BAB III
PERMUTASI DAN KOMBINASI

Mungkin masih ada mahasiswa yang kesulitan membedakan permutasi dengan kombinasi. *Which one is which*? Analogi di bawah ini mungkin dapat membantu: misalkan terdapat tiga orang mahasiswa, misalkan Alim, Berndina, dan Charlie terdaftar sebagai anggota dari suatu kelompok diskusi. Urutan nama tadi menunjukkan Ketua, Wakil dan Anggota. Tentu saja daftar nama tersebut berbeda jika urutan nama diubah menjadi Charlie, Berndina dan Alim. Suatu daftar anggota dengan urutan berbeda yang memiliki arti berbeda seperti itu merupakan **permutasi.** Demikian juga jika akan dibentuk suatu susunan bilangan yang terdiri atas angka-angka $1, 2, 3, 4$. Untuk membentuk bilangan yang dimaksud, maka angka-angka tersebut harus disusun. Bilangan-bilangan berbeda yang akan terbentuk tergantung pada urutan angka-angka digunakan. Ini merupakan contoh *permutasi.*

Sebaliknya, **kombinasi** terdengar lebih sederhana. Misalkan daftar nama Alim, Berndina dan Charlie adalah tiga anggota paduan suara. Sudah jelas juga bahwa daftar dan urutan nama tersebut sama saja jika dibalik menjadi Charlie, Berndina dan Alim. Hal yang sama berlaku jika akan dibentuk satu tim sepakbola dari 20 orang. Pembentukan tim ini merupakan contoh *kombinasi*, karena urutan pemain yang dipilih dalam tim tidak akan mengubah susunan tim sepakbola tadi. Bagaimanapun urutan pemain didaftarkan, anggota tim sepakbola tetap sama.*Dalam permutasi urutan diperhatikan karena jika urutan berubah maka maknanya juga berubah. Sedangkan pada kombinasi urutan tidak diperhatikan. Perubahan urutan daftar nama anggota paduan suara tidak mengakibatkan perubahan makna*. Kode kombinasi untuk membuka brankas seharusnya dinamakan kode permutasi, karena angka-angka yang digunakan harus diperhatikan urutannya.

A. Permutasi

Permutasi: Permutasi adalah susunan dari objek-objek, dimana urutan objek-objek tersebut diperhitungkan. Banyaknya permutasi dari *n* objek berbeda yang diambil sejumlah *r* setiap kali pengambilan, dinyatakan dengan

$$P(n,r) = {}^{n}P_{r} = {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (3.10)$$

Bukti. Misalkan terdapat *n* objek berbeda yaitu $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$. Jelas bahwa posisi tempat pertama dapat diisi dengan *n* cara. Banyaknya objek yang sisa setelah posisi tempat pertama diisi ada sebanyak $(n-1)$. Jadi posisi kedua dapat diisi dengan $(n-1)$ cara. Demikian seterusnya, posisi ketiga dapat diisi dengan $(n-2)$ cara karena objek yang tersisa setelah posisi pertama dan kedua adalah $(n-2)$.

Jadi,

banyaknya cara mengisi tempat pertama adalah *n*.

banyaknya cara mengisi tempat kedua adalah $(n-1)$

banyaknya cara mengisi tempat ketiga adalah $(n-2)$

banyaknya cara mengisi tempat ke-*r* adalah $n-(r-1)=n-r+1$

Berdasarkan aturan perkalian, jumlah semua cara mengisi tempat pertama, kedua, ketiga, sampai dengan ke-*r* secara bersamaan adalah $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
P(n,r) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\
&= [n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)]\frac{[(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]}{[(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]} \\
&= \frac{[n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]}{[(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1]} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}$$

Banyaknya permutasi *n* objek berbeda yang diambil sekaligus pada setiap kali pengambilan adalah $P(n,n)=n!$

Bukti:

Akan diletakkan *n* objek ke dalam *n* posisi.

Banyaknya cara mengisi posisi pertama ada *n* cara.

Banyaknya cara mengisi posisi kedua ada $(n-1)$ cara.

Banyaknya cara mengisi posisi ketiga ada $(n-2)$ cara.

Banyaknya cara mengisi posisi ke-*r* yaitu posisi terakhir, ada 1 cara.

Banyaknya keseluruhan cara mengisi tempat pertama, kedua, ketiga, sampai ke-*n,* adalah $n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1 = P(n,n) = n!$ cara.

Konsep: Diketahui bahwa

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jika $r = n,$ maka $P(n,n) = n!$

Jadi $P(n,r) = \dfrac{P(n,n)}{(n-r)!} \Rightarrow (n-r)! = \dfrac{P(n,r)}{P(n,n)}$

Karena $r = n,$ maka $(n-n)! = 0! = \dfrac{P(n,n)}{P(n,n)} = 1$

Catatan: Faktorial bilangan negatif tidak didefinisikan. Pernyataan -3! Tidak memiliki makna.

Partisi dari suatu himpunan adalah kumpulan subset-subset $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$ dari himpunan *S* sedemikian sehingga masing-masing elemen yang ada di dalam himpunan *S* merupakan salah satu subsetnya.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m, \tag{3.11}$$

$$S_i \cap S_j = \varnothing,\ (i \neq j).$$

Subset-subset $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$ disebut bagian dari partisi. Menurut definisi, bagian dari suatu partisi dapat berbentuk himpunan kosong, tetapi tidak ada pentingnya jika suatu pertisi memiliki satu atau beberapa bagian yang merupakan himpunan kosong. Banyaknya objek (anggota) himpunan *S* dilambangkan dengan |*S*| atau $n(S)$ dan sering disebut juga ukuran *S*.

A.1. Prinsip Penjumlahan

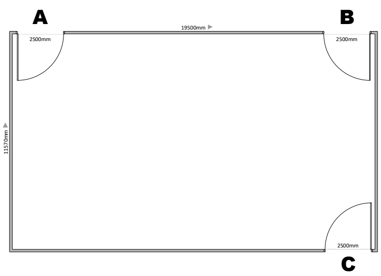
Misalkan suatu himpunan *S* dipartisi menjadi $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$. Banyaknya objek dalam himpunan *S* dapat diketahui dengan cara menghitung banyaknya objek di dalam masing-masing bagian himpunan kemudian menjumlahkannya secara keseluruhan, sehingga diperoleh:

$$|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_m|. \tag{3.12}$$

Jika ada anggota dari himpunan-himpunan $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_m$ yang merupakan anggota himpunan irisan, maka banyaknya anggota himpunan *S* dapat diketahui dengan menggunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi.

Prinsip penjumlahan dapat dinyatakan secara ringkas bahwa jika suatu percobaan dapat dilakukan dengan *n* cara, dan percobaan lainnya dilakukan dengan *m* cara, maka kedua percobaan tersebut dapat dilakukan dengan $m + n$ cara. Aturan ini dapat diperluas sampai sebarang jumlah percobaan yang berhingga.

Contoh 3.1. Misalkan terdapat 3 pintu di dalam suatu ruangan, 2 pintu terpasang pada salah satu sisi yang sama dan satu pintu pada sisi lainnya. Jika seseorang akan keluar dari ruangan tersebut, tentu saja ada 3 pilihan untuk melakukannya. Orang tersebut dapat keluar ruangan melalui pintu A, B atau C.



Contoh 3.2. Seorang mahasiswa ingin mengetahui banyaknya matakuliah yang dijalankan di dalam lingkungan universitas selama satu semester. Untuk itu, mahasiswa mempartisi daftar semua matakuliah yang dijalankan berdasarkan mata kuliah masing-masing program studi. Dengan asumsi tidak ada mata kuliah yang sama pada dua program studi yang berbeda, maka banyaknya mata kuliah yang dijalankan di universitas dalam semester tersebut adalah jumlah mata kuliah yang dijalankan pada masing-masing program studi.

Contoh 3.3. Seorang mahasiswa akan memprogramkan matakuliah Matematika Diskrit atau matakuliah Teori Bilangan, tetapi tidak kedua-duanya. Jika kuliah Matematika Diskrit ada 4 kelas dan Teori Himpunan ada 3 kelas, maka mahasiswa tersebut dapat memilih kelas dari kedua matakuliah dengan 4+3=7 cara.

A.2. Prinsip Perkalian

Misalkan *S* adalah himpunan pasangan berurutan objek-objek (a, b) dimana objek *a* berasal dari himpunan yang berukuran *p* (banyaknya anggota himpunan = *p*) dan untuk setiap pilihan objek *a* ada *q* cara memilih objek *b*. Dengan demikian ukuran dari *S* adalah $p x q$, dan dinyatakan dengan $|S| = p \text{ x } q$.

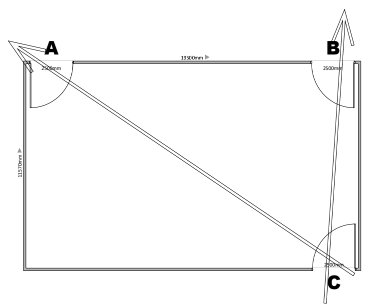
Prinsip perkalian pada dasarnya adalah konsekuensi dari prinsip penjumlahan. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p$ adalah *p* cara memilih objek *a*. Kemudian himpunan *S* dipartisi menjadi $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_p$ dengan S_i adalah himpunan pasangan berurutan di *S* yang objek pertamanya adalah $a_i, (i = 1, 2, 3, \cdots, p)$. Ukuran masing-masing S_i adalah *q*, oleh karena itu menurut prinsip penjumlahan,

$$\begin{aligned} |S| &= |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_p| \\ &= q + q + q + \cdots + q \text{ (q sebanyak p)} \\ &= p \text{ x } q. \end{aligned}$$

Formulasi kedua dari prinsip perkalian adalah sebagai berikut: *Jika suatu peristiwa pertama terjadi sebanyak p dengan cara bagaimanapun, dan peristiwa kedua dapat terjadi sebanyak q, maka kedua peristiwa tersebut dapat terjadi sebanyak p* x *q.*

Ringkasnya, prinsip perkalian menyatakan bahwa jika suatu pekerjaan dapat diselesaikan dalam *m* cara dan pekerjaan lainnya dapat diselesaikan dalam *n* cara, maka kedua pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dengan *m* x *n* cara. Aturan ini juga dapat diperluas untuk sebarang jumlah pekerjaan yang berhingga.

Contoh 3.4. Jika seseorang ingin melintasi ruangan yang memiliki 2 pintu pada satu sisi dan 1 pintu pada sisi lainnya, maka ada 2 x 1 cara untuk melakukannya.



Faktorial *n*:

Hasilkali dari *n* bilangan asli pertama dilambangkan dengan *n*!

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$$

Contoh 3.5. Buktikan bahwa 0! = 1

Bukti. $n! = n(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = \dfrac{n!}{n}$. Untuk *n* = 1, diperoleh $(1-1)! = \dfrac{1!}{1} = 1$

Contoh 3.6. Seorang mahasiswa akan memprogramkan dua matakuliah. Matakuliah pertama dilaksanakan 3 kelas pada pagi hari, dan mata kuliah kedua dilaksanakan 4 kelas sore hari. Banyaknya jadwal yang dapat diikuti mahasiswa tersebut ada sebanyak $3 \text{ x } 4 = 12$.

Permutasi adalah banyaknya cara untuk menyusun *k* elemen dari *n* elemen $(k \leq n)$ dengan ***urutan diperhatikan*.**

$$P(n,k) = P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3.13}$$

$$P(n,n) = P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \quad \text{dengan } 0! = 1.$$

Permutasi $P(n,n)$ sering disebut permutasi *n* objek karena permutasi tersebut sekaligus meliputi keseluruhan objek yang ada.

Contoh 3.8. Tulislah semua permutasi 3 objek $\{a,b,c\}$.

Jawab. Permutasi yang mungkin dari 3 objek $\{a,b,c\}$ ada 3! = 6 kemungkinan yaitu: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cba*, *cab*.

Contoh 3.9. Suatu undian dilakukan dengan menggunakan angka yang terdiri dari 7 digit. Jika digit-digit dalam suatu angka harus berbeda satu dengan yang lain, ada beberapa kemungkinan nomor undian?

Jawab. Dalam undian tersebut, jelas urutan kemunculan angka-angka diperhatikan. Undian dengan nomor 1234567 akan berbeda dengan nomor 7654321. Karena digit-digitnya diharuskan selalu berbeda, maka banyaknya kemungkinan nomor undian adalah $P(10,7) = \frac{10!}{3!} =$ 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 604800 macam kemungkinan.

A.3. Urutan Lexicografic

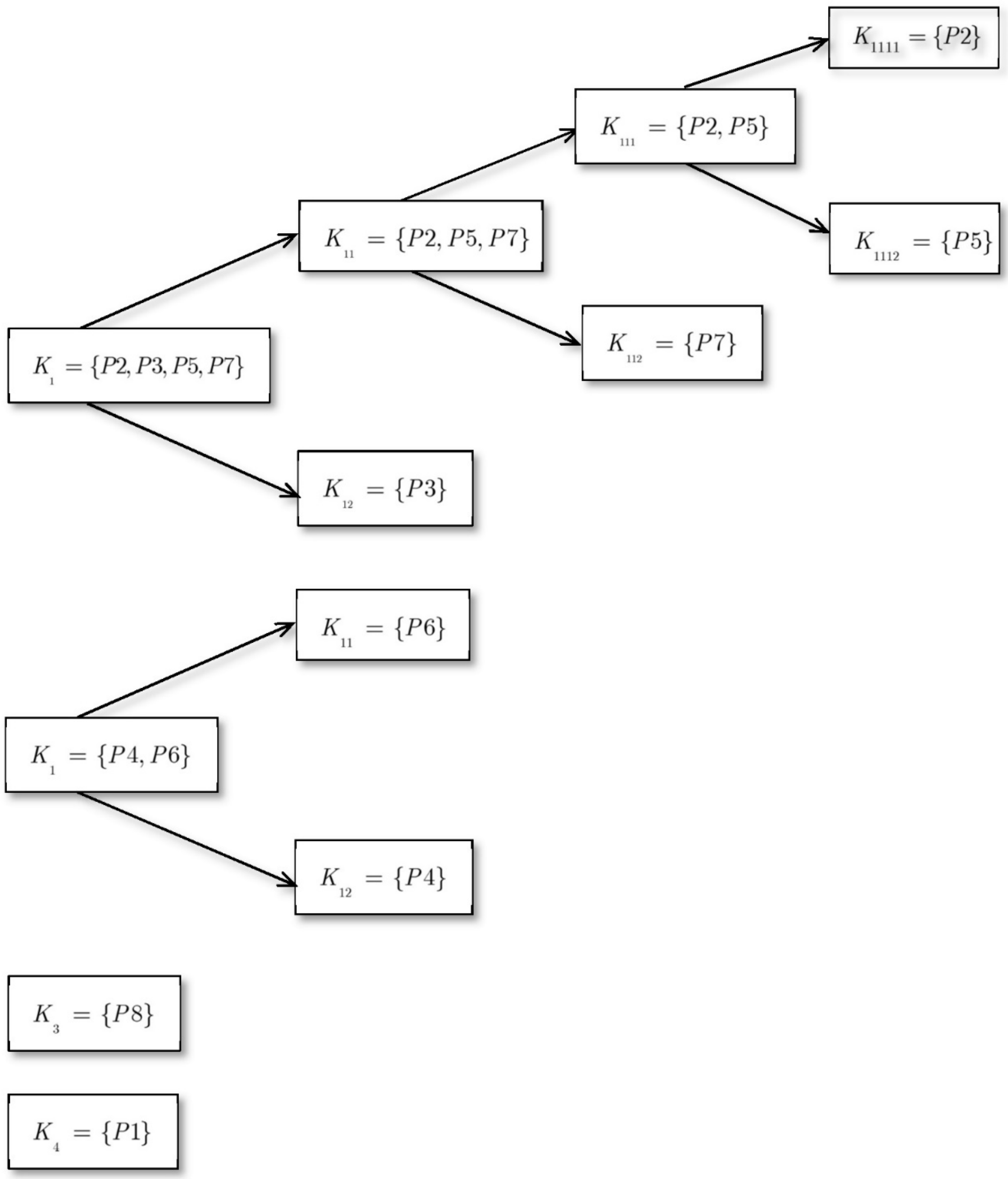
Misalkan: $P_a = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ dan $P_b = b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ adalah permutasi atas *n* elemen, P_a dikatakan mendahului P_b pada urutan (LO) jika terdapat *k* ($1 < k < n$) sedemikian sehingga $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ dan $a_k < b_k$.

Contoh 3.10. Diketahui 8 buah permutasi atas 6 elemen :

P1 = 542361	P2 = 213465	P3 = 234651	P4 = 356214
P5 = 213645	P6 = 315624	P7 = 214635	P8 = 421365

Tentukan urutan dari 8 permutasi tersebut dalam urutan *lexicografic*!

Jawab.



Jadi urutan lexicografic $= P2 \rightarrow P5 \rightarrow P7 \rightarrow P3 \rightarrow P6 \rightarrow P4 \rightarrow P8 \rightarrow P1$

Jika diketahui permutasi atas *n* elemen yaitu $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ maka permutasi berikutnya dalam urutan lexico grafic adalah $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ akan memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $a_i = b_i, \quad 1 < i < (k-1)$ dengan mengambil *k* sebesar mungkin.

2. b_k = minimum dari $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_n$ yang lebih besar dari a_k.

3. $b_{k+1} < b_{k+2} < \cdots < b_n$

Contoh 3.11. Tentukan urutan semua permutasi atas 4 elemen $(1,2,3,4)$

Jawab.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3241	3214	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

A.4. Permutasi Dengan Elemen Yang Sama

Secara umum, jika suatu himpunan terdiri dari *n* objek yang tersusun dari:

n_1 buah objek sama jenis-1

n_2 buah objek sama jenis-2

------

n_k buah objek sama jenis-k.

dengan $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

Maka banyaknya permutasi berbeda yang mungkin dari n objek tersebut adalah:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\cdots\cdots\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_k-1}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Contoh 3.12. Ada berapa banyak cara yang mungkin dari kata MATEMATIKA ?

Jawab. Kata MATEMATIKA terdiri dari 10 karakter huruf, yang tersusun dari :

2 buah huruf M

3 buah huruf A

2 buah huruf T

1 buah huruf E

1 buah huruf I

1 buah huruf K

Sehingga banyaknya kemungkinan untuk membuat permutasi adalah :

$$\frac{10!}{2!\ 3!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.1.2.1.1.1} = \frac{604800}{4} = 151200$$

banyaknya cara menyusun elemen-elemen tersebut. Beberapa contoh yang sama ditunjukkan berikut ini.

1). Ada berapa cara 4 orang mahasiswa (w, x, y, z) menempati kursi yang disusun dalam satu baris?

Jawab.
4P4 = 4!
= 4 x 3 × 2 × 1
= 24 cara

2). Pengurus Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) akan dipilih dua orang untuk menjabat sebagai ketua dan wakil ketua. Calon yang ditetapkan memenuhi syarat ada 6 orang. Berapa pasang calon yang dapat terpilih untuk menjabat ketua dan wakil ketua?

Jawab.
6P2 = 6!/(6-2)!
= (6.5.4.3.2.1)/(4.3.2.1)
= 720/24
= 30 cara

3). Sekelompok mahasiswa yang terdiri dari 10 orang akan mengadakan rapat dan duduk mengelilingi sebuah meja. Ada berapa carakah kelima mahasiswa tersebut dapat diatur pada sekeliling meja tersebut?

Jawab.
P5 = (10-1)!
= 9.8.7.6.5.4.3.2.1
= 362880 cara

4). Berapa banyak susunan huruf yang terbentuk dari kata “SIANG”?
Jawab.
5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 buah kata

5). Peluang lulusan FKIP dapat bekerja pada suatu sekolah adalah 0,75. Jika seorang lulusan FKIP mendaftarkan pada 24 sekolah, maka berapakah dia dapat diterima oleh sekolah?

Jawab.

Frekuensi harapan kejadian A adalah $Fh(A) = n \times P(A)$

Diketahui $P(A) = 0,75$ dan $n = 24$. Maka:

$Fh(A) = 24 \times 0,75 = 18$ sekolah.

6). Terdapat tiga orang (X, Y dan Z) yang akan duduk bersama di sebuah bangku. Ada berapa urutan yang dapat terjadi ?

Jawab.

nPx = n!

3P3 = 3!

= 1 x 2 x 3

= 6 cara (XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX).

7). Suatu kelompok belajar yang beranggotakan empat orang (A, B, C dan D) akan memilih ketua dan wakil ketua kelompok. Ada berapa alternatif susunan ketua dan wakil ketua dapat dipilih ?

Jawab.

nPx = (n!)/(n-x)!

4P2 = (4!)/(4-2)!

= 12 cara (AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC) .

8). Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika 8 orang disediakan 4 kursi, sedangkan salah seorang dari padanya selalu duduk dikursi tertentu.

Jawab.

Jika salah seorang selalu duduk dikursi tertentu maka tinggal 7 orang dengan 3 kursi kosong. Maka banyaknya cara duduk ada 7P3 = 7!/(7-3)! = 210 cara.

9). Tentukan banyaknya permutasi siklus dari 3 objek yaitu A, B, C.

Jawab.

Jika A sebagai urutan I : ABC

Jika B sebagai urutan I : BCA

Jika C sebagai urutan III : CAB

Jika banyak unsur $n = 4$: A, B, C, D

Jadi banyaknya permutasi siklis 4 unsur (A B C D) ada 4!/4 = 4.3.2.1/4 = 6

B. Permutasi Keliling

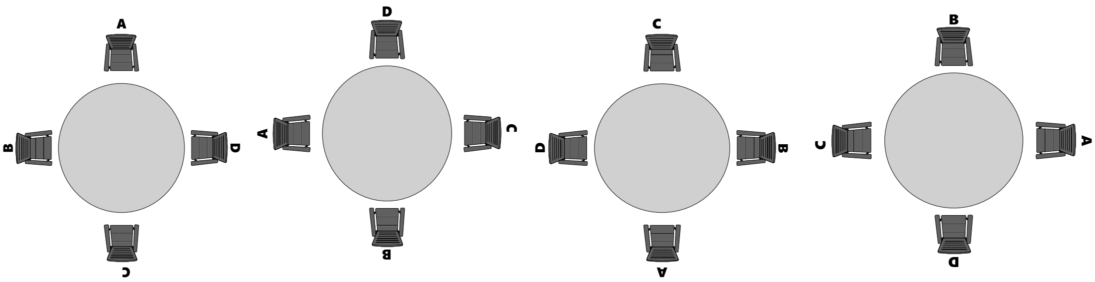
Ada dua bentuk permutasi keliling yaitu:

(a) Jika putaran keliling yang searah jarum jam dibedakan dengan putaran keliling yang berlawanan arah jarum jam, maka banyaknya permutasi ada $(n-1)!$

(b) Jika putaran keliling yang searah jarum jam tidak dibedakan dengan putaran keliling yang berlawanan arah jarum jam, maka banyaknya permutasi ada $\frac{(n-1)!}{2!}$

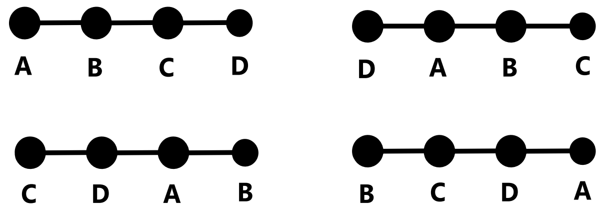
Bukti:

(a) Misalkan 4 orang (A, B, C, dan D) duduk mengelilingi satu meja. Jika masing-masing orang bergeser satu kali berlawanan arah jarum jam, maka akan terbentuk susunan sebagai berikut:



Gambar 3.1. Permutasi keliling

Jadi jika empat orang duduk mengelilingi meja dan akan bergeser masing-masing satu kali berlawanan arah jarum jam, maka keempat orang tersebut dapat bergeser sebanyak empat kali. Tetapi susuan yang keempat tidak dihitung lagi, karena masing-masing orang sudah kembali duduk di tempatnya. Berbeda masalahnya jika A, B, C, D, duduk dan bergeser ke kiri atau ke kanan pada suatu bangku panjang akan ada empat jenis susunan posisi duduk yang berbeda.



Gambar 3.2. Posisi duduk empat orang

Jika ada 4 objek maka banyaknya susunan linier yang dapat dibentuk dari masing-masing susunan melingkar adalah 4. Demikian juga, jika terdapat *n* objek, maka untuk masing-masing susunan melingkar, dapat dibentuk *n* susunan linier. Jika terdapat *p* susunan melingkar maka total susunan linier yang dapat dibentuk adalah *n.p.* Jika jumlah total susunan-linier = *n* atau banyaknya susunan-melingkar = 1 maka $n = 1(n!)/n$ permutasi keliling = $(n-1)!$

(b) Jika arah bergesernya masing-masing orang searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam tidak dibedakan, maka permutasi kedua cara geser tersebut dianggap sama. Dalam kasus ini, dua permutasi akan dianggap satu. Jadi total permutasi yang ada akan dibagi dua, yaitu $(n-1)!/2$.

Banyaknya permutasi keliling dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan dapat dijelaskan sebagai berikut:

(a) Jika putaran yang searah jarum jam dibedakan dengan putaran yang berlawanan arah jarum jam, maka total permutasi keliling yang terjadi adalah $P(n,r)/r$.

(b) Jika putaran yang searah jarum jam dianggap sama dengan putaran yang berlawanan arah jarum jam, maka total permutasi keliling yang terjadi adalah $P(n,r)/2r$.

Contoh 3.13. Ada berapa banyak kalung yang terdiri atas 12 manik-manik jika terdapat 18 manik-manik yang berbeda-beda warnanya?

Jawab. Manik-manik yang disusun searah jarum jam sama dengan susunan yang berlawanan arah jarum jam. Dengan demikian, total jumlah permutasi keliling yang dapat dibentuk ada sebanyak $\frac{P(18,12)}{2 \text{ x } 12} = \frac{18!}{6! \text{ x } 24}$

C. Permutasi Berhingga

(a) Banyaknya permutasi dari *n* objek yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan, jika objek tertentu selalu muncul dalam setiap susunan adalah $r \text{ x } P(n-1, r-1)$

(b) Banyaknya permutasi dari *n* objek yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan, jika objek tertentu ditetapkan: $P(n-1, r-1)$

(c) Banyaknya permutasi dari n objek yang diambil sebanyak r setiap kali pengambilan, jika objek tertentu tidak pernah diambil: $P(n-1, r)$

(d) Banyaknya permutasi dari n objek yang diambil sebanyak r setiap kali pengambilan, jika m objek tertentu selalu muncul bersamaan = $m! \text{ x } (n-r+1)!$

(e) Banyaknya permutasi dari n objek yang diambil semua setiap kali pengambilan, jika m objek tertentu selalu muncul bersamaan: $n! - [m! \text{ x } (n-r+1)!]$

Contoh 3.14.

1) Ada berapa banyak kata dapat dibentuk dari kata OMEGA jika:
   (a) ‘O’ dan ‘A’ secara bersama-sema selalu berada di akhir kata.
   (b) ‘E’ selalu berada di tengah-tengah kata
   (c) Huruf-huruf vokal selalu terletak pada posisi urutan ganjil
   (d) Huruf-huruf vokal tidak pernah berdampingan

Jawab.

(a) Jika huruf-huruf O dan A selalu berada di akhir kata: M-E-G-(OA)
Letak (OA) selalu tetap, di akhir kata. Dengan demikian M-E-G dapat disusun dalam 3! Cara. Tetapi (OA) sendiri dapat disusun dalam 2! cara. Oleh karena itu, total susunan kata yang dapat dibentuk ada sebanyak $3! \text{ x } 2! = 12$ cara.

(b) Jika ‘E’ tetap berada di posisi tengah: O-M-(E)-G-A, maka empat huruf lainnya, yaitu O-M-G-A dapat disusun dalam 4! yaitu sebanyak 24 cara.

(c) Huruf-huruf vokal yang masing-masing selalu terletak pada posisi urutan ganjil (pertama, ketiga, kelima) dapat disusun dalam 3! = 6 cara, dan dua konsonan (M-G) yang terletak pada posisi urutan genap (kedua, keempat) dapat disusun dalam 2! cara. Jadi secara keseluruhan, cara menyusun huruf vokal yang masing-masing terletak pada posisi urutan ganjil dan huruf-huruf konsonan selalu pada posisi urutan genap adalah 3! x 2! = 12 cara.

(d) Jika huruf-huruf vokal tidak pernah terletak berdampingan, maka banyaknya kata yang dapat dibentuk ada 5! = 120 cara. Jika semua huruf vokal terletak berdampingan, (O-E-A)-M-G dapat disusun dalam 3! cara. Huruf-huruf (O-E-A) sendiri dapat disusun dalam 3! = 6 cara. Jika huruf-huruf vokal terletak berdekatan, maka banyaknya susunan ada 3! x 3! = 36 cara. Banyaknya cara menyusun huruf-huruf sedemikian sehingga semua huruf vokal tidak pernah berdekatan, ada sebanyak 120 – 36 = 84 cara.

2) Ada berapa cara 4 orang mahasiswa (w, x, y, z) menempati kursi yang disusun dalam suatu susunan yang teratur?

   Jawab. $P(4,4) = 4! = 24$ cara

3) Pergantian kepengurusan BEM akan membentuk panitia inti sebanyak 2 orang yaitu Ketua dan Wakil Ketua. Panitia terdiri atas 6 orang yaitu *a, b, c, d, e*, dan *f*. Berapa pasang calon yang dapat duduk sebagai panitia inti tersebut?

   Jawab. $P(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \text{ x } 5 = 30$ cara

4) Sepuluh orang mahasiswa akan mengadakan rapat dan duduk mengelilingi sebuah meja. Ada berapa carakah 10 orang mahasiswa dapat diatur mengelilingi meja tersebut?

   Jawab.

   $P_5 = (10-1)! = 9! = 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880$ cara

5) Berapa banyak kata berbeda yang terbentuk dari kata “RADIO”?

   Jawab. $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ kata

6) Peluang seorang lulusan suatu universitas diterima bekerja pada suatu perusahaan adalah 0,75. Jika lulusan tersebut mendaftar pada 24 perusahaan, berapa perusahaan yang mungkin menerima lulusan tersebut?

Jawab.

Frekuensi harapan kejadian A adalah $F_E(A) = n \text{ x } P(A)$

Diketahui $P(A)$ = 0,75 dan n = 24. Maka:

$F_E(A) = 24 \text{ x } 0,75$ = 18 perusahaan.

7) Terdapat tiga orang (X, Y dan Z) duduk bersama di sebuah bangku taman. Ada berapa urutan tempat duduk yang dapat dibentuk?

Jawab.

$$\left.\begin{array}{l} P(n,n) = n! \\ P(3,3) = 3! = 6 \end{array}\right\} \text{XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX}$$

8) Suatu kelompok belajar yang beranggotakan empat orang (A, B, C dan D) akan memilih ketua dan wakil ketua kelompok. Ada berapa alternatif susunan ketua dan wakil ketua dapat dipilih?

Jawab.

$$P(n,x) = \frac{n!}{(n-x)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ cara}$$

9) Berapa banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika disiapkan 4 kursi untuk 8 orang, sedangkan salah seorang di antaranya selalu duduk di kursi yang sama.

Jawab. Jika salah seorang selalu duduk di kursi yang sama maka tersisa 7 orang dengan 3 kursi kosong. Banyaknya cara duduk ada:

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = 210 \text{ cara.}$$

10) Lima orang duduk mengitari suatu meja. Ada berapa cara kelima orang tersebut duduk dengan urutan yang berlainan?

Jawab.

Banyaknya cara duduk ada $(5-1)! = 4! = 24$ cara.

11) Tentukan banyaknya permutasi siklis dari 3 unsur yaitu A, B, C

Jawab.

Jika A sebagai urutan I : ABC

Jika B sebagai urutan I : BCA

Jika C sebagai urutan I : CAB

Jika banyak unsur ada 4, yaitu A, B, C, D maka banyaknya permutasi siklis dari 4 unsur adalah $\frac{4!}{4} = 6$

12) Ada berapa cara membuat 5 bendera yang tersusun atas 8 warna?

Jawab. Cara membuat 5 bendera yang tersusun atas 8 warna adalah

$$P(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = 6720$$

Banyaknya permutasi dari *n* objek, yang terdiri atas tipe-tipe *p, q,* dan *r,* yang diambil sekaligus adalah $\frac{n!}{p!q!r!}$

Contoh 3.15. Ada berapa cara menyusun huruf-huruf PASCA-SARJANA?

Jawab. $\frac{12!}{2!2!2!2!2!}$

Banyaknya permutasi *n* objek yang diambil sebanyak *r* setiap pengambilan dimana setiap objek dapat berulang *r* kali, adalah n^r.

Bukti:

Banyaknya cara mengisi tempat pertama adalah *n.* Karena objek dapat berulang maka banyaknya cara mengisi tempat kedua juga sebanyak *n.* Banyaknya cara mengisi tempat ketiga, keempat, sampai dengan ke-*r* adalah *n.* Dengan demikian keseluruhan cara mengisi tempat pertama, sampai ke-*r* ada sebanyak n^r.

Contoh 3.16: Seorang anak memiliki 3 kantong dan 4 koin. Ada berapa cara menempatkan keempat koin ke dalam kantong?

Jawab. Koin pertama dapat dimasukkan ke dalam kantong dengan 3 cara (karena ada 3 kantong yang tersedia). Demikian juga, koin kedua, ketiga dan keempat, masing-masing dapat dimasukkan ke dalam kantong dengan 3 cara. Karena itu banyaknya cara memasukkan koin tersebut ke dalam kantong ada sebanyak $3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 = 3^4$ cara.

Kombinasi: Kombinasi adalah seleksi dari objek-objek, dimana urutan objek-objek tidak diperhitungkan.

C.1. Permutasi Himpunan

Misalkan *r* adalah suatu bilangan bulat positif maka *r-permutasi* dari himpunan *S* yang terdiri atas *n* elemen dapat dibentuk suatu susunan berurutan *r* dari *n* elemen himpunan tersebut. Andaikan $S = \{a, b, c\}$ maka tiga 1-permutasi dari *S* adalah

$$a \qquad b \qquad c,$$

enam 2-permutasi dari *S* adalah

$$ab \qquad ac \qquad ba \qquad bc \qquad ca \qquad cb,$$

dan enam 2-permutasi dari *S* adalah

$$abc \qquad acb \qquad bac \qquad bca \qquad cab \qquad cba.$$

Tidak ada 4-permutasi dalam kasus ini karena anggota himpunan *S* kurang dari 4.

Kita menuliskan $P(n, r)$ untuk menyatakan banyaknya *r*-permutasi dari suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Jika *r* > *n* maka $P(n, r)$ = 0. Jelas bahwa $P(n, 1) = n$ untuk setiap bilangan bulat positif *n*. Suatu *n*-permutasi dari himpunan *S* yang terdiri atas *n* elemen dinamakan permutasi *S* dari himpunan *S* atau permutasi *n* elemen. Jadi permutasi dari suatu himpunan *S* dapat dianggap sebagai susunan elemen-elemen himpunan *S* dengan urutan tertentu sebagaimana telah ditunjukkan bahwa $P(3,1) = 3, P(3,2) = 6,$ dan $P(3,3) = 6.$

Teorema 3.1. Untuk *n* dan *r* bilangan bulat positif dengan $r \leq n$,

$$P(n, r) = n \text{ x } (n-1) \text{ x} \cdots \text{x } (n-r+1).$$

Bukti. Untuk menyusun suatu *r*-permutasi dari himpunan yang memiliki *n* elemen, kita dapat memilih elemen pertama dengan *n* cara, elemen kedua dengan (*n* – 1) cara, untuk sebarang elemen yang dipilih sebagai elemen pertama), ... , dan memilih elemen ke-*r* dengan *n* – (*r* – 1) cara, untuk sebarang elemen yang dipilih dalam setiap elemen ke-(*r* – 1). Berdasarkan prinsip perkalian, ke-*r* elemen tersebut dapat dipilih dengan $n \text{ x} (n-1) \text{ x} (n-2) \text{ x} \cdots \text{ x} (n-r+1)$ cara.

Untuk suatu bilangan bulat non-negatif *n, n*! (*n* faktorial) didefinisikan sebagai berikut:

$$n! = n \text{ x} (n-1) \text{ x} \cdots \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1,$$

dengan 0! = 1. Dengan demikian,

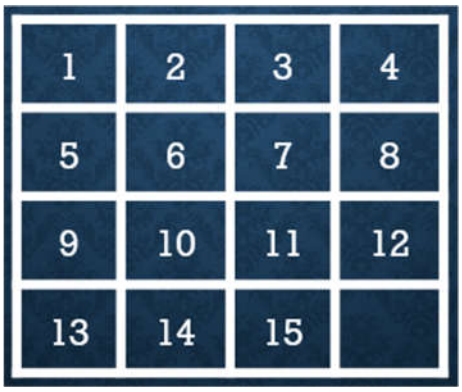
$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Untuk $n \geq 0$, kita mendefinisikan $P(n,0) = 1$ dan ini memenuhi rumus di atas jika dipilih *r* = 0. Banyaknya permutasi *n* elemen adalah

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Contoh 3.17. Banyaknya kata yang terdiri atas 4 huruf yang dapat dibentuk dari semua huruf *a, b, c, d, e* dengan setiap hurufnya hanya digunakan satu kali adalah $P(5,4) = 5!/(5-4)! = 120$. Banyaknya kata yang dapat disusun atas ke-5 huruf tersebut adalah $P(5,5) = 5!/(5-5)!$ juga ada 120.

Contoh 3.18. Mainan “15 puzzle” yang terdiri atas 15 kotak persegi ditandai dengan angka 1 sampai dengan 15 pada masing-masing kotak. Ke-15 kotak dipasang pada bingkai persegi 4 x 4 seperti digambarkan di bawah ini.



Gambar 3.3. Puzzle 4x4

Tantangan permainan ini adalah bagaimana memindahkan setiap kotak dari posisi awal ke posisi tertentu agar terbentuk susunan gambar atau angka yang diinginkan. Berdasarkan jumlah kotak yang tersedia pada bingkainya, kita akan menempatkan 15 kotak kecil secara terurut di dalam bingkainya dengan satu kotak kosong. Ada berapa posisi yang mungkin dapat dibentuk di dalam bingkai tersebut? Masalah ini menunjukkan banyaknya cara menyusun bilangan-bilangan 1, 2, 3, . . ., 15 ke dalam 16 kotak persegi berukuran 4 x 4, dengan 1 kotak dibiarkan kosong. Karena kita dapat menempatkan kotak kosong dengan 16 cara, maka masalah ini menunjukkan banyaknya cara menempatkan angka 1, 2, 3, . . . , 16 ke dalam 16 kotak bingkainya, yaitu $\mathrm{P}(16,16)=16!$ cara.

Dengan contoh yang sama dapat ditentukan ada berapa cara menyusun angka 1, 2, 3, . . ., 15 ke dalam suatu bingkai berukuran 6 x 6, dengan 21 kotak kosong. Banyaknya cara menyusun 15 kotak ke dalam bingkai tersebut di atas dapat ditentukan sebagai permutasi 15 dari 36, yaitu $\mathrm{P}(36,15)=36!/(36-15)!=36!/21!$

Contoh 3.19. Ada berapa banyak cara menyusun 26 huruf abjad sedemikian sehingga tidak ada huruf vokal yang terletak berdampingan?

Jawab. Menyusun 26 huruf abjad sedemikian sehingga tidak ada huruf vokal yang terletak berdampingan menyusun 26 huruf abjad sedemikian sehingga tidak ada huruf vokal yang terletak berdampingan (juga masalah-masalah pencacahan lainnya) dapat langsung diketahui jika kita telah terbiasa dan dapat memastikan bagaimana menyelesaikannya. Ada dua tugas yang akan diselesaikan. Pertama, memutuskan bagaimana mengurutkan konsonan. Terdapat 21 konsonan, maka ada 21! cara menempatkan konsonan tersebut. Karena tidak ada huruf vokal yang berdampingan, maka harus terdapat 5 dari 22 posisi di depan, di tengah, dan di belakang huruf-huruf konsonan. Tugas kedua adalah menempatkan huruf-huruf vokal pada posisi-posisi tersebut. Ada 22 posisi untuk huruf *a*, 21 posisi untuk *i*, 20 untuk *u*, 19 untuk *e* dan 18 untuk *o*. Artinya tugas kedua ini dapat dilakukan dengan $\mathrm{P}(22,5)=\dfrac{22!}{17!}$ cara. Berdasarkan prinsip perkalian, dapat diketahui bahwa banyaknya susunan huruf-huruf abjad dengan huruf vokal yang tidak berdampingan, adalah $21! \text{ x } \dfrac{22!}{17!}$.

Contoh 3.20. Ada berapa bilangan 7-digit yang semua angkanya berbeda dari $\{1,2,3,\cdots,9\}$ sedemikian sehingga angka 5 dan 6 tidak muncul berurutan dalam setiap susunannya?

Jawab. Akan ditentukan permutasi 7 dari himpunan $\{1,2,3,\cdots,9\}$, dan mempartisi permutasi-7 ini menjadi 4 yaitu (i) angka 5 dan 6 tidak muncul sebagai suatu digit; (2) angka 5 muncul sebagai digit tetapi 6 tidak muncul sebagai digit; (3) angka 6 muncul sebagai suatu digit tetapi 6 tidak muncul sebagai digit; dan (4) angka 5 dan 6 muncul sebagai digit.

Permutasi pertama, permutasi-7 dari $\{1,2,3,4,7,8,9\}$ yaitu $P(7,7)=7!=5040$.

Permutasi kedua dihitung sebagai berikut: Angka 5 dapat muncul sebagai salah satu dari 7 angka-angka yang lain. Angka 6 yang tidak muncul, dapat dihitung sebagai permutasi-6 dari $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Dengan demikian ada $7P(7,6)=7(7!)=35.280$.

Permutasi ketiga, jika angka 6 muncul dan angka 5 tidak muncul, sama dengan permutasi kedua, ada 35.280 susunan.

Permutasi keempat, dihitung dengan mempartisi permutasi keempat ini menjadi tiga partisi:

a) Angka pertama adalah 5 sehingga angka kedua bukan angka 6.

$$\boxed{5}\boxed{\neq 6}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Ada 5 posisi yang mungkin untuk angka 6. Angka 5 akan membentuk permutasi-5 dari 7 angka $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Karena itu ada $5 \text{ x } P(7,5)=\frac{5 \text{ x } 7!}{2!}=12.600$ bilangan dalam susunan.

b) Angka terakhir adalah 5, sehingga angka di sebelah kirinya bukan angka 6.

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\neq 6}\boxed{5}$$

Banyaknya susunan bilangan ini sama dengan susunan (a), yaitu 12.600.

c) Bilangan yang terletak di antara bilangan yang awal dan bilangan akhir adalah angka 5, sehingga bilangan di dekatnya bukan angka 6.

$$\square\ \boxed{\neq 6}\ \boxed{5}\ \boxed{\neq 6}\ \square\ \square\ \square$$

Posisi yang akan ditempati angka 5 adalah salah satu dari 5 posisi yang mungkin. Dengan demikian posisi untuk angka 6 hanya dapat dipilih dari 4 posisi lainnya. Posisi angka 5 membentuk permutasi-5 dari 7 angka $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Karena itu ada $5 \times 4 \times P(7,5) = 50.400$ susunan. Jadi untuk permutasi keempat ini, berdasarkan prinsip penjumlahan, ada 12.600 + 12.600 + 50.400 = 75.600 susunan bilangan. Selanjutnya berdasarkan prinsip penjumlahan, banyaknya susunan bilangan yang dicari adalah 5.040 + 35.280 + 35.280 + 75.600 susunan.

Penyelesaian yang didapatkan dalam contoh tersebut di atas diperoleh dengan cara mempartisi himpunan objek-objek menjadi bagian tertentu, membagi banyaknya objek yang dapat dihitung, kemudian menggunakan prinsip penjumlahan.

Prinsip penjumlahan dapat digunakan dengan cara lain yang lebih memudahkan untuk menentukan penyelesaian masalah tersebut di atas. Misalkan keseluruhan kumpulan *T* dari bilangan berdigit 7 yang dapat dibentuk dengan menggunakan bilangan bulat yang berbeda dari $\{1,2,3,\cdots,9\}$. Himpunan *T* terdiri atas $P(9,7) = \frac{9!}{2!} = 181.440$ susunan. Himpunan *T* dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian: *S* yang terdiri atas anggota himpunan *T* dimana angka 5 dan 6 tidak muncul berurutan, serta komplemen dari himpunan itu, yaitu S' yang terdiri atas anggota himpunan *T* dimana angka 5 dan 6 muncul berurutan. Akan ditentukan ukuran *S.* Berdasarkan prinsip penjumlahan, ukuran *T* sama dengan ukuran *S* ditambah ukuran S'. Jika kita dapat menentukan ukuran S' maka masalah akan terselesaikan. Ada berapa susunan di dalam S'? Telah disebutkan sebelumnya, bahwa di dalam himpunan bagian S' angka 5 dan 6 muncul berurutan. Ada 6 cara menempatkan angka 5 diikuti angka 6, dan ada 6 cara menempatkan angka 6 diikuti angka 5. Posisi yang lainnya akan membentuk permutasi-5 dari $\{1,2,3,4,7,8,9\}$. Jadi banyaknya susunan bilangan di S' adalah 2 x 6 x *P*(7,5) = 30.240. Himpunan bagian *S* terdiri atas 181.440 – 30.240 = 151.200 susunan.

Teorema 3.2. Banyaknya *r*-permutasi keliling dari suatu himpunan yang memiliki *n* elemen dinyatakan dengan

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r.(n-r)!} \tag{3.14}$$

Secara khusus, banyaknya permutasi keliling dari himpunan dengan *n* elemen adalah $(n-1)!$.

Bukti. Himpunan permutasi-*r* linier dapat dipartisi menjadi bagian-bagian dengan cara tertentu sehingga dua permutasi-*r* linier membentuk permutasi-*r* keliling yang sama, jika dan hanya jika permutasi-permutasi tersebut memiliki bagian-bagian yang sama. Banyaknya permutasi-*r* keliling sama dengan banyaknya bagian dari permutasi tersebut. Karena setiap bagiannya terdiri atas *r* permutasi-*r* linier, maka banyaknya bagian tersebut adalah

$$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r.(n-r)!}$$

Contoh 3.21: Sepuluh orang akan duduk mengelilingi satu meja bundar. Dua orang di antaranya tidak mau duduk berdekatan. Ada berapa susunan posisi duduk kesepuluh orang tersebut?

Jawab. Misalkan kesepuluh orang tersebut adalah $P_1, P_2, \cdots, P_{10}$. Dua orang di antaranya, misalkan P_1 dan P_2 tidak mau duduk berdekatan. Posisi duduk untuk sembilan orang dapat digambarkan sebagai berikut:

$$X, P_3, P_4, \cdots, P_{10}$$

dengan *X* menyatakan posisi duduk P_1 dan P_2 yang berdampingan, sehingga diketahui ada 8! Posisi duduk seperti itu. Jika kita menggantikan *X* menjadi P_1, P_2 atau P_2, P_1 maka akan diperoleh posisi duduk kesepuluh orang tersebut, dimana P_1 dan P_2 duduk berdekatan. Dengan demikian banyaknya posisi duduk kesepuluh orang tersebut dengan P_1 dan P_2 tidak berdekatan adalah 9! – 2 x 8! = 7 x 8!

Cara lain untuk menyelesaikan masalah tersebut di atas adalah sebagai berikut: Tetapkan tempat duduk P_1 pada posisi tertentu. Dengan demikian P_2 tidak dapat menempati kursi yang ada di sebelah kiri atau kanan P_1. Ada 8 tempat duduk yang mungkin bagi orang lain untuk duduk di sebelah kiri P_1, dan 7 posisi tempat duduk di sebelah kanannya. Kursi lainnya dapat diduduki dengan 7! cara. Karena itu posisi duduk kesepuluh orang dimana P_1 dan P_2 tidak berdekatan ada 8 x 7 x 7! = 7 x 8!

Contoh 3.22: Ada berapa banyak kalung dapat dibuat dari 20 butir manik-manik dengan urutan warna berbeda?

Jawab. Ada 20! permutasi dari 20 manik-manik tersebut. Karena setiap kalung dapat diputar tanpa mengubah susunan manik-maniknya maka banyaknya kalung yang dapat dibuat paling banyak ada 20!/20 = 19! Selanjutnya karena setiap kalung dapat dibalik tanpa mengubah susunan manik-maniknya, maka banyaknya kalung yang dapat dibuat ada sebanyak 19!/2.

C.2. Permutasi Multiset

Apabila *S* merupakan suatu multiset, maka permutasi-*r* dari *S* merupakan suatu susunan berurutan dari *r* objek di *S*. Jika total objek di dalam *S* ada sebanyak *n* (dengan perulangan dibolehkan), maka permutasi-*n* dari *S* juga merupakan permutasi dari *S*. Sebagai contoh, jika $\mathrm{S}=\{2.\mathrm{a},1.\mathrm{b},3.\mathrm{c}\}$ maka

acbc   cbcc

merupakan permutasi-4 dari *S,* sedangkan

abccca

adalah permutasi dari *S*. Multiset *S* tidak memiliki permutasi-7 karena $7>2+1+3=6$, yaitu banyaknya objek di dalam *S*. Pada Teorema 3.3, akan ditentukan banyaknya permutasi-*r* dari suatu multiset *S*, yang masing-masing memiliki perulangan tak berhingga.

Teorema 3.3. Misalkan *S* adalah multiset yang memiliki *k* jenis objek berbeda, dan masing-masing objek jumlahnya tak hingga, maka banyak *r*-permutasi dari *S* ada k^{r}.

Bukti. Untuk menyusun suatu *r*-permutasi dari *S*, dapat dipilih objek pertama sebagai salah satu dari *k* jenis objek yang ada. Demikian juga, objek kedua dapat dipilih sebagai salah satu dari *k* jenis objek yang ada, dan seterusnya untuk, semua *k* jenis objek yang ada. Karena semua perulangan di dalam *S* adalah tak hingga, maka jumlah pilihan berbeda untuk sembarang objek selalu sama dengan *k* dan tidak bergantung pada objek yang dipilih sebelumnya. Berdasarkan prinsip perkalian, objek *r* dapat dipilih dalam k^{r} cara.

Contoh 3.23. Berapakah banyaknya bilangan basis 3 yang terdiri atas sebanyak-banyaknya 4 angka?

Jawab. Jawaban terhadap permasalahan ini adalah banyaknya permutasi-4 dari multiset $\{\infty.0, \infty.1, \infty.2\}$ atau dari multiset $\{4.0, 4.1, 4.2\}$. Menurut Teorema 3.3., banyaknya bilangan tersebut ada $3^4 = 81$.

Teorema 3.4. Misalkan *S* adalah multiset dengan *k* jenis objek dan jumlah objek berhingga untuk setiap jenisnya, masing-masing sebanyak $n_1, n_2, \cdots, n_k$. Andaikan banyaknya anggota himpunan *S* adalah $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, maka banyaknya permutasi *S* sama dengan

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Bukti. Diketahui multiset *S* memiliki elemen yang masing-masing terdiri atas *k* jenis, misalnya $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ berturut-turut dengan perulangan $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$, dan total objek $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Akan ditentukan banyaknya permutasi dari ke-*n* objek tersebut. Masalah ini dapat dibayangkan sebagai berikut: ada *n* tempat dan kita akan menempatkan dengan tepat satu objek dari *S* pada setiap tempat tersebut. Pertama akan kita tetapkan tempat mana yang akan ditempati oleh semua a_1. Karena a_1 ada sebanyak n_1 di *S*, maka kita harus memilih salah satu subset n_1 tempat dari himpunan yang terdiri dari n tempat. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{n}{n_1}$ cara. Selanjutnya ditetapkan tempat yang akan ditempati oleh semua a_2. Tempat yang tersisa (setelah objek a_1 ditempatkan) ada sebanyak $n - n_1$ dan harus dipilih sebanyak n_2. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{n-n_1}{n_2}$ cara. Demikian seterusnya, sehingga diketahui bahwa ada $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ cara untuk memilih tempat yang akan ditempati oleh semua objek a_3. Dengan cara yang sama, dan dengan menerapkan prinsip perkalian, dapat ditentukan bahwa banyaknya permutasi *S* adalah:

$$\frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}}\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\cancel{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}}{n_k!\cancel{(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}},$$

Setelah disederhanakan, akan diperoleh

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

Contoh 3.24. Banyaknya permutasi dari semua huruf dalam kata MISSISSIPPI ada $\frac{11!}{1!4!4!2!}$, yaitu banyaknya permutasi dari multiset $\{1M, 4I, 4S, 2P\}$.

Jika multiset *S* hanya terdiri atas dua jenis objek, a_1 dan a_2, masing-masing dengan perulangan n_1 dan n_2 dimana $n = n_1 + n_2$, maka menurut Teorema 3.4, banyaknya permutasi *S* adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!}=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}=\binom{n}{n_1}.$$

Karena itu kita dapat memandang $\binom{n}{n_1}$ sebagai kombinasi-n_1 dari himpunan yang terdiri atas *n* elemen atau sebagai permutasi dari suatu multiset yang terdiri atas dua objek, masing-masing dengan perulangan sebanyak n_1 dan $(n-n_1)$.

Ada interpretasi lain untuk $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$ yang disebutkan di Teorema 3.4. Interpretasi ini menggunakan partisi himpunan menjadi bagian-bagian dengan ukuran yang telah ditentukan, dimana bagian-bagian tersebut ditandai dengan label tertentu. Masalah ini dapat dijelaskan melalui contoh berikut ini.

Contoh 3.25. Misalkan suatu himpunan memiliki 4 anggota $\{a, b, c, d\}$ yang akan dipartisi menjadi dua himpunan, masing-masing berukuran (memiliki anggota) 2. Jika masing-masing bagian tidak diberi label, maka ada 3 partisi yang berbeda yang dapat dibuat, yaitu:

$$\{a,b\},\{c,d\};\{a,c\},\{b,d\};\{a,d\},\{b,c\}.$$

Tetapi jika partisi tersebut di beri tanda, maka banyaknya partisi yang diperoleh akan lebih banyak. Misalkan masing-masing partisi dibeeri kode warna merah dan biru maka partisi tersebut di atas akan diperoleh 6 partisi. Partisi $\{a,b\},\{c,d\}$ dengan kode merah dan putih, dapat dibentuk menjadi

$$\text{Kotak Merah } \{a,b\},\ \text{Kotak Biru } \{c,d\}$$

dan

$$\text{Kotak Biru } \{a,b\},\ \text{Kotak Merah } \{c,d\}$$

Secara umum, partisi $B_1, B_2, \cdots, B_k$ (bayangkan sebagai warna 1, warna 2, warna 3, ... , warna *k*), juga dibayangkan sebagai kotak.

Teorema 3.5. Misalkan *n* adalah suatu bilangan bulat positif dan $n_1, n_2, \cdots, n_k$ adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Banyaknya cara mempartisi suatu himpunan yang memiliki *n* anggota himpunan menjadi *k* kotak bertanda $B_1, B_2, \cdots, B_k$ dimana kotak 1 berisi n_1 objek, kotak 2 berisi n_2 objek, . . . , kotak *k* berisi n_k objek adalah

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{3.15}$$

Jika kotak tadi tidak ditandai, maka banaknya partisi yang dapat disusun adalah

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{3.16}$$

Bukti. Pembuktian Teorema 3.5 merupakan aplikasi langsung dari prinsip perkalian. Kita harus memilih objek mana yang harus dimasukkan ke kotak yang mana, tergantung pada ukurannya. Pertama kita memilih n_1 objek untuk kotak pertama, kemudian memilih n_2 objek dari $n - n_1$ objek yang tersisa untuk kotak kedua, selanjutnya memilih n_3 objek dari $n - n_1 - n_2$ objek yang tersisa untuk kotak ketiga, ... , dan akhirnya $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1} = n_k$ objek untuk kotak ke-*k*. Menurut prinsip perkalian, banyaknya cara untuk memilih objek tersebut adalah

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

Sebagaimana pembuktian Teorema 3.4, hasilkali kombinasi tersebut menghasilkan

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Selanjutnya misalkan kotak-kotak tersebut di atas tidak ditandai. Dengan demikian hasil di atas harus dibagi *k*! karena untuk setiap cara mendistribusikan objek-objek ke dalam *k* kotak yang tidak bertanda, ada *k*! cara memasang tanda 1, 2, 3, . . . , *k*. Berdasarkan prinsip pembagian, diketahui bahwa banyaknya partisi untuk kotak yang tidak bertanda, adalah

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

D. Kombinasi

Banyaknya kombinasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan adalah

$$^{n}C_r = C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (3.17)$$

Bukti. Masing-masing kombinasi terdiri atas *r* objek berbeda, dan dapat disusun dalam *r*! Cara.

- Untuk satu kombinasi *r* objek berbeda, banyaknya susunan ada *r*!
- Untuk $C(n,r)$ kombinasi, banyaknya susunan adalah $r!C(n,r)$
- Total banyaknya kombinasi yang dapat disusun ada

$$r!C(n,r)\cdots\cdots\cdots(*)$$

Tetapi banyaknya permutasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan adalah

$$P(n,r)\cdots\cdots\cdots(**)$$

Persamaan $(*)$ dan $(**)$ memiliki nilai yang sama, oleh karena itu

$$P(n,r) = r!C(n,r)$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} = r!C(n,r)$$

$$\text{dimana } C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Bukti:

$$C(n,r) \qquad = C(n,n-r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Misalkan himpunan S mempunyai | S | = n elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari k $(k \leq n)$ disebut kombinasi n objek yang diambil sebanyak k objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{k}$ atau $C(n,k)$ atau ${}_nC_k$. Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan $C(n,\ k) = {}_nC_k = \dfrac{n\,!}{(n-k)!\ k!}$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhatikan. Yang diperhatikan adalah objek-objek yang muncul.

Contoh 3.26. Seorang pelatih bola basket akan memilih komposisi pemain yang akan diturunkan dalam suatu pertandingan. Ada 12 orang pemain yang dapat dipilih. Berapa macam tim yang dapat dibentuk ?

Jawab. Dalam memilih pemain yang akan diturunkan, urutan pemilihan tidak diperhatikan. Jadi, yang menjadi masalah hanyalah siapa yang dipilih. Tidak menjadi masalah apakah seorang pemain terpilih pertama ataupun terakhir. Jadi banyaknya tim yang dapat dibentuk oleh pelatih tersebut adalah kombinasi 12 objek yang diambil 5 sekaligus adalah sebagai berikut:

$$\binom{12}{5} = \frac{12\,!}{7\,!\ 5\,!} = 792 \text{ tim.}$$

Contoh 3.27. Ada berapa cara mengelompokkan 3 orang dari 4 orang?

Jawab.

$$C(4,3) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4}{(4-3)!} = \frac{4}{1} = 4 \text{ cara}$$

Contoh 3.28. Suatu warna tertentu dibentuk dari campuran 3 warna yang berbeda. Jika terdapat 4 warna, yaitu Merah, Kuning, Biru dan Hijau, ada berapa kombinasi tiga jenis warna yang dapat dihasilkan?

Jawab.

$$C(n,x)=\frac{n!}{(n-x)!x!}\Rightarrow C(4,3)=\frac{4!}{(4-3)!3!}=4$$

kombinasi warna (MKB, MKH, KBH, MBH).

Contoh 3.29. Berapa banyaknya jabat tangan yang dapat dilakukan oleh 10 orang?

Jawab.

$$C(10,2)=\frac{10!}{(10-2)!2!}=45$$

jabat tangan.

Contoh 3.30. Suatu kelompok yang terdiri dari 3 orang pria dan 2 orang wanita akan memilih 3 orang pengurus. Berapa cara yang dapat dibentuk dari pemilihan jika pengurus terdiri dari 2 orang pria dan 1 orang wanita.

Jawab.

$C(3,2)C(2,1)=\left[\frac{3!}{(3-2)!2!}\right]\left[\frac{2!}{(2-1)!1!}\right]=6$ cara

L1 L2 W1 ; L1 L2 W2 ;

L1 L3 W1 ; L1 L3 W2 ;

L2 L3 W1 ; L2 L3 W2 .

Contoh 3.31. Dalam sebuah ujian, seorang mahasiswa diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 8 soal yang tersedia. Tentukan:

a. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin untuk dikerjakan
b. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin dikerjakan jika no.6 dan 7 wajib dikerjakan.

Jawab.

a. $C(8,5)=56$ cara
b. $C(6,3)=20$ cara

Contoh 3.32. Banyaknya cara memilih 4 pengurus dari 6 calon adalah....

Jawab. $\mathrm{C}(6,4)=15$ cara

Contoh 3.33. Dalam sebuah kotak terdapat 7 kelereng. Berapa banyak cara mengambil 4 kelereng dari kantong tersebut?

Jawab. $\mathrm{C}(7,4)=35\,\text{cara}$

Contoh 3.34. Sekelompok mahasiswa akan mengerjakan 9 dari 10 soal ulangan, tetapi soal 1-5 harus dikerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil mahasiswa adalah.

Jawab. $\mathrm{C}(5,4)=5\,\text{cara}$

Contoh 3.35. Seorang peternak akan membeli 3 ekor ayam dan 2 ekor kambing dari seorang pedagang yang memiliki 6 ekor ayam dan 4 ekor kambing. Dengan berapa cara peternak tersebut dapat memilih ternak-ternak yang diinginkannya?

Jawab.

Banyak cara memilih ayam = $\mathrm{C}(6,3)=20\,\text{cara}$

Banyak cara memilih kambing = $\mathrm{C}(4,2)=6\,\text{cara}$

Jadi, peternak tersebut memiliki pilihan sebanyak = 20×6 = 120 cara

Contoh 3.36. Sebuah perusahaan membutuhkan karyawan yang terdiri dari 5 putra dan 3 putri 15 orang pelamar 9 di antaranya putra. Tentukan banyaknya cara menyeleksi karyawan!

Jawab. Pelamar putra ada 9 dan pelamar putri 6. Banyak cara menyeleksi adalah:

$\mathrm{C}(9,5)\mathrm{C}(6,3)=2360$

Contoh 3.37. Dalam mengadakan suatu pemilihan dengan menggunakan obyek 4 orang pedagang kaki lima untuk diwawancarai, maka untuk memilih 3 orang untuk satu kelompok. Ada berapa cara kita dapat menyusunnya?

Jawab.

4C3 =4! / 3! (4-3)!

= (4.3.2.1) / 3.2.1.1

= 24 / 6 = 4 cara

Contoh 3.38. Suatu warna tertentu dibentuk dari campuran 3 warna yang berbeda. Jika terdapat 4 warna, yaitu Merah, Kuning, Biru dan Hijau, maka berapa kombinasi tiga jenis warna yang dihasilkan.

Jawab.

nCx = (n!)/(x!(n-x)!)

4C3 = (4!)/(3!(4-3)!)

= 24/6 = 4 macam kombinasi (MKB, MKH, KBH, MBH).

Contoh 3.39. Dalam suatu pertemuan terdapat 10 orang yang belum saling kenal. Agar mereka saling kenal maka mereka saling berjabat tangan. Berapa banyaknya jabat tangan yang terjadi.

Jawab. 10C2 = (10!)/(2!(10-2)!) = 45 jabat tangan

Contoh 3.40. Suatu kelompok yang terdiri dari 3 orang pria dan 2 orang wanita akan memilih 3 orang pengurus. Berapa cara yang dapat dibentuk dari pemilihan jika pengurus terdiri dari 2 orang pria dan 1 orang wanita.

Jawab.

3C2 . 2C1 = (3!)/(2!(3-2)!) . (2!)/(1!(2-1)!) = 6 cara, yaitu : L1 L2 W1 ; L1 L3 W1 ; L2 L3 W1 ; L1 L2 W2 ; L1 L3 W2 ; L2 L3 W2

Contoh 3.41. Dalam sebuah ujian, seorang mahasiswa diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 8 soal yg tersedia. Tentukan:

a. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin untuk dikerjakan
b. banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin dikerjakan jika no.6 dan 7 wajib dikerjakan.

Jawab.

a. 8 C5 = 8!/5!(8-5)! = (8×7×6×5!)/5!3! = 56 cara

b. 6C3 = 6!/3!(6-2)! = (6×5×4×3!)/3!3! = 20 cara

Contoh 3.42. Banyak cara memilih 4 pengurus dari 6 calon adalah....

Jawab. 6C4 = 6!/4!(6-4)! = (6×5×4!)/4!2! = 15 cara

Contoh 3.43. Dalam sebuah kantong terdapat 7 kelereng. Berapa banyak cara mengambil 4 kelereng dari kantong tersebut?

Jawab. 7C4 = 7!/4!(7-4)! = (7×6×5×4!)/4!3! = 35 cara

Contoh 3.44: Siswa diminta mengerjakan 9 dari 10 soal ulangan, tetapi soal 1-5 harus di kerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil siswa adalah.

Jawab. 5C4 = 5!/4!(5-4)! = (5×4!)/4!1! = 5 cara

Contoh 3.45. Seorang peternak akan membeli 3 ekor ayam dan 2 ekor kambing dari seorang pedagang yang memiliki 6 ekor ayam dan 4 ekor kambing. Dengan berapa cara peternak tersebut dapat memilih ternak-ternak yang di inginkannya?

Jawab.
Banyak cara memilih ayam = 6C3 = 6!/3!(6-3)! = 6!/3!3! = 20 cara
Banyak cara memilih kambing = 4C2 = 4!/2!(4-2)! = (4×3×2!)/2!2! = 6 cara
Jadi, peternak tersebut memiliki pilihan sebanyak = 20×6 = 120 cara

Contoh 3.46. Sebuah perusahaan membutuhkan karyawan yg terdiri dari 5 putra dan 3 putri. Jika terdapat 15 pelamar, 9 diantaranya putra. Tentukan banyaknya cara menyeleksi karyawan!

Jawab.

Pelamar putra = 9 dan pelamar putri 6 banyak cara menyeleksi:

9C5 x 6C3 = 9!/5!x(9-5)! x 6!/3!x(6-3)! = 2360

E. Kombinasi Berhingga

(a) Banyaknya kombinasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan jika terdapat *p* objek yang selalu diambil = $C(n-p, r-p)$.

(b) Banyaknya kombinasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* setiap kali pengambilan jika terdapat *p* objek yang akan selalu diambil = $C(n-p, r)$.

Contoh 3.47.

(a) Ada berapa cara 11 orang pemain kriket dapat dipilih dari 15 orang pemain?

(b) Ada berapa cara 11 orang pemain kriket dapat dipilih dari 15 orang pemain jika salah seorang pemain selalu terpilih?

(c) Ada berapa cara 11 orang pemain kriket dapat dipilih dari 15 orang pemain joka seorang pemain tertentu tidak pernah terpilih?.

Jawab.

(a) Jika ada 11 pemain yang akan dipilih dari 15 orang pemain maka banyaknya cara memilih pemain adalah

$$C(15,11)=\binom{15}{11}=\frac{15!}{4!11!}=\frac{15.7.13.}{4.3.2.1}=15.7.13=1365$$

(b) Jika salah seorang pemain selalu terpilih, berarti ada 10 orang pemain lainnya yang harus dipilih dari 14 orang pemain. Banyaknya cara memilih pemain dengan cara seperti itu adalah

$$C(14,10)=\binom{14}{10}=\frac{14!}{4!10!}=\frac{\cancel{14}.13.\cancel{12}.11}{\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}.1}=7.13.11=1001$$

(c) Jika salah seorang pemain tidak pernah terpilih, berarti ada 11 orang pemain lainnya yang harus dipilih dari 14 orang pemain. Banyaknya cara memilih pemain dengan cara seperti itu adalah

$$C(14,11)=\binom{14}{11}=\frac{14!}{3!11!}=\frac{14.13.12}{3!}=14.13.2=364$$

Banyaknya cara memilih nol atau lebih objek dari *n* objek berbeda adalah $2^n - 1$.

Bukti.

Banyak cara memilih salah satu objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,1)$.

Banyak cara memilih dua objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,2)$.

Banyak cara memilih tiga objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,3)$.

Banyak cara memilih *n* objek dari *n* objek berbeda adalah $C(n,n)$.

Jadi, total banyaknya cara memilih salah satu atau lebih objek dari *n* objek berbeda adalah:

$$\begin{aligned} & C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+\cdots+C(n,n) \\ & =\left[C(n,0)+C(n,2)+C(n,3)+\cdots+C(n,n)\right]-C(n,0) \\ & =2^n-1 \end{aligned}$$

Contoh 3.48. John memiliki 8 orang teman. Ada berapa cara john mengajak salah satu atau lebih teman-temannya ke bioskop?

Jawab. John dapat mengjak satu atau lebih teman-temannya ke bisokop. Banyaknya cara ada $2^8 - 1 = 255$ cara.

Banyaknya cara memilih nol atau lebih objek dari *n* objek yang identik adalah $n+1$ cara.

Contoh 3.49. Ada berapa cara memilih nol atau lebih huruf-huruf dari AAAAA?

Jawab.

Banyaknya cara memilih nol A = 1 cara

Banyaknya cara memilih satu A = 1 cara

Banyaknya cara memilih dua A = 1 cara

Banyaknya cara memilih tiga A = 1 cara

Banyaknya cara memilih empat A = 1 cara

Banyaknya cara memilih lima A = 1 cara

Jumlah banyaknya cara memilih nol atau lebih huruf A dari AAAAA ada sebanyak 6 cara (5 + 1) cara.

Banyaknya cara memilih satu atau lebih objek dari *n* objek, yang terdiri atas 3 kelompok objek identik yaitu *p* objek identik, *q* objek identik, dan *r* objek identik lainnya adalah $(p+1)(q+1)(r+1)2^n - 1$ cara.

Contoh 3.50. Tentukan banyaknya cara memilih sekurang-kurangnya satu buah dari keranjang yang berisi 3 buah apel, 4 buah mangga dan 5 buah pisang.

Jawab.

Banyaknya cara memilih buah apel = (3+1) = 4 cara.

Banyaknya cara memilih buah mangga = (4+1) = 5 cara.

Banyaknya cara memilih buah pisang = (5+1) = 6 cara.

Total banyaknya cara memilih buah = 4 x 5 x 6 = 120 cara. Tetapi banyaknya cara ini masih mencakup satu cara untuk tidak memilih salah satu buah, sehingga banyaknya cara memilih sekurang-kurangnya satu buah adalah 120-1 = 119 cara. Buah yang dipilih terdiri atas buah yang sama jenisnya sehingga $n = 0$. Jadi $2^n = 2^0 = 1$. Banyaknya cara memilih *r* objek dari *n* objek identik adalah 1.

Contoh 3.51. Ada berapa cara memilih 5 bola dari 12 bola berwarna merah yang identik?

Jawab. Keduabelas bola merah adalah identik, sehingga banyaknya cara memilih 5 bola adalah 1 cara.

Contoh 3.52. Berapa cara membentuk 4 angka dari angka-angka 1, 2, 3, 4, dan 5?

Jawab. Diketahui *n* = 5 (yaitu banyaknya angka), dan *r* = 4 (yaitu banyaknya tempat yang akan diisi dengan 4 angka). Jadi banyaknya cara membentuk 4 angka dari angka-angka 1, 2, 3, 4, dan 5 ada sebanyak $P(5,4) = \frac{5!}{1!} = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ cara.

Contoh 3.53. Ada berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 yang semua angkanya berbeda?

Jawab. Suatu bilangan antara 1000 dan 9999 merupakan suatu susunan *berurut* dari 4 angka. Masalah yang akan diselesaikan disini adalah himpunan bagian dari suatu permutasi. Ada 4 kemungkinan untuk setiap angka yang akan diambil, yaitu satuan, puluhan, ratusan, dan ribuan. Bilangan yang akan dicari hanya bilangan ganjil berarti satuan untuk bilangan tersebut adalah 1, 3, 5, 7, 9. Dengan demikian, ada 5 pilihan untuk bilangan satuannya. Puluhan dan satuan terdiri atas bilangan-bilangan 0, 1, 2, …, 9, sedangkan ribuannya terdiri atas bilangan-bilangan 1, 2, …, 9. Karena angka yang dicara harus berbeda, maka ada 8 pilihan angka ribuan, untuk semua angka satuan. Selanjutnya ada 8 pilihan untuk angka ratusan, 7 pilihan untuk angka puluhan. Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 yang semua angkanya berbeda ada sebanyak 5 x 8 x 8 x 7 = 2240 angka.

Contoh 3.54. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 0 dan 10000 yang memiliki tepat satu angka 5?

Jawab. Cara I. Misalkan *S* adalah himpuna bilangan bulat antara 0 dan 10000 yang memiliki tepat satu angka 5. Satu angka yang sama dengan 5. Himpunan *S* dapat dipartisi atas himpunan S_1 yang terdiri atas bilangan satu angka di S, himpunan S_2 yang terdiri atas bilangan dua angka di S, himpunan S_3 yang terdiri atas bilangan tiga angka di S, dan himpunan S_3 yang terdiri atas bilangan empat angka di S. Tidak ada bilangan lima angka di S. Jelas bahwa

$$|S_1| = 1$$

Bilangan di S_2 terdiri atas dua bentuk: (i) angka satuan yaitu angka 5, dan (ii) angka puluhan yaitu angka 5. Angka satuan terdiri atas 8 angka (angka puluhan bukan angka 0 maupun 5). Angka puluhan terdiri atas 9 kemungkinan (yaitu 0 sampai 9, kecuali 5). Karena itu

$$|S_2| = 8 + 9 = 17$$

Dengan penjelasan yang sama, diperoleh

$$|S_3| = 8\text{x}9 + 8\text{x}9 + 9\text{x}9 = 225$$

dan

$$|S_4| = 8\text{x}9\text{x}9 + 8\text{x}9\text{x}9 + 8\text{x}9\text{x}9 + 9\text{x}9\text{x}9 = 2.673$$

Jadi

$$|S| = 1 + 17 + 225 + 2.673 = 2.916$$

Cara II. Dengan menyertakan angka-angka 0 di depan setiap bilangan (6 = 0006, 25 = 0025, 354 = 0354) maka dapat dipandang bahwa setiap bilangan di *S* terdiri atas bilangan 4 angka. Selanjutnya dengan mempartisi *S* menjadi S_1', S_2', S_3', S_4' tergantung bilangan 5 terletak pada posisi pertama, kedua, ketiga, atau keempat. Keempat himpunan di dalam partisi memiliki 9 x 9 x 9 = 729 bilangan bulat, oleh karena itu banyaknya bilangan bulat di dalam *S* ada 4 x 729 = 2916.

Contoh 3.55. Ada berapa bilangan lima-angka yang dapat disusun dari angka-angka 1, 1, 1, 3, 8?

Jawab. Akan ditentukan banyaknya permutasi dari suatu multiset yang terdiri atas 3 objek yang identik, dan 2 objek lainnya yang berbeda. Untuk masalah ini, hanya ada dua cara yang dapat dipilih yaitu (1) posisi mana yang akan ditempati oleh angka 3 (5 posisi), dan setelah itu (2) posisi mana yang akan ditempati oleh 8 (4 posisi). Ketiga posisi yang tersisa akan ditempati oleh 1. Jadi berdasarkan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun angka-angka 1, 1, 1, 3, 8 ada 5 x 4 = 20 cara. Andaikan angka-angka yang akan disusun adalah 1, 1, 1, 3, 3, maka banyaknya cara menyusun angka-angka tersebut ada 10.

E.1. Kombinasi Himpunan

Misalkan *r* adalah bilangan bulat non-negatif. R-kombinasi dari himpunan *S* yang memiliki *n* elemen dalam hal ini merupakan pemilihan tak-terurut dari *r* atas *n* objek di *S*. Dengan kata lain, r-kombinasi dari *S* merupakan suatu himpunan bagian dari *S* yang terdiri atas *r* dari *n* objek di *S* – yaitu himpunan bagian dari *S* yang memiliki *r* elemen. Jika $S = \{a, b, c, d\}$ maka

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

merupakan empat kombinasi-3 dari *S*. Notasi $\binom{n}{r}$ atau C(n,r) untuk menyatakan r-kombinasi dari suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Tentu saja

$$\binom{n}{r} = 0 \text{ jika } r > n$$

dan juga

$$\binom{0}{r} = 0 \text{ jika } r > 0$$

Berikut ini adalah fakta yang telah dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan bulat non-negatif *n*.

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Dalam kasus khusus, $\binom{0}{0} = 1$.

Rumus dasar kombinasi diberikan pada teorema berikut ini.

Teorema 3.6. Untuk $0 \le r \le n$,

$$P(n,r) = r!\binom{n}{r} \tag{3.18}$$

Karena itu

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{3.19}$$

Bukti. Misalkan *S* adalah himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Setiap permutasi-*r* dari *S* muncul tepat satu kali sebagai hasi, dari dua tugas berikut ini:

(i) Memilih *r elemen dari S.*

(ii) Menyusun ke-*r* elemen yang terpilih dalam urutan tertentu.

Banyaknya cara melakukan tugas pertama, berdasarkan definisi, adalah jumlah kombinasi $\binom{n}{r}$. Banyaknya cara melakukan tugas kedua adalah $P(r,r) = r!$. Menurut prinsip perkalian, Selanjutnya dengan menggunakan rumus $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ sehingga diperoleh

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Contoh 3.56. 25 titik dipilih pada suatu bidang datar sedemikian sehingga tidak terdapat tiga di antaranya yang terletak pada satu garis lurus yang sama. Ada berapa garis lurus yang dapat dibentuk? Ada berapa segitiga yang dapat dibentuk?

Jawab. Karena tidak terdapat tiga titik yang terletak pada satu garis lurus, maka setiap pasangan titik membentuk suatu garis lurus yang unik. Jadi banyaknya garis lurus yang terbentuk sama dengan kombinasi-2 dari himpunan yang terdiri atas 25 elemen, yaitu

$$\binom{25}{2} = \frac{25!}{2!23!} = 300.$$

Demikian pula, setiap tiga titik akan membentuk satu segitiga unik, yaitu

$$\binom{25}{3} = \frac{25!}{3!22!}.$$

Contoh 3.57. 15 orang mahasiswa mendaftar untuk mengikuti kuliah matematika, tetapi hanya 12 orang yang dapat hadir pada jadwal kuliah. Ada berapa cara memilih 12 orang mahasiswa untuk mengikuti kuliah tersebut? Misalkan terdapat 25 kursi di dalam ruang kelas, ada berapa cara ke 12 mahasiswa memilih tempat duduk?

Jawab. Banyaknya cara memilih 12 mahasiswa yang akan mengikuti mata kuliah tersebut adalah

$$\binom{15}{12} = \frac{15!}{12!3!}.$$

Jika terdapat 25 kursi di dalam ruang kelas, maka ke-12 mahasiswa dapat memilih tempat duduk dalam $\mathrm{P}(25,12) = 25!/13!$ cara. Dengan demikian ada

$$\binom{15}{12}\mathrm{P}(25,12) = \frac{15!25!}{12!3!13!}$$

kemungkinan posisi duduk dari mahasiswa yang hadir di dalam ruang kelas tersebut.

Contoh 3.58. Ada berapa cara menyusun kata yang terdiri atas 8 huruf, dengan menggunakan ke-26 abjad latin jika masing-masing kata mengandung 3, 4, atau 5 huruf vokal?

Jawab. Tidak ada ketentuan berapa kali suatu huruf boleh digunakan dalam setiap kata yang terbentuk. Jadi kita bebas menghitung banyaknya kata yang dapat dibentuk berdasarkan banyaknya huruf vokal yang terdapat di dalam masing-masing kata, kemudian menggunakan prinsip penjumlahan.

Pertama, untuk kata yang mengandung 3 huruf vokal. Posisi ke-3 huruf vokal di dalam masing-masing kata dapat disusun dalam $C(8,3)$ cara; ke-5 posisi lainnya akan ditempati huruf konsonan. Dengan demikian, posisi huruf vokal ada 5^3 dan posisi huruf konsonan ada 21^5. Jadi banyaknya kata yang dapat disusun ada

$$\binom{8}{3}5^3 21^5 = \frac{8!}{3!5!}5^3 21^5.$$

Dengan cara yang sama, banyaknya cara menyusun kata yang mengandung 4 huruf vokal ada

$$\binom{8}{4}5^4 21^4 = \frac{8!}{4!4!}5^4 21^4,$$

dan banyaknya kata yang mengandung 5 huruf vokal ada

$$\binom{8}{5}5^5 21^3 = \frac{8!}{5!3!}5^5 21^3.$$

Jumlah kata yang dapat dibentuk ada

$$\frac{8!}{3!5!}5^3 21^5 + \frac{8!}{4!4!}5^4 21^4 + \frac{8!}{5!3!}5^5 21^3$$

Corollary 3.1.

Untuk $0 \le r \le n$,

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Bilangan $\binom{n}{r}$ memiliki banyak sifat yang penting dan menarik, tetapi pada bagian ini hanyak akan dijelaskan salah satu sifatnya saja.

Teorema 3.7.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

dengan *n* menyatakan banyaknya kombinasi dari suatu himpunan yang memiliki *n* elemen.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa kedua ruas pada persamaan di atas menyatakan banyaknya kombinasi himpunan *S* yang memiliki *n* elemen dengan cara yang berlainan. Pertama, perhatikan bahwa setiap kombinasi dari *S* adalah r-kombinasi dari *S* untuk beberapa $r = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Karena $\binom{n}{r}$ menyatakan banyaknya r-kombinasi dari *S*, maka berdasarkan prinsip penjumahan,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

adalah banyaknya kombinasi dari *S*.

Banyaknya kombinasi dari *S* dapat juga dihitung dengan membagi kemungkinan kombinasi menjadi *n* tugas: Misalkan elemen-elemen *S* terdiri atas $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Untuk memilih salah satu kominasi dari *S* maka ada dua pilihan yang mungkin dari masing-masing *n* elemen tersebut: x_1 termasuk dalam kombinasi atau tidak, x_2 termasuk dalam kombinasi atau tidak, . . . , x_n termasuk dalam kombinasi atau tidak. Dengn demikian berdasarkan prinsip perkalian, ada 2^n cara untuk membentuk kombinasi dari *S* tersebut. Dengan menyamakan kedua perhitungan di atas, maka teorema di atas akan terbukti.

E.2. Kombinasi Multiset

Jika *S* adalah suatu multiset, maka r-kombinasi dari *S* merupakan suatu seleksi tak berurut *r* dari objek-objek yang ada di *S*. Karena itu r-kombinasi dari *S* adalah multiset dari multiset itu sendiri, yaitu submultiset dari *S*. Apabila *S* terdiri atas *n* objek, maka hanya terdapat satu kombinasi-*n* dari *S*, yaitu *S* itu sendiri. Apabila *S* memiliki *k* jenis objek berbeda, maka terdapat *k* kombinasi-1 dari *S*.

Contoh 3.59. Jika diketahui $S = \{2a, 1b, 3c\}$, maka kombiasi-3 dari *S* adalah

$$\{2a, 1b\}, \{2a, 1c\}, \{1a, 1b, 1c\}, \{1a, 2c\}, \{1b, 2c\}, \{3c\}.$$

Teorema 3.8. Misalkan *S* adalah suatu multiset yang terdiri atas *k* jenis objek, dan masing-masing objek sebanyak tak hingga, maka banyaknya r-kombinasi dari *S* adalah

$$\binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}.$$

Bukti. Misalkan ke-*k* jenis objek yang ada di *S* adalah $a_1, a_2, \cdots, a_k$ sedemikian sehingga

$$S = \{\infty.a_1, \infty.a_2, \cdots, \infty.a_k\}.$$

Sebarang kombonasi-*r* dari *S* akan berbentuk

$$\{x_1.a_1, x_2.a_2, \cdots, x_k.a_k,\}$$

dimana

$$x_1, x_2, \cdots, x_k$$

adalah bilangan-bilangan bulat non-negatif, dengan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r.$$

Sebaliknya, setiap barisan bilangan-bilangan bulat non-negatif

$$x_1, x_2, \cdots, x_k$$

dengan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

berkorespondensi dengan suatu r-kombinasi dari *S*. Jadi, banyaknya r-kombinasi dari *S* sama dengan banyaknya penyelesaian untuk persamaan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r,$$

dimana $x_1, x_2, \cdots, x_k$ adalah bilangan-bilangan bulat non-negatif. Kita telah melihat bahwa banyaknya solusi ini sama dengan banyaknya permutasi dari multiset

$$T = \{r.\odot, (k-1).\otimes\}$$

yang terdiri atas dua jenis objek berlainan. Dari permutasi *T* yang diberikan, $k-1 \otimes$ membagi $r \odot$ ke dalam *k* kelompok. Misalkan terdapat $x_1 \odot$ di sebelah kiri $\otimes$ pertama, terdapat $x_2 \odot$ yang terletak di antara $\otimes$ pertama dan $\otimes$ kedua, . . . , dan $x_k \odot$ di sebelah kanan dari $\otimes$ terakhir. Maka, $x_1, x_2, \cdots, x_k$ adalah bilangan-bilangan bulat non-negatif, dengan $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$. Sebaliknya, dari bilangan-bilangan bulat non-negatif $x_1, x_2, \cdots, x_k$ dengan $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$, kita dapat membalik urutan langkah-langkah di atas untuk menyusun suatu permutasi *T*. Jadi banyaknya r-kombinasi dari multiset *S* sama dengan banyaknya permutasi multiset *T* yang menurut Teorema 3.8 sama dengan

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = \binom{r+k-1}{r}.$$

Teorema 3.8 dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

Banyaknya r-kombinasi dari k objek berbeda yang masing-masing tak hingga jumlahnya, sama dengan

$$\binom{r+k-1}{r}.$$

F. Teorema Binomial

Bilangan $C(n,r)$ menyatakan banyaknya kombinasi *r* dari suatu himpunan yang memiliki *n* anggota himpunan. Kombinasi memiliki banyak sifat yang menarik dan memenuhi beberapa identitas penting di dalam kobinatorika. Karena kombinasi digunakan di dalam teorema binomial maka $C(n,r)$ disebut *koefisien binomial*.

F.1. Formula Pascal

Koefisien binomial $C(n,r)$ berlaku untuk semua bilangan non-negatif *n* dan *r*. Nilai $C(n,r)=0$ jika $r>n$ dan $C(n,0)=1$ untuk semua *n*. Jika *n* positif dan $1\le r\le n$ maka:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3.2.1} \qquad (3.20)$$

Telah ditunjukkan pada bagian sebelumnya bahwa $C(n,k)=C(n,n-k)$ untuk semua bilangan bulat *k* dan *n* dengan $0\le k\le n$.

F.2. Teorema Pascal

Untuk semua bilangan bulat *n* dan *k* dengan $1\le k\le n-1$,

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$$

Bukti. Salah satu cara membuktikan teorema ini adalah dengan mensubtitusi nilai-nilai koefisien binomial kemudian menunjukkan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan. Mahasiswa dipersilakan membuktikan bahwa pernyataan tersebut benar.

Bukti lainnya dapat dilakukan dengan prinsip kombinatorika sebagai berikut: Misalkan *S* adalah suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen. Ambil sebarang anggota himpunan *S,* misalnya *x*. Selanjutnya *X* yang terdiri atas *k*-kombinasi dari *S,* dipartisi menjadi dua bagian, *A* dan *B*. Ke dalam partisi *A* kita memasukkan semua *k*-kombinasi, yang tidak memuat *x*. Pada partisi *B* kita memasukkan semua *k*-kombinasi yang memuat *x*. Ukuran *X* adalah $|X|=\binom{n}{k}$. Oleh karena itu, berdasarkan prinsip aturan penjumlahan, $C(n,k)=|A|+|B|$. Jadi, *k*-kombinasi di *A* adalah *k*-kombinasi dari himpunan $S-\{x\}$ yang terdiri atas *n* – 1 anggota. Dengan kata lain, ukuran *A* adalah

$$|A| = \binom{n-1}{k}.$$

Suatu *k*-kombinasi di *B* diperoleh dengan menggabungkan elemen *x* dengan kombinasi *k* -1 dari himpunan $S - \{x\}$. Jadi banyaknya anggota himpunan *B* adalah

$$|B| = \binom{n-1}{k-1}.$$

Dengan menggabungkan fakta-fakta tersebut, diperoleh

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Untuk menggambarkan bukti di atas, dimisalkan *n* = 5, *k* = 3, dan $S = \{x, a, b, c, d, e\}$ sehingga kombinasi 3 dari *S* di *A* adalah $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$. Kombinasi ini merupakan kombinasi 3 dari himpunan $\{a,b,c,d\}$. Sedangkan kombinasi 3 dari *S* di *B* adalah $\{x,a,b\},\{x,a,c\},\{x,a,d\},\{x,b,c\},\{x,b,d\},\{x,c,d\}$. Jika elemen *x* dihapus dari kombinasi 3 ini maka diperoleh $\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$, yang merupakan kombinasi 2 dari himpunan $\{a,b,c,d\}$. Jadi $\binom{5}{3} = 10 = 4 + 6 = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$.

Dengan menggunakan relasi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dan informasi awal

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ dan } \binom{n}{n} = 1, (n \geq 0),$$

koefisien binomial ditentukan tanpa harus menghitung dengan cara seperti (*).

Apabila koefisien binomial dihitung dengan cara tersebut, maka hasilnya sering ditampilkan dalam suatu susunan yang dinamakan segitiga Pascal. Susunan ini dituliskan oleh Blaise Pascal dalam buku yang berjudul *Traite du triangle arithmetique* pada tahun 1653 seperti dilukiskan pada Gambar 3.4.

Setiap elemen di dalam segitiga tersebut, kecuali elemen 1 pada kolom kiri dan diagonal, diperoleh dengan menjumlahkan dua elemen yang berada di atasnya, yaitu elemen yang tepat di atasnya dan di kirinya. Hal ini sesuai dengan Teorema Pascal. Sebagai contoh pada baris 8, dapat dilihat bahwa

$$\binom{8}{3} = 56 = 35 + 21 = \binom{7}{3} + \binom{7}{2}.$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Gambar 3.4. Segitiga Pascal

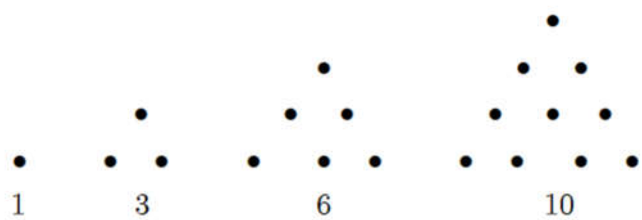
Ada banyak relasi yang melibatkan koefisien binomial dapat diselidiki dengan menggunakan segitiga Pascal. Relasi simetri

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dengan mudah dapat dilihat dalam segitiga tersebut. Demikian juga identitas

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

dapat ditentukan dengan menjumlahkan bilangan-bilangan dalam suatu baris dalam segitiga Pascal. Bilangan $\binom{n}{1} = n$ pada kolom k = 1 merupakan bilangan cacah. Bilangan $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ pada kolom k = 2 merupakan bilangan yang disebut *bilangan segitiga,* yang besarnya sama dengan banyaknya titik-titik dalam susunan segitiga pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5. Bilangan segitiga

Bilangan $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/3!$ pada kolom k = 3 disebut bilangan tetrahedral, yang jumlahnya sama dengan banyaknya titik-titik dalam susunan tetrahedral.

F.3. Koefisien Binomial

Misalkan n adalah suatu bilangan bulat positif, maka untuk semua x dan y, berlaku

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + y^n \tag{3.21}$$

Dalam notasi sigma,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \tag{3.22}$$

Bukti (dengan induksi matematika)

Untuk n = 1,

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x^{1-k}y^k = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1 = x+y,$$

adalah pernyataan yang benar.

Selanjutnya diasumsikan bahwa pernyataan itu juga benar untuk suatu bilangan bulat positif n dan dapat digunakan untuk membuktikan bahwa pernyataan yang sama juga berlaku jika n diganti dengan n + 1. Jadi dapat dituliskan bahwa

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n,$$

yang menurut hipotesis induksi,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) \\
&= x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) + y\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + \binom{n}{n}y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Dengan menggantikan k menjadi $k-1$ di dalam jumlahan terakhir, maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{k}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k.$$

Dengan demikian

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k + y^{n+1},$$

dapat diubah menjadi

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1},$$

dengan menggunakan segitiga Pascal.

Selanjutnya karena

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1,$$

maka persamaan terakhir di atas dapat dituliskan menjadi

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k \qquad (3.23)$$

Pernyataan ini adalah Teorema Binomial dimana *n* diganti menjadi *n* + 1 yang menunjukkan bahwa teorema tersebut berlaku untuk semua *n* bilangan bulat positif.

Teorema binomial dapat dituliskan dalam beberapa bentuk yang ekivalen sebagai berikut:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k}y^k$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

Bentuk yang pertama diturunkan dari teorema Binomial dan fakta bahwa

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Kedua persamaan berikutnya masih menggunakan teorema yang sama tetapi dengan mengubah *x* menjadi *y*. Kasus *y* = 1 cukup sering terjadi.

Teorema 3.9. Misalkan *n* adalah suatu bilangan bulat positif, maka untuk semua *x*,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k \qquad (3.24)$$

Kasus khusus dimana $n = 2,3,4$ dari teorema binomial adalah

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = 3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

F.4. Identitas

Ada beberapa sifat identitas yang dipenuhi oleh koefisien binomial. Sebagai contoh, identitas

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \tag{3.25}$$

dengan *n* dan *k* adalah bilangan-bilangan bulat.

diturunkan langnsung dari fakta bahwa $\binom{n}{k} = 0$ jika $k > n$ dan

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \text{ untuk } 1 \le k \le n.$$

Identitas

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad (n \ge 0) \tag{3.26}$$

telah dibuktikan dalam Teorema 3.4, yang juga diturunkan dari teorema binomial dengan memilih $x = y = 1$. Jika $x = 1, y = -1$ di dalam teorema binomial, maka diperoleh

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0, \quad (n \ge 1) \tag{3.27}$$

Bentuk ini juga dapat dituliskan

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots \quad (n \ge 1) \tag{3.28}$$

Identitas ini dapat diinterpretasi sebagai berikut: Jika *S* adalah suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen, maka banyaknya kombinasi dari *S* yang jumlah anggotanya genap adalah sama dengan banyaknya kombinasi *S* yang jumlah anggotanya ganjil. Pada persamaan (3.19) kedua ruas memiliki nilai 2^{n-1} yaitu

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1} \tag{3.29}$$

dan

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1} \tag{3.30}$$

Identitas ini dapat dibuktikan dengan prinsip kombinatorial sebagai berikut:

Misalkan $S=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ adalah himpunan yang memiliki *n* elemen. Kita dapat membayangkan kombinasi *S* sebagai hasil dari proses di bawah ini:

(1) Kita memilih x_1 dan elemen yang lain juga dipilih atau tidak dipilih (2 pilihan)

(2) Kita memilih x_2 dan elemen yang lain juga dipilih atau tidak dipilih (2 pilihan)

$\vdots$

(*n*) kita memilih x_n dan elemen yang lain juga dipilih atau tidak dipilih (2 pilihan)

Dengan demikian ada *n* kemungkinan yang dapat dipilih dan masing-masing memiliki 2 kemungkinan. Jadi ada 2^n kombinasi yang dapat diperoleh berdasarkan (3.17). Sekarang, andaikan bahwa kita akan memilih suatu kombinasi yang terdiri atas elemen berjumlah genap. Dengan demikian ada dua pilihan untuk masing-masing $x_1,\cdots,x_{n-1}$. Tetapi ketika kita sampai pada x_n, hanya ada satu pilihan yang mungkin. Karena itu, jika kita memilih suatu bilangan genap dari elemen-elemen $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$, maka x_n harus dikeluarkan; sebaliknya jika memilih bilangan ganjil dari $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$, maka x_n harus dimasukkan. Jadi banyaknya kombinasi dari *S* yang memiliki elemen berjumlah genap adalah 2^{n-1}. Karena ruas kiri persamaan (3.20) juga menyatakan banyaknya kombinasi *S* yang memiliki elemen berjumlah genap maka persamaan (3.20) dapat berlaku. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa persamaan (3.21) berlaku. Persamaan (3.21) dapat berlaku karena sebelumnya telah diketahui bahwa persamaan (3.21) dan (3.20) berlaku.

Dengan menggunakan identitas (3.20) dan (3.21), kita dapat menurunkan identitas sebagai berikut:

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},(n\geq 1) \tag{3.31}$$

Untuk membuktikan hal ini, kita memperhatikan (3.20) bahwa (3.22) ekivalen dengan

$$n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}=n2^{n-1},(n\geq 1) \tag{3.32}$$

Tetapi berdasarkan persamaan (3.21), *n* diganti dengan $n-1$,

$$n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\cdots+n\binom{n-1}{n-1}$$
$$=n\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right)=n2^{n-1}.$$

Oleh karena persamaan (3.23) berlaku, maka demikian juga persamaan (3.22). Cara lain untuk membuktikan persamaan (3.22) adalah sebagai berikut: berdasarkan torema binomial,

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n.$$

Jika kedua ruas diturunkan terhadap *x* maka diperoleh

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+b\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

Jika disubtitusi $x = 1$, akan diperoleh persamaan (3.22)

Berbagai identitas penting dapat diturunkan dengan melakukan diferensiasi berturut-turut dan perkalian ekspansi binomial. Kita akan mulai dengan

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Dengan mendiferensialkan kedua ruas terhadap *x*, diperoleh

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Jika kedua ruas dikali dengan *x* maka didapatkan

$$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k.$$

Selanjutnya dengan mendiferensialkan kedua sisi terhadap *x* sekali lagi,

$$n\left[(1+x)^{n-1}+(n-1)x(1+x)^{n-2}\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Dengan mensubtitusi $n = 1$,

$$n\left[2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k};$$

Karena itu

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k};\quad (n\ge 1) \tag{3.33}$$

Secara berturut-turut dengan mengalikan dengan x kemudian mendiferensialkan terhadap x, akan diperoleh identitas untuk

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \binom{n}{k}$$

untuk sebarang p bilangan bulat positif.

Identitas untuk jumlah kuadrat bilangan dalam suatu baris segitiga Pascal adalah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \quad (n \geq 0) \tag{3.34}$$

Identitas (3.25) dapat dibuktikan dengan penjelasan kombinatorika. Misalkan S adalah himpunan yang memiliki $2n$ elemen. Ruas kanan dari (3.25) menyatakan banyaknya kombinasi-n dari S. kita mempartisi S menjadi dua himpunan bagian, misalnya A dan B, masing-masing terdiri atas n elemen. Kita menggunakan partisi S ini untuk mempartisi kombinasi-n dari S. Masing-masing kombinasi-n dari S mengandung sejumlah k elemen A, dan n-k sisanya adalah elemen B. Di sini, k adalah sebarang bilangan bulat antara 0 dan n. Kita mempartisi kombinasi-n dari S menjadi n + 1 bagian,

$$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n,$$

dimana C_k terdiri dari kombinasi-n tersebut yang mengandung k elemen dari A dan $n - k$ elemen dari B. Menurut prinsip penjumlahan,

$$\binom{n}{n-k}$$

$$\binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_n| \tag{3.35}$$

Suatu kombinasi-n dalam C_k diperoleh dengan memilih k elemen dari A (ada $\binom{n}{k}$ pilihan) dan kemudian $(n-k)$ elemen dari B (ada pilihan). Karena itu, berdasarkan prinsip perkalian,

$$|C_k| = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Dengan mensubtitusikan persamaan ini ke dalam persamaan (3.26), diperoleh

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2,$$

dan ini membuktikan (3.26). Generalisasi identitas ini disebut *konvolusi Vandermonde*.

Selanjutnya kita akan memperluas domain dari definisi bilangan $C(n,k)$ untuk memungkinkan *n* sebagai sebarang bilangan real dan *k* sebagai sebarang sebilangan bulat (positif, negatif, maupun nol).

Misalkan *r* adalah suatu bilangan real dan *k* adalah bilangan bulat. Bila didefinisikan koefisien binomial $\binom{r}{k}$ sebagai

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)\cdots(r-k-1)}{k!} & \text{jika } k \geq 1 \\ 1 & \text{jika } k = 0 \\ 0 & \text{jika } k \leq -1 \end{cases}$$

misalnya

$$\binom{5/2}{4} = \frac{(5/2)(3/2)(1/2)(-1/2)}{4!} = \frac{-5}{128}$$

$$\binom{-8}{2} = \frac{(-8)(-9)}{2} = 36$$

$$\binom{3,2}{0} = 1, \text{ dan}$$

$$\binom{3}{-2} = 0$$

Rumus Pascal dan persamaan (5.2), yaitu

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} \text{ dan } k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1},$$

berlaku untuk semua *r* dan *k*. Masing-masing rumus tersebut di atas dapat dibuktikan melalui subtitusi langsung. Dengan iterasi rumus Pascal, akan diperoleh dua rumus jumlah untuk koefisien biniomial.

Perhatikan bahwa:

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1},$$

dengan *k* sama dengan suatu bilangan bulat positif. Rumus Pascal dapat diterapkan pada salah satu koefisien binomial ruas kanan dan diperoleh rumusan untuk $C(r,k)$ sebagai jumlah dari tiga koefisien binomial. Misalkan kita menerapkan rumus Pascal secara berulang-ulang pada koefisien binomial kedua yang muncul di dalamnya. Dengan demikian diperoleh:

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-2}{k-2}$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-3}{k-2}+\binom{r-3}{k-3}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-3}{k-2}+\cdots\\ +\binom{r-k}{1}+\binom{r-k-1}{0}+\binom{r-k-1}{-1}\end{aligned}$$

Suku terakhir $\binom{r-k-1}{-1}$ bernilai 0 dan 1 sehingga dapat dihapuskan. Jika kita menggantikan *r* menjadi *r* + *k* + 1 pada jumlahan sebelumnya dan mentransposkan suku-sukunya, maka diperoleh

$$\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\cdots+\binom{r+k}{k}=\binom{r+k+1}{k} \tag{3.36}$$

Identitas (3.27) berlaku untuk semua bilangan real *r* dan semua bilangan bulat *k*. Perhatikan bahwa dalam persamaan (3.27) argumen atas berawal dari *r*, sedangkan argumen bawah berawal dari 0, dan masing-masing argumen selalu bertambah 1.

Selanjutnya kita menerapkan rumus Pascal secara berulang-ulang terhadap koefisien binomial pertama yang muncul di dalamnya. Mialkan *k* adalah bilangan bulat positif, maka:

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}=\binom{r-2}{k}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-3}{k}+\binom{r-3}{k-1}+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-t}{k}+\binom{r-t}{k-1}+\binom{r-t+1}{k-1}+\cdots+\binom{r-2}{k-1}+\binom{r-1}{k-1}$$

Di sini *t* menyatakan suatu bilangan bulat yang sama dengan bilangan yang diperoleh dari penerapan rumus Pascal. Misalkan sekarang diasumsikan bahwa *r* = *n* adalah suatu bilangan bulat positif. Maka setelah menggunakan rumus Pascal sampai $t = n$, kita akan sampai pada koefisien binomial yang memiliki bilangan argumen atasnya adalah 0. Karena $C(0,k) = 0,$ maka:

$$\binom{n}{k} = \binom{0}{k-1} + \binom{1}{k-1} + \cdots + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$$

Selanjutnya dengan menggantikan k menjadi $k + 1$ dan n menjadi $n + 1$ kemudian mentransposkan suku-sukunya,

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{3.37}$$

Identitas (3.28) berlaku untuk semua bilangan bulat non-negatif k dan n. Identitas ini merupakan bentuk iterasi dari rums Pascal. Jika diambil $k = 1$ di dalam (3.28), diperoleh

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Identitas-identitas yang telah dijelaskan di atas dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

3. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

4. $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

5. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

6. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

7. $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ adalah jumlahan dari semua suku yang berbentuk $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_m^{r_m}$ sedemikian sehingga $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.

8. $\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

9. $\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$

10. $\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r}$

11. $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

12. $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$

13. $\binom{m+n}{m+r} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{r+k}$

14. $\binom{m+n+1}{r+s+1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k}{r}\binom{n+k}{s}$, untuk $s \geq n$.

G. Soal-Soal Latihan

1. Untuk setiap kombinasi-4 dari dua sifat (a) dan (b) di bawah ini, hitunglah banyaknya bilangan empat digit yang memiliki digit 1, 2, 3, 4, atau 5.
   (a) Semua digitnya berbeda
   (b) Bilangannya genap

Catatan: dalam hal ini ada empat kasus: $\varnothing$ (tidak ada batasan), {a} (berlaku sifat (a)), {b} (berlaku sifat (b)), {a,b} (berlaku sifat (a) dan sifat (b)).

2. Ada berapa cara menyusun 52 kartu bridge jika semua kartu yang bergambar sama tersusun dalam satu tumpukan?
3. Ada berapa bilangan pembagi positif berbeda yang dimiliki oleh masing-masing bilangan di bawah ini?
   (a) $3^4 \times 5^2 \times 7^6 \times 11$
   (b) 620
   (c) 10^{10}
4. Tentukanlah pangkat terbesar dari 10 yang merupakan faktor dari bilangan-bilangan beriukut ini
   (a) 50!
   (b) 1000!
5. Ada berapa bilangan bulat yang lebih besar dari 5400 yang memiliki kedua sifat di bawah ini?
   (a) Semua digitnya berbeda
   (b) digit 2 dan digit 7 tidak pernah muncul
6. Ada berapa cara 6 pria dan 6 wanita duduk berselang-seling mengelilingi suatu meja bundar?
7. Ada berapa cara 15 orang duduk mengelilingi satu meja bundar jika B tidak mau duduk di dekat A? Bagaimana jika B tidak mau duduk di sebelah kanan A?
8. Ada berapa himpunan yang terdiri atas 3 angka yang dapat disusun dari bilangan-bilangan $\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$ jika tidak ada dua bilangan berurut dalam anggota himpunan yang sama?
9. Terdapat 100 siswa di sekolah dan tiga asrama yaitu A, B, dan C masing-masing dengan kapasitas 25, 35, dan 40 orang.
   (a) Ada berapa cara mengisi ketiga asrama tersebut?

(b) Misalkan bahwa dari 100 siswa, 50 di antaranya adalah pria dan 50 adalah wanita. Jika asrama A hanya dibeolehkan untuk siswa pria, asrama B hanya untuk siswa wanita, dan asrama C doleh digunakan oleh siswa pria maupun wanita. Ada berapa cara menempati ketiga asrama tersebut?

10. Suatu ruang kelas dilengkapi dengan 2 baris kursi yang terdiri atas 8 kursi. Ada 14 mahasiswa akan menggunakan ruangan tersebut, 5 di antaranya selalu duduk di baris depan dan 4 orang lainnya selalu duduk di baris belakang. Ada berapa cara ke-14 mahasiswa tersebut duduk di bangku yang tersedia?

11. Suatu pesta dihadiri oleh 15 pria dan 20 wanita.
    (a) Ada berapa cara membentuk 15 pasangan dansa yang terdiri dari 1 pria dan 1 wanita?
    (b) Ada berapa cara membentuk 10 pasangan dansa yang terdiri dari 1 pria dan 1 wanita?

12. Ada berapa permutasi yang dapat dibentuk dari semua huruf dalam kata ADDRESSES? Ada berapa permutasi-8 dapat dibentuk dari kesembilan huruf tersebut?

13. Suatu kelompok yang terdiri atas *mn* orang, akan dibagi menjadi *m* tim yang masing-masing tim terdiri atas *n* pemain.
    (a) Tentukan banyaknya cara menyusun pemain jika setiap tim memiliki nama yang berbeda.
    (b) Tentukan banyaknya cara menyusun pemain jika setiap tim tidak memiliki nama.

14. Misalkan *S* adalah suatu multiset dengan perulangan $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k$ dengan $n_1 = 1$. Misalkan $n = n_2 + n_3 + \cdots + n_k$. Buktikan bahwa banyaknya permutasi keliling dari *S* sama dengan

$$\frac{n!}{n_2!n_3!\cdots n_k!}$$

15. Ada 20 kelereng identik yang disusun dalam satu baris seperti pada gambar berikut:

⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿⦿

    Jika enam di antaranya akan dipilih,
    (a) Ada berapa cara memilih keenam kelereng tersebut?
    (b) Ada berapa cara memeilih kelereng sedemikian sehingga kelereng yang dipilih tidak terletak berdekatan

(c) Ada berapa cara memilih kelereng sedemikian sehingga setiap dua kelereng yang dipilih, di antarai oleh setidak-tidaknya 2 kelereng lainnya.

16. Isilah baris pada segitiga Pascal untuk baris 9 dan baris 10.
17. Jabarkanlah $(x+y)^5$ dan $(x+y)^6$ dengan menggunakan teorema binomial
18. Jabarkanlah $(2x-y)^7$ dengan menggunakan teorema binomial.
19. Berapakah koefisien x^5y^{13} dalam $(3x-2y)^{18}$? Berapakah koefisien x^8y^9 ?
20. Gunakan teorema binomial untuk membuktikan bahwa
$$3^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$
21. Gunakan teorema binomial untuk membuktikan bahwa
$$2^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}.$$
22. Carilah suatu koefisien binomial yang sama dengan pernyataan di bawah ini
$$\binom{n}{k}+3\binom{n}{k-1}+3\binom{n}{k-2}+\binom{n}{k-3}.$$
23. Buktikan bahwa
$$\binom{r}{k}=\frac{r}{r-k}\binom{r-1}{k}$$
Untuk suatu bilangan real *r* dan suatu bilangan bulat *k* dengan $r\neq k$.