9 — Perumusan Model Harga Opsi

9.1 Hipotesis Pasar Efisien

Hipotesis pasar efisien merupakan topik kajian dalam teori keuangan yang banyak diperdebatkan sejak digulirkan oleh Fama (1965). Silang pendapat ini dapat dilacak dalam banyak kepustakaan.[1] Wilayah perdebatan pada dasarnya hanya berkisar seputar proses stokastik apa yang cocok untuk menerangkan hipotesis pasar efisien.

Secara umum, persaingan dalam pasar modal akan menyebabkan adanya pengaruh informasi baru terhadap nilai intrinsik saham yang tercermin secara seketika (*instantane-*

---

[1]Lihat Fama (1969), Hagerman dan Richmond (1973), LeRoy (1989), Rutterford (1993), Weston dan Copeland (1995), Dimson dan Mussavian (2000), Beechey *et. al.* (2000), Mauboussin (2002), Rodoni dan Yong (2002), Damodaran (2005) dan Clarke *et.al.* (2005).

uously) pada harga sekarang. Efisiensi pasar terjadi jika harga-harga mencerminkan seluruh informasi yang tersedia. Mengingat bahwa informasi baru bersifat tidak pasti, maka pengaturan seketika mempunyai 2 akibat. Pertama, harga sekarang akan sering berubah selaras dengan perubahan informasi. Kedua, nilai-nilai intrinsik yang berturutan akan menjadi saling bebas. Ini menunjukkan perubahan harga saham secara berturutan juga saling bebas. Sebuah pasar dengan ciri demikian merupakan pasar jalan acak.

Jalan acak (*random walk*) menyatakan bahwa tidak ada perbedaan antara distribusi hasil pengembalian bersyarat (conditional) dan tidak bersyarat (unconditional) pada struktur informasi tertentu. Jalan acak adalah kondisi yang jauh lebih kuat daripada *fair game* atau martinggil untuk hipotesis pasar efisien. Perbedaan statistik antara *fair game* dan jalan acak adalah bahwa hipotesis jalan acak mensyaratkan bahwa seluruh penarikan diambil secara independen dari distribusi yang sama, sedangkan *fair game* tidak.

Seperti yang sudah dipahami dalam bab terdahulu pada saat membicarakan jalan acak, dalam konteks ini, jalan acak dipahami sebagai perubahan harga yang berturutan yang saling bebas satu sama lain. Dengan kata lain, perubahan harga besok tidak dapat diramalkan dengan melihat perubahan harga sekarang. Andaikan S adalah harga saham, maka $S_{t+1} - S_t$ adalah saling bebas terhadap $S_t - S_{t-1}$. Tidak ada tren dalam perubahan harga. Dengan cara yang sama seperti dalam jalan acak, maka penanda terbaik untuk harga saham besok adalah harga sekarang.

Fama (1965, hlm. 77) menyatakan bahwa uji korelasi data deret waktu yang dilakukan Cootner,Kendall, dan Moore dalam penelitian yang dilakukan masing-masing secara terpisah menghasilkan perhitungan perubahan harga berturutan yang sangat mendekati 0. Sebagaimana yang sudah dipahami dalam bab 2, saat koefisien korelasi bernilai 0 menunjukkan bahwa peubah-peubah yang bersangkutan tidak memiliki korelasi (tidak ada hubungan). Dengan kata lain, peubah-peubah tersebut saling bebas. Pada tahun yang sama dalam jurnal berbeda, Fama (1965) juga menelisik dengan hasil yang juga mendukung model jalan acak ini.

Dengan demikian,

$$\mathcal{P}(S_{t+1}|S_1, S_2, \ldots, S_t) = \mathcal{P}(S_{t+1}|S_t) \tag{9.1}$$

Persamaan di atas juga merupakan sifat dari proses Markov. Selain itu, karena jalan acak juga memiliki sifat martinggil, maka dalam pasar yang efisien juga berlaku bahwa nilai harap harga mendatang hanya bergantung harga sekarang,

$$E(S_{t+1}|S_t, S_{t-1}, S_{t-2}, \ldots, S_1) = E(S_{t+1}|S_t) \tag{9.2}$$

9.2 Karakteristik Harga Saham

Model perilaku

Untuk mendapatkan gagasan bagaimana memodelkan perilaku harga saham, di sini akan digunakan kias (analogi) deposito bank yang memberikan suku bunga bebas risiko. Andaikan bahwa $S(0)$ adalah nilai sekarang dari uang sebanyak $S(t)$ pada tahun yang akan datang. Bila suku bunga per tahun adalah r, maka bunga yang dapat diperoleh dari $S(0)$ adalah $r\ S(0)$. Setelah masa penyimpanan 1 tahun, maka jumlah uang akan menjadi

$$S(0) + S(0)\ r = S(0)\ (1 + r).$$

Karena $S(t)$ adalah nilai uang $S(0)$ pada t tahun mendatang, maka

$$S(1) = S(0)\ \ (1 + r)\,. \tag{9.3}$$

Setelah 2 tahun masa penyimpanan, jumlah uang akan menjadi

$$S(2) = S(1) + r\ S(1) = S(1)\ \ (1 + r) = S(0)\ \ (1 + r)^2\,. \tag{9.4}$$

Dengan cara yang sama, jumlah uang setelah 3 tahun masa penyimpanan akan menjadi

$$S(3) = S(0)\ \ (1 + r)^3\,.$$

Pada akhirnya, hasil dari perampatan persamaan suku bunga ini setelah masa penyimpanan t tahun ialah

$$S(t) = S(0)\,(1 + r)^t\,. \tag{9.5}$$

Ada banyak pilihan tenggang waktu untuk melakukan penghitungan suku bunga. Suku bunga dapat dihitung harian, pekanan, bulanan, kuartalan (4 bulanan), semesteran (6 bulanan) atau 1 tahun sekali. Dalam praktik sehari-hari, biasanya penghitungan suku bunga dilakukan lebih dari 1 kali dalam 1 periode atau 1 tahun. Jika panjang periode adalah t, maka setiap kali bank melakukan penghitungan suku bunga, besar suku bunga yang diterima adalah $\frac{r}{m}$, dengan m menyatakan kekerapan penghitungan bunga dalam 1 periode. Maka, nilai kemudian (*future value*) $S(t)$, yaitu

$$S(t) = S(0)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{tm} \tag{9.6}$$

Bila kekerapan perhitungan bunga mendekati tak hingga maka dapat dilakukan limit terhadap persamaan di atas,

$$\begin{aligned} S(t) &= \lim_{m\to\infty} S(0)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{tm} \\ &= S(0)\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt} \\ &= S(0)\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{rt} \\ &= S(0)\, e^{rt}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Persamaan ini dikenal sebagai persamaan bunga majemuk berlanjut (*continuous compounding interest*), yaitu bunga majemuk yang memiliki periode tak terhingga dalam setahun atau bunga mejemuk yang dibungakan sesering mungkin.

Suku bunga deposito ini merupakan suku bunga bebas risiko karena setiap pemodal yang menanamkan uangnya ke dalam deposito tidak akan menanggung risiko. Artinya, bisa dipastikan bahwa pemodal akan selalu menerima pendapatan atau pengembalian sebesar bunga yang berlaku dalam setiap periode. Ini merupakan petunjuk bahwa proses bunga majemuk berlanjut merupakan deterministik (pengertian ini dapat dilihat kembali di bab 2 §3).

Dalam konteks saham, jika seorang pemodal membeli saham, pemodal tersebut berharap akan memperoleh dividen dari perusahaan dan atau laba modal bila saham tersebut dijual. Besar kecilnya dividen sangat bergantung pada besar kecilnya laba perusahaan dan *dividen payout ratio* (bagian laba perusahaan yang akan dibagikan dalam bentuk dividen). Sedangkan ancaman kerugian yang mungkin diderita pemodal adalah rugi modal apabila ternyata harga jual saham lebih rendah dibanding harga belinya. Ini merupakan petunjuk bahwa ada ketidakpastian pengembalian dalam investasi saham. Ketidakpastian ini menyebabkan pemodal menginginkan adanya *tingkat keuntungan yang cukup* sebagai kompensasi dari ketidakpastian tersebut. Kompensasi ini dikenal sebagai tingkat pengembalian yang diharapkan (disyaratkan). Dengan demikian, tingkat pengembalian ini merupakan laju pertumbuhan dalam investasi saham.

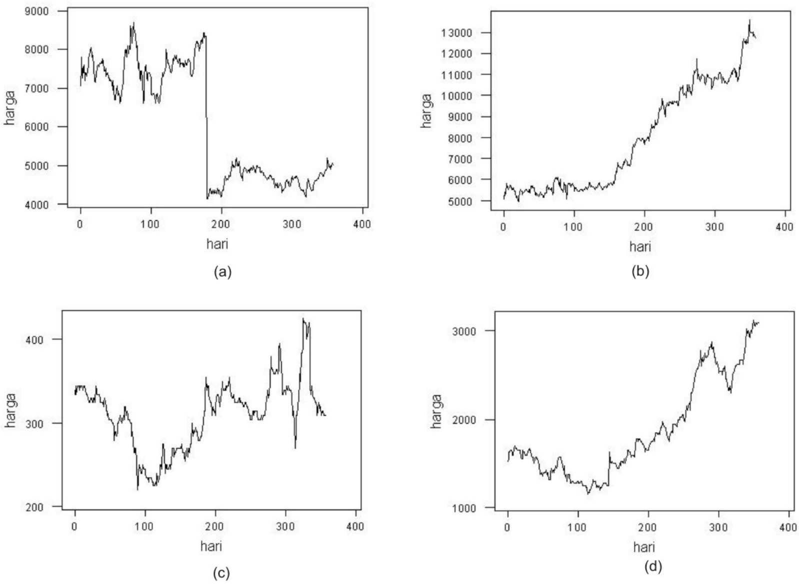
Laju pertumbuhan yang disyaratkan ini dapat dipandang seperti bunga dalam deposito. Oleh karenanya, jika S merupakan harga saham, maka laju pertumbuhan μ terhadap S adalah μS. Dengan demikian, dalam rentang waktu sempit Δt, laju pertumbuhan dari S adalah $\mu S \Delta t$. Jika tidak ada ancaman kerugian, maka

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(0) dt \\ \frac{dS(t)}{S(0)} &= \mu dt \end{aligned} \tag{9.8}$$

sehingga

$$S(t) = S(0)e^{\mu t} \tag{9.9}$$

dengan $S(0)$ merupakan harga saham pada saat awal. Persamaan ini menunjukkan bahwa ketika tidak ada ancaman kerugian, investasi dalam saham akan tumbuh seperti investasi dalam deposito. Dengan kata lain, harga saham identik dengan bunga deposito.

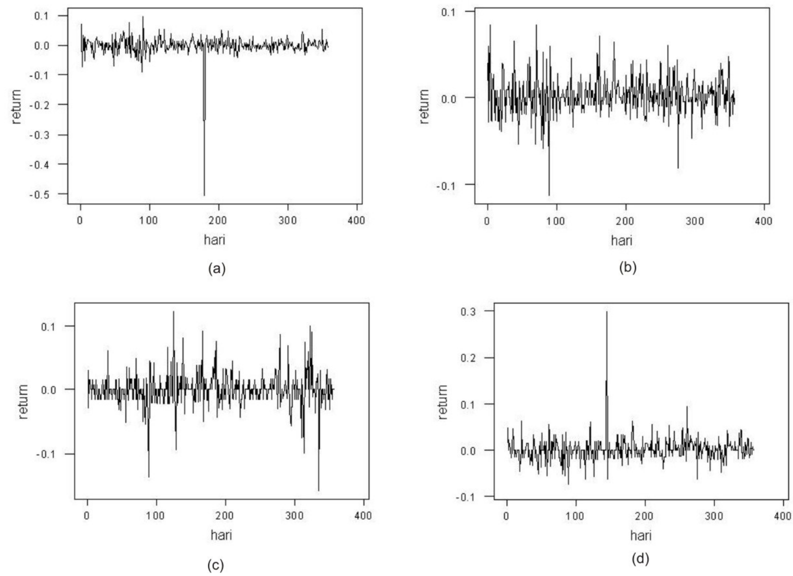


Gambar 9.1: Grafik pergerakan harga untuk beberapa saham periode Januari 2004 – Juni 2005: (a) saham Telkom; (b) saham Astra International; (c) saham Astra Graphia; dan (d) saham Astra Otoparts. Sumber data: Pusat Data Pasar Modal Fakultas Ekonomi UGM

Namun demikian, harga saham di pasar modal terbentuk melalui mekanisme permintaan dan penawaran. Adanya informasi-informasi baru yang hadir secara acak dan cepat seperti pembayaran dividen, laba perusahaan, penjualan saham baru atau pemecahan saham, akan menyebabkan harga saham naik turun. Pada gilirannya, hadirnya informasi-informasi tersebut menyebabkan harga saham memiliki fluktuasi pergerakan harga yang disebut kemeruapan (volatilitas). Dalam tinjauan hipotesis pasar efisien yang sudah dibahas di muka, pergerakan harga saham mengikuti proses stokastik. Sehingga, harga saham bukan hanya dapat digambarkan seperti deposito yang deterministik saja, namun juga sebagai aset yang lekat dengan gangguan fluktuasi stokastik. Karena itu, perubahan harga dS dalam rentang waktu sempit dt seharusnya terdiri dari 2 sumbangan, yaitu sumbangan deterministik dan sumbangan stokastik.

Sumbangan deterministik ditunjukkan oleh persamaan (9.9) yang juga sepadan dengan persamaan (9.7), hanya saja tetapan r diganti dengan tetapan μ yang menyatakan laju pertumbuhan.

Sumbangan kedua memodelkan perilaku stokastik dari pergerakan harga. Disini akan ditinjau bahwa dalam pandangan seorang pemodal, hasil pengembalian pada saat harga saham Rp 3.000 atau Rp 5.000 adalah sama-sama tidak pasti. Ketidakpastian hasil pengembalian (return) ini dapat dilihat dalam gambar 9.2. Oleh karena itu, perlu adanya parameter yang menyatakan ketidakpastian ini. Parameter ini bisa dipandang sebagai ukuran seberapa besar terjadinya perubahan hasil pengembalian yang berakibat langsung pada perilaku harga saham. Maka, ketidakpastian hasil pengembalian sebenarnya merupakan variansi dari harga saham itu sendiri atau besarnya fluktuasi harga saham, dan dilambangkan dengan σ^2. Dengan demikian, $\sigma^2\Delta t$ merupakan variansi harga saham dalam waktu Δt, sehingga $\sigma^2 S^2 \Delta t$ merupakan variansi harga saham S selama Δt. Karenanya, variansi seketika (instan) dari harga saham adalah $\sigma^2 S^2$.



Gambar 9.2: Grafik fluktuasi return untuk beberapa saham periode Januari 2004 – Juni 2005: (a) saham Telkom; (b) saham Astra International; (c) saham Astra Graphia; dan (d) saham Astra Otoparts. Sumber data: Pusat Data Pasar Modal Fakultas Ekonomi UGM

Argumen-argumen ini menunjukkan bahwa S dapat diwakili dengan proses Itô yang mempunyai laju pertumbuhan μS dan variansi seketika $\sigma^2 S^2$. Ini dapat ditulis sebagai

$$dS = \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dB, \qquad (S(0) > 0 \tag{9.10}$$

atau

$$\frac{dS}{S} = \mu \; dt + \sigma \; dB. \tag{9.11}$$

Model perilaku harga saham yang telah dibangun dalam persamaan di atas serupa dengan persamaan gerak Brown geometrik. Bentuk waktu tercacahnya adalah

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\delta t}. \tag{9.12}$$

Peubah ΔS merupakan perubahan harga saham S dalam rentang waktu sempit Δt, dan ϵ merupakan sampel acak dari distribusi normal baku, yakni distribusi normal dengan rerata 0 dan simpangan baku 1. Parameter μ merupakan harapan pengembalian (laju pertumbuhan) dari saham tiap satuan waktu dan parameter σ adalah kemeruapan (volatilitas) harga saham. Kedua parameter ini, yakni μ dan σ diandaikan tetap.

Ruas kiri dalam persamaan (9.12) merupakan hasil pengembalian sepadan yang diberikan oleh saham dalam rentang waktu sempit Δt. Suku $\mu \Delta t$ adalah nilai harap untuk pengembalian ini, sedangkan suku $\sigma \epsilon \sqrt{\delta t}$ adalah komponen stokastik untuk pengembalian. Variansi komponen stokastik adalah $\sigma^2 \Delta t$.

Persamaan (9.12) juga menunjukkan bahwa $\Delta S/S$ terdistribusi normal dengan rerata $\mu \Delta t$ dan simpangan baku $\sigma \sqrt{\Delta t}$. Dengan kata lain

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi\left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}\right) \tag{9.13}$$

dengan $\phi(m, s)$ melambangkan distribusi normal dengan rerata m dan simpangan baku s.

Gerak Brown geometrik

Gerak Brown geometrik merupakan kejadian khusus dari proses Itô yang disajikan dalam persamaan dibawah ini

$$dX = a\,(X,t)\,dt + b\,(X,t)\,dB, \tag{9.14}$$

dimana dB merupakan proses Wiener atau gerak Brown serta a dan b merupakan fungsi terhadap X dan t. Peubah X mempunyai laju pertumbuhan a dan variansi b^2. Lemma Itô menunjukkan bahwa fungsi G dalam X dan t menjalani proses

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial X}b\ dB \tag{9.15}$$

dengan dB merupakan proses Wiener yang sama dalam persamaan sebelumnya. Karena itu G juga memenuhi proses Itô sehingga mempunyai laju pertumbuhan

$$\frac{\partial G}{\partial X}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}b^2 \tag{9.16}$$

dan variansi

$$\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)^2 b^2. \tag{9.17}$$

Lemma Itô ini menunjukkan bahwa persamaan (9.10) dapat dibangun seperti bentuk persamaan (9.15) dengan fungsi G dalam S dan t yang dapat ditunjukkan dalam persamaan berikut

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S\ dB. \tag{9.18}$$

Sementara itu, persamaan (9.11) secara jelas menyatakan bahwa peubah yang sesuai bukanlah perubahan absolut $dS = S(t + dt) - S(t)$, melainkan hasil pengembalian dS/S dalam rentang waktu dt. Dari sisi keuangan ini sangat wajar. Perubahan absolut dS =Rp 100 dalam waktu dt adalah jauh lebih bernilai meskipun untuk modal awal yang hanya senilai $S(t)$ =Rp 1.000 daripada modal awal senilai $S(t) = Rp10.000$ tetapi tidak mengalami perkembangan sedikitpun. Hasil pengembalian dS/S secara jelas menyatakan perbedaan ini. Hal ini dapat dirujuk dalam konsep nilai waktu dari uang (*time value of money*) yang secara sederhana menyatakan bahwa satu rupiah yang dipegang sekarang jauh lebih bernilai daripada satu rupiah yang dipegang dimasa datang, sebab satu rupiah dimasa sekarang dapat diinvestasikan dan memberikan hasil pengembalian.

Tafsir (interpretasi) dS/S sebagai peubah yang sesuai menyarankan bahwa persamaan (9.11) sebaiknya ditulis ulang dalam bentuk $\ln S(t)$. Dengan menyatakan

$$G = \ln S \tag{9.19}$$

akan menghasilkan

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \tag{9.20}$$

dan jika dimasukkan ke dalam persamaan (9.18) memberikan hasil akhir

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB. \tag{9.21}$$

Nilai μ dan σ merupakan tetapan sehingga G merupakan proses Wiener yang mempunyai laju pertumbuhan tetap $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ dan variansi tetap σ^2. Berdasarkan pembahasan pada anak bab sebelum ini, hal ini menandakan bahwa perubahan dalam G antara waktu sekarang t dan waktu kemudian T, terdistribusi normal dengan rerata

$$E\,(dG) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt \tag{9.22}$$

dan variansi

$$\mathrm{Var}\,(dG) = \sigma^2 dt. \tag{9.23}$$

Nilai G pada saat t adalah $\ln S$ dan nilainya pada saat T adalah $\ln S(T)$, dengan $S(T)$ merupakan harga saham pada saat T. Sehingga perubahannya selama rentang waktu $T - t$ ialah

$$\ln S(T) - \ln S.$$

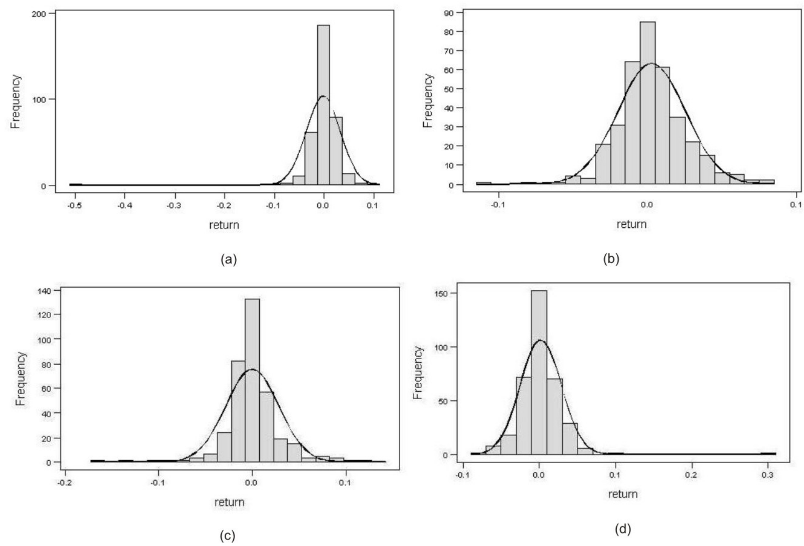
Perubahan ini serupa dengan persamaan (9.13) yaitu

$$(\ln S(T) - \ln S) \sim \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\,, \sigma\sqrt{T - t}\right). \tag{9.24}$$

Sifat log-normal

Sebuah peubah mempunyai distribusi log-normal jika logaritma natural dari peubah terdistribusi normal. Persamaan (9.24) menunjukkan bahwa logaritma natural dari perubahan harga saham (return) mempunyai distribusi normal. Ini dapat ditunjukkan dalam gambar 9.3. Dengan demikian apabila return saham terdistribusi normal, maka harga saham mempunyai distribusi log-normal.

Andaian sifat distribusi log-normal untuk harga saham merupakan sifat yang baik. Sifat ini sesuai untuk harga saham, sebab seandainya harga saham diandaikan berdistribusi normal maka harga saham dapat bernilai negatif. Dengan memiliki distribusi log-normal, maka nilai harga saham dapat berapapun namun tetap dalam kisaran 0 sampai tak terhingga dan tidak negatif.



Gambar 9.3: Histogram data return dan kurva normal untuk beberapa saham periode Januari 2004 – Juni 2005: (a) saham Telkom; (b) saham Astra International; (c) saham Astra Graphia; dan (d) saham Astra Otoparts. Sumber data: Pusat Data Pasar Modal Fakultas Ekonomi UGM

9.3 Pencagaran Nilai

Gerak Brown geometrik yang menjadi model perilaku harga saham di atas menyuguhkan 2 parameter, μ dan σ. Parameter pertama menerangkan tingkat pengembalian yang diharapkan, sedangkan parameter kedua menjelaskan fluktuasi harga. Jika fluktuasi besar, saham akan sangat meruap (volatil, *volatile*) sehingga investasi menjadi sangat berisiko.

Risiko (*risk*) adalah tingkat kemungkinan terjadinya kerugian yang harus ditanggung dalam investasi. Dengan demikian, pengertian risiko digunakan dalam arti ketidakpastian dan dihubungkan dengan fluktuasi tingkat pengembalian. Misalnya, obligasi pemerintah sebesar Rp 18 juta yang menjamin pemegangnya akan memperoleh bunga sebesar Rp 200 ribu setelah 30 hari dikatakan tidak memiliki risiko karena tidak ada fluktuasi pengembalian. Sementara investasi sebesar Rp 18 juta dalam saham biasa suatu perusahaan, dimana para pemegang saham dengan periode yang sama akan memperoleh hasil berkisar antara Rp 0 - 400 ribu adalah sangat berisiko karena tingkat fluktuasi yang tinggi. Boleh jadi pemodal akan mendapat pengembalian Rp 400 ribu, tetapi sangat mungkin pula jika pemodal tidak mendapat apapun.

Andaian penting dalam pembicaraan risiko dan tingkat pengembalian yang diharapkan ini adalah setiap pemodal bersikap rasional dan tidak menyukai risiko (*risk averter*). Sikap tidak menyukai risiko ini tercermin dari sikap pemodal yang akan meminta tambahan keuntungan yang lebih besar untuk setiap kenaikan tingkat risiko yang dihadapi.

Dalam hal hubungan risiko dan surat berharga, ada 2 macam risiko yang melekat pada setiap surat berharga, yaitu risiko sistematik (*systematic risk*, ada juga yang menyebut *unique risk*) dan risiko tidak sistematik (*unsystematic risk*). Risiko sistematik adalah risiko yang terjadi karena faktor perubahan pasar secara keseluruhan, seperti misalnya perubahan tingkat suku bunga yang mengakibatkan meningkatnya tingkat keuntungan yang disyaratkan atas surat berharga secara keseluruhan, inflasi, resesi ekonomi, perubahan kebijakan ekonomi secara menyeluruh dan perubahan tingkat harapan pemodal terhadap perkembangan ekonomi. Risiko kedua, risiko tidak sistematik, yaitu risiko yang terjadi karena karakteristik perusahaan atau lembaga keuangan yang mengeluarkan surat berharga itu sendiri. Karakteristik itu misalnya mencakup kemampuan manajemen, kondisi dan lingkungan kerja serta kebijakan investasi. Oleh karenanya, risiko ini berbeda satu sama lain sehingga setiap surat berharga juga memiliki tingkat kepekaan yang berbeda terhadap setiap perubahan pasar. Sebagai contoh, kepekaan surat berharga yang dikeluarkan oleh perusahaan sektor agrokompleks akan berbeda dengan surat berharga yang dikeluarkan perusahaan sektor telekomunikasi.

Seorang pemodal yang hati-hati senantiasa ingin menghindari risiko dan melindungi investasinya dari kemungkinan kerugian. Untuk mencapai tujuan ini, pemodal dapat berinvestasi dengan tidak hanya pada satu surat berharga saja tetapi pada beberapa surat berharga yang berbeda sekaligus dalam satu portofolio.[2] Misal, pemodal memiliki portofolio yang terdiri dari saham perusahaan sektor agrokompleks dan perusahaan sektor telekomunikasi. Penanaman investasi pada berbagai macam surat berharga semacam ini disebut

[2]Portofolio merupakan kumpulan surat berharga

juga dengan diversifikasi (*diversification*, penganekaragaman). Gagasan dasar dari penganekaragaman adalah penurunan tingkat pengembalian salah satu surat berharga akan ditutup oleh tingkat pengembalian surat berharga yang lain. Hal ini juga dapat dibaca dalam ungkapan klasik, *don't put all your eggs in one basket* (jangan letakkan seluruh telurmu dalam keranjang).

Namun, cara penganekaragaman ini hanya mungkin untuk menyelesaikan risiko tak sistematik dan tidak bisa untuk mengatasi risiko sistematik sehingga cara ini masih menyisakan risiko sistematik yang diakibatkan oleh faktor pasar secara keseluruhan.

Untuk menanggulangi risiko sistematik ini, ada sebuah cara yang dikenal sebagai pencagaran nilai atau *hedging* (dapat juga diterjermahkan sebagai cegah risiko atau lindung nilai). Pencagaran nilai merupakan cara atau teknik untuk menghindari risiko yang timbul akibat adanya fluktuasi harga di pasar dalam kaitannya dengan transaksi jual beli komoditas, surat berharga, atau valuta. Misalnya, dalam perjanjian pinjam-meminjam dalam bentuk valuta asing diperjanjikan bahwa pembayaran kembali dilakukan dengan kurs yang disepakati. Apabila ternyata nilai kurs berubah pada saat hari pengembalian pinjaman, pembayaran tetap dilakukan dnegan menggunakan kurs yang telah diperjanjikan.

Dengan demikian, teknik pencagaran nilai ini memungkinkan seorang pemodal untuk menyusun sebuah portofolio yang bebas risiko secara sempurna. Pada umumnya instrumen keuangan yang dapat digunakan untuk pencagaran nilai adalah instrumen derivatif. Pada titik inilah opsi sebagai salah satu derivatif memainkan peran penting dalam manajemen investasi.

9.4 Batas-batas Harga Opsi

Dalam takrif opsi yang telah diberikan dalam bab 6, suatu opsi mengandung unsur-unsur pembentuk yaitu harga laksana K, waktu jatuh tempo pelaksanaan T, harga surat berharga acuan S dan harga opsi itu sendiri (premi) O. Selanjutnya, karena berdasarkan haknya opsi dibagi menjadi 2, yaitu opsi beli dan opsi jual, maka secara khusus harga opsi beli dilambangkan dengan C dan harga opsi jual dilambangkan dengan P.

Sebagaimana telah diterangkan juga dalam bab yang sama, opsi merupakan instrumen derivatif sehingga sangat bergantung pada surat berharga acuan. Maka harga opsi atas saham haruslah merupakan fungsi dari nilai sekarang S dan waktu t, dapat ditulis $O = O(S,t)$. Kemudian, harga opsi ini bergantung pada parameter-parameter K dan T. Pada waktu jatuh tempo T, harga opsi menjadi $O = O(S,T)$.

Sekarang, ditinjau suatu opsi merupakan opsi beli. Pada saat $S(T) < K$, pemegang opsi beli tidak akan melaksanakan opsinya karena bisa mendapatkan harga yang lebih murah di pasar. Karenanya, pada saat jatuh tempo harga dari opsi beli adalah

$$C(S,T) = 0. \tag{9.25}$$

Sebaliknya ketika $S(T) > K$, bagaimanapun lebih menguntungkan bagi pemegang opsi beli untuk melaksanakan opsinya. Dengan membayar sejumlah K, pemegang opsi akan menerima harga saham acuan $S(T)$ yang memberinya keuntungan sebesar $S(T)-K$ jika dibandingkan dengan membeli di pasar. Dengan kata lain, penulis opsi beli membutuhkan setidaknya $C(S,T) = S(T)-K$ karena harus membeli saham acuan seharga $S(T)$ di pasar dan hanya menerima pembayaran sejumlah K. Oleh karena itu, harga opsi yang wajar adalah

$$C(S,T) = S(T) - K. \tag{9.26}$$

Dengan melihat kejadian pada saat $S(T) < 0$ dimana $C(S,T) = 0$ dan $S(T) > K$ dimana $C(S,T) = S(T) - K$ secara bersama-sama, maka harga dari opsi beli pada saat jatuh tempo $(t = T)$, disebut juga *payoff*, pasti memenuhi

$$C(S,T) = \max\left(S(T) - K, 0\right). \tag{9.27}$$

Sekarang akan ditinjau untuk opsi jual. Pemegang opsi jual hanya akan menggunakan haknya jika dipandang menguntungkan yaitu bila dapat menjual saham acuan dengan harga yang lebih mahal dibandingkan jika menjual saham acuan ke pasar. Hal ini akan terpenuhi apabila $K > S(T)$. Pada saat jatuh tempo ini pemegang opsi jual menerima keuntungan sebesar $K - S(T)$, sehingga harga opsi jual pada saat jatuh tempo adalah

$$P(S,T) = K - S(T). \tag{9.28}$$

Sebaliknya, apabila $K < S(T)$, maka dipastikan pemegang opsi jual lebih memilih untuk membiarkan opsinya kadaluarsa dan menjual saham acuan ke pasar. Pada saat jatuh tempo yang demikian, harga opsi jual adalah 0,

$$P(S,T) = 0. \tag{9.29}$$

Penjelasan ini menyimpulkan bahwa harga opsi jual pada saat jatuh tempo ($t = T$) adalah

$$P(S,T) = \max\left(K - S(T), 0\right). \tag{9.30}$$

Uraian tentang harga-harga batas dari opsi beli dan opsi jual di atas yang terangkum dalam persamaan (9.27) dan (9.30) pada akhirnya mengerucut pada sebuah pertanyaan, yaitu berapa harga opsi yang wajar atau adil ketika penandatanganan kontrak ($t < T$) dilangsungkan dimana pada saat itu penulis opsi memberikan hak kepada pemegang opsi untuk menjual atau membeli saham acuan dengan harga laksana K pada saat jatuh tempo ($t = T$).

9.5 Andaian-andaian

Untuk menyusun model tentang penentuan harga opsi sebagai jawaban atas pertanyaan di atas diperlukan adanya andaian-andaian. Andaian-andaian ini dimaksudkan untuk lebih menyederhanakan permasalahan sehingga model penentuan harga opsi mudah untuk dibangun.

Andaian 9.1. Pasar memenuhi hipotesis pasar efisien.

Ini mengimplikasikan bahwa semua informasi yang dibutuhkan tersedia dan tercermin pada harga sekarang. Informasi-informasi ini pada gilirannya akan 'menggempur' harga saham dari berbagai sektor. Gempuran informasi yang datang secara tidak pasti menyebabkan ada 'perilaku khusus' dalam pergerakan harga saham.

Andaian 9.2. Pergerakan harga saham mengikuti pola acak.

Andaian ini menafikan para analis teknikal yang percaya bahwa pergerakan harga saham mempunyai pola-pola tertentu sehigga bisa diramalkan perubahan yang bagaimana yang kira-kira akan terjadi mendatang. Andaian ini secara tidak langsung merupakan turunan dari andaian pertama.

Andaian 9.3. Tidak ada risiko kredit yang ada hanya risiko pasar.

Risiko kredit merupakan risiko yang timbul dalam hal pihak debitur gagal memenuhi kewajiban untuk membayar angsuran pokok ataupun bunga sebagaimana telah disepakati dalam perjanjian kredit. Di sini diandaikan bahwa emiten[3] tidak memiliki risiko kredit sehingga harga opsi dan saham hanya dipengaruhi oleh fluktuasi pasar dari surat berharga acuan.

Andaian 9.4. Pasar bebas dari arbitrasi.[4]

Arbitrasi merupakan pemerolehan keuntungan dengan pembelian surat berharga, mata uang, atau komoditas pada harga yang rendah di suatu pasar dan seketika itu juga menjual pada pasar yang lain dengan harga yang lebih tinggi. Arbitrasi juga dikenal sebagai *free lunch* dalam jargon keuangan.

[3]Perusahaan yang mengeluarkan saham.

[4]Istilah arbitrasi (*arbitrage*) sama sekali berbeda dengan arbitrase (*arbitration*). Arbitrase mempunyai makna penyelesaian perselisihan di luar pengadilan oleh pihak ketiga sebagai penengah (arbiter/arbitrator) yang ditunjuk oleh pihak yang berselisih.

Andaian 9.5. Suku bunga bebas risiko r dan kemeruapan (volatilitas) σ tetap dan dapat diketahui.

Suku bunga bebas risiko selalu berubah terhadap waktu. Demikian pula volatilitas sebagai besaran yang menerangkan fluktuasi harga saham juga selalu berubah terhadap waktu. Dalam membangun model penentuan harga opsi ini, keduanya diandaikan tetap sehingga bisa lebih menyederhanakan masalah.

Andaian 9.6. Opsi hanya dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo atau opsi Eropa.

Sebagaimana sudah disinggung, bahwa berdasarkan hak pelaksanaannya, opsi dibagi menjadi 2 yaitu opsi yang bisa dilaksanakan kapan saja selama masa kontrak opsi (opsi Amerika) dan opsi yang hanya bisa dilaksanakan ketika jatuh tempo saja (opsi Eropa). Dalam model yang akan dibangun, opsi yang diteliti adalah opsi Eropa.

Andaian 9.7. Surat berharga acuan (*underlying asset*) adalah saham yang tidak membayarkan dividen selama masa kontrak opsi berlangsung.

Dengan tidak membayarkan dividen sampai masa jatuh tempo, maka pemodal akan lebih menyukai untuk bertransaksi opsi.

Andaian 9.8. Biaya transaksi (komisi untuk pialang) relatif kecil dan dapat diabaikan.

Setiap transaksi di pasar modal selalu melibatkan pialang. Transaksi opsi selalu nilainya lebih kecil dibanding transaksi saham. Sehingga biaya jasa pialang (biaya transaksi) untuk transaksi opsi juga selalu lebih kecil dibanding biaya jasa pialang untuk transaksi saham.

9.6 Persamaan Turunan Utama

Andaian-andaian di atas akan digunakan untuk menurunkan persamaan harga opsi. Dalam andaian 9.2 dinyatakan bahwa pergerakan harga mengikuti pola acak. Andaian ini secara tidak langsung menyatakan bahwa persamaan (9.10) tentang pergerakan harga saham acuan yang mengikuti proses Wiener berlaku di sini. Persamaan (9.10) itu ialah

$$dS = \mu S\left(t\right)dt + \sigma S\left(t\right)dB.$$

Seperti telah dijelaskan di muka bahwa opsi merupakan surat berharga derivatif sehingga harga opsi O bergantung pada saham acuan S. Hal ini menunjukkan bahwa peubah harga opsi O pasti merupakan fungsi dalam S dan t. Akibat selanjutnya, persamaan (9.18) juga berlaku untuk O, atau dengan kata lain harga opsi O juga memenuhi proses Itô. Persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$dO = \left(\frac{\partial O}{\partial S}\mu S + \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial O}{\partial S}\sigma S\, dB. \quad (9.31)$$

Lambang dS dan dO merupakan perubahan O dan S dalam rentang waktu sempit dt. Proses Wiener yang mendasari O dan S adalah sama. Dengan kata lain dB dalam persamaan (9.10) dan (9.31) adalah sama. Hal ini menunjukkan bahwa dengan memilih portofolio yang terdiri dari saham dan opsi dengan komposisi yang sesuai, proses Wiener dapat dilenyapkan dari persamaan.

Andaikan portofolio itu adalah komposisi dari satu opsi bernilai O dan sejumlah Δ (baca: delta) saham acuan dengan nilai Δ belum ditentukan. Nilai Δ akan negatif jika saham dijual dan akan positif jika saham dibeli. Andaikan nilai portofolio itu adalah Φ, maka

$$\Phi = O + \Delta S. \tag{9.32}$$

Pada rentang waktu dt tingkat pengembalian portofolio adalah

$$d\Phi = dO + \Delta\left(dS\right). \tag{9.33}$$

Dengan mengganti dS dengan persamaan (9.10) dan dO dengan persamaan (9.31), persamaan di atas akan menjadi

$$\begin{aligned} d\Phi = \quad & \left(\frac{\partial O}{\partial S}\mu S + \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial O}{\partial S}\sigma S\ dB \\ & + \Delta\left(\mu\ S\ dt + \sigma\ S\ dB\right) \end{aligned} \tag{9.34}$$

Karena pasar diandaikan bebas dari arbitrasi (andaian 9.4) dan biaya transaksi bisa diabaikan (andaian 9.8), maka tingkat pengembalian portofolio ini harus sama dengan tingkat pengembalian setiap surat berharga bebas risiko. Dengan kata lain, kedua andaian ini menegaskan bahwa tingkat pengembalian portofolio merupakan deterministik. Akibatnya, suku stokastik (dB) dalam persamaan di atas harus lenyap. Ini hanya dapat diraih jika nilai $\Delta = -\frac{\partial 0}{\partial S}$, sehingga suku yang tersisa dari persamaan di atas adalah

$$d\Phi = \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt. \tag{9.35}$$

Sementara itu, karena tingkat pengembalian portofolio sama dengan surat berharga bebas risiko, maka nilai dari tingkat pengembalian portofolio dapat dituliskan sebagai

$$d\Phi = r\Phi dt. \tag{9.36}$$

dengan r merupakan suku bunga bebas risiko. Penggantian $d\Phi$ dengan persamaan (9.34) dan Φ dengan persamaan (9.32) untuk persamaan di atas akan menghasilkan

$$\left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt = r\left(O - \frac{dO}{dS}\right) dt$$

sehingga didapat

$$\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + rS\frac{dO}{dS} - rO = 0. \tag{9.37}$$

Persamaan ini merupakan persamaan turunan utama harga opsi. Persamaan ini bebas dari parameter laju pertumbuhan μ dan sahih untuk setiap derivatif yang memenuhi andaian-andaian di atas, khususnya untuk opsi beli dan opsi jual. Perbedaan antara opsi beli dan jual hanya terletak pada kondisi batas yang digunakan. Untuk opsi beli tipe Eropa mempunyai kunci kondisi batas

$$O = \max\left(S(T) - K, 0\right) \qquad \text{ketika } t = T \tag{9.38}$$

dan kondisi batas untuk opsi jual tipe Eropa ialah

$$O = \max\left(K - S(T), 0\right) \qquad \text{ketika } t = T. \tag{9.39}$$

9.7 Keseimbangan Opsi Jual dan Opsi Beli

Weston dan Copeland (1995, hlm. 516) menyatakan semua jenis kontrak keuangan (*financial contract*) pada dasarnya merupakan gabungan dari hanya 4 bentuk surat berharga, yaitu: saham, obligasi bebas risiko, opsi beli, opsi jual. Mengacu pada pendapat ini, maka pembelian selembar saham seharga S dan satu opsi jual dengan harga laksana K akan memberikan hasil yang tepat sama dengan selembar obligasi seharga B dan satu opsi beli dengan harga laksana K, sehingga berlaku persamaan berikut

$$S + P = B + C. \tag{9.40}$$

Dengan demikian, jika portofolio pertama tersusun dari selembar saham dan opsi jual, maka portofolio ini mempunyai nilai yang sama dengan portofolio kedua yang terdiri dari obligasi bebas risiko dan opsi beli.

Sekarang akan ditinjau kasus berikut, dimana seorang pemodal memiliki kedua portofilo tersebut secara bersamaan. Diandaikan harga saham acuan di pasar sekarang adalah S, sedangkan nilai obligasi, opsi beli, opsi jual dan saham acuan adalah masing-masing K dengan tanggal jatuh tempo yang sama.

Pada saat jatuh tempo, dimana harga saham acuan di pasar lebih mahal daripada harga laksana, yaitu $S > X$, maka opsi beli akan sangat menguntungkan jika dilaksanakan sebab pemodal akan meraup keuntungan sebesar $S - X$. Sebaliknya, opsi jual tidak mungkin dilaksanakan sebab lebih menguntungkan untuk menjual saham di pasar dibanding ke penulis opsi, sehingga nilai opsi jual adalah nol. Keadaan ini dapat dilihat sebagai

$$\begin{aligned} B &= S + P - C \\ K &= S + 0 - (S - K) = K. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Pada saat harga saham acuan sekarang di pasar sama dengan harga laksana, yakni $S = K$, opsi beli dan opsi jual keduanya tidak mempunyai pengaruh sedikitpun sehingga tidak menjadi masalah kedua opsi tersebut dilaksanakan atau tidak. Pada keadaan ini, kedua opsi dikatakan bernilai 0, sehingga

$$\begin{aligned} B &= S + P - C \\ K &= K + 0 - 0 = K. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Kemudian, jika harga saham acuan di pasar lebih murah daripada harga laksana, yakni saat $S < K$, maka pemodal tetap bisa menjual sahamnya dengan harga yang lebih mahal daripada harga pasar, yaitu sebesar K, sehingga pemodal akan meraih keuntungan sebesar $K - S$. Dengan demikian, pada saat seperti ini opsi jual akan dilaksanakan dan opsi beli tidak mungkin dilaksanakan sebab pemodal bisa mendapatkan harga yang lebih murah di pasar sehingga nilai opsi beli adalah nol. Keadaan ini dengan sangat jelas tercermin dalam persamaan

$$\begin{aligned} B &= S + P - C \\ K &= S + (K - S) - 0 = K. \end{aligned} \tag{9.43}$$

Dari ketiga keadaan di atas, apapun keadaan yang terjadi saat jatuh tempo, portofolio pemodal selalu mempunyai nilai

K, yakni sama dengan nilai obligasi bebas risiko. Dengan demikian hasil yang diperoleh dari portofolio adalah benar-benar bebas risiko, dan nilainya bisa didiskontokan pada tingkat suku bunga bebas risiko. Disini, obligasi bebas risiko berarti bahwa obligasi akan menghasilkan sebesar nilai nominalnya dalam keadaan apapun, sehingga dengan menggunakan pendiskontoan majemuk berlanjut nilai sekarang obligasi adalah

$$B = Ke^{-r(T-t)} \tag{9.44}$$

Dengan demikian persamaan (9.40) dapat ditulis ulang dengan memasukkan persamaan (9.44) dan akan didapatkan persamaan baru

$$S + P - C = Ke^{-r(T-t)} \tag{9.45}$$

atau

$$P = C - S + Ke^{-r(T-t)}. \tag{9.46}$$

Persamaan terakhir ini dikenal sebagai persamaan keseimbangan opsi jual dan opsi beli (*put-cal parity*). Persamaan ini sangat penting karena begitu harga opsi beli dapat ditentukan maka pada saat itu pula harga opsi jual dapat dihitung. Hubungan ini memperlihatkan bahwa ada hubungan yang lestari antara harga dari opsi jual dan opsi beli dengan syarat memiliki kesamaan dalam surat berharga acuan, tanggal jatuh tempo dan harga laksana.

9.8 Penyelesaian Persamaan Turunan Utama

Adanya hubungan keseimbangan opsi jual dan opsi beli membuat penyelesaian persamaan turunan utama menjadi lebih sederhana, penyelesaian tidak harus meninjau kedua jenis opsi beli dan jual secara serempak, tetapi penyelesaian dapat dilakukan dengan hanya meninjau salah satu jenis opsi saja. Kaitan keseimbangan opsi beli dan jual yang sederhana juga menunjukkan bahwa urutan pemilihan jenis opsi dalam menyelesaikan persamaan turunan utama tidak berpengaruh sama sekali. Di sini akan ditinjau opsi beli. Harga opsi beli $C(S,t)$ merupakan penyelesaian persamaan (9.37) dengan mengganti harga opsi O dengan C sehingga persamaan turunan utama untuk opsi beli adalah

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \tag{9.47}$$

yang mempunyai kondisi batas

$$C(S,T) = \max\left(S(T) - K, 0\right) \text{ ketika } t = T. \tag{9.48}$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, maka harus dicari skala yang cocok sedemikian sehingga persamaan menjadi tak berdimensi kemudian menyederhanakannya dengan permainan (manipulasi) peubah-peubah.

Sesuai dengan pembahasan pada bab sebelumnya tentang faktor-faktor yang mempengaruhi harga opsi, pada waktu jatuh tempo harga opsi bisa dikatakan hanya bergantung pada harga laksana dan harga saham acuan. Jadi, skala untuk harga opsi dapat dipilih salah satu dari keduanya. Namun, struktur persamaan dari karakteristik harga saham menyarankan bahwa $\ln S$ merupakan peubah yang lebih baik daripada S sebab peubah $\ln S$ menghilangkan ketergantungan koefisien pada harga saham acuan. Dengan demikian, skala harga opsi adalah harga laksana K. Sedangkan untuk waktu dapat dipilih salah satu dari $r, \sigma^2,$ atau T. Di sini dipilih kemeruapan, tetapi pilihan ini menyarankan untuk menghapus T dengan meletakkan dan menyusun t dengan arah yang berlawanan, dimulai pada saat jatuh tempo. Transformasi kondisi batas ini mengakibatkan waktu pada saat $t = T$ menjadi kondisi awal. Gagasan-gagasan ini tersaji dalam kaitan berikut:

$$C = Kf\left(x, \tau\right), \qquad S = Ke^x, \qquad t = T - \frac{\tau}{(\sigma^2/2)} \tag{9.49}$$

Oleh karena itu, persamaan (9.47) dan (9.48) bisa ditulis kembali sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\lambda - 1)\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda f, \qquad \lambda = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{9.50}$$

dengan

$$\tau = \ 0 \rightarrow f(x, 0) = \max\left(e^x - 1, 0\right). \tag{9.51}$$

Persamaan ini telah menunjukkan bahwa harga opsi hanya bergantung pada satu parameter tunggal saja, yakni λ. Parameter-parameter yang lain telah diserap dalam transformasi peubah.

Bangun persamaan (9.50) menyerupai dengan bangun persamaan difusi atau rambatan panas. Persamaan tersebut dapat menjadi persamaan difusi jika 2 suku yang memuat λ pada ruas kanan dapat dilenyapkan. Mengingat gejala difusi adalah gejala yang tidak stabil dengan dugaan kemerosotan semacam eksponensial, maka untuk mencapai bangun persamaan yang serupa dengan persamaan difusi dapat dilakukan dengan jalan menyisipkan

$$f(x,\tau) = \exp(ax + b\tau)\; g(x,\tau), \qquad a, b \text{ riil dan sebarang} \tag{9.52}$$

ke dalam persamaan (9.50) dan didapat persamaan baru

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + [2a + (\lambda - 1)]\,\frac{\partial g}{\partial x} + \left[a^2 + (\lambda - 1)\,a - \lambda - b\right] g. \tag{9.53}$$

Struktur persamaan baru ini sangat mudah untuk dijadikan persamaan difusi dengan cara menghitung tetapan a dan b sedemikian hingga suku-suku yang memuatnya (di ruas kanan) menjadi bernilai 0, kemudian juga dilakukan pengubahan kondisi batas dari persamaan. Hasil perhitungan yang sederhana menunjukkan bahwa suku-suku yang memuatnya akan menjadi 0 jika a dan b mempunyai nilai

$$\begin{aligned} a &:= -\tfrac{1}{2}(\lambda - 1) \\ b &:= a^2 + (\lambda - 1)a - \lambda = -\tfrac{1}{4}(\lambda + 1)^2 \end{aligned} \tag{9.54}$$

sehingga koefisien $\frac{\partial g}{\partial x}$ dan g lenyap, dan akhirnya didapatkan persamaan difusi

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \tag{9.55}$$

yang kondisi batasnya ditunjukkan dalam persamaan berikut

$$\tau = 0 \to g(x,0) = \max\left(\exp\left[(\lambda+1)\frac{x}{2}\right] - \exp\left[(\lambda-1)\frac{x}{2}\right], 0\right) \tag{9.56}$$

Persamaan difusi yang juga sering disebut persamaan rambatan panas merupakan persamaan yang sangat sering muncul dan sudah umum dalam sains dan bidang keteknikan (*engineering*). Dengan menggunakan metode standard untuk penyelesaian persamaan rambatan panas atau difusi, penyelesaian persamaan ini adalah

$$g(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, g(y,0) \exp\left(-\frac{1}{4\tau}(x-y)^2\right). \tag{9.57}$$

Integrasi dalam persamaan di atas dapat dipecah dalam 2 rentang batas integrasi, yaitu $-\infty \leq y \leq 0$ dan $0 \leq y \leq +\infty$. Untuk rentang batas pertama, fungsi maksimum mempunyai nilai negatif jika $y < 0$ dan bernilai 0 jika $y = 0$. Karenanya, pada rentang batas ini fungsi maksimum bernilai 0 sehingga dengan sendirinya nilai integrasi juga bernilai 0. Sedangkan untuk rentang batas kedua, nilai fungsi maksimum bernilai positif saat $y > 0$ dan bernilai 0 saat $y = 0$, sehingga nilai fungsi maksimum pada rentang ini adalah tidak nol. Dengan demikian, integrasi dalam persamaan (9.57) hanya menyisakan integrasi dengan rentang batas $0 \leq y \leq +\infty$ dan fungsi $g(y,0)$

bernilai bukan nol, dapat ditulis

$$\begin{aligned} g(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\tau\pi}} \int_0^{+\infty} dy \\ &\quad \left[\exp\left((\lambda+1)\frac{y}{2}\right) - \exp\left((\lambda-1)\frac{y}{2}\right)\right] \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{4\tau}(x-y)^2\right). \end{aligned} \tag{9.58}$$

Langkah yang perlu ditempuh untuk menyelesaikan persamaan di atas hanya memerlukan sedikit kepiawaian dalam permainan peubah-peubah. Dengan menggunakan kaitan sederhana $\xi = \frac{(y-x)^2}{2\tau}$, persamaan akan menjadi

$$\begin{aligned} g(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \sqrt{2\tau} d\xi \left[\exp\left(\frac{1}{2}\left(x+\xi\sqrt{2\tau}\right)(\lambda+1)\right)\right] \\ &\quad \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} d\xi \exp\left[\frac{1}{2}\left(x+\xi\sqrt{2\tau}\right)(\lambda+1) - \frac{\xi^2}{2}\right] \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} d\xi \exp\left[\frac{1}{2}\left(x+\xi\sqrt{2\tau}\right)(\lambda-1) - \frac{\xi^2}{2}\right] \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned} \tag{9.59}$$

Selanjutnya dengan kaitan $\eta_1 = \xi - \frac{(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}{2}$, $\eta_2 = \xi - \frac{(\lambda-1)\sqrt{2\tau}}{2}$ untuk lambang-lambang I_1 dan I_2 secara berurutan akan menghasilkan

$$\begin{aligned} I_1 &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda+1)^2\right] \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}{\eta_1}^2\right) d\eta_1 \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda+1)^2\right] N(d_1) \end{aligned} \tag{9.60}$$

dan

$$\begin{aligned} I_2 &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda-1)^2\right] \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(\lambda-1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}{\eta_2}^2\right) d\eta_2 \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda-1)^2\right] N(d_2) \end{aligned} \tag{9.61}$$

dengan

$$\begin{aligned} d_1 &= \tfrac{x}{\sqrt{2\tau}} + \tfrac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau} \\ d_2 &= \tfrac{x}{\sqrt{2\tau}} + \tfrac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau} \end{aligned} \tag{9.62}$$

dan

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} d\eta\ \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right). \tag{9.63}$$

Fungsi $N(d)$ adalah peluang bahwa peubah η yang mengambil nilai lebih kecil dari d teragih secara normal. Ini merupakan agihan peluang kumulatif untuk agihan Gaussan.

Dengan diketahuinya nilai I_1 dan I_2, maka persamaan

$g(x,\tau) = I_1 - I_2$ dapat dihitung yaitu

$$\begin{aligned} g(x,\tau) &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda+1)^2\right] N(d_1) \\ &\quad - \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda-1)^2\right] N(d_2). \end{aligned} \tag{9.64}$$

Pada akhirnya, persamaan harga opsi beli C dapat dihitung dengan menggunakan kaitan-kaitan dalam persamaan (9.49), (9.52) dan (9.54) serta $\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$ untuk mengembalikan peubah-peubah asal ke dalam bangun persamaan. Perhitungan ini menunjukkan bahwa harga untuk opsi beli C yaitu

$$\begin{aligned} C &= K\exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau\right] g(x,\tau) \\ &= K\exp[x]N(d_1) - K\exp[-\tau\lambda]N(d_2) \end{aligned} \tag{9.65}$$

Dengan demikian, harga opsi beli $C(S,t)$ adalah

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{9.66}$$

dengan

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{9.67}$$