BAB II
TEORI TURBULENSI
DALAM FLUIDA BERLAPIS

Big whorls have, little whorls
And little whorls have looser whorls
Which feed on their velocity
And so on to viscosity

Lewis F. Richardson

Turbulen adalah permasalahan fisika klasik yang paling tua, paling sukar dan sering membuat orang frustasi. Sekarang ini turbulensi disebut-sebut sebagai permasalahan fisika klasik modern karena beberapa perkembangan pesat teori tentang turbulensi dewasa ini. Turbulensi terjadi diberbagai kehidupan, mulai dari proses pencampuran coklat disecangkir susu sampai dispersi polutan di atmosfer. Dari pembentukan galaksi pada awal terciptanya alam semesta sampai konveksi termal air dalam panci yang mendidih. Aliran fluida disekeliling mobil formula satu, kapal laut, pesawat boeng 747 sampai pesawat angkasa Buck Roger waktu melintasi atmosfer Mars. Proses luar biasa pembalikan medan magnet Bumi juga diakibatkan oleh mahluk memusingkan turbulensi ini. Hampir di segenap penjuru alam semesta baik di pusat galaksi, matahari, gedung MPR, kediaman mbah Harto, real estate sampai perumahan kumuh dapat ditemui turbulensi. Setiap fisikawan terkemuka selalu menaruh minat pada mahluk aneh ini baik secara formal maupun informal.

Kita akan menunjau turbulensi lebih detail nanti, sekarang akan dibahas dasar formalisme yang membahas kelakuan dinamika fluida. Telaah lebih lanjut penulis rekomendasikan bukunya Landau.L.D & E.M Lifshitz 1989 “Fluid Mechanics”Pergamon Press. Buku tersebut merupakan buku tentang mekanika fluida dalam pandangan seorang fisikawan yang sangat menguasai bidangnya.

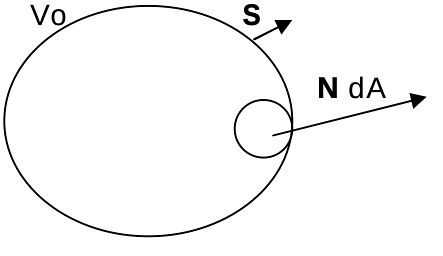
2.1. Persamaan dasar dinamika fluida.

Dinamika fluida adalah studi yang berhubungan dengan gerakan fluida (cairan dan gas). Karena yang dipelajari adalah fenomena makroskopis maka fluida dipandang sebagai medium kontinu. Hal ini berarti sebuah elemen volume dari suatu fluida akan cukup kecil sehingga dapat dipandang sebagai infinitesimal (pandangan ini dimaksudkan supaya kalkulus dapat diterapkan), tetapi elemen tersebut harus cukup besar sehingga masih dapat berisi banyak molekul supaya kita boleh memandangnya sebagai makroskopis. Elemen tersebut kita namakan partikel fluida atau titik fluida. Jadi kalau kita berbicara tentang pergeseran (displacement) maka berarti bukanlah pergeseran molekul secara individual tetapi pergeseran elemen fluida yang masih terkandung cukup banyak molekul.

Diskripsi matematik untuk gerakan fluida akan dinyatakan dalam fungsi ruang dan waktu. Fungsi-fungsi itu adalah kecepatan **u**(**r**,t); tekanan **P**(**r**,t) dan densitas ρ(**r**,t). Fungsi-fungsi ini menyatakan secara lengkap fenomena dinamika fluida. Seperti fenomena fisika yang lainya maka dinamika fluida dibangun oleh hukum-hukum dasar fisika yaitu hukum kekekalan massa, hukum kekekalan momentum (hukum Newton-2) dan hukum kekekalan energi.

2.1.1 Persamaan Kontinuitas

Hukum pertama yang mendasar adalah hukum kekekalan massa. Massa fluida tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan. Massa fluida adalah sesuatu yang kadem, dia hanya berubah bentuk. Ini hanyalah sebuah konsep supaya serasi dengan hukum fisika yang lain. Jika kita lihat suatu volume fluida sebagai berikut:



Misalkan kita mempunyai sebuah ruang dengan volume Vo maka massa fluida dalam volume tersebut adalah:

$$Massa = \iiint_{V_o} \rho(\vec{r},t) d^3r$$

Massa fluida yang mengalir persatuan waktu menembus suatu permukaan S dengan volumenya Vo akan dinyatakan oleh:

$$\frac{Massa}{sat.waktu} = \oiint_S \rho(\vec{r},t)\vec{u}(\vec{r},t)\cdot \vec{N}dA$$

Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa banyaknya massa yang keluar persatuan waktu dari suatu luasan permukaan S yang volumenya Vo adalah sama dengan berkurangnya massa fluida yang berada didalam. Secara matematis pernyataan diatas ditulis sebagai:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_o} \rho(\vec{r},t)d^3r = \oiint_S \rho(\vec{r},t)\vec{u}(\vec{r},t)\cdot \vec{N}dA$$

Dengan menggunakan teorema Gauss disisi kiri maka kita dapatkan:

$$\iiint_{V_o}\left[\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{u})\right]d^3r = 0$$

Karena persamaan tersebut selalu dipenuhi oleh sembarang volume dalam fluida (ingat fluida adalah medium kontinu) maka integran diatas harus nol. Jadi kita dapatkan persamaan yang dinamakan persamaan kontinuitas sebagai berikut:

$$\left[\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{u})\right] = 0 \qquad 2.1.1.1$$

2.1.2 Persamaan Gerak

Persamaan fundamental yang lain adalah hukum Newton ke dua atau hukum Newton tentang gerak, atau hukum kekekalan momentum. Menurut hukum Newton, pada dasarnya suatu fluida akan bergerak karena ada gaya yang bekerja kepadanya. Gaya yang paling mendasar adalah gradien tekanan. Hal ini mudah dimengerti dengan analisis dimensional. Tekanan adalah gaya persatuan luas, jadi gaya adalah tekanan kali satuan luas. Kalau kita berbicara gaya persatuan volume maka kita akan mendapatkan tekanan dibagi satuan panjang, ini adalah demensi dari gradien. Gaya tersebut secara umum akan kita beri simbol:

$$\vec{F} = \frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial x_j}$$

Hukum Newton dua (F=ma) akan dituliskan untuk fluida sebagai berikut:

$$\rho\frac{\partial\vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial x_j}$$

Tekanan tersebut berupa suatu tensor rank dua. Tensor tekanan secara umum akan dinyatakan sebagai tekanan skalar, tensor simetri dan tensor tak simetri, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho u_i u_j - \sigma_{ij}$$

Tensor σ_{ij} disebut sebagai tensor tekanan viskositas. Tensor ini menyatakan proses disipasi energi dalam gerak fluida. Proses ini terjadi akibat adanya peristiwa irreversibilitas akibat gerakan gesekan internal atau lebih tepat adanya transfer momentum internal. Karena tensor viskositas adalah transfer momentum maka dia akan sebanding dengan gradien kecepatan. Syarat lain yang harus dipenuhi adalah ketika fluida bergerak berotasi secara uniform tensor akan nol karena dalam gerak tersebut tidak ada transfer momentum internal. Secara matematis tensor viskositas ini akan sebanding dengan gradien dan seperti rotasi atau curl, dan akan dinyatakan oleh:

$$\sigma_{ij} = A\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + B\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Koefisien A dan B secara formal dapat diturunkan teori kinetik gas melalui persamaan transport Boltzmann. Berikut ini hasilnya (Huang,K 1986):

$$\sigma_{ij} = \left(\xi - \tfrac{2}{3}\eta\right)\delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Hasil ini menyebabkan persamaan gerak menjadi:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \left(\xi + \tfrac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)$$

Persamaan ini dikenal dengan nama persamaan Navier-Stoke. Koefisien η danξ berturut turut menyakatakan koefisien viskositas kinematik dan dinamik. Biasanya dalam dinamika laut kita mengangap bahwa laut adalah inkompresibel, kondisi ini disyaratkan dengan divergensi kecepatan nol ($\nabla.\mathbf{u}=0$) sehingga persamaan Navier-Stokes menjadi:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \qquad 2.1.2.1$$

2.1.3 Persamaan Difusi

Persamaan difusi ini sering disebut persamaan yang menyatakan evolusi suatu medan skalar. Dalam kasus kita, medan skalar ini meliputi temperatur, salinitas atau konsentrasi suatu zat misalnya polutan, BOD dll. Semua medan ini mempunyai bentuk persamaan yang sama, maka untuk menurunkannya kita ambil contoh medan temperatur. Evolusi dari suatu medan temperatur di suatu fluida akan sebanding dengan penyebaran fluks termalnya serta suatu sumber panas. Karena temperatur T(x,t) adalah fungsi ruang dan waktu maka evolusi dari T(x,t) akan dinyatakan oleh dT / dt. Bentuk tersebut kita cari sebagai berikut. Karena T = T(x,t) maka difensial total dari T akan dinyatakan oleh:

$dT(\vec{x},t) = \frac{\partial T}{\partial t}dt + \frac{\partial T}{\partial \vec{x}}.d\vec{x}$ sehinga dT / dt menjadi $\frac{dT(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}(T)$

Penyebaran fluks termal secara matematis akan dinyatakan oleh operasi divergensi. Fluks termal mengikuti hukum Fick yaitu fluks termal akan sebanding dengan gradien temperatur. Kesebandingan itu akan dinyatakan oleh suatu besaran (umumnya tensor rank dua) yang dinamakan konduktivitas termal. Fluks tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{F} = -\overleftrightarrow{K}.\vec{\nabla}T$$

Jika suatu elemen volume dengan luasan V dan luasan permukaan S dan spesifik panas fluida dalam volume tersebut C dengan densitas ρ maka perubahan kalor Q persatuan waktu untuk seluruh volume adalah (ingat rumus kalor Q=mc ΔT; untuk fluida Q = ρC ΔT):

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} d^3\vec{r}$$

Perubahan kalor tersebut sama dengan fluks termal yang mengalir memotong seluruh permukaan S yang dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} d^3\vec{r} = -\iint_S \vec{F}.d\vec{A} = -\iint_S -\overleftrightarrow{K}.\vec{\nabla}T.d\vec{A}$$

Kembali kita gunakan teorema divergensi atau teorema Gauss disisi kanan, sehingga persamaan diatas menjadi:

$$\iiint_V \rho C \frac{dT}{dt} d^3\vec{r} = \iiint_V \vec{\nabla}.\left(\overleftrightarrow{K}.\nabla T\right) d^3\vec{r}$$

Dengan memasukkan suku sumber maka evolusi medan temperatur akan mengikuti persamaan:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}(T) = \vec{\nabla}.\left(\kappa_T \vec{\nabla}T\right) + Q_T(\vec{x},t) \qquad 2.1.3.1$$

Koefisien yang muncul dalam persamaan diatas disebut koefisien difusi termal yang dinyatakan secara umum oleh:

$$\vec{\kappa}_T = \frac{\vec{K}}{\rho C}$$

Bentuk persamaan tersebut juga berlaku untuk distribusi salinitas (S) dan medan skalar lain katakanlah (C), yang dapat dituliskan sebagai berikut:
Persamaan difusi untuk salititas:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}(S) = \vec{\nabla}.(\kappa_S \vec{\nabla} S) + Q_S(\vec{x}, t) \qquad 2.1.3.2$$

Persamaan difusi untuk konsentrasi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}(C) = \vec{\nabla}.(\kappa_C \vec{\nabla} T) + Q_C(\vec{x}, t) \qquad 2.1.3.3$$

Persamaan – persamaan 2.1.1.1; 2.1.2.1; 2.1.3.1; 2.1.3.2 dan 2.1.3.3 menyatakan secara lengkap dinamika laut.

2.2. Mekanisme Turbulensi.

Hal yang paling sulit dalam turbulensi adalah untuk menjawab pertanyaan mengenai bagaimana mekanismenya sehingga turbulen bisa terbentuk. Ada banyak penjelasan tentang itu tetapi ternyata tidak ada teori yang general, penjelasan yang ada hanya cocok untuk suatu kasus tetapi gagal untuk kasus yang lain. Masalah trnasisis dari keadaan laminer ke keadaan turbulen merupakan masalah yang paling sulit dan kompleks di mekanika fluida. Biasanya kajian teoritik tetang mekanisme turbulensi didasarkan pada asumsi bahwa aliran laminer mengalami suatu gangguan kecil. Jika gangguan tersebut meluruh dengan waktu maka kita katakan aliran stabil, jika gangguan tersebut selalu tumbuh maka kita katakan gangguan tak stabil dengan ketakstabilan ini kemungkinan aliran akan menjadi turbulen. Penjelasan mengenai mekanisme turbulensi sampai sekarang merupakan PR yang masih belum terselesaikan secara memuaskan.
Salah satu kriteria penting untuk eksistensi turbulen adalah dengan melihatnya pada suatu bilangan yang menyatakan kondisi fisis suatu fluida. Misalkan kita mempunyai fluida dengan viskositas ν dan bergerak dengan kecepatan V, jika skala panjang sistem kita L maka perbandingan antara kecepatan dengan viskositas akan memberikan tingkat turbulensi yang dinyatakan sebagai bilangan Reynold:

$$R_e = \frac{V.L}{\nu}$$

Dengan bertambahnya gangguan maka V semakin besar sehingga bilangan Reynold juga semakin besar. Bilangan ini akan mencapai suatu kondisi kritis, dimana jika bilangan Reynold melebihi kondisi kritis aliran fluida menjadi turbulen. Dalam fluida berlapis, katakanlah berlapis secara termal, maka dalam sistem tersebut kita mempunyai tiga macam jenis energi yaitu: energi dalam karena viskositas, energi dalam karena termal dan energi kinetik. Secara kuantitatif energi tersebut dinyatakan berturut-turut sebagai berikut:

$$R_v \approx \nu \frac{V^2.}{L^2} \quad ; \qquad R_T \approx \frac{g}{T_o} V.T \; ; \qquad R_K \approx \frac{V^2}{L}$$

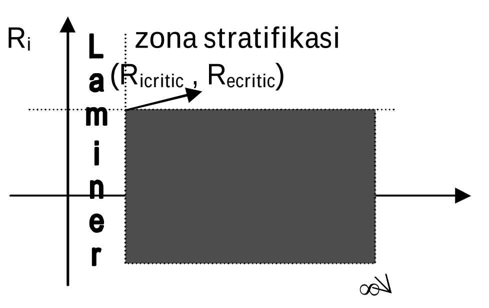
Fluida dikatakan stabil jika terjadi keseimbangan diantara ketiga besaran tersebut yaitu $R_K = R_\nu + R_T$. Kondisi turbulen terjadi jika $R_K > R_\nu + R_T$. Jika fluida tak berlapis maka $R_T = 0$, sehingga kondisi turbulen akan dinyatakan oleh:

$$R_K > R_\nu$$
$$V^2 / L > \nu V^2 / L^2$$
$$VL / \nu > 1$$
$$R_\nu > 1$$

Jadi kondisi turbulen jika bilangan Reynold (R_e)> 1.
Jika sekarang viskositas kecil maka kondisi turbulen disyaratkan dengan:

$$R_K > R_T$$
$$V^2 / L > (g / T_o) V.T$$
$$1 > g.T / T_o.V = g.L.T / T_o.V^2 = R_i$$

Bilangan R_i disebut bilangan Rischardson, jadi turbulensi terjadi bila bilangan Richarson
(R_i) < 1. Bilangan Richarson mengukur turbulensi karena termal dan bilangan Reynold mengukur turbulensi karena viskositas. Berikut ini adalah ilustrasi hubungan antara keduanya:



Jadi turbulensi akan timbul (*bukan pimpinan ketoprak humor*) jika bilangan Reynold lebih besar dari harga kritisnya dan bilangan Richardson lebih kecil dari harga kritisnya.

Ketakstabilan dalam fluida tergantung dari gaya penyebabnya, jika ketakstabilan akibat termal, misalnya fluida yang dipanasi dari bawah, disebut ketakstabilan Benard. Jika ketakstabilan akibat stratifikasi karena perbedaan kecepatan antar (shear) lapisan dinamakan ketakstabilan Kelvin-Helmholtz. Pembahasan ketakstabilan fluida dalam kerangka teori linier telah dibahas dengan sangat excelent dalam buku: Chandrasekar,S 1962 "Hydrodynamics and Hydromagnetics Instability" Dover, Pub, New York. Dalam fluida yang mengalami ketakstabilan Kelvin-Helmholtz seringkali terpicu munculnya gelombang internal. Penjalaran gelombang internal dilaut ditandai dengan lapisan termokline yang naik turun, biasanya kita bisa menggunakan parameter temperatur atau salinitas yang akan terlihat naik turun bila gelombang internal lewat. Ketakstabilan tadi ternyata sering berinteraksi dengan gelombang nonlinier yang menghasilkan flukstuasi random yang sama dengan flukstuasi yang dihasilkan oleh turbulen. Hal yang sangat sukar untuk memisahkan sinyal yang dihasilkan oleh gelombang internal tersebut dengan sinyal yang dihasilkan oleh turbulen. Turbulen dan gelombang internal pun sering kali berinteraksi dan bila gelombang internal pecah dapat membangkitkan turbulensi. Pada umumnya ada perbedaan antara gelombang internal dan turbulen. Turbulensi mempunyai dissipasi yang tinggi serta sifat diffusi sedangkan gelombang internal mempunyai dissipasi yang lemah dan non difusi. Tetapi untuk gelombang internal tak linier sering kali dihasilkan oleh efek dissipasi yang tinggi. Yah, kita mempunyai masalah yang kompleks dan saling terkait, persis seperti suasana negara Indonesia saat ini.

Studi tentang turbulensi sampai sekarang didasarkan pada dua paradigma yaitu:

1. *Turbulen adalah hasil dari penguatan dan transformasi tak linier dari noise (gangguan) internal atau eksternal dalam suatu medium kontinu atau suatu medan.*
2. *Turbulen adalah chaos deterministik spatial-temporal, yaitu suatu osilasi (tak perlu peroidik) dari suatu sistem yang terdistribusi yang stokastik di dalam ruang dan waktu.*

Paradigma yang pertama adalah yang tertua dan dipelopori oleh Von Karman, Taylor, Prandt dll, yang diwakili oleh teori statistik turbulensi. Sedangkan paradigma yang kedua muncul belakangan dengan berkembangnya teori chaos atau nonlinear dynamics, pelopornya antara lain Henri Poincare, Edward Lorentz dll. Eksperimen tentang turbulen yang dibuat dewasa ini ternyata lebih sesuai dengan paradigma yang kedua. Hal ini artinya bahwa keadaan yang turbulen/kacau bukanlah mahluk statistik yang selalu berhubungan dengan keacakan sehingga kita harus berbicara dengan probabilistik, melainkan sesuatu yang deterministik atau sesuatu yang pasti. Kita akan memberikan contoh tentang mekanisme turbulensi berdasarkan kedua paradigma diatas:

2.2.1 Generasi turbulen dalam teori statistik turbulensi

Sekarang kita tinjau proses generasi turbulen didalam keadaan dimana suatu aliran stasioner mengalami gangguan sehingga dia menjadi tak stabil. Teori statistik turbulensi memandang gerak turbulen sebagai penjumlahan garak rata-rata (laminer) dan flukstuasinya (turbulen) yang dinyatakan oleh $U = U_o + U'$. Jika gangguan infinitesimal bekerja pada suatu aliran maka medan kecapatan akibat gangguan tersebut dinyatakan dalam bentuk:

$$U'(x,t) = e^{\lambda t} f_o(x) = A(t) f_o(x)$$

Dimana $\lambda = \gamma + i\omega$

Dalam persamaan linier solusi diatas memenuhi persamaan harga eigen dengan harga eigen λ (kompleks). Jika semua harga eigen λ mempunyai bagian real yang negatif ($\gamma<0$) maka gangguan tersebut akan teredam. Ada suatu nilai dimana harga eigen bersesuaian dengan bilanga Reynold ($Re=LU/\nu$) yang kritis, jika ini tercapai kondisi aliran akan netral. Jika harga Reynold melebihi harga kritis maka bagian real dari harga eigen akan positif ($\gamma>0$) sehingga gangguan akan berkembang dan tercapailah keadaan turbulen. Landau tahun 1944 (Landau,L.D & E.M Lifshitz) menyatakan bahwa transisi dari keadaan periodik ke keadaan turbulen, amplitude A(t) akan memenuhi persamaan linier:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2 - \delta|A|^4$$

Jika $\delta>0$ maka solusi persamaan tersebut menjadi:

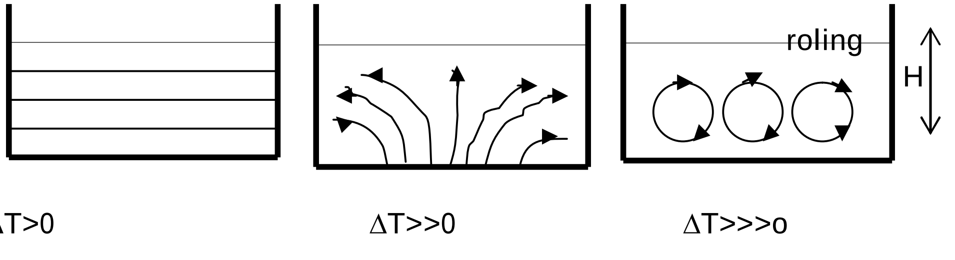
$$|A(t)| = \frac{A_o^2 A_\infty^2}{A_o^2 + \left(A_\infty^2 - A_\infty^2\right)e^{-2\gamma t}} \quad ; \quad A_\infty = \left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Jika suatu gangguan awal Ao maka amplitude A(t) akan naik secara eksponensial, tetapi kemudian rata-rata kenaikan menjadi kecil. Pada $t \to \infty$ amplitude berkecenderungan untuk mencapai harga tertentu $A\infty$ yang tak bergantung pada harga awal dan aliran menjadi quasi periodik dengan periode $2\pi/\omega1$dan $2\pi/\omega2$ dengan berlalunya waktu maka periode akan ememcah menjadi $2\pi/\omega1$, $2\pi/\omega2$, $2\pi/\omega3$, dan $2\pi/\omega4$ demikian seterusnya sehingga kita mendapatkan aliran yang tak periodik atau turbulen.

2.2.2 Generasi turbulen dalam teori deterministic chaos

Perkembangan teori ini pada awalnya didasari oleh pemikiran matematikawan dan fisikawan termasyur dari Prancis yaitu Henri Poincaré. Pak Poincaré menyadari bahwa kalau kita mencari suatu solusi dari suatu persamaan yang nonlinier tak perlu kita mendapatkan hasil yang kuntitatif tetapi cukuplah jika kita bisa mendapatkan hasil yang kualitatif yaitu kita bisa mengambarkan perilaku dari suatu solusi tanpa harus mengetahui harganya secara pasti. Pengambaran solusi yang kualitatif ini dinyatakan atau diperikan dalam suatu ruang khayal yang dinamakan ruang fase. Kurva dalam suatu ruang fase menyatakan perilaku dari suatu solusi atau fenomena alam. Jika kurva dalam ruang fase (bagaimanapun dia bergerak) akan kembali lagi ketitik awal menyatakan bahwa solusi adalah peroidik, jika tidak maka solusi tak periodik. Suatu sistem persamaan diferensial biasa yang linier akan memunculkan solusi yang periodik atau invarian terhadap waktu, artinya berapapun nilai awal yang kita ambil maka kita dengan pasti akan dapat menentukan harga solusi pada sembarang waktu t. Jika solusi tersebut tak periodik maka keadaan solusi akan sangat berbeda terhadap pemilihan harga awal, hasil pengambarannya dalam ruang fase adalah suatu bentuk yang aneh yang takpernah ketemu dengan titik awal tadi. Bentuk yang aneh tadi biasanya dinamakan “strange attractor”. Jika aliran turbulen adalah tak periodik dan tak invarian terhadap waktu maka adalah mungkin mengambarkan aliran turbulen dalam suatu ruang fase yang dinyatakan dalam bentuk kurva yang aneh atau strange attractor. Pertanyaan “apakah benar gagasan diatas?”. Untuk menjawabnya mari kita lihat contoh berikut ini:

Sekarang anda ke dapur dan ambilah panci yang telah diisi air secukupnya dan taruh diatas kompor yang telah menyala. Anda akan mengamati kejadian seperti berikut:



Jika air dalam panci dipanaskan dari bawah maka akan terjadi beda temperatur antara dibagian bawah dan bagian atas air. Pertama-tama air akan tenang karena beda temperatur tidak begitu besar. Semakin besar beda temperatur maka air mulai mengalami gangguan yaitu dia mulai akan bergolak, semakin besar beda temperatur maka sistem menjadi tak stabil dan gangguan tumbuh semakin besar sehingga terjadilah konveksi yang ditandai dengan bergolaknya air (adanya roling). Ini tandanya air telah mendidih dan siap untuk membikin kopi susu. Dalam hidrodinamika ketastabilan seperti diatas dinamakan ketakstabilan Bernard. Bagaimana hidrodinamika menjelaskan peristiwa ini? Mari kita tanya Galileo...eh salah..mari kita tanya Edward Lorentz. Prof Edward Lorentz adalah profesor meteorologi dinamik dari MIT-USA yang pada tahun 1963 menjelaskan fenomena diatas berdasarkan konsep deterministik yaitu mencari solusi dari persamaan Navier-Stokes dan persamaan difusi termal tanpa mengunakan aproksimasi statistik (U = Uo + U'). Penjelasan E. Lorentz sebagai berikut:

Persoalan diatas melibatkan dua fenomana yaitu fenomena gerak dan fenomena difusi termal. Pada dasarnya untuk membahas keseluruhan fenomena itu adalah dengan mencari solusi dari persamaan Navier-Stoke (gerak) dan persamaan difusi termal. Kedua persamaan itu dapat dituliskan (untuk menyederhanakan masalah kita asumsikan fluida invarian terhadap translasi dalam sumbu y). sebagai berikut:

Persamaan Navier-Stokes (dalam 2D karena hanya variabel x dan z yang berperan):

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\eta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\eta\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\rho g \qquad 2.2.1.1$$

Persamaan difusi termal:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad 2.2.1.2$$

Pendekatan Boussinesq yaitu menyatakan densitas sebagai fungsi temperatur sebagai berikut: $\rho = \langle\rho\rangle(1-\alpha\Delta T)$. Fluida inkompresibel sehingga kita dapat menyatakan kecepatan dalam suatu fungsi stream sebagai berikut:

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad , \qquad w=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Temperatur dinyatakan dalam suatu aproksimasi sebagai berikut:

$$T(x,z,t)=T_o+\Delta T-\frac{\Delta T}{H}z+\theta(x,z,t)$$

Dimana H adalah kedalaman air , konduktivitas termal konstan dan $\nu=\eta/\rho$ adalah viskositas kinematik. Jika a adalah diameter roling maka dengan mensubtitusikan fungsi – fungsi diatas ke persamaan 2.2.1.1 dan 2.2.1.2. maka persamaan diatas menjadi (coba dilakukan untuk latihan):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi\right) = -\frac{\partial\left(\psi,\nabla^2\psi\right)}{\partial(x,z)} + \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad 2.2.1.3$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(x,z)} + \frac{\Delta T}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta \qquad 2.2.1.4$$

dimana:

$$\frac{\partial(A,B)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial A}{\partial x}.\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial x} \quad ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Reyleigh mengemukakan bahwa solusi persmaan ini untuk kasus yang linier berbentuk:

$$\psi = \psi_o \sin\left(\frac{a\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$

$$\theta = \theta_o \cos\left(\frac{a\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$

Jika solusi ini disubtitusikan ke persamaan 2.2.1.3 dan persamaan 2.2.1.4 untuk versi liniernya maka kita akan mendapatkan suatu kuantitas Ra yang dinamakan bilangan Reyleigh sebagai berikut:

$$R_a = \frac{g\alpha H^3\Delta T}{\kappa\nu}$$

dan suatu bilangan Reyleigh kritis sebagai berikut:

$$R_c = \frac{\pi^2\left(1+a^2\right)^3}{a^2}$$

Karena bentuk solusi diatas hanya berlaku untuk kasus yang linier maka untuk mengekspan ke kasus yang nonlinier Edward Lorentz mengambil solusi berbentuk:

$$\frac{a}{\kappa\left(1+a^2\right)}\psi = \sqrt{2}X(t)\sin\left(\frac{a\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}z\right)$$

$$\frac{\pi R_a}{R_c\Delta T}\theta = \sqrt{2}Y(t)\cos\left(\frac{a\pi}{H}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) - Z(t)\sin\left(\frac{2\pi}{H}z\right)$$

Lorentz mengunakan kondisi batas bebas sebagai berikut:

$$\theta(0,0,t) = \theta(0,H,t) = \psi(0,0,t) = \psi(0,H,t) = \nabla^2\psi(0,0,t) = \nabla^2\psi(0,H,t) = 0$$

Jika kita subtitusikan solusi dan syarat batas ini ke persamaan 2.2.1.3 dan 2.2.1.4 dan abaikan suku harmonis lebih tinggi (orde empat ke atas) maka akan kita peroleh suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \frac{dY}{d\tau} &= -XY + rX - Y \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ \end{aligned} \qquad 2.2.1.5$$

Dimana $\tau \equiv \pi^2 H^{-2} (1+a^2)\kappa t$ adalah waktu terrenormalisasi; $\sigma = \nu/\kappa$ adalah bilangan Prandl, $b = 4(1+a^2)^{-1}$ dan $r = Ra/Rc \propto \Delta T$ merupakan parameter kontrol. Kita melihat bahwa beda temperatur menjadi parameter kontrol yang akan menentukan bagaimana suatu solusi terbentuk. Persamaan diatas adalah sistem persamaan diferensial nonlinier. Seperti yang telah disinggung diatas bahwa kita tertarik kelakuan solusi secara kualitatif dengan merepresentasikannya dalam suatu ruang fase. Secara umum persamaan diatas mempunyai bentuk:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1,...X_M), \qquad i = 1...M$$

F adalah suatu fungsi kontinu. Suatu ruang fase Γ adalah ruang Euclidean dengan dimensi-M yang vektor basisnya adalah X_1 ,...X_M . Jika $\partial F_i/\partial X_j$ kontinu maka untuk suatu t_o dan X_{10} ,...X_{M0} . adalah sembarang titik diruang fase Γ maka persamaan diatas mempunyai solusi yang unik:

$$X_i = F_i(X_{10},...X_{M0},t), \qquad i = 1...M$$

Dan memenuhi kondisi:

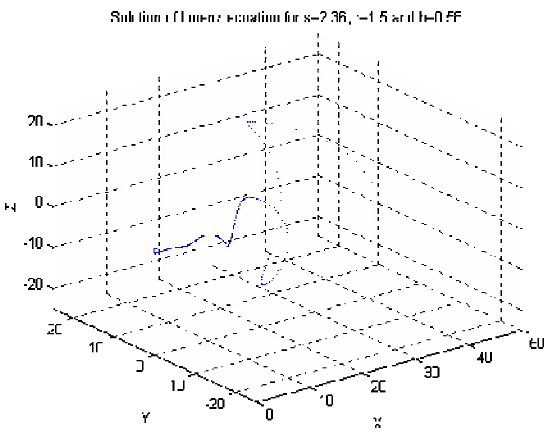
$$X_{i0} = F_i(X_{10},...X_{M0},t), \qquad i = 1...M$$

Suatu solusi akan dinyatakan oleh suatu trayektori dalam ruang fase Γ. Pembahasan lengkap tentang masalah ini terletak dalam teori dynamical system (Perko,E 1992). Kita tidak akan membicarakan secara detail, tetapi kita akan mengambil suatu konsep yang berguna bagi penjelasan turbulensi. Suatu trayektori dinyatakan oleh suatu fungsi P(t) dan dia dikatakan quasi-periodik jika ada suatu interval waktu yang besar τ, maka P(t+τ) akan dekat ke P(t). Atau secara lebih formal P(t) dikatakan quasi-periodik jika untuk sembarang $\varepsilon>0$ dan untuk sembarang interval waktu τ_o , disana ada interval waktu $\tau(\varepsilon,\tau_o)>\tau_o$ dan waktu t_1 (ε,τ_o) sehingga jika $t_1 > t_2$ maka $|P(t_2+\tau)-P(t_2)| < \varepsilon$. Trayektori P(t) yang tidak quasi-periodik disebut nonperiodik. Untuk aliran nonperiodik tentu saja trayektori tidak memenuhi prinsip diatas sehingga trayektori bisa berbentuk sembarang yang tidak harus dekat ke suatu titik limit. Trayektori yang nonperiodik merepresentasikan aliran tak periodik. Program numerik persamaan 2.2.1.5 dalam Matlab dan hasil plot solusinya adalah:

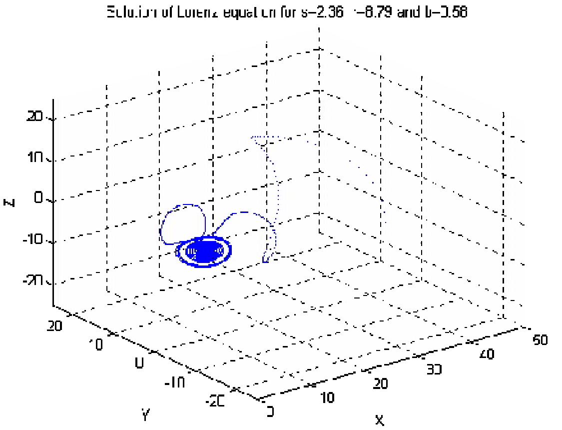
Program Lorentz equation di Matlab:

```
%Program persamaan Lorentz
b=0.58;
s=2.36;
r=47.07;
a=[-b 0 0;0 -s s;0 r -1];
y=[35 -10 -7]';
h=.01;
p=plot3(y(1),y(2),y(3),'.',...
  'EraseMode','none','MarkerSize',2)
axis([0 50 -25 25 -25 25])
grid
title('Solution of Lorenz equation for s=2.36, r=24.07 and b=0.58');
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
hold on
while 1
a(1,3)=y(2);
  a(3,1)=-y(2);
ydot=a*y;
  y=y+h*ydot;
set(p,'XData',y(1),'YData',y(2),'ZData',y(3))
  drawnow
end
```

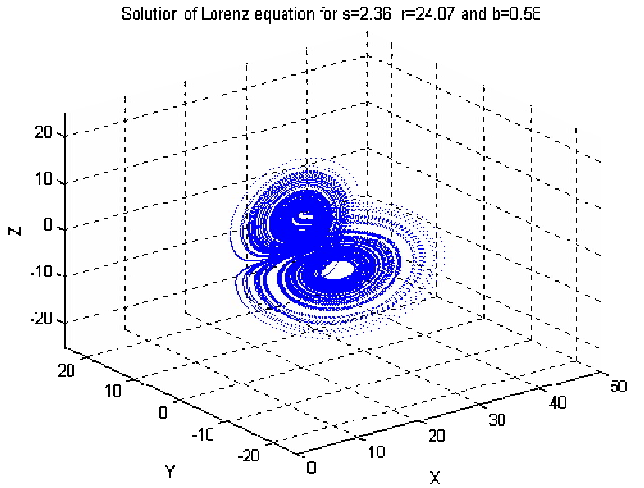
Hasil diperoleh sebagai berikut:



Trayektori-1



Trayektori-2



Trayektori-3

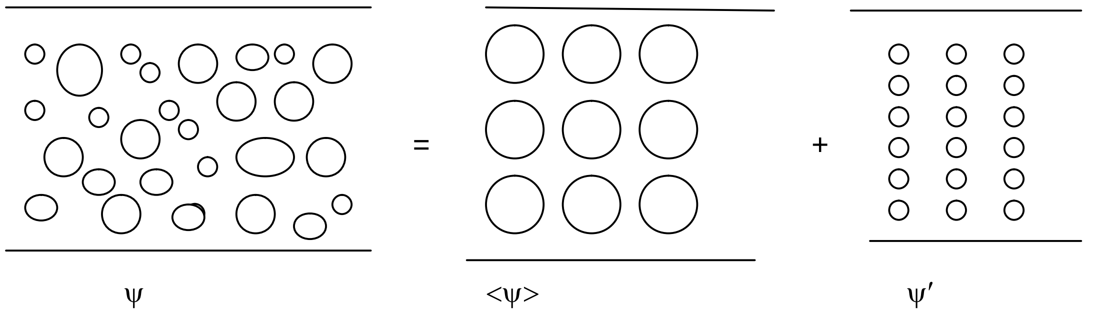
Ketiga trayektori diperoleh dengan menvariasikan harga r. Kita tahu bahwa r sebanding dengan beda temperatur. Beda temperatur ini berperan sebagai parameter kontrol keadaan solusi, trayektori-1 pada saat r kecil yaitu beda temperatur kecil maka kita dapatkan solusi yang quasi-periodik hal ini menyatakan air masih belum bergolak karena beda temperatur yang masih kecil. Jika pemanasan berlangsung maka beda temperatur semakin besar sehingga air mulai panas. Trayektori-2 aliran masih quasi periodik yang menyatakan air belum bergolak. Pada trayektori-3 maka kita mendapatkan aliran yang nonperiodik, hal ini menyatakan air telah bergolak atau aliran turbulen telah terjadi. Hal ini merupakan penjelasan tentang mekanisme turbulensi. Kalau kita bandingkan teori statistik dengan deterministic chaos menunjukkan bahwa teori statistik tidak bisa menjelaskan mekanisme turbulensi secara memuaskan, tetapi jika turbulen telah terjadi maka teori statistik sangat powerful karena kesederhanaan dan keampuhannya. Untuk kebanyakan pengukuran dilaut, turbulen dianggap telah terjadi sehingga kebanyakan para oceanographer mengunakan teori statistik ini. Untuk selanjutnya kita akan mengeksplore teori statistik turbulensi dengan cukup detail. Tujuannya supaya pembaca mendapatkan gambaran yang jelas sehingga tidak akan ketemu dengan rumus yang misterius serta dapat mengikuti paper-paper yang membahas tentang turbulensi di laut.

2.3. Teori statistik turbulensi

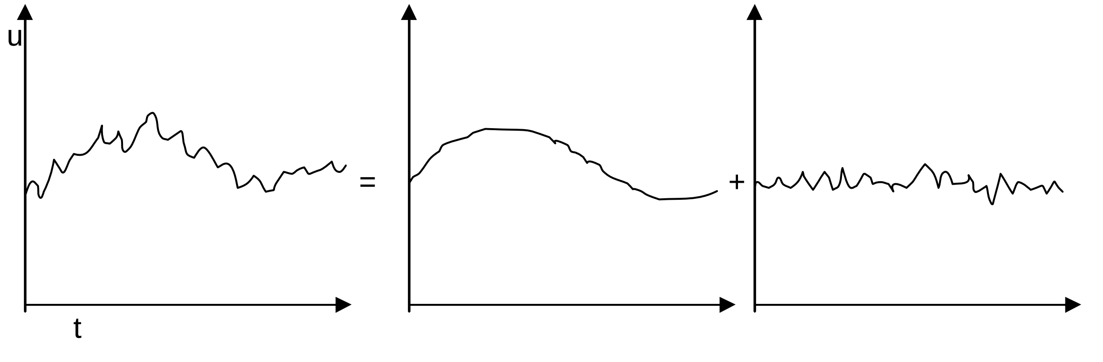
Turbulen ternyata sukar didefinisikan secara tepat. Berikut ini adalah ciri-ciri dari turbulensi:

- ***Acak***. Parameter yang mengambarkan dinamika fluida dalam keadaan turbulen adalah variabel acak, tidak ada relasi dispersi yang menghubungkan antara frekuensi dan bilangan gelombang.
- ***Tiga Dimensi***. Aliran turbulen dicirikan dengan adanya vortisitas yang merupakan bentuk alamiah tiga demensi.
- ***Bilangan Reynold Tinggi***. Aliran turbulen mempunyai bilangan Reynold yang tinggi, sebagai konsekuensinya suku adveksi (non linier) menjadi penting.
- ***Dissipatif***. Aliran turbulen akan mempunyai the rate of dissipation yang besar.
- ***Difusi***. Fluks turbulen akan menaikkan momentum dan pertukaran medan skalar diantara daerah dengan konsentrasi tinggi ke daerah dengan konsetrasi rendah.

Dengan fakta diatas sukar bagi kita untuk mencari solusi analitik dari persamaan gerak secara langsung. Cara yang paling mudah adalah menggunakan konsep statistik. Tujuan awal dari pendekatan statistik ini adalah untuk memperoleh himpunan persamaan untuk aliran rata-rata yang tertutup dan tertentu. Beberapa kemajuan baru yang didasarkan pada pendekatan ini seperti model klosur lebih tinggi dan teori grup terrenormalisasi menunjukkan kekuatan pandangan ini. Pendekatan statistik menyatakan bahwa aliran turbulen dipandang sebagai superposisi dari aliran rata-rata dan flukstuasinya. Keadaan ini dapat diilustrasikan sebagai gambar berikut ini:



Atau dapat digambarkan sebagai berikut: misalkan kita mempunyai data laju angin, maka karena keadaan turbulen grafik tidak akan menunjuukan keadaan yang teratur, sehingga pendekatan statistik diilustrasikan sebagi berikut:



Dalam aliran turbulensi sering digambarkan dalam bentuk eddi (aliran yang berputar-putar). Kumpulan dari eddi baik yang besar maupun yang lecil membentuk sebuah sistem. Kumpulan dari sistem tersebut membentuk suatu ensamble. Didalam suatu sistem eddi boleh saling berinteraksi. Sedangkan dalam ensambel interaksi antar sistem ditentukan oleh suatu aturan. Misalnya ensambel mikro kanonik menyatakan interaksi antar sistem hanya diperbolehkan untuk tetangga terdekatnya saja. Kita mendekomposisi aliran fluida sebagai superposisi dari rata-rata dan flukstuasinya ini dikenal dengan Reynold's decomposition.

Dari gambar diatas, jika u adalah kecepatan angin maka Reynold's decomposition akan dinyatakan oleh:

$$u = \overline{u} + u'$$

Dengan harga rata-rata dinyatakan oleh:

$$\overline{u} = \frac{1}{T_o} \int_{t}^{t+T_o} u dt$$

dan harga rata-rata flukstuasi nol:

$$u' = \frac{1}{T_o} \int_{t}^{t+T_o} (u - \overline{u}) dt = \overline{u} - \overline{u} = 0$$

beberapa sifat yang harus dipenuhi dalam Reynold's decomposition [Gregg,M 1994 ,Streeter, V.L et al 1998).
Jika α adalah skalar, f dan g adalah vektor maka relasi berikut harus dipenuhi:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad ; \quad \overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$$

$$\overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \quad ; \quad \overline{\bar{f} g} = \bar{f}\bar{g}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \tau}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \tau} \quad ; \quad \overline{\bar{f} g'} = \bar{f}\overline{g'} = 0$$

Dengan relasi diatas kita dapat menentukan persamaan keseimbangann untuk medan rata-rata , flukstuasi serta energi kinetik dari medan kecepatan, temperatur dan salinitas yang dilakaukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Lakukan Reynold's decomposition ke persamaan momentum, difusi temperatur atau salinitas.
2. Letakkan prosedur rata-rata sehingga kita dapatkan persamaan keseimbangan untuk medan rata-rata.
3. Kurangkan persamaan rata-rata dengan persamaan keseimbangan semula untuk mendapatkan persamaan keseimbangan medan flukstuasi.
4. Untuk mendapatkan persamaan energi medan rata-rata, kalikan persamaan rata-rata dengan variabel rata-rata dan lakukan prosedur perata-rataan.
5. Untuk mendapatkan persamaan energi medan flukstuasi, kalikan persamaan flukstuasi dengan variabel flukstuasi dan lakukan prosedur perata-rataan.

2.3.1. Persamaan keseimbangan kecepatan

Lakukan Reynold decomposition untuk medan kecepatan, variabel tekanan dan variabel densitas di persamaan momentum (Navier-Stoke) kita dapatkan:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}.\nabla\bar{u}+\bar{u}.\nabla u'+u'.\nabla\bar{u}+u'.\nabla u'=-\frac{\nabla\bar{P}}{\bar{\rho}}-\frac{\nabla P'}{\bar{\rho}}-\frac{g}{\bar{\rho}}-\frac{\rho'\vec{g}}{\bar{\rho}}+\upsilon\nabla\cdot\nabla\bar{u}+\upsilon\nabla\cdot\nabla u'$$
.... 2.3.1.1

dimana kita telah memasukkan gaya gravitasi dan adalah ν viskositas kinematik persatuan massa. Tanpa mengurang arti kita abaikan dahulu indeksnya. Kita juga telah mengasdakan aproksimasi yaitu flukstuasi densitas relatif kecil dibandingkan dengan densitas rata-rata ($\rho' / \langle\rho\rangle) < 10^{-4}$ sehingga flukstuasi densitas hanya berperan dalam gaya apung (gaya archimides) saja. Pendekatan ini biasanya disebut pendekatan Boussinesqq). Dalam skala mikro, gaya koriolis tidak signifikan sehingga umunya diabaikan. Lakukan prosedur perata-rataan kita dapatkan persamaan keseimbangan untk medan kecepatan rata-rata sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j.\nabla\bar{u}_i+\overline{u'_j.\nabla u'_i}=-\frac{\nabla\bar{P}}{\bar{\rho}}-\frac{g}{\bar{\rho}}\delta_{i3}+\upsilon\nabla\cdot\nabla\bar{u}_i \qquad 2.3.1.2$$

Jika persamaan 2.3.1.2 kita kalikan dengan **u** rata-rata dan letakkan prosedur rata-rata maka kita dapatkan persamaan energi kinetik dari medan kecepatan utama (rata-rata) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\bar{u}_i\bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{u}_i\left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}+\frac{1}{2}\bar{u}_j\bar{u}_j\right)+\overline{u_i'u_j'}\bar{u}_i+\upsilon\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]=\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}-g\bar{u}_3-\upsilon\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}$$
.....................2.3.1.3

Suku pertama dari kiri adalah evolusi dari energi kinetik, suku kedua menyatakan kerja yang dilakukan oleh tekanan dinamik pada aliran rata-rata, suku ketiga menyatakan transport dari energi kinetik turbulen pada aliran rata-rata, suku ke empat menyatakan kerja yang dilakukan oleh stress viskositas pada aliran rata-rata, suku ke lima kerja yang dilakukan oleh stress turbulen yang mendeformasi aliran utama, suku ke tujuh menyatakan kerja yang dilakukan melawan gravitasi, dan seku kedelapan menyatakan disipasi viskositas oleh stress geser.

Jika kita kurangkan persamaan 2.3.1.2 dengan persamaan 2.1.2.1 kita dapatkan persamaan untuk flukstuasi kecepatan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{u}.\nabla u'+u'.\nabla\bar{u}+u'.\nabla u'-\overline{u'.\nabla u'}=-\frac{\nabla P'}{\bar{\rho}}-\frac{\rho'\vec{g}}{\bar{\rho}}+\upsilon\nabla\cdot\nabla u' \qquad 2.3.1.4$$

Dengan mengalikan flukstuasi kecepatan u' dan lakukan prosedur rata-rata kita dapatkan persamaan energi kinetik untuk flukstuasi kecepatan (turbulen) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \tfrac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_j'\left(\frac{P'}{\bar\rho}+\frac{1}{2}u_i'u_i'\right)}+\upsilon\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)u_j'}\right]=-\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \bar u_i}{\partial x_j}-\overline{\rho' u_3'}\frac{g}{\bar\rho}-\upsilon\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$$

....................2.3.1.5

Suku pertama dari kiri adalah evolusi dari energi kinetik turbulen, suku kedua menyatakan kerja yang dilakukan oleh tekanan dinamik pada flukstuasi kecepatan, suku ketiga stress viskositas pada flukstuasi kecepatan, suku ke empat kerja yang dilakukan oleh stress turbulen yang mendeformasi aliran utama (mempunyai tanda yang berlawanan dengan persamaan aliran rata-rata yang berarti selalu bernilai positif sehingga dia berperan sebagi sumber energi kinetik turbulensi), suku ke lima menyatakan kerja yang dilakukan melawan gravitasi/gaya apung (biasanya diberi simbol J_B), dan suku keenam menyatakan disipasi viskositas oleh stress geser yang selalu bertanda negatif dan diberi simbol $\in$ yang berarti sebagai sink (pengurang).

2.3.2. Persamaan keseimbangan medan skalar

Lakukan Reynold decomposition untuk medan temperatur dan medan kecepatan tekanan di persamaan difusi temperatur 2.1.3.2 kita dapatkan:

$$\frac{\partial(\bar T+T')}{\partial t}+(\bar u+u')\vec\nabla(\bar T+T')=\vec\nabla.\left(\kappa_T\vec\nabla(\bar T+T')\right) \qquad 2.3.2.1$$

Lakukan prosedur rata-rata dan gunakan persamaan kontinuitas ($\nabla.\mathbf{u}=\nabla.\mathbf{u'}=0$) maka kita dapatkan persamaan keseimbangan untuk rata-rata temperatur sebagai berikut:

$$\frac{\partial(\bar T)}{\partial t}+(\bar u)\vec\nabla(\bar T)=\vec\nabla.\left(\kappa_T\vec\nabla\bar T\right)-\vec\nabla.\overline{u'T'} \qquad 2.3.2.2$$

Kjika kita kurangkan dengan persmaan difusi temperatur 2.1.3.2 dan kalikan dengan variabel flukstuasi temperatur serta latakkan prosedur rata-rata (Reynold decomposition) maka kita dapatkan persamaan untuk varian temperatur (energi temperatur) sebagai berikut:

$$\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial t}+\vec\nabla.\left[\bar u\overline{T'^2}+\overline{u'T'^2}-\kappa_T\vec\nabla\overline{T'^2}\right]=-2\overline{u'T'}.\nabla\bar T-2\kappa_T\overline{\left(\vec\nabla T'\right)^2} \qquad 2.3.2.3$$

Suku pertama menyatakan evolusi varian temperatur, suku kedua transport adveksi dari varian temperatur oleh rata-rata aliran, suku ketiga adveksi oleh turbulen, suku keempat adveksi oleh difusi molekular (bisa diabaikan), suku kelima difusi akibat adanya shear dan suku terakhir menyatakan dissipation rate. Bentuk dissipation rate seringkali dilambangkan oleh:

$$\chi_T \equiv 2\kappa_T \overline{\left(\vec{\nabla}T'\right)^2} \quad [K^2\ s^{-1}] \qquad 2.3.2.4$$

The rate of dissipation ini definit positif sehingga dia berperan sebagai sink dari energi turbulen.

Dengan cara yang sama kita dapatkan persamaan varian salinitas sebagai berikut:

$$\frac{\partial \overline{S'^2}}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left[\overline{u}\,\overline{S'^2} \quad + \overline{u'S'^2} - \kappa_S \vec{\nabla}\overline{S'^2}\right] = -2\overline{u'S'}.\nabla\overline{S} - 2\kappa_S \overline{\left(\vec{\nabla}S'\right)^2} \qquad 2.3.2.5$$

The rate of dissipation dari salinitas adalah:

$$\chi_S \equiv 2\kappa_S \overline{\left(\vec{\nabla}S'\right)^2} \quad [s^{-1}] \qquad 2.3.2.6$$

2.3.3. Persamaan keseimbangan energi potensial

Persamaan ini diturunkan karena sangat berguna dalam pengkuran turbulensi yaitu kita akan berurusan dengan paramater gaya apung. Kita inggat bahwa densitas memenuhi persamaan keadaan (persamaan termodinamika pertama) yaitu f(ρ,T,S)=0. Jika T dan S memenuhi persamaan difusi maka begitu pula dengan densitas. Jika densitas adalah fungsi dari tekanan, temperatur dan salinitas maka turunan pertama terhadap waktu dari fungsi densitas itu dapat dinyatakan sebagai berikut [Gregg,M 1994, Greeg,M 1998]

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\left(-\alpha\frac{dT}{dt} + \beta\frac{dS}{dt}\right)$$

dimana koefisien α dan β adalah konstant kesebandingan. Persamaan difusi akan dipenuhi oleh persamaan diatas. Dengan mengingat bahwa d/dt adalah operasi total drivatif maka suku sebelah kiri akan ekspresikan dalam bentuk total dervatif sedangkan sebelah kanan akan dinyatakan dalam bentuk difusinya. Dengan menggunakan Reynold's decomposition maka kita dapatkan persamaan:

$$\frac{\partial(\overline{\rho} + \rho')}{\partial t} + (\overline{u} + u')\vec{\nabla}.(\overline{\rho} + \rho') = -\alpha\overline{\rho}\kappa_T \nabla^2(\overline{T} + T') + \beta\overline{\rho}\kappa_S \nabla^2(\overline{S} + S') \qquad 2.3.3.1$$

Jika kita terapkan prosedur rata-rata kita dapatkan persamaan untuk rata-rata densitas. Kurangkan dengan persamaan difusi untuk densitas maka kita dapatkan persamaan untuk flukstuasi densitas. Jika hasil ini kita kalikan dengan flustuasi densitas dan terapkan prosedur rata-rata maka kita dapatkan persamaan keseimbangan untuk varian densitas sebagai berikut:

$$\frac{\partial \overline{\rho'^2}}{\partial t} + \nabla.\left[\overline{\bar{u}\rho'^2} + \overline{u'\rho'^2} - \bar{\rho}^2\beta^2\kappa_S\nabla^2\overline{S'^2} - \bar{\rho}^2\alpha^2\kappa_{TS}\nabla^2\overline{T'^2} + 2\bar{\rho}^2\alpha\beta\left(\kappa_T\overline{S'\nabla(T')} + \kappa_S\overline{T'\nabla(S')}\right)\right] =$$
$$-2\overline{u'\rho'}.\nabla\bar{\rho} - \chi_\rho$$

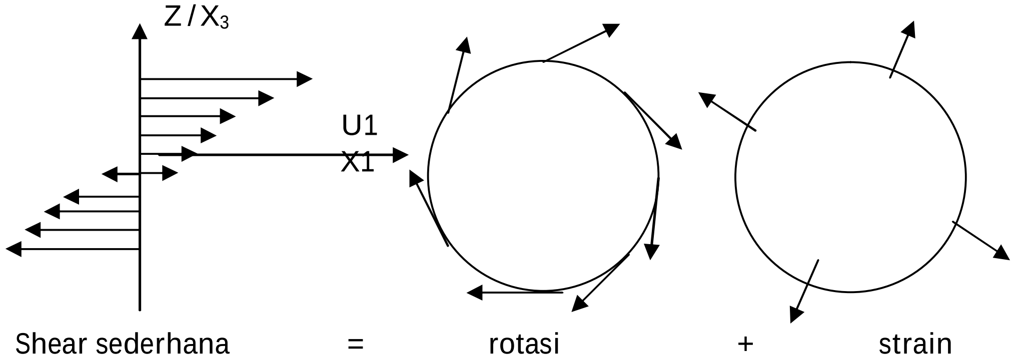
.....................2.3.3.2

dimana dissipation rate didefinisikan sebagai:

$$\chi_\rho \equiv \bar{\rho}^2\alpha^2\chi_T + \bar{\rho}^2\beta^2\chi_S - 2\bar{\rho}^2\alpha\beta(\kappa_T + \kappa_S)\overline{\nabla S'.\nabla T'} \qquad 2.3.3.3$$

2.4. Pengaruh Stratifikasi Fluida

Seperti telah dinyatakan diatas laut merupakan bentuk fluida berlapis. Dengan ada fluida berlapis maka proses mixing terutama terjadi dalam arah vertikal. Sifat penting dari fluida berlapis adalah adanya shear. Misalkan shear berupa kecepatan, maka shear ini akan mendekomposisikan diri dalam bentuk rotasi dan strain pada fluida yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Shear sederhana = rotasi + strain

Adanya shear dicirikan dengan aliran turbulen yang saling tumpang tindih serta overturns. Jika ζ adalah panjang karasteristik dari overturns maka flustuasi densitas akan sebanding dengan gaya apung (N) dikalikan skala panjang ini yang dinyatakan oleh [Greg,M 1994]:

$$\rho'(x_3) = \frac{\rho N^2}{g}\zeta_3$$

Energi potensial akibat flukstuasi densitas tersebut adalah:

$$\overline{\phi'^2} = \frac{g}{\rho_o}\int_0^{\zeta_3} \rho'(x_3)dx_3 = \tfrac{1}{2}N^2\zeta_3^2 = \tfrac{1}{2}N^2\overline{\rho'^2_3}$$

Dengan mengunakan persamaan 2.3.3.2 dan kalikan dengan (g/ρN)² serta abaikan suku flukatuasi salinitas kita dapatkan energi potensial turbulen sebagai berikut:

$$\frac{\partial\overline{\phi'^2}}{\partial t} + \nabla.\left[\overline{\phi'^2}\overline{u} + \overline{\overline{u}\phi'^2}\right] = -J_B - \chi_{PE} \qquad 2.4.1$$

dimana the rate of dissipation adalah:

$$\chi_{PE} = \left(\frac{g}{\rho N}\right)^2 \chi_\rho \quad [\text{ W / kg}] \qquad 2.4.2$$

Jadi dalam fluida berlapis harga fluks gaya apung selalu negatif sehingga akan menaikkan energi potensial turbulen. Dengan harga fluks gaya apung yang negatif menunjukkan air yang berat akan digerakkan ke atas dan air yang ringan akan ditengelamkan. Jika harga fluks gaya apung positif maka turbulen akan melemah. Jelas besarnya suatu proses mixing dapat dilihat dari besarnya fluks gaya apung.

Persamaan keseimbangn untuk gaya apung dapat dicari dengan langkah sebagai berikut: Kalikan flukstuasi densitas dan flukstuasi kecepatan, lakukan deferensiasi terhadap t serta terapkan prosedur rata-rata sebagai berikut:

$$\frac{\partial\overline{\rho' u'}}{\partial t} = \overline{\rho'\frac{\partial u'}{\partial t}} + \overline{u'\frac{\partial\rho'}{\partial t}}$$

Dengan mengambil arah vertikal dan menggunakan definisi persamaan keseimbangan untuk flukstuasi densitas dan flukstuasi kecepatan kita dapatkan persamaan:

$$\frac{\partial\overline{\rho' u_3'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}.\left(\frac{g}{\rho}\overline{\rho' u'^2_3}\right) + \left(\frac{g^2}{\rho c^2}\right)\overline{\rho' u'^2_3} = \left(\frac{g}{\rho}\right)^2\overline{\rho'^2} - \overline{u'^2_3}N^2 + \left(\frac{g}{\rho}\right)^2\overline{\rho'\frac{\partial p'}{\partial x_3}}$$

Dengan mengalikan oleh –g/ dan mengabaikan suku kedua dan kompresibilitas serta mengunakan 2.4.1 kita dapatkan persamaan keseimbangan gaya apung sabagai berikut:

$$\frac{\partial J_B}{\partial t} = -\overline{u'^2_3}N^2 + 2\overline{\phi'^2}N^2 + \left(\frac{g}{\rho}\right)^2\overline{\rho'\frac{\partial p'}{\partial x_3}} \qquad 2.4.3$$

Dari persamaan 2.4.3 kita melihat bahwa perilaku turbulensi dapat kita pelajari hanya dengan melihat masalah dalam arah vertikal, sedangkan secara horisontal dapat kita asumsikan homogen.

2.4.1. Turbulensi Homogen Isotropis

Dalam praktek dilapangan sangat sukar bagi kita untuk mengukur turbulensi berdasarkan formalisme yang telah diberikan diatas. Kesulitan itu dapat kita atasi dengan suatu aproksimasi. Seperti kita lihat pada subbab diatas bahwa adanya shear akan menyebabkan turbulensi dominan dalam arah vertikal sehingga kita menganggap secara horisontal homogen. Turbulen dikatakan homogen jika dia invarian terhadap transformasi translasi. Dari pengambaran sub-Bab 2.4 menunjukkan bahwa shear sederhana dapat dikomposisikan sebagai penjumlahan rotasi dan strain. Jika strain adalah simetri kita dapat menganggap bahwa turbulen isotropis. Isotropis adalah turbulen invarian terhadap transformasi rotasi. Sekarang kita asumsikan fluida menjalar hanya dalam arah x dengan kecepatan u1 dan aliran secara horisontal homogen sehingga suku divergensi dapat diabaikan. Dengan asumsi diatas persamaan energi kinetik turbulensi (flukstuasi) 2.3.1.5 dapat kita tuliskan dalam bentuk yang sederhana sebagai berikut:

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}}{\partial t} = -\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + J_B - \varepsilon + \overline{\frac{P'}{\overline{\rho}}\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} \qquad 2.4.1.1$$

Dalam bentuk komponennya dapat dituliskan berturut-turut.

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\overline{u_1'u_1'}}{\partial t} = -\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} - \varepsilon + \overline{\frac{P'}{\overline{\rho}}\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\overline{u_2'u_2'}}{\partial t} = -\varepsilon + \overline{\frac{P'}{\overline{\rho}}\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\overline{u_3'u_3'}}{\partial t} = J_B - \varepsilon + \overline{\frac{P'}{\overline{\rho}}\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}$$

Jika kita mengabaikan $\in$ maka energi kinetik turbulen akan ditopang oleh gaya apung dan stress Reynold ($u_1'u_3'$). Stress Reynold ini akan memproduksi turbulen dalam arah x saja yaitu akibat adanya mean shear (du/dx), sehingga komponen energi kinetik turbulen dalam arah x akan lebih besar dari komponen yang lain yaitu y dan z.

Dalam praktek sangat sukar untuk menentukan stress Reynold, sebagai gantinya yang diukur adalah koefisien turbulen atau koefisien eddi. Koeffisien eddi dapat diestimasi dari persamaan keseimbangan. Dalam pandangan yang paling sederhana koeffisien eddi dinyatakan sebagai rasio antararate dissipation dan varian dari mean gradien. Jika kita tuliskan kembali persamaan 2.4.1.1 tanpa suku tekanan menjadi:

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}}{\partial t} = -\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + J_B - \varepsilon \qquad 2.4.1.2$$

Kita definisikan bilangan Fluks Richardson R_F (Gregg,M 1994; Sorbjan,Z 1988) sebagai berikut:

$$R_F \equiv \frac{J_B}{\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3}} \qquad 2.4.1.3$$

Dari persamaan 2.4.1.2 kita melihat bahwa gaya gerak utama turbulen adalah mean shear. Kita ingat kembali dengan hukum Fick bahwa fluks suatu medan skalar akan sebanding dengan gradien medan skalar tersebut. Pendekatan sederhana ini akan kita adopsi untuk transport turbulen, yaitu transport momentum turbulen sebagai hasil dari kerja yang dilakukan untuk melawan hear, sehingga transport momentum turbulen (flukstuasi) akan sebanding dengan mean shear (gradien kecepatan). Kesebandingan ini akan dinyatakan oleh suatu bilangan yang dinamakan koefisien eddi. Hal tersebut kita tuliskan sebagai berikut:

$$\overline{u_1'u_3'} = -K_M \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \qquad [\mathrm{m^2\ s^{-2}}] \qquad 2.4.1.4$$

Dengan memanfaatkan definisi fluks bilangan Richardson 2.4.1.3 maka persamaan 2.4.1.2 menjadi:

$$\frac{\partial \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}}{\partial t} = -\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + \overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3}R_F - \varepsilon \qquad 2.4.1.5$$

asumsikan kondisi tunak (d / dt=0) maka kita dapatkan persamaan:

$$-(1 - R_F)\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} = \varepsilon \qquad 2.4.1.6$$

Dengan mensubtitusikan persamaan 2.4.1.4 kita dapatkan koefisien eddi sebagai berikut:

$$K_M = \frac{\varepsilon}{(1 - R_F)\left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3}\right)^2} \qquad [\mathrm{m^2\ s^{-1}}] \qquad 2.4.1.7$$

Dengan cara yang sama maka untuk medan skalar (misal temperatur) akan dinyatakan oleh:

$$K_{heat} = \frac{\chi_T}{2\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_3}\right)^2} \qquad \left[m^2 s^{-1}\right]$$

Untuk keadaan riel lautan biasanya fluks bilangan Richarson R_F lebih kecil dari 0.2 sehingga dapat diabaikan. Metode dissipasi diatas ternyata tidak dapat diterapkan ketika turbulensi dihasilkan oleh pecahnya gelombang internal. Untuk mendapatkan bentuk yang lebih umum maka dalam pengukuran microstructure (seperti di laut Banda) diperkenalkan koeffisien difusivitas diapiknal (κ_ρ). Koefisien tersebut diturunkan sebagai berikut:

Didalam fluida berlapis fluks gaya apung J_B akan sebanding dengan gaya apung yaitu N. Kesebandingan itu dinyatakan oleh koefisien difusivitas diapiknal sebagai berikut:

$$J_B = -\kappa_\rho N^2 \qquad Wkg^{-1} \qquad 2.4.1.8$$

Gabungkan persamaan 2.4.1.3 dan 2.4.1.2 kita dapatkan persamaan dalam bentuk J_B sebagai berikut:

$$\frac{J_B}{R_F} = J_B - \varepsilon$$

Substitusi definisi dari J_B diatas maka persamaan menjadi:

$$\kappa_\rho = \left(\frac{R_F}{1 - R_F}\right)\frac{\varepsilon}{N^2} \qquad \left[m^2 s^{-1}\right]$$

Dalam penelitian laut telah diketahui bahwa harga bilangan Richardson $R_F < 0.15$ sehingga kita dapatkan aproksimasi:

$$\kappa_\rho \leq 0.2\frac{\varepsilon}{N^2} \qquad \left[m^2 s^{-1}\right] \qquad 2.4.1.9$$

Faktor numerik tersebut mengukur efisiensi mixing di suatu perairan, maka secara umum dapat dituliskan:

$$\kappa_\rho \equiv \gamma_{mix}\frac{\varepsilon}{N^2} \qquad 2.4.1.10$$

Efisiensi mixing tersebut untuk turbulen dan dufusi ganda akan mempunyai harga yang berbeda. Koefisien difusivitas diapiknal ini merupakan parameter yang diukur dalam riset turbulen di laut. Osbone dan Cox telah melakukan estimasi efisiensi mixing sebagai berikut:

$$\gamma_{mix} = \frac{\chi_T N^2}{2\varepsilon\left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\right)^2} \qquad 2.4.1.11$$

Rumus ini dapat digunakan untuk menghitung efisiensi mixing yang diakibatkan oleh difusi ganda maupun turbulen. Untuk pasang surut maka koefisien difusivitas diapiknal telah dihitung sebagai berikut:

$$\kappa_\rho^{tides} \le \frac{0.2\varepsilon_{tides}}{N_o^{\,2}} = 2\times10^{-5} \qquad m^2 s^{-1}$$

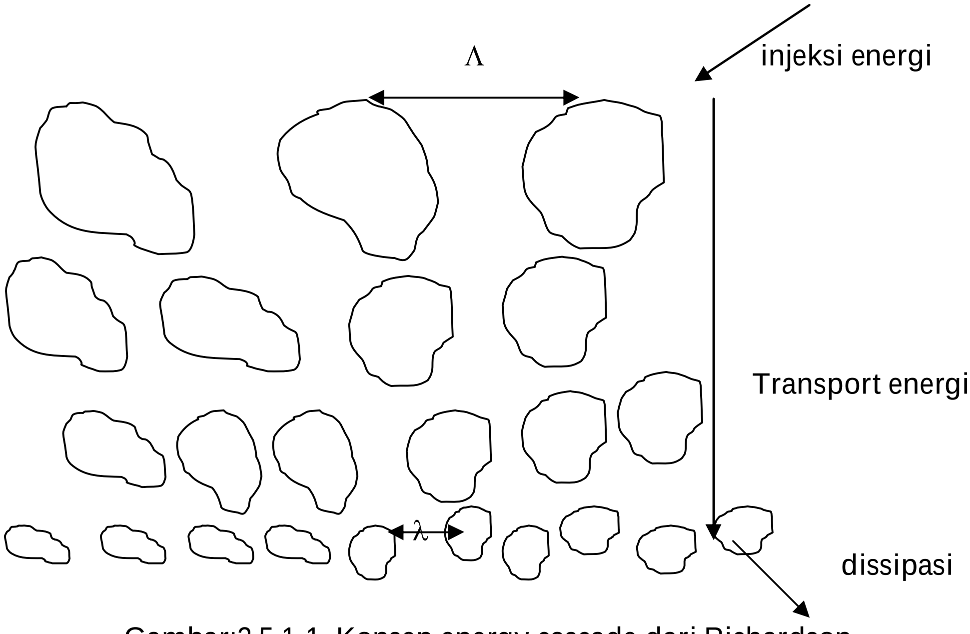
Untuk koefisien difusivitas diapiknal karena angin dihitung dengan rumus yang sama dengan pasut tetapi dengan harga $\in$ yang berbeda tergantung dari kondisi suatu daerah.

2.5. Struktur Turbulensi Skala Kecil

Sejauh ini kita telah membicarakan turbulensi secara umum yaitu dapat terjadi dimana saja mulai dari pusat galaksi samapi di secangkir kopi panas. Dalam riset oseanografi pada umumnya oceanographer melakukan pengukuran turbulensi dalam suatu skala panjang antara beberapa kilometer sampai 0.01 mm. Turbulensi yang terjadi dalam rang ini dinamakan turbulensi skala kecil. Skala waktunya paling lama hanya beberapa bulan saja. Gerak turbulen dalam skala ini sangat penting karena tidak hanya mempengaruhi sirkulasi arus dan gelombang saja tetapi juga mempengaruhi distribusi kimiawi serta produktivitas biologis disuatu perairan. Turbulensi skala kecil ini merupakan faktor dominan dalam transfer energi secara vertikal di suatu kolom air. Salah satu teori yang fundamental dalam turbulensi skala kecil adalah teori Kolmogorov. Penerapan dari ide Kolmogorov ke riset turbulensi dilaut akan dinyatakan dalam analisis spektral. Berikut ini gambaran keduanya:

2.5.1. Teori Kolmogorov

Suatu konsep yang sangat mendasar dalam teori turbulensi skala kecil adalah konsep “energy cascade” (cascade = air terjun). Konsep ini pertama kali dilontarkan oleh fisikawan Inggris Lewis Richardson. Ide dasarnya sebagai berikut: Konsep[energy cascade menyatakan adanya suatu pancaran/cascade energi dari suatu energi ke keadaan energi yang lebih rendah. Ilustrasinya digambarkan sebagai berikut:



Gambar:2.5.1-1. Konsep energy cascade dari Richardson

Misalkan kita mempunyai eddy yang ukurannya Λ maka jika kita injeksikan energi pada eddy tersebut maka transport energi yang terjadi akan memecah eddy menjadi eddy yang lebih kecil. Karena transport energi terus berlangsung maka eddy yang telah terpecah tadi akan terpecah lagi menjadi eddy dengan ukuran yang lebih kecil. Demikian seterusnya sehingga dia mencapai suatu ukuran λ yang tak terpecah lagi. Proses ini berhenti dengan ditandai berubahnya energi tadi menjadi panas. Proses perubahan energi kinetik tadi menjadi energi panas disebut dissipasi. Parameter disipasi energi ini adalah bentuk energi karena viskositas yang dinyatakan oleh:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 \qquad 2.5.1.1$$

Dari ide Richardson diatas Kolmogorov mengkuantisasikannya dalam model matematis. Pada dasarnya Kolmogorov beranggapan bahwa turbulensi homogen isotropis yaitu turbulen terdistribusi secara merata di seluruh ruang. Secara formal dikatakan bahwa turbulensi isotropis jika harga rata-rata dari flukstuasinya adalah invarian terhadap transformasi rotasi dan refleksi. Turbulensi dikatakan homogen jika harga rata-rata flukstuasinya adalah invarian terhadap transformasi translasi. (Sulaiman, 1994 apendiks E.)

Dalam turbulensi isotropis harga korelasi dari sembarang variabel acak hanya tergantung pada jarak antara dua titik tersebut dan tidak pada orientasi dua titik tersebut pada ruang dan waktu. Kolmogprov mendekomposisikan medan kecepatan flukstuasi dalam transform Fourier sebagai berikut:

$$u(x,t) = \int \tilde{u}(k,t) e^{ikx}\, dk \qquad 2.5.1.2$$

Maka energi kinetik persatuan massa dari kecepatan flukstuasi ini (abaikan tanda aksen) adalah:

$$\begin{aligned} \hat{E} = \int E dV &= \frac{1}{2}\int \left(u^2 + v^2 + w^2\right) dk \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2\right) dk \qquad 2.5.1.3 \\ &= \int \varepsilon\,(k)\, dk \end{aligned}$$

ε disebut spektrum energi. Karena asumsi homogen isotropis maka $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Karena teori Kolmogorov berurusan dengan dimensi maka berikut ini adalah tabel dimensi dari kuantitas diatas:

Kuantitas	**Dimensi**
Bilangan gelombang (k)	1/L
Energi persamtuan massa (E)	L^2 / T^2
Apektrum energi (ε)	L^3 / T^2
Fluks energi ($\in$)	L^2 / T^3
Viskositas (ν)	L^2 / T

Kolmogorov mendasarkan teorinya pada dua hipotesis sebagai berikut:

1. Distribusi statistik turbulen secara unik ditentukan oleh $\in$ dan ν jika berada dalam rang dissipasi (skala mikro).
2. Distribusi statistik turbulen hanya tergantung pada $\in$ jika skala jauh dari dissipasi.

Berdasarkan hipotesis-1, Kolmogorov menentukan skala panjang dimana effek viskositas akan signifikan. Skala panjang itu diberi simbol l_ν. Dari hipotesis-1 (l_ν juga karasteristik turbulen):

$$\begin{aligned} l_\nu &\approx \varepsilon^a \nu^b \\ L &\approx \left(L^2/T^3\right)^a \left(L^2/T\right)^b \\ L^1 &\approx L^{2a+2b} T^{-3a-b} \end{aligned}$$

Dengan mudah kita dapatkan a=-1/4 dan b=3/4. Jadi:

$$l_\nu \approx \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \qquad 2.5.1.4$$

Misal untuk kondisi lautan pasifik ekuator yang mempunyai $\in$ = 10^{-6} WKg^{-1} dan ν = 1.4 10^{-6} m^2 s^{-1} maka l_ν = 1.3 m. Untuk daerah dimana viskositas tidak signifikan maka distribusi statistik turbulen hanya tergantung pada $\in$. Menurut hipotesis-2 maka spektrum energi dalam rang ini akan sebanding $\in$ dengan dan bilangan gelombang saja.

$$\varepsilon \approx \varepsilon^a k^b$$

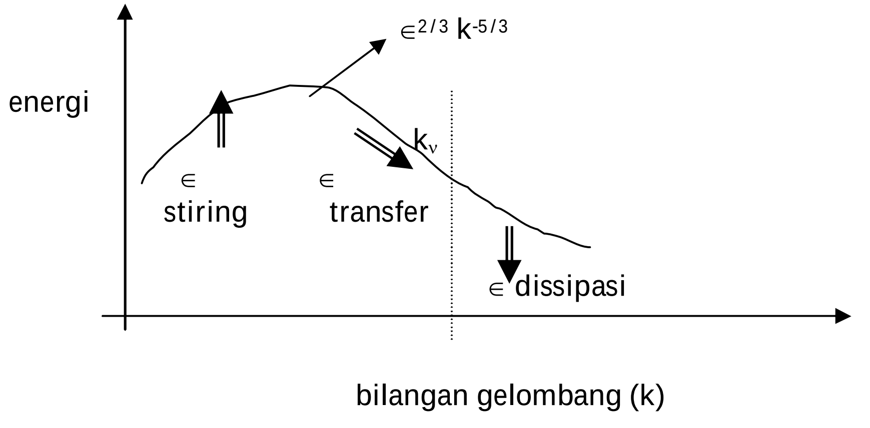
$$\frac{L^3}{T^2} \approx \left(\frac{L^2}{T^3}\right)^a \left(\frac{1}{L}\right)^b$$

$$L^3 T^{-2} \approx L^{2a-b} T^{-3a}$$

Mudah dihitung bahwa a=2/3 dan b=-5/3. Jadi:

$$\varepsilon(\mathrm{k}) \approx \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \qquad atau \qquad \varepsilon(\mathrm{k}) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \qquad 2.5.1.5$$

Konstanta C disebut konstanta universal. Hasil ini terkenal dengan "hukum –5/3 Kolmogorov". Konstanta C adalah konstanta tanpa dimensi yang ditentukan dari eksperimen, yang hasilnya sekitar 1.5. Konsep energy cascade dalam teori Kolmogorov dapat digambarkan sebagi berikut:



Gambar 2.5.1-2. Distribusi energi menurut konsep energy cascade.

Rumus energi 2.5.1.5 itulah yang akan digunakan sebagai basis dalam mempelajari turbulensi dalam bahasa analisis spektral. Ternyata dalam banyak pengukuran lapangan spektrum energi yang pada garis besarnya menyerupai bentuk spektum Kolmogorov diatas.

2.5.2. Dinamika bilangan gelombang (analisis spektral).

Persamaan-persamaan dinamika turbulensi yang telah kita tuliskan subbab diatas mengekspresikan pertukaran energi antara gerakan rata-rata (laminer/frekuensi rendah) dengan gerakan flukstuasi(turbulen/frekuensi tinggi). Interaksi yang umumnya nonlinier dari frekuensi rendah ke frekuensi tinggi dapat diperikan dengan perubahan bilangan gelombang. Fluks energi dari bilangan gelombang rendah (gerakan rata-rata) ke bilangan gelombang tinggi/besar akan berhenti ketika dissipasi viskositas yang irreversibel merubah energi kinetik turbulen menjadi energi termal. Perilaku ini dapat kita lihat digambar-2.5.1-2. Estimasi seberapa besar dari dissipation rate dan fluks turbulen yang mengikutinya merupakan tujuan utama pengukuran turbulen dilaut. Karena sifatnya yang kompleks dan nonlinier kebanyakan para oceanographer mendekatinya dengan mengunakan ananlisis dimensional dan argumen kinematik sederhana. Salah satu contoh yang terkenal adalah teori similaritas. Dengan cara ini oceanographer mencoba untuk mengobservasi dan malakukan parameterisasi turbulen didalam bentuk variabel skala besar.

Salah satu cara mengamati perilaku turbulen yang kompleks adalah dengan melihat dinamika bilangan gelombang atau frekuensi. Pendekatan ini disebut dengan nama analisis spektral. Dasar dari analisis tersebut adalah suatu besaran yang disebut "power spectra'. Power spectra ini pada dasarnya mengukut energi serta bagaimana energi ini didistribusikan dalam suatu perairan.

Dalam bab yang lalu kita menyatakan frekuensi dan bilangan gelombang dalam satuan radian, tetapi para oceanographer lebih suka mengunakan satuan cyclic. Jika dalam satuan radian frekuensi dan bilangan gelombang mempunyai satuan berturut-turut 1/s dan 1/m maka dalam satuan cyclic frekuensi dan bilangan gelombang mempunyai satuan berturut-turut adalah Hz dan 1/cpm (cpm = cycle per meter). Berikut ini adalah tabelnya:

	Frekuensi		Bilangan gelombang	
Radian	$\omega = 2\pi/T$	$[s^{-1}]$	.$k = 2\pi/\lambda$	$[m^{-1}]$
Cyclic	.$f = 1/T$	[Hz]	$\kappa = 1/\lambda$	[cpm]

Sekarang misalkan kita bicarakan dahulu besaran skalar untuk contoh potensial temperatur (diukur secara vertikal dengan kedalaman perairan diberi simbol z atau x_3). Jika Φ_θ adalah spektrum dari suatu data flukstuasi potensial temperatur maka varian dari potensial temperatur (yang menyatakan energi) adalah:

$$\overline{\theta'^2} = \int_{0.01cpm}^{100cpm} \Phi_\theta(\kappa_3) d\kappa_3 \qquad [\mathrm{K}^2] \qquad 2.5.2.1$$

Biasanya para oceanographer lebih suka mengunakan absis logaritmik sehingga varian potensial temperatur menjadi:

$$\overline{\theta'^2} = \int \Phi_\theta(\kappa_3) d\ln\kappa_3 \qquad [\mathrm{K}^2] \qquad 2.5.2.2$$

Power spektra dihitung dari data potensial temperatur dengan menerapkan transform fourier. Dalam bentuk diskrit jika $\theta' = \theta'(n\Delta z)$ adalah data flukstruasi potensial temperatur maka transform Fourier dari data tersebut adalah:

$$F_\theta(m\Delta k_3) \equiv \sum_{n=o}^{n=N-1} \theta'(n\Delta z) e^{-i\frac{2\pi mn}{N}} \qquad m = 0,1,\ldots,N-1 \qquad 2.5.2.3$$

dimana Δz adalah interval sampling (misalkan 0.1 m) ; N adalah banyaknya sampel dan $\Delta k_3 = (2\pi / N)\,\Delta z$ adalah lebar pita bilangan gelombang.
Power spektra dari potensial temperatur akan dinyatakan oleh:

$$\Phi_\theta(m\Delta k_3) = \frac{2}{N\Delta z} F_\theta(m\Delta k_3) F_\theta^*(m\Delta k_3) \qquad [\mathrm{K}^2 m] \qquad 2.5.2.4$$

Tanda asterik menyatakan konjugate kompleks. Dalam praktek, teknik komputasi power spektra tersebut dilakukan dengan cara FFT (fast fourier transfor). Metode ini sangat mudah dilakukan dengan Matlab. Bentuk dari power spectra mencerminkan dinamika turbulen disuatu perairan. Perubahan slope (kemiringan) dari suatu spektrum menyatakan sifat dinamika dominan yang memproduksi turbulen. Dalam observasi telah banyak ditemukan bentuk spektra, misalnya GM76 menyatakan turbulensi akibat gelombang internal.
Spektrum energinya akan dinyatakan oleh:

$$E_\theta(k) \equiv 4\pi k^2 \Phi_\theta(k) \qquad [\mathrm{K}^2 m] \qquad 2.5.2.5$$

yang menyatakan energi dalam bentuk bilangan gelombang.
Untuk flukstuasi kecepatan maka power spektra merupakan pasangan transfor fourier yang dinyatakan oleh:

$$\Phi_{vel}{}^{jl}\left(\vec{k}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}B_{vel}^{jl}\left(\vec{r}\right)e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\,d\vec{r} \qquad \left[m^2s^{-1}\right] \qquad 2.5.2.6$$

$$B_{vel}{}^{jl}\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{vel}^{jl}\left(\vec{k}\right)e^{i\vec{k}.\vec{r}}\,d\vec{k} \qquad 2.5.2.7$$

dimana fungsi korelasi B_{vel} merupakan tensor rank dua yang dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$B_{vel}{}^{jl}\left(\vec{r}\right)\equiv\begin{bmatrix}\overline{u_1'(\vec{x})u_1'(\vec{x}+\vec{r})} & \overline{u_1'(\vec{x})u_2'(\vec{x}+\vec{r})} & \overline{u_1'(\vec{x})u_3'(\vec{x}+\vec{r})}\\ \overline{u_2'(\vec{x})u_1'(\vec{x}+\vec{r})} & \overline{u_2'(\vec{x})u_2'(\vec{x}+\vec{r})} & \overline{u_2'(\vec{x})u_3'(\vec{x}+\vec{r})}\\ \overline{u_3'(\vec{x})u_1'(\vec{x}+\vec{r})} & \overline{u_3'(\vec{x})u_2'(\vec{x}+\vec{r})} & \overline{u_3'(\vec{x})u_3'(\vec{x}+\vec{r})}\end{bmatrix}$$

Bagian trace adalah axial (sb utama) dan transfersal (sumbu horisontal / bidang normal) sedangkan bagian diagonal matriks adalah cros. Jika r=0 maka bagian diagonal akan mengkompres turbulensi. Dalam asusmsi turbulen isotropis maka bagian axial dan tranversal tidak saling bebs akibatnya hanya satu komponen saja yang diukur. Misalnya sensor pengukuran dengan hot film atau pitot maka yang diukur adalah flukstuasi axial sedangkan airfoil akan mengukur transversal. Jika flukstuasi kecepatan tidak isotropis maka spektrum energi kinetik adalah jumlah dari spektrum tracenya.

Energi kinetik turbulen dinyatakan oleh:

$$E_{KE}(k)=4\pi k^2\Phi_{KE}(k) \qquad 2.5.2.8$$

Turbulen cenderung menjadi isotropis pada bilangan gelombang besar. Pada keadaan ini dissipasi akan mengekstrak turbulen menjadi energi panas. Aliran spektrum energi akan mengecil dengan besarnya bilangan gelombang yang menunjukkan adanya energy cascade seperti yang diramalkan oleh Richardson. Dissipasi energi dihitung dari energi kinetik dinyatakan oleh [Gregg,M 1989]:

$$\bar{\varepsilon}=2\nu\int_0^{\infty}k^2E(k)dk \qquad \left[Wkg^{-1}\right] \qquad 2.5.2.9$$

Distribusi energi E(k) terhadap bilangan gelombang menyatakan karasteristik suatu daerah. Beberapa model telah dikembangkan misalnya model Kolmogorov yang mneyatakan bahwa distribusi energi kinetik terhadap bilangan gelombang mengikuti:

$$E_{KE}(k)=C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \qquad \left[\frac{m^2s^{-2}}{m^{-1}}\right]$$

Yang biasanya disebut spektrum Kolmogorov. Misalnya observasi yang dilakukan di kanal pasang surut [Grant et al 1968] dengan kedalaman pengukuran 100m serta kecepatan arus rata-rata 1m / s mereka menemukan C = 0.47 ± 0.02. Hasil ini mengatakan bahwa turbulensi terdistribusi merata diseluruh perairan dan proses mixing telah terjadi secara sempurna.