: dengan induksi matematika mahasiswa dapat membuktikan bahwa $b_n = 2^n - 1,$ dimana $n \geq 1.$

Dalam bentuk yang lebih umum, mahasiswa juga dapat menyelidiki bahwa penyelesaian dari masalah relasi rekurensi yang berbentuk $a_n = ca_{n-1} + 1$ dengan $c \neq 1$ adalah suatu bilangan konstan, adalah $a_n = c^n a_0 + \dfrac{c^n - 1}{c - 1}.$

Dalam Contoh 6.24, jika $b_0 = 0$ dan $c = 2,$ maka diperoleh

$$b_n = 2^n.0 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Lebih lanjut mengenai mengenai Contoh 6.24 dan 6.27, misalkan ada 64 cakram yang akan dipindahkan dari tiang P ke tiang R dan setiap pemindahan memerlukan waktu 1 detik, maka untuk menyelesaikan tugas memindahkan semua cakram dari tiang P ke tiang R maka akan diperlukan waktu selama $2^{64} - 1$ detik ≈ 600 milyar tahun. Sebagai perbandingan, umur alam semesta sampai sekarang sudah 18 milyar tahun.

D. Relasi Rekurensi Linier Berkoefisien Konstan

Secara umum, relasi rekurensi linier berkoefisien konstan dari suatu fungsi a, dinyatakan sebagai berikut

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_k a_{n-k} = f(n) \qquad (6.99)$$

dimana C_i untuk i = 0,1,2,…,k adalah konstan dan $f(n)$ adalah fungsi dengan variabel n. Relasi rekurensi tersebut dinamakan relasi rekurensi linier berderajat k, jika C_0 dan C_k keduanya tidak bernilai 0 (nol).

Contoh 6.28. Bentuk dan derajat relasi rekurensi

$2a_n + 2a_{n-1} = 3^n$ relasi rekurensi linier berderajat 1

$t_n = 7t_{n-1}$ relasi rekurensi linier berderajat 1

$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ relasi rekurensi linier berderajat 2

$b_{n-3} - 3b_n = n + 3$ relasi rekurensi linier berderajat 3

Untuk relasi rekurensi dengan koefisien konstan derajat *k*, jika diberikan *k* nilai a_j yang berurutan $a_{m-k}, a_{m-k+1}, \dots, a_{m-1}$ pada suatu nilai *m* tertentu, maka setiap nilai a_m yang lainnya dapat ditentukan sebagai berikut:

$$a_m = \left(C_1 a_{m-1} + C_2 a_{m-2} + \dots + C_k a_{m-k} - f(m)\right) \tag{6.100}$$

Nilai a_{m+1} juga dapat ditentukan dengan cara yang sama,

$$a_{m+1} = \left(C_1 a_m + C_2 a_{m-1} + \dots + C_k a_{m-k+1} - f(m+1)\right) \tag{6.101}$$

demikian pula untuk nilai a_{m+2}, a_{m+3} dan seterusnya. Di lain pihak, nilai a_{m-k-1} dapat pula ditentukan dengan

$$a_{m-k-1} = \left(C_1 a_{m-1} + C_2 a_{m-2} + \dots + C_{k-1} a_{m-k} - f(m-1)\right) \tag{6.102}$$

dan a_{m-k-2} dapat dicari dengan

$$a_{m-k-2} = \left(C_1 a_{m-2} + C_2 a_{m-3} + \dots + C_{k-1} a_{m-k-1} - f(m-2)\right). \tag{6.103}$$

Nilai a_{m-k-3} dan seterusnya dapat ditentukan dengan cara yang sama. Jadi, untuk suatu relasi rekurensi linier berkoefisien konstan derajat *k*, jika terdapat nilai *k* banyaknya a_j yang berurutan diketahui, maka nilai a_j yang lainnya dapat ditentukan secara unik. Dengan kata lain, *k* buah nilai a_j yang diberikan merupakan himpunan syarat batas yang harus dipenuhi oleh untuk dapat memperoleh nilai yang unik.

D.1. Relasi Rekurensi Homogen Linier Berkoefisien Konstan

Suatu relasi rekurensi homogen linier yang berkoefisien konstan adalah relasi rekurensi yang berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \tag{6.104}$$

dengan $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ dan $c_k \neq 0$.

Istilah *linier* berarti bahwa setiap suku ruas kanan dari persamaan (6.21) paling tinggi mengandung a_i berpangkat satu. Suatu relasi rekurensi dikatakan *homogen* jika setiap sukur pada ruas kanan dari persamaan (6.21) merupakan kelipatan dari a_i tertentu, dengan kata lain relasi rekurensi tersebut terpenuhi oleh barisan $\{0\}$; yaitu bahwa $a_n = 0$ untuk setiap *n*. semua koefisien c_i adalah konstan. Karena a_n bergantung pada *k* suku yang ada di ruas kanan, maka *orde* dari relasi rekurensi tersebut adalah *k*. Dengan sendirinya, untuk menyelesaikan suatu relasi rekurensi homogen linier berkoefiein konstan orde *k* diperlukan *k* syarat awal, misalnya $a_0 = C_0, a_1 = C_1, \cdots, a_{k-1} = C_{k-1}$. Beberapa bentuk dasar dari relasi rekurensi adalah sebagai berikut:

- Relasi rekurensi $s_n = 2s_{n-1}$ merupakan suatu relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan, berorde satu.
- Relasi rekurensi $a_n = na_{n-1}$ adalah linier dan homogen. Tetapi koefisien di sebelah kanan bukan bilangan konstan. Karena itu $a_n = na_{n-1}$ bukan relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan.
- Relasi rekurensi $h_n = h_{n-1} + (n-1)$ adalah relasi rekurensi linier, tetapi tidak homogen karena adanya $(n-1)$.
- Relasi rekurensi $a_n = a_{n-1}^2 + 3a_{n-2}$ adalah homogen tetapi tidak homogen karena pangkat dari a_{n-1} adalah 2.
- Relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-6}$ adalah relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan berorde 6.

Perhatikan bahwa penyelesaian dari relasi rekurensi $s_n = 2s_{n-1}$ dimana $s_0 = 1$, adalah $s_n = 2^n$, $n \geq 0$. Mahasiswa dapat memeriksa bahwa secara umum, penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = \alpha a_{n-1}$ dimana $a_0 = c$, adalah $a_n = c\alpha^n$, $n \geq 0$. Sekarang kita kembali kepada relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan orde kedua,

$$a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2} \tag{6.105}$$

dimana *a* dan *b* adalah konstanta-konstanta yang bukan nol. Jika persmaan (6.22) memiliki penyelesaian tak-nol yang berbentuk $c\alpha^n$, maka $c\alpha^n = ac\alpha^{n-1} + bc\alpha^{n-2}$. Karena $c\alpha \neq 0$

maka $\alpha^2 = a\alpha + b$; yaitu $\alpha^2 - a\alpha - b = 0$, dan α dipastikan merupakan salah satu penyelesaian dari **persamaan karakteristik**

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{6.106}$$

dari relasi rekurensi (6.22). Akar-akar persamaan (6.23) adalah akra-akar karakteristik dari relasi rekurensi (6.22). Teorema 6.3. – 6.4 memperlihatkan bagaimana akar-akar karakteristik membantu dalam menyelesaikan masalah relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan.

Teorema 6.3. Misalkan α dan β adalah penyelesaian yang berbeda (real maupun kompleks) dari persamaan $x^2 - ax - b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$. Maka setiap penyelesaian dari relasi rekurensi homogen linier yang berkoefisien konstan $a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2}$ dimana $a_0 = C_0$ dan $a_1 = C_1$ adalah $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ untuk *A* dan *B* tertentu.

Bukti: Pembuktian teorema ini terdiri atas dua bagian:

- Pertama akan ditunjukkan bahwa $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ merupakan penyelesaian dari relasi rekurensi untuk sebarang kontanta *A* dan *B*.
- Selanjutnya akan ditentukan nilai *A* dan *B* yang memenuhi syarat awal yang telah diberikan.
- Pertama-tama, perhatikan bahwa karena α dan β adalah penyelesaian-penyelesaian dari persamaan (5.9), $\alpha^2 = a\alpha + b$ dan $\beta^2 = a\beta + b$.
- Untuk menunjukkan bahwa $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi,

$$\begin{aligned}
aa_{n-1} + ba_{n-2} &= a\left(A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}\right) + b\left(A\alpha^{n-2} + B\beta^{n-2}\right) \\
&= A\alpha^{n-2}\left(a\alpha + b\right) + B\beta^{n-2}\left(a\beta + b\right) \\
&= A\alpha^{n-2}.\alpha^2 + B\beta^{n-2}\beta^2 \\
&= A\alpha^n + B\beta^n \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

  Jadi $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi (6.22).

- Kedua, misalkan $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi (6.22). Untuk menentukan nilai *A* dan *B* perhatikan bahwa syarat-syarat $a_0 = C_0$ dan $a_1 = C_1$ menghasilkan sistem linier seperti di bawah ini:

$C_0 = A + B$
$C_1 = A\alpha + B\beta$

Dari kedua persamaan tersebut, diperoleh:

$$A = \frac{C_1 - C_0\beta}{\alpha - \beta} \text{ dan } B = \frac{C_0\alpha - C_1}{\alpha - \beta} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

dengan nilai *A* dan *B* ini, a_n memenuhi syarat awal dan relasi rekurensi. Karena relasi rekurensi dan syarat awal menyarakan suatu barisan unik, $\{a_n\}$, maka $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi tersebut.

Beberapa hal penting untuk diperhatikan:

- Penyelesaian untuk α dan β tidak nol, karena jika $\alpha = 0$ maka $\beta = 0$ juga.
- Teorema 6.3 tidak berlaku jika $\alpha = \beta$. Meskipun demikian, teorema tersebut tetap berlaku untuk semua nilai yang lainnya, termasuk untuk bilangan kompleks.
- Penyelesaian α^n dan β^n adalah penyelesaian dasar dari relasi rekurensi. Secara umum, banyaknya penyelesaian dasar sama dengan orde dari relasi rekurensi yang bersangkutan.

Penyelesaian umum $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ merupakan **kombinasi linier** dari penyelesaian-penyelesaian dasar. Penyelesaian khusus diperoleh dengan memilih A dan B sedemikian sehingga syarat awal terpenuhi. Tiga contoh berikut ini menggambarkan cara menyelesaikan relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan dengan menggunakan persamaan karakteristiknya.

Contoh 6.29. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, dimana $a_0 = 4$ dan $a_1 = 7$.

Jawab:

- Untuk mencari penyelesaian umum dari relasi rekurensi:

Persamaan karakeristik dari relasi rekurensi tersebut adalah $x^2 - 5x + 6 = 0$; akar-akar karakteristiknya adalah 2 dan 3. Oleh karena itu, menurut Teorema 6.3, penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah $a_n = A.2^n + B.3^n$.

- Untuk mencari nilai A dan B. Dengan menggunakan syarat awal,

$$a_0 = A + B = 4$$
$$a_1 = 2A + 3B = 7$$

diperoleh $A = 5$ dan $B = -1$.

Jadi penyelesaian dari relasi rekurensi yang memenuhi syarat yang diberikan di atas adalah $a_n = 5.2^n - 3^n, n \geq 0$. Contoh 6.30. secara eksplisit memperlihatkan cara mencari rumus untuk bilangan Fibonacci ke-*n*.

Contoh 6.30. Selesaikanlah relasi rekurensi Fibonacci yang dinyatakan dalam bentuk $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, dengan $F_1 = 1 = F_2$.

Jawab. Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi tersebut adalah $x^2 - x - 1 = 0$, dan penyelesaiannya adalah $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ dan $\beta = (1-\sqrt{5})/2$. Dengan kedua nilai tersebut dapat dibuktikan bahwa $\alpha + \beta = 1$ dan $\alpha\beta = -1$ Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

Untuk menentukan *A* dan *B,* maka digunakan bentuk umum, penyelesaian umum dan fakta bahwa $F_1 = 1 = F_2$.

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$
$$F_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan ini, diperoleh:

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)/2}{\left(5+\sqrt{5}\right)/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)} = \frac{5+5\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{25-5}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh $B = \frac{\beta}{1+\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Jadi penyelesaian dari relasi rekurensi yang memenuhi syarat yang diberikan adalah

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

yang merupakan bentuk *Binet* dari bilangan Fibonacci ke-*n*.

Contoh 6.31. Ada berapa cara menyatakan bilangan bulat non-negatif *n* sebagai jumlahan dari 1 dan 2 secara berturut-turut?

Jawab: Misalkan bilangan yang dimaksudkan adalah F_n, maka untuk $F_4 = 5$ karena

$$4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 2+2.$$

Dengan cara yang sama, diketahui bahwa

$$F_1 = 1, F_2 = 1+1 = 2, \text{dan } F_3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$$

sehingga

$$F_1 = 1, F_2 = 2, \text{dan } F_3 = 3$$

Untuk kesepakatan, $F_0 = 1$ karena satu-satunya penyelesaian untuk $n = 0$ adalah barisan himpunan kosong.

Andaikan bahwa $n \geq 2$. Sebarang *n* sebagai jumlahan dari angka 1 dan 2 pasti berakhir dengan 1 atau 2. Jika suku-suku yang dijumlahkan berakhir dengan angka 1, maka banyaknya suku-suku yang dijumlahkan ada *n* – 1; jika suku-suku yang dijumlahkan berakhir dengan angka 2, maka banyaknya suku-suku yang dijumlahkan ada *n* – 2. Jadi secara umum $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Bilangan-bilangan $F_0, F_1, F_2, \cdots$ disebut bilangan Fibonacci.

Barisan bilangan Fibonacci merupakan salah satu contoh relasi rekurensi linier 3 suku dengan koefisien konstan. Secara umum suatu relasi rekurensi $(k+1)$ suku menyatakan bahwa sebarang nilai $F(n)$ suatu fungsi ditentukan oleh *k* nilai yang mendahuluinya di dalam barisan yang sama. Dengan kata lain setiap elemen di dalam barisan Fibonacci $F(n-1), F(n-2), \cdots, F(n-k)$ dikatakan linier jika bentuknya

$$F(n) = a_1(n)F(n-1) + a_2(n)F(n-2) + \cdots + a_k(n)F(n-k),$$

dengan $a_1, a_2, \cdots a_k$ adalah fungsi *n* yang berbentuk linier berkoefisien konstan jika $a_1, a_2, \cdots a_k$ adalah konstan.

Fakta: suatu fungsi yang memenuhi relasi rekurensi $(k+1)$ suku, secara unik ditentukan oleh nilai-nilainya pada *k* bilangan asli pertama. Dalam hal ini *k* bilangan asli pertama dapat memiliki nilai $0,1,\cdots,k-1$ atau $1,2,\cdots,k$ tergantung pada konteksnya.

Jika diketahui $F(1), F(2), \cdots, F(k)$ maka nilai-nilai ini menentukan $F(k+1)$ dan kemudian nilai-nilai $F(2), F(3) \cdots F(k+1)$ menentukan nilai $F(k+2)$ dan seterusnya. Secara formalnya, jika dua fungsi *F* dan *G* memenuhi relasi rekurensi yang sama dan nilai-nilainya sesuai bersesuaian pada *k* bilangan asli pertama, maka dapat dibuktikan dengan induksi bahwa kedua fungsi tersebut bersesuaian untuk semua bilangan asli.

Masalah bilangan Fibonacci dapat diselesaikan dengan dua cara. Cara pertama adalah dengan menggunakan relasi rekurensi dan cara kedua adalah dengan menggunakan fungsi pembangkit.

Cara I: Untuk $n \geq 2,$ relasi rekurensi Fibonacci dirumuskan sebagai berikut:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Karena relasi rekurensi tersebut adalah linier, jika dapat ditemukan penyelesaiannya, maka dapat dibentuk suatu kombinasi linier untuk menyusun penyelesaian yang baru. Misalkan *F* dan *G* memenuhi relasi rekurensi tersebut di atas dan misalkan $H_n = aF_n + bG_n$ maka

$$\begin{aligned} H_n &= aF_n + bG_n \\ &= a(F_{n-1} + F_{n-2}) + b(G_{n-1} + G_{n-2}) \\ &= (aF_{n-1} + bG_{n-1}) + (aF_{n-2} + bG_{n-2}) \\ &= H_{n-1} + H_{n-2}. \end{aligned}$$

Dengan memilih nilai-nilai a dan b, maka nilai awal dapat dipenuhi. Misalkan dicoba suatu penyelesaian yang berbentuk $F_n = \alpha^n.$ Untuk itu, diperlukan

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}, \\ \alpha^{n-2}(\alpha^2 - \alpha - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Jadi jika $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$ maka relasi rekurensi tersebut berlaku untuk semua *n*. Akar-akar persamaan ini adalah $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$ Dengan demikian diperoleh bentuk penyelesaian umum

$$F_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Untuk memenuhi syarat awal $F_0 = F_1 = 1$ yang diberikan, maka haruslah $a + b = 1$,

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Karena $a + b = 1,\ a - b = \frac{1}{\sqrt{5}},$ diperoleh

$$a = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right), \quad b = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right).$$

Dengan demikian, bilangan Fibonacci dirumuskan

$$F_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Perhatikan bahwa

1. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 1,618...$, dan $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -0,618...$ jadi fungsi tersebut bertambah secara eksponensial. Untuk nilai *n* yang besar, nilainya merupakan bilangan bulat terdekat dengan $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
2. Nilai *a* dan *b* dapat ditentukan dengan mudah sedemikian sehingga nilainya memenuhi nilai awal yang ditentukan.
3. Untuk tujuan tertentu, rumusan eksplisit kurang bermanfaat dibandingkan dengan relasi rekurensi.

Cara II: Penyelesaian relasi rekurensi dapat dilakukan dengan teknik fungsi pembangkit. Misalkan $\phi(t)$ adalah deret pangkat

$$\phi(t) = \sum_{n\geq 0} F(n)t^n,$$

dimana *t* adalah suatu bilangan tak hingga sehingga,

$$t\phi(t) = \sum_{n\geq 0} F(n)t^{n+1} = \sum_{n\geq 1} F(n-1)t^n$$
$$t^2\phi(t) = \sum_{n\geq 0} F(n)t^{n+2} = \sum_{n\geq 2} F(n-2)t^n$$

Pada masing-masing persamaan di atas, digunakan fakta bahwa *n* hanya merupakan "variabel dummy" yang dapat dinyatakan dengan sebarang variabel. Misalnya untuk persamaan pertama, disubtitusikan $m = n + 1$, kemudian mengganti variabel dummy *m* menjadi *n*. Jika penjelasan ini sukar dipahami, mahasiswa dapat mencoba menuliskan beberapa suku pertama dari bentuk kedua dan ketiga.

Sekarang perhatikan bahwa $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, sehingga hampir dapat dipastikan bahwa $\phi(t) = (t + t^2)\phi(t)$. Tentu saja koefisien-koefisien dari t^2 dan semua pangkat yang lebih tinggi akan bernilai sama pada kedua sisi dari persamaan ini. Tetapi faktor-faktor konstant harus disesuaikan dengan faktor-faktor yang mengandung *t* dengan tetap mengingat bahwa $F_0 = F_1 = 1$. Koefisien dari *t* adalah F_1 pada ruas kiri, dan F_0 pada ruas kanan sehingga pernyataan di atas adalah pernyataan yang benar. Faktor konstan ruas kiri adalah F_0 dan 0 untuk ruas kanan. Karena itu ruas kanan harus ditambahkan 1 agar ruas kiri sama dengan ruas kanan. Jadi,

$\phi(t) = 1 + (t + t^2)\phi(t),$

yang berarti

$$\phi(t) = \frac{1}{1 - t - t^2} \tag{6.107}$$

Selanjutnya, nilai F_n adalah koefisien dari t^n di dalam deret Taylor untuk fungsi ini. Pada umumnya nilai F_n dapat diketahui dengan cara ekspansi pecahan parsial. Misalkan $1 - t - t^2 = (1 - \alpha t)(1 - \beta t)$. Maka α dan β adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$, dan dapat ditunjukkan bahwa

$\alpha = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \beta = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right).$

Jika dimisalkan

$\frac{1}{(1 - \alpha t)(1 - \beta t)} = \frac{a}{1 - \alpha t} + \frac{b}{1 - \beta t},$

maka

$1 = a(1 - \beta t) + b(1 - \alpha t),$

sehingga $a + b = 1, a\beta + b\alpha = 0$. Persamaan ini dapat diselesaikan untuk *a* dan *b*. Dari bentuk

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{a}{1-\alpha t}+\frac{b}{1-\beta t}\\ &= a(1+\alpha t+\alpha^2t^2+\cdots)+b(1+\beta t+\beta^2t^2+\cdots).\end{aligned}$$

dan dengan menyesauaikan masing-masing koefisien dari t^n di dalam faktor pertama dengan faktor kedua, diperoleh

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n. \tag{6.108}$$

Contoh 6.32. Misalkan a_n menyatakan banyaknya himpunan bagian dari himpunan $S=\{1,2,\cdots,n\}$ yang tidak mengandung bilangan bulat berurutan, dengan $n \geq 0.$ Jika n = 0, maka $S = \varnothing$. Carilah rumusan eksplisit dari a_n.

Jawab. Gambaran tentang nilai a_n untuk $n = 0,1,2,3$ dan 4 akan ditunjukkan pada Tabel 6.1. Terlihat dari tabel tersebut bahwa a_n merupakan suatu bilangan Fibonacci dimana $a_n = F_{n+2}$.

Tabel 6.1. Subset dari S yang tidak mengandung bilangan bulat berturutan

n									a_n
0	ϕ								1
1	ϕ	{1}							2
2	ϕ	{1}	{2}						3
3	ϕ	{1}	{2}	{3}	{1, 3}				5
4	ϕ	{1}	{2}	{3}	{4}	{1, 3}	{1, 4}	{2, 4}	8

Dapat dibuktikan dalam dua langkah bahwa $a_n = F_{n+2}$. Langkah pertama adalah mendefinisikan a_n secara rekursif kemudian menyelesaikan relasi rekurensi untuk memperoleh rumusan eksplisit.

- Untuk mendefinisikan a_n secara rekursif:

  Dari Tabel 6.1, diketahui bahwa $a_0 = 1$, dan $a_1 = 2$. dengan demikian dapat dipilih $n \geq 2$. Misalkan A adalah subset dari S yang tidak mengandung dua bilangan bulat berturutan, maka $n \in A$ atau $n \notin A$.

  Kasus 1. Andaikan $n \in A$ maka $n-1 \notin A$. Berdasarkan definisi, $S^* = \{1,2,3,\cdots,n-2\}$ memiliki a_{n-2} subset yang tidak mengandung dua bilangan bulat berturutan.

Tambahkan *n* terhadap masing-masing subset ini. Hasilnya adalah subset dari *S* yang memenuhi sifat yang diinginkan sehingga *S* memiliki a_{n-2} subset seperti itu.

Kasus 2. Misalkan $n \notin A$. Berdasarkan definisi, terdapat a_{n-1} subset *S* yang memiliki sifat yang telah diketahui di atas. Karena kedua kasus ini tidak berhubungan satu dengan yang lainnya, maka menurut prinsip penjumlahan,

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Jadi a_n dapat dinyatakan secara rekursif sebagai berikut:

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \geq 2.$$

- Menyelesaikan relasi rekurensi:

  Relasi rekurensi ini sama persis dengan barisan Fibonacci yang memiliki syarat awal $a_0 = 1, a_1 = 2.$ Jadi selain merumuskan penyelesaian lengkap seperti pada Contoh 6.30, dapat dilihat bahwa definisi ini menghasilkan bilangan-bilangan Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, . . . yang menunjukkan bahwa $a_n = F_{n+2}, n \geq 0.$

  Dengan menggunakan nilai-nilai α dan β dari Contoh 6.30,

$$a_n = F_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}, n \geq 0.$$

Teorema 6.3. tidak berlaku jika akar-akar karakteristik α dan β memiliki nilai yang sama, yaitu jika α adalah suatu akar karakteristik yang memiliki derajat perkalian dua. Teorema 6.4 dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dari Teorema 6.3. Menurut Teorema 6.3., selain α^n, $n\alpha^n$ juga merupakan penyelesaian dasar dari relasi rekurensi.

Teorema 6.4. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $b \neq 0$. Misalkan juga bahwa α dapat merupakan penyelesaian real ataupun penyelesaian kompleks dari persamaan $x^2 - ax - b = 0$ denganderajat perkalian dua. Maka $a_n = A\alpha^n + Bn\alpha^n$ adalah penyelesaian umum dari relasi rekurensi linier homogen yang berkoefisien konstan $a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2}$.

Bukti. Karena α adalah akar dari persamaan $x^2 - ax - b = 0$ dengan derajat perkalian dua, maka

$$x^2 - ax - b = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + \alpha^2$$

Karena itu,
$$\begin{aligned} x^2 - ax - b &= (x-a)^2 \\ &= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \end{aligned}$$

$$a = 2\alpha \text{ dan } b = -\alpha^2$$

- Untuk menunjukkan bahwa $a_n = n\alpha^n$ memenuhi relasi rekurensi:

Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} aa_{n-1} + ba_{n-2} &= a\left[(n-1)\alpha^{n-1}\right] + b\left[(n-2)\alpha^{n-2}\right] \\ &= 2\alpha\left[(n-1)\alpha^{n-1}\right] + \left(-\alpha^2\right)\left[(n-2)\alpha^{n-2}\right] \\ &= \alpha^n\left[2(n-1)-(n-2)\right] \\ &= n\alpha^n = a_n. \end{aligned}$$

Karena itu $n\alpha^n$ merupakan penyelesaian dari relasi rekurensi. Selanjutnya
$$a_n = A\alpha^n + Bn\beta^n$$
adalah penyelesaian umum dari relasi rekurensi dengan A dan B dipilih sedemikian sehingga syarat awal yang diberikan dapat dipenuhi. Contoh berikut ini menjelaskan Teorema 6.4.

Contoh 6.33. Selesaikanlah masalah relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, dengan $a_0 = 2 \text{ dan } a_1 = 3.$

Jawab: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi adalah $x^2 - 6x + 9 = 0.$ Penyelesaian persamaan karakteristiknya adalah 3 dengan derajat keragaman 2. Oleh karena itu berdasarkan Teorema 6.3, penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah
$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot n3^n.$$

Syarat awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 3$ menghasilkan persamaan
$$A.3^0 + B.0.3^0 = 2$$
dan
$$A.3 + B.1.3 = 3$$

Penyelesaian kedua persamaan ini menghasilkan *A* = 2 dan *B* = -1. Dengan demikian penyelesaian rekurensi yang memenuhi syarat awal yang diberikan adalah $a_n = 2.3^n - n.3^n, n \geq 0.$

Teorema 6.3. dan 6.4 dapat dipadukan sedemikian rupa sehingga dihasilkan Teorema 6.5 sebagai berikut:

Teorema 6.5. Misalkan α adalah akar karakteristik dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan.

- Jika derajat keragaman dari α adalah 1, maka α^n adalah penyelesaian dasar dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan.
- Jika derajat keragaman dari α adalah *m,* maka $\alpha^n, n\alpha^n, \cdots, n^{m-1}\alpha^n$
- adalah penyelesaian dasar dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan. Relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan orde *k* memiliki *k* penyelesaian dasar.
- Penyelesaian umum dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan merupakan kombinasi linier dari semua penyelesaian dasarnya.

Contoh 6.34 di bawah ini dapat digunakan untuk membuktikan Teorema 6.5.

Contoh 6.34. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 7a_{n-1} - 13a_{n-2} - 3a_{n-3} + 18a_{n-4}$, jika diketahui $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 6$, dan $a_3 = -21$.

Jawab: Persamaan karaktersitik dari relasi rekurensi adalah

$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0.$

Karena

$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = (x+1)(x-2)(x-3)^2,$

maka akar karaktersitiknya adalah -1 dan 2, masing-masing dengan derajat keragaman 1, dan 3 dengan derajat keragaman 2. Karena 3 adalah akar dengan derajat keragaman 2, maka 3 akan memberikan dua penyelesaian dasar yaitu 3^n dan $n3^n$. Jadi penyelesaian umum dari relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan dalam hal ini adalah kombinasi linier dari penyelesaian-penyelesaian dasar $(-1)^n, 2^n, 3^n$, dan $n3^n$, yaitu

$$a_n = A(-1)^n + B2^n + C3^n + Dn3^n.$$

Selanjutnya karena diketahui bahwa $a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 6, \; dan \; a_3 = -21,$ maka untuk mencari nilai-nilai *A, B, C,* dan *D,*

$$\begin{aligned} A + B + C &= 5 \\ -A + 2B + 3C + 3D &= 3 \\ A + 4B + 9C + 18D &= 6 \\ -A + 8B + 27C + 81D &= -21 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linier ini, maka diperoleh A = 2 = C, B = 1, dan D = -1. Oleh karena itu penyelesaian dari relasi rekurensi dalam contoh ini adalah

$$a_n = 2(-1)^n + 2^n + 2.3^n - n3^n, n \geq 0.$$

Contoh 6.35. Carilah penyelesaian dari masing-masing relasi rekurensi di bawah ini, sesuai dengan syarat-syarat awal yang diberikan. Gunakan pendekatan iterasi.

a). $a_n = -a_{n-1,} \; a_0 = 5$
b). $a_n = a_{n-1} + 3, a_0 = 1$
c). $a_n = a_{n-1} - n, a_0 = 4$
d). $a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = -1$
e). $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_0 = -1$
f). $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 3$
g). $a_n = -a_{n-1} + n - 1, a_0 = 7$

Jawab. Di dalam pendekatan iterasi, a_n dinyatakan dengan suku-suku yang mengandung a_{n-1}, kemudian menyatakan a_{n-1} sebagai suku-suku yang mengandung a_{n-2}, dan seterusnya (menggunakan relasi rekurensi dengan mensubtitusi *n* menjadi $n-1$). Setelah prosedur tersebut sampai pada iterasi terakhir, maka langkah berikutnya adalah menggunakan nilai syarat awal yang ditentukan. Prosedur ini akan menghasilkan suatu rumusan eksplisit atau suatu deret berhingga yang jika dijumlahkan akan menghasilkan rumusan eksplisit dari jawaban yang dicari.

a). $a_n = -a_{n-1} = (-1)^2 a_{n-2} = \cdots = (-1)^n a_{n-n} = (-1)^n a_0 = 5 \cdot (-1)^n$

b). $a_n = 3 + a_{n-1} = 3 + 3 + a_{n-2} = 2\cdot 3 + a_{n-2} = 3\cdot 3 + a_{n-3} = \cdots$
$= n\cdot 3 + a_{n-n} = n\cdot 3 + a_0 = 3n + 1$

c). $a_n = -n + a_{n-1}$
$= -n + (-(n-1) + a_{n-2}) = -(n + (n-1)) + a_{n-2}$
$= -(n + (n-1)) + (-(n-2) + a_{n-3}) = -(n + (n-1) + (n-2)) + a_{n-3}$
$\vdots$
$= -(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + (n-(n-1))) + a_{n-n}$
$= -(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) + a_0$

$$= -\frac{n(+1)}{2} + 4 = \frac{-n^2 - n + 8}{2}$$

d). $a_n = -3 + 2a_{n-1}$
$= -3 + 2(-3 + 2a_{n-2}) = -3 + 2(-3) + 4a_{n-2}$
$= -3 + 2(-3) + 4(-3 + 2a_{n-3}) = -3 + 2(-3) + 4(-3) + 8a_{n-3}$
$= -3 + 2(-3) + 4(-3) + 8(-3 + 2a_{n-4}) = -3 + 2(-3) + 4(-3) + 8(-3) + 16a_{n-4}$
$\vdots$
$= -3(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) + 2^n a_{n-n} = -3(2^n - 1) + 2^n(-1) = -2^{n+2} + 3$

e). $a_n = (n+1)a_{n-1} = (n+1)na_{n-2}$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)n(n-1)a_{n-3} = (n+1)n(n-1)(n-2)a_{n-4} \\
&\vdots \\
&= (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(n-2))a_{n-n} \\
&= (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2.a_0 \\
&= (n+1)!\cdot 2 = 2(n+1)!
\end{aligned}
$$

f). $a_n = 2na_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
&= 2n(2(n-1)a_{n-2}) = 2^2(n(n-1))a_{n-2} \\
&= 2^2(n(n-1))(2(n-2)a_{n-3} = 2^3(n(n-1)(n-2))a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= 2^n n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(n-1))a_{n-n} \\
&= 2^n n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1.a_0 \\
&= 3.2^n n!
\end{aligned}
$$

g). $a_n = n-1-a_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
&= n-1-((n-1-1)-a_{n-2}) = (n-1)-(n-2)+a_{n-2} \\
&= (n-1)-(n-2)+((n-2-1)-a_{n-3}) = (n-1)-(n-2)+(n-3)-a_{n-3} \\
&\vdots \\
&= (n-1)-(n-2)+\cdots+(-1)^{n-1}(n-n)+(-1)^n a_{n-n} \\
&= \frac{2n-1+(-1)^n}{4} + (-1)^n \cdot 7
\end{aligned}
$$

Contoh 6.36. Seorang pekerja bergabung dengan suatu perusahaan pada tahun 1999 dengan gaji permulaan Rp. 50.000., Setiap tahun pekerja tersebut mendapat kenaikan gaji Rp. 1000 ditambah 5% gaji dari tahun sebelumnya.

a) Susunlah relasi rekurensi dari gaji karyawan tersebut setelah *n* tahun terhitung sejak 1999.
b) Berapakah gaji karyawan tersebut pada tahun 2007?
c) Tentukan rumus untuk menyatakan besarnya gaji karyawan tersebut setelah *n* tahun bekerja, terhitung sejak 1999.

Jawab. Misalkan a_n adalah besarnya gaji karyawan dalam ribuan rupiah, *n* tahun sejak 1999.

a) $a_n = 1 + 1{,}05a_{n-1}$, dengan $a_0 = 50$

b) Diketahui n = 8. Jadi kita dapat melakukan iterasi sebanyak 8 kali atau menggunakan jawaban (c) sehingga diperoleh $a_8 = 83,4$ yang artinya gaji kayawan tersebut pada tahun 2007 adalah Rp. 83.400.

c) Jika digunakan pendekatan iteratif,

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + 1,05a_{n-1} \\
&= 1 + 1,05(1 + 1,05a_{n-2}) \\
&= 1 + 1,05 + (1,05)^2 a_{n-2} \\
&\vdots \\
&= 1 + 1,05 + (1,05)^2 + \cdots + (1,05)^{n-1} + (1,05)^n a_0 \\
&= \frac{(1,05)^n - 1}{1,05 - 1} + 50.(1,05)^n \\
&= 70.(1,05)^n - 20
\end{aligned}
$$

Contoh 6.37. Tentukanlah penyelesaian dari relasi rekurensi di bawah ini, sesuai dengan syarat-syarat awal yang diberikan.

a). $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 3, a_1 = 6$

b). $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$

c). $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 10$

d). $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 1$

e). $a_n = a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 5, a_1 = -1$

f). $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ untuk $n \geq 2, a_0 = 3, a_1 = -3$

g). $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ untuk $n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = 8$

Jawab. Untuk masing-masing masalah, akan dituliskan persamaan karakteristiknya kemudian mencari akar-akar persamaan karakteristik tersebut. Dengan nilai syarat awal yang diberikan maka persamaan dapat diselesaikan dan menentukan bilangan konstan di dalam penyelesaian umum.

a). $r^2 - r - 6 = 0 \qquad r = -2, 3$

$$
a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n
$$

$$
\left.\begin{aligned}
3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
6 &= -2\alpha_1 + 3\alpha_2
\end{aligned}\right\} \alpha_1 = \tfrac{3}{5} \quad \alpha_2 = \tfrac{12}{5}
$$

$$
a_n = \tfrac{3}{5}(-2)^n + \tfrac{12}{5}(3)^n
$$

b). $r^2 - 7r + 10 = 0 \qquad r = 2,5$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 5^n$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= 2\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -1$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n$$

c). $r^2 - 6r + 8 = 0, \quad r = 2,4$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 4^n$$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 10 &= 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 2^n + 4^n$$

d). $r^2 - 2r + 1 = 0, \quad r = 1,1$

$$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 n 1^n = \alpha_1 + \alpha_2 n$$

$$\left.\begin{aligned} 4 &= \alpha_1 \\ 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -3$$

$$\therefore a_n = 4 - 3n$$

e). $r^2 - 1 = 0, \quad r = -1,1$

$$a_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 1^n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ -1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 2$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-1)^n + 2$$

f). $r^2 + 6r + 9 = 0, \quad r = -3,-3$

$$a_n = \alpha_1 (-3)^n + \alpha_2 (-3)^n$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 \\ -3 &= -3\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -2$$

$$\therefore a_n = 3(-3)^n - 2n(-3)^n = (3 - 2n)(-3)^n$$

g). $r^2 + 4r - 5 = 0, \quad r = -5,1$

$$a_n = \alpha_1 (-5)^n + \alpha_2 1^n = \alpha_1 (-5)^n + \alpha_2$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 &= -5\alpha_1 + \alpha_2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 3$$

$$\therefore a_n = -(-5)^n + 3$$

Contoh 6.38. Selesaikanlah relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ dengan $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, dan $a_2 = 88$.

Jawab. Contoh ini berbentuk relasi rekurensi berderajat tiga. Persamaan karakteristiknya adalah $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$. Akar persamaan ini adalah $r = 2$. Karena $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3$. Jadi satu-satunya akar persamaan tersebut di atas adalah $r = 2$ dengan pemangkatan 3. Penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n + \alpha_3 n^2 2^n.$$

Selanjutnya dengan menggunakan nilai syarat awal,

$$\begin{aligned} -5 &= a_0 = \alpha_1 \\ 4 &= a_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 88 &= a_2 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 16\alpha_3 \end{aligned}$$

Setelah menyelesaikan ketiga persamaan ini, diperoleh

$$\alpha_1 = -5, \alpha_2 = \tfrac{1}{2}, \text{dan } \alpha_3 = \tfrac{13}{2}.$$

Akhirnya, jawaban untuk permasalahan ini adalah

$$a_n = -5\cdot 2^n + (\tfrac{n}{2})\cdot 2^n + (\tfrac{13n^2}{2})\cdot 2^n = -5\cdot 2^n + n\cdot 2^{n-1} + 13n^2\cdot 2^{n-1}$$

Teknik penyelesaian relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan seperti pada contoh-contoh di atas tidak dapat diberlakukan untuk menyelesaikan relasi rekurensi linier tetapi tidak homogen seperti $f_n = f_{n-1} + n$ dan $b_n = 2b_{n-1} + 1$ Penyelesaian masalah relasi rekurensi linier non-homogen berkoefisien konstan akan ditunjukkan pada bagian berikut ini.

D.2. Penyelesaian Relasi Rekurensi Homogen Linier Berkoefisien Konstan

Pendekatan dasar untuk menyelesaikan masalah relasi rekurensi homogen adalah dengan mencari penyelesaian yang berbentuk $a_n = r^n$, dengan nilai *r* konstan**.** Perhatikan bahwa $a_n = r^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi

$$a_n = c_1 r^{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad (6.109)$$

jika dan hanya jika

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}. \quad (6.110)$$

Jika kedua sisi dari persamaan ini dibagi dengan r^{n-k} kemudian ruas kanan dikurangi dengan ruas kirinya, maka diperoleh

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

Akibatnya, barisan $\{a_n\}$ dengan merupakan suatu penyelesaian jika dan hanya jika *r* adalah penyelesaian dari persamaan terakhir, yang dinamakan **persamaan karakteristik** dari relasi rekurensi yang bersangkutan. Penyelesaian dari persamaan ini dinamakan **akar-akar karakteristik** dari relasi rekurensi. Akar-akar karakteristik ini dapat digunakan untuk merumuskan semua penyelesaian relasi rekurensi secara eksplisit.

Teorema 6.6. Misalkan c_1 dan c_2 adalah bilangan-bilangan real. Jika persamaan $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ memiliki dua akar yang berbeda yaitu r_1 dan r_2 maka barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ untuk $n = 0, 1, 2, \cdots,$ dengan α_1 dan α_2 adalah bilangan-bilangan konstan.

Bukti: Ada dua hal yang harus dilakukan untuk membuktikan teorema ini. Pertama, harus ditunjukkan bahwa jika r_1 dan r_2 adalah akar-akar karakteristik dari persamaan dan α_1 dan α_2 adalah bilangan-bilangan konstan, maka barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi. Kedua, harus juga ditunjukkan bahwa jika $\{a_n\}$ meruapakan suatu penyelesaian, maka $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ untuk suatu bilangan konstan α_1 dan α_2.

Sekarang akan dutunjukkan bahwa jika $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ maka $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi. Karena r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ maka $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2, \quad r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$. Dari persamaan-persamaan ini,

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Contoh 6.39. Tentukanlah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ dengan syarat-syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 6.$

Jawab. Satu-satunya akar penyelesaian dari $r^2 - 6r + 9 = 0$ adalah $r = 3.$ Karena itu, penyelesaian dari relasi rekurensi ini adalah $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n3^n$

Contoh 6.40. Carilah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ dengan syarat-syarat awal $a_0 = 2, a_1 = 5,$ dan $a_2 = 15.$

Jawab. Polinomial karakteristik dari relasi rekurensi ini adalah $r^3 - 6r^2 + 11r - 6.$ Akar-akar karakteristiknya adalah $r = 1, r = 2,$ dan $r = 3,$ karena relasi rekurensi tersebut di atas dapat dituliskan menjadi $(r-1)(r-2)(r-3).$ Karena itu, penyelesaian dari relasi rekurensi ini akan berbentuk $a_n = \alpha_1.1^n + \alpha_2.2^n + \alpha_3 3^n.$ Untuk mengetahui nilai-nilai $\alpha_1, \alpha_2,$ dan α_3 maka digunakan syarat-syarat awal sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\
a_1 &= 5 = \alpha_1 + \alpha_2.2 + \alpha_3.3, \\
a_2 &= 15 = \alpha_1 + \alpha_2.4 + \alpha_3.9.
\end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan ketiga persamaan simultan ini maka diperoleh $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1,$ dan $\alpha_3 = 2.$ Jadi, penyelesaian unik untuk relasi rekurensi tersebut adalah barisan $\{a_n\}$ dengan $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$ sesuai dengan syarat-syarat awal yang diberikan.

Teorema 6.7. Misalkan $c_1, c_2, \cdots, c_k$ adalah bilangan-bilangan real. Jika persamaan karakteristik $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$ memiliki *t* akar-akar yang berbeda yaitu $r_1, r_2, \cdots, r_t$ masing-masing dengan pemangkatan $m_1, m_2, \cdots, m_t$ sehingga $m_i \geq 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, t$ dan $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k,$ maka barisan $\{a_n\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n+2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}
a_n = & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n \\
& + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n \\
& + \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n
\end{aligned}$$

untuk $n = 0, 1, 2, \cdots,$ dimana $\alpha_{i,j}$ adalah bilangan-bilangan konstan untuk $1 \leq i \leq t$ dan $0 \leq j \leq m_i - 1.$

Contoh 6.41. Misalkan akar-akar persamaan karakteristik dari suatu relasi rekurensi homogen linier adalah 2, 2, 2, 5, 5, dan 9 (tiga akar berbeda yaitu akar 2 dengan pemangkatan 3, akar 5 dengan pemangkatan 2, dan akar 9 dengan pemangkatan 1). Bagaimanakah bentuk dari penyelesaian umumnya?

Jawab. Berdasarkan Teorema 6.3, penyelesaian umumnya adalah $(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n.$ Selanjutnya untuk menyelesaikan relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan jika persamaan karakteristiknya memiliki akar pemangkatan 3, dapat dilihat pada Contoh 6.42.

Contoh 6.42. Carilah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ dengan syarat-syarat awal $a_0 = 1, a_1 = -2$ dan $a_2 = -1.$

Jawab. Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi ini adalah $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$ Karena bentuk tersebut dapat dinyatakan dengan $(r+1)^3,$ berarti terdapat akar unik yaitu $r = -1$ dengan pemangkatan 3 untuk persamaan karakteristik tersebut. Menurut Teorema 6.4, penyelesaian dari relasi rekurensi ini berbentuk $a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n.$ Nilai $\alpha_{1,0},\ \alpha_{1,1},$ dan $\alpha_{1,2}$ dapat diketahui dengan menggunakan syarat-syarat awal yang diberikan. Dalam hal ini,

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$
$$a_2 = -2 = -\alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$
$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}.$$

Dari ketiga persamaan ini diperoleh nilai-nilai $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3,$ dan $\alpha_{1,2} = -2.$ Jadi, penyelesaian relasi rekurensi ini adalah $\{a_n\}$ dengan $a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n.$

D.3. Relasi Rekurensi Nonhomogen Linier Berkoefisien Konstan

Bentuk umum relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan adalah sebagai berikut:

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + f(n) \qquad (6.111)$$

dengan $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}, c_k \neq 0,$ dan $f(n)$ tidak identik dengan nol. Penyelesaian relasi rekurensi seperti ini tergantung pada relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{6.112}$$

Persamaan ini dinamakan relasi rekurensi homogen yang bersesuaian (dengan relasi rekurensi nonhomogen liner berkoefisien konstan).

D.4. Penyelesaian Relasi Rekurensi Nonhomogen Linier Berkoefisien Konstan

Adakah teknik sederhana untuk menyelesaikan relasi rekurensi non-homogen linier berkoefisien konstan seperti $a_n = 3a_{n-1} + 2n$? Untuk menyelesaikan relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan (6.28), misalkan $a_n^{(h)}$ menyatakan penyelesaian umum dari relasi rekurensi (6.29) yang bersesuaian dengan (6.28); dan misalkan diketahui $a_n^{(p)}$ adalah beberapa penyelesaian khusus dari (6.28). Penyelesaian umum dari (6.29) dinyatakan dengan

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

Hal ini sesuai dengan Teorema 6.8 di bawah ini. Mahasiswa diharapkan dapat membuktikan teorema tersebut.

Teorema 6.8. Misalkan $a_n^{(h)}$ menyatakan penyelesaian umum dari relasi rekurensi homogen linier dengan koefisien konstan (6.29) dan $a_n^{(p)}$ menyatakan penyelesaian khusus dari relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan (6.28), maka $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ adalah penyelesaian umum dari relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan (6.28).

Berdasarkan Teorema 6.8, penyelesaian relasi rekurensi nonhhomogen linier (6.28) bergantung pada cara mendapatkan penyelesaian khusus $a_n^{(p)}$. Meskipun tidak ada algoritma umum untuk menyelesaikan sebarang relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan, ada dua kasus khusus di antaranya yang dapat diidentifikasi. Jika $f(n)$ merupakan polinomial dalam *n* atau berbentuk $C\alpha^n$, maka suatu penyelesaian khusus dapat dicari dengan mudah, seperti ditunjukkan pada dua contoh di bawah ini, dengan *C* dan α adalah bilangan konstan. Teknik yang digunakan sama dengan yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonhomogen linier.

Contoh 6.43. Relasi rekurensi berbentuk

$$a_n = a_{n-1} + 2^n,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1,$$
$$a_n = 3a_{n-1} + n3^n,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$$

merupakan contoh-contoh dari relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan. Masing-masing relasi rekurensi nonhomogen ini memiliki relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian, yaitu

$$a_n = a_{n-1},$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$
$$a_n = 3a_{n-1},$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Fakta utama tentang relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan adalah bahwa setiap penyelesaiannya merupakan jumlahan dari suatu penyelesaian khusus dengan penyelesaian relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian bentuknya.

Contoh 6.44. Selesaikanlah relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 8a_n^2$, dimana $a_0 = 4$ dan $a_1 = 7$.

Jawab. Berdasarkan Contoh 6.43, penyelesaian umum dari relasi rekurensi homognen linier dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan masalah pada contoh ini, yaitu $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dinyatakan dengan $a_n^{(h)} = A.2^n + B.3^n$. Karena $f(n) = 8n^2$ merupakan polinomial kuadrat dalam *n*, cukup beralasan mencari penyelesaian khusus yang juga berbentuk kuadratis, misalnya $a_n = an^2 + bn + c$. Dengan demikian relasi rekurensi akan berbentuk:

$$
\begin{aligned}
an^2+bn+c \quad &= 5\left[a\left(n-1\right)^2+b\left(n-1\right)+c\right] \\
&-6\left[a\left(n-2\right)^2+b\left(n-2\right)+c\right] \\
&+8n^2 \\
&=\left(8-a\right)n^2+\left(14a-b\right)n-19a+7b-c
\end{aligned}
$$

Dengan menyesuaikan koefisien dari suku yang sejenis, diperoleh sistem linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&a=8-a \\
&b=14a-b \\
&c=-19a+7b-c
\end{aligned}
$$

Sehingga $a=4, b=28,$ dan $c=60.$

Sekarang dapat diklaim bahwa penyelesaian khusus dari relasi rekurensi di atas adalah

$$a_n^{(p)}=4n^2+28n+60$$

Dan menurut Teorema 6.8, penyelesaian umum dari relasi rekurensi tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
a_n \quad &= a_n^{(h)}+a_n^{(p)} \\
&= A.2^n+B.3^n+4n^2+28n+60
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan kedua syarat awal yang diberikan, maka diperoleh sistem linier sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
A+B&=-56 \\
2A+3B&=-85
\end{aligned}
$$

yang menghasilkan *A* = -83 dan *B* = 27. Penyelesaian dari relasi rekurensi nonhomogen linier dengan koefisien konstan di atas adalah

$$a_n=\left(-83\right).2^n+27.3^n+4n^2+28n+60, \quad n\geq 0.$$

Contoh 6.45 berikut ini mengilustrasikan cara penyelesaian relasi rekurensi kinier nonhomogen dengan koefisien konstan jika $f(n)$ berbentuk $C\alpha^n$, dengan *C* dan α adalah bilangan konstan.

Contoh 6.45. Selesaikanlah relasi rekurensi kinier nonhomogen dengan koefisien konstan $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3.5^n$, dengan $a_0 = 4$ dan $a_1 = 7$.

Jawab: Relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan bentuk di atas adalah $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ yang memiliki penyelesaian umum $a_n^{(h)} = A.2^n + B.3^n$. Karena $f(n) = 3.5^n$, maka penyelesaian khusus yang akan dicari adalah yang berbentuk $a_n = c.5^n$. Jadi, $c \cdot 5^n = 5\left(c \cdot 5^{n-1}\right) - 6\left(c \cdot 5^{n-2}\right) + 3 \cdot 5^n$. Jika kedua sisi dibagi dengan 5^{n-2}, maka diperoleh $c = 25/2$. Oleh karena itu $a_n = (25/2)5^n$ adalah penyelesaian khusus dari relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan. Berdasarkan penyelesaian relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang telah diperoleh di atas, maka diperoleh relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan, yaitu:

$$a_n = A.2^n + B.3^n + (25/2)5^n.$$

Selanjutnya dengan menggunakan syarat awal yang diberikan, diperoleh sistem linier:

$$\begin{aligned} A + B &= -17/2 \\ 2A + 3B &= -111/2 \end{aligned}$$

Dari penyelesaian sistem linier tersebut diketahui nilai *A* = 30 dan *B* = -77/2. Dengan mensubtitusi nilai-nilai tersebut di atas, diperoleh penyelesaian dari relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan, adalah

$$a_n = (30).2^n - (77/2).3^n + (25/2).5^n, n \geq 0.$$

Perhatikan bahwa pada contoh ini, faktor 5 di dalam $f(n)$ bukan akar karakteristik dari relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan yang bersesuaian. Jika 5 merupakan akar karakteristik, maka harus dilakukan penyesuaian untuk menentukan penyelesaian khusus. Teorema di bawah ini menjelaskan teknik yang digunakan pada kedua contoh sebelumnya. Pembuktian teorema dapat dilakukan oleh mahasiswa.

Teorema 6.9. Dari masalah relasi rekurensi linier nonhomogen berkoefisien konstan (6.28), misalkan $f(n) = \left(b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0\right)\alpha^n$. Jika α bukan merupakan akar karakteristik dari relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan yang bersesuaian

(6.29), maka salah satu penyelesaian khusus dari relasi rekurensi tersebut akan berbentuk $\left(d_k n^k + d_{k-1} n^{k-1} + \cdots + d_1 n + d_0\right)\alpha^n$. Jika α adalah akar karakteristik dengan derajat keraaman *m*, maka penyelesaian khusus relasi rekurensi tersebut akan berbentuk $n^m\left(e_k n^k + e_{k-1} n^{k-1} + \cdots + e_1 n + e_0\right)\alpha^n$. Hal ini dibuktikan pada Contoh 6.46.

Contoh 6.46. Dari Contoh 6.45, penyelesaian umum dari relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan adalah $a_n^{(h)} = A.3^n + B.n3^n$, dengan $n \geq 0$. Karena 3 adalah akar karakteristik dengan derajat keragaman 2, maka harus dicari penyelesaian khusus yang berbentuk $n^2(cn+d)3^n$, dimana konstanta *c* dan *d* akan ditentukan kemudian. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} n^2(cn+d)3^n = {} & 6\left\{(n-1)^2\left[c(n-1)+d\right]3^{n-1}\right\} \\ & -9\left\{(n-2)^2\left[c(n-2)+d\right]3^{n-2}\right\} + 4(n+1)3^n \end{aligned}$$

Dengan menyamakan koefisien-koefisien dari suku-suku yang sama, diperoleh *c* = 2/3 dan *d* = 4 sehingga $a_n^{(p)} = 2n^2(n+6)3^{n-1}$. Jadi penyelesaian umum dari relasi rekurensi adalah

$$a_n = A.3^n + B.n3^n + 2n^2(n+6)3^{n-1}, n \geq 0.$$

Dengan menggunakan syarat-syarat awal ini, diperoleh

$$a_n = (6-19n)3^{n-1} + 2n^2(n+6)3^{n-1}, n \geq 0.$$

Contoh 6.47. Tentukan relasi rekurensi dari jumlah barisan angka biner *n* digit jika tidak terdapat angka 1 yang berurutan.

Jawab: Misalkan a_n adalah jumlah barisan angka biner (0 dan 1) maka:

$n=1$	0	1							
$n=2$		00	01	10					
$n=3$		000	010	100	001	101			
$n=4$		0000	0100	1000	0010	1010	0001	0101	1001

Dapat dilihat bahwa $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5, \cdots$. Untuk $n \geq 3$ diperoleh barisan *n* angka biner sebagai berikut.

a. Tambahkan 0 pada digit terakhir pada barisan $n - 1$ digit
b. Tambahkan 01 pada digit terakhir pada barisan $n - 2$ digit

Kedua langkah di atas tidak akan tumpang tindih karena masing-masing menghasilkan barisan dengan digit yang berbeda. Artinya langkah tersebut menghasilkan barisan *n* digit dengan tidak ada pasangan satu yang berurutan, dan sebaliknya, sebarang barisan *n* digit dengan tidak ada pasangan satu yang berurutan adalah dihasilkan dari satu langkah. Digit terakhir 0 dalam barisan tersebut dihasilkan dari langkah pertama, dan digit terakhir 1 dihasilkan dari langkah kedua, karena langkah kedua ditambahkan 01. Jadi rekurensinya adalah $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, dan relasi rekurensinya adalah

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3.$$

Perhatikan bahwa ada satu barisan yang tidak ada digitnya untuk $n = 0$ sehingga $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2$. Relasi rekurensi ini dinamakan relasi Fibonacci dengan syarat awal yang berbeda.

Toerema 6.10. Jika $\{a_n^{(p)}\}$ adalah penyelesaian khusus untuk relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$, maka setiap penyelesaiannya akan berbentuk $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, dimana $\{a_n^{(h)}\}$ adalah penyelesaian dari relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian dengan relasi rekurensi nonhomogen tersebut, yaitu $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Bukti. Karena $\{a_n^{(p)}\}$ adalah penyelesaian khusus dari relasi rekurensi nonhomogen, maka dapat diketahui bahwa $a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + f(n)$. Selanjutnya, misalkan bahwa $\{b_n\}$ adalah penyelesaian kedua dari relasi rekurensi nonhomogen, sedemikian sehingga $b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k} + f(n)$. Dari kedua bentuk di atas, diperoleh $b_n - a_n^{(p)} = c_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2(b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \cdots + c_k(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)})$. Hal ini menunjukkan bahwa $\{b_n - a_n^{(p)}\}$ merupakan suatu penyelesaian dari relasi rekurensi homogen yang bersesuaian, misalnya $\{a_n^{(p)}\}$. Jadi, $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ untuk semua *n*.

Contoh 6.48. Carilah semua penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1} + 2n$. Tentukan juga penyelesaiannya jika diketahui $a_1 = 3$.

Jawab. Untuk menyelesaikan relasi rekurensi nonhomogen linier berkoefisien konstan ini, maka harus diketahui penyelesaian dari bentuk relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian, kemudian menentukan penyelesaian khusus untuk relasi rekurensi nonhomogen linier. Bentuk homogen yang bersesuaian adalah $a_n = 3a_{n-1}$ dan penyelesaiannya adalah $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, dengan α adalah bilangan konstan.

Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian khusus. Karena $f(n) = 2n$ merupakan suatu polinomial dalam *n* yang berderajat satu, maka penyelesaiannya dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi linier dalam *n*, misalkan $p_n = cn + d$, dimana *c* dan *d* adalah bilangan-bilangan konstan. Untuk menentukan apakah ada penyelesaian yang berbentuk seperti ini, andaikan bahwa $p_n = cn + d$ adalah penyelesaian yang dimaksud. Selanjutnya persamaan $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ sekarang berubah menjadi $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$. Dengan menyederhanakan dan menggabungkan suku-suku yang sejenis, diperoleh $(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $cn + d$ merupakan penyelesaian jika dan hanya jika $2 + 2c = 0$ dan $2d - 3c = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa $cn + d$ adalah penyelesaian jika dan hanya jika $c = -1$ dan $d = -\frac{3}{2}$. Akibatnya, $a_n^{(p)} = -n - \frac{3}{2}$ adalah suatu penyelesaian khusus. Menurut Teorema 6.10, semua penyelesaian berbentuk $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - \frac{3}{2} + \alpha \cdot 3^n$, dengan α adalah bilangan konstan. Untuk menentukan penyelesaian dengan $a_1 = 3$, pilih $n = 1$ di dalam rumus yang diperoleh dalam bentuk penyelesaian umum. Dapat dilihat bahwa $3 = -n - \frac{3}{2} + 3\alpha$, yang menunjukkan bahwa $\alpha = \frac{11}{6}$. Penyelesaian yang dicari adalah $a_n = -n - \frac{3}{2} + (\frac{11}{6})3^n$.

Contoh 6.49. Carilah penyelesaian dari relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$.

Jawab. Bentuk ini adalah relasi rekurensi nonhomogen linier. Penyelesaian relasi rekurensi homogen yang bersesuaian $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ adalah $a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n$, dengan α_1 dan α_2 adalah bilangan konstan. Karena $f(n) = 7^n$, maka penyelesaiannya berbentuk $a_n^{(p)} = C \cdot 7^n$, dengan C adalah bilangan konstan. Dengan mensubtitusikan suku-suku barisan ini ke dalam relasi rekurensi, diperoleh $C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n$.

Dengan memfaktorkan 7^{n-2}, persamaan ini menjadi $49C = 35C - 6C + 49$, sehingga diperoleh $20C = 49$ atau $C = \frac{49}{20}$. Dengan demikian, diperoleh penyelesaian khusus $a_n^{(p)} = (\frac{49}{20})7^n$. Berdasarkan Teorema 6.10, diperoleh $a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n + (\frac{49}{20})7^n$.

Contoh 6.50. Tentukanlah penyelesaian khusus dari relasi rekurensi nonhomogen linier $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$ jika diketahui $f(n) = 3^n, f(n) = n3^n, f(n) = n^2 2^n$, dan $f(n) = (n^2 + 1)3^n$.

Jawab. Relasi rekurensi homogen linier yang bersesuaian adalah $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$. Persamaan karakteristiknya $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$ memiliki akar tunggal yaitu 3 dengan pemangkatan 2. Dengan $f(n)$ yang berbentuk $P(n)s^n$, dimana $P(n)$ adalah polinomial dan *s* adalah bilangan konstan, maka harus ditunjukkan apakah *s* merupakan akar dari persamaan karakteristik ini. Karena $s = 3$ adalah akar persamaan karakteristik dengan pemangkatan $m = 2$ sedangkan $s = 2$ bukan akar persamaan karakteristik, maka penyelesaian khusus yang diperoleh adalah $p_0 n^2 3^n$ jika $f(n) = 3^n$, berbentuk $n^2(p_1 n + p_0)3^n$ jika $f(n) = n3^n$, berbentuk $(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$ jika $f(n) = n^2 2^n$, dan berbentuk $n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)3^n$ jika $f(n) = (n^2 + 1)3^n$.

E. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan penyelesaian khusus dari masing-masing relasi rekurensi di bawah ini:
   a). $a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 3r^2 - 2r + 1$.
   b). $a_r - 5a_{r-1} + 6\ a_{r-2} = 1$.
   c). $a_r - 4\ a_{r-1} + 4\ a_{r-2} = (r+1)2^r$.
2. Tentukan penyelesaian total dari masing-masing relasi rekurensi di bawah ini:
   a). $a_r - 7a_{r-1} + 10a_{r-2} = 3^r$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.
   b). $a_r + 6a_{r-1} + 9a_{r-2} = 3$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.
3. Selesaikanlah relasi rekurensi berikut ini.
   a). $a_n = 2a_{n-1} + 1,\ a_0 = 1$
   b). $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n^2,\ a_0 = 0, a_1 = 1$
   c). $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 3^n,\ a_0 = 0, a_1 = 2$
   d). $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2} + 3n4^n,\ a_0 = 0, a_1 = 2$
   e). $a_n = a_{n-1} + n,\ a_0 = 1$
   f). $a_n = a_{n-1} + n - 1,\ a_1 = 0$

4. Selesaikanlah relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan di bawah ini.

a). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_0 = 3, a_1 = 0$
b). $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_0 = 4, a_1 = 7$
c). $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, a_0 = 5, a_1 = 0$
d). $a_n = 4a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = -8$
e). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2$
f). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = 3$
g). $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}, a_0 = 3, a_1 = -7, a_2 = 7$
h). $a_n = 8a_{n-1} - 21a_{n-2} + 18a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 13$
i). $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 5, a_2 = 19$

5. Tentukan apakah relasi rekurensi di bawah ini linier homogen atau linier nonhomogen.

a). $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ b). $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$
c). $a_n = 1.08a_{n-1}$ d). $b_n = 2b_{n-1} + 1$
e). $a_n = a_{n-1} + n$ f). $a_n = 2a_{n-1} + (2^n - 1)$
g). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-5}$ h). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3} + n^2$

6. Carilah bentuk umum dari salah satu penyelesaian khusus relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan untuk setiap fungsi $f(n)$ sesuai dengan

a). $f(n) = n$ b). $f(n) = 1$ c). $f(n) = 3n^2$
d). $f(n) = 3^n$ e). $f(n) = n2^n$ f). $f(n) = 43n^2 5^n$

7. Carilah bentuk umum dari salah satu penyelesaian khusus relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan yang bersesuaian dengan relasi rekurensi linier nonhomogen dengan koefisien konstan $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + f(n)$ untuk setiap fungsi di bawah ini.

a). $f(n) = 3.2^n$ b). $f(n) = n2^n$
c). $f(n) = 23n^2 2^n$ d). $f(n) = (17n^3 - 1)2^n$

8. Dengan menggunakan fungsi pembangkit, selesaikanlah masalah relasi rekurensi homogen linier berkoefisien konstan di bawah ini.

a). $a_n = 2a_{n-1}, a_0 = 1$

b). $a_n = a_{n-1} + 1, a_1 = 1$

c). $a_n = a_{n-1} + 2, a_1 = 1$

d). $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_0 = 3, a_1 = 0$

e). $a_n = 4a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = -8$

f). $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, a_0 = 5, a_1 = 0$

g). $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_0 = 4, a_1 = 7$

h). $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2$

i). $a_n = 8a_{n-1} - 21a_{n-2} + 18a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 13$

j). $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 5, a_2 = 19$

9. Nyatakanlah masing-masing pembagian di bawah ini menjadi pecahan parsial.

a). $\dfrac{x+7}{(x-1)(x+3)}$

b). $\dfrac{4x^2 - 3x - 25}{(x+1)(x-2)(x+3)}$

c). $\dfrac{5}{1 - x - 6x^2}$

d). $\dfrac{2+4x}{1+8x+15x^2}$

e). $\dfrac{x(x+2)}{(2+3x)(x^2+1)}$

f). $\dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x^2+2x)}$

g). $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 + 5x^2 + 6}$

h). $\dfrac{-x^3 + 2x^2 + x}{x^4 + x^3 + x + 1}$

10. Dengan metode iterasi, perkirakanlah suatu penyelesaian dari masing-masing relasi rekurensi yang memenuhi syarat awal yang diberikan di bawah ini.

a). $s_0 = 1$
$s_n = 2s_{n-1}, n \geq 1$

b). $a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} + n, n \geq 2$

c). $a_0 = 1$
$a_n = a_{n-1} + n, n \geq 1$

d). $a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} + (2n-1), n \geq 2$

e). $a_0 = 0$
$a_n = a_{n-1} + 4n, n \geq 1$

f). $s_1 = 1$
$s_n = s_{n-1} + n^3, n \geq 2$

g). $s_1 = 1$
$s_n = s_{n-1} + n^2, n \geq 2$

h). $a_1 = 1$
$a_n = 2a_{n-1} + (2^n - 1), n \geq 2$

11. Tunjukkan bahwa

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 1 \\ a_{n-1} + n/2 & \text{jika } n > 1 \text{ dan ganjil} \\ a_{n-1} + (n-1)/2 & \text{jika } n > 1 \text{ dan ganjil} \end{cases}$$