BAB II

DASAR-DASAR KOMBINATORIKA

Kombinatorika merupakan cabang matematika diskrit yang mempelajari susunan objek-objek yang berhingga dengan karakteristik tertentu. Kombinatorika mulai dikenal pada abad ke-17 melalui tulisan G. W. Leibniz yang berjudul *Dissertion de Arte Combinatorica.* Kajian kombinatorika sangat luas tetapi dalam bab ini hanya akan dipelajari kombinatorika enumeratif, yang mempelajari cara-cara menghitung himpunan objek-objek diskrit dan berhingga yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Hal ini biasanya meliputi penghitungan banyaknya cara melakukan perhitungan dengan pola-pola tertentu dan memungkinkan untuk menjawab pertanyaan seperti:

- Berapa kemungkinan kejadian di dalam suatu undian dan berapa banyak tiket yang harus dibeli agar peluang untuk menang setidak-tidaknya 1%?
- Ada berapa banyak cara menukar uang lembaran Rp. 100.000 menjadi pecahan Rp. 2000, Rp. 5000, Rp. 10.000., Rp. 20.000, dan Rp. 50.000?
- Ada berapa banyak DNA berbeda yang dapat disusun dari seratus nukleotida?
- Ada berapa cara sambungan telepon dapat dilakukan dari Jakarta ke Makassar melalui kantor-kantor cabang Telkomsel?

Definisi 2.1. Kombinatorika adalah teori pencacahan yang meliputi cara penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Teori kombinatorika diterapkan untuk menghitung jenis dan banyaknya sampel yang sedang dikaji. Ada dua prinsip utama dalam menghitung sampel dari suatu peristiwa. Kedua prinsip dasar tersebut adalah prinsip penjumlahan dan prinsip perkalian.

Prinsip penjumlahan dapat dilihat pada berbagai kasus dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya sekelompok mahasiswa pergi mendaki gunung. Lima orang anggota tim memutuskan berhenti di ketinggian tertentu. Tujuh orang lainnya berhasil sampai ke puncak. Ada berapa orang mahasiswa yang pergi mendaki gunung?

Mahasiswa mungkin mentertawakan pertanyaan sesederhana itu karena dengan mudah dapat dipastikan bahwa adalah $5 + 7 = 12$ orang mahasiswa. Tetapi perlu dicatat bahwa jawaban yang sederhana seperti itu hanya merupakan kemungkinan karena semua anggota tim yang pergi mendaki gunung bisa saja memutuskan untuk berhenti atau melanjutkan pendakian. Tidak ada kemungkinan bahwa mahasiswa yang berhenti di tengah jalan akan berhasil sampai di puncak. Demikian juga, mahasiswa yang berhasil sampai di puncak tidak mungkin berhenti dan pulang di tengah pendakian. Dengan kata lain, mahasiswa tersebut dapat dikelompokkan dalam dua kelompok, yaitu yang berhasil sampai ke puncak dan mahasiswa yang berhenti di tengah perjalanan.

Sebaliknya jika dimisalkan bahwa kita tidak mengetahui berapa mahasiswa yang berhasil sampai ke puncak dan berapa mahasiswa yang berhenti, tetapi diketahui lima orang mengenakan kaos berwarna putih dan delapan orang mengenakan topi berwarna coklat. Dalam hal ini tidak dapat diketahui berapa orang yang pergi medaki gunung, karena mungkin saja ada anggota tim yang mengenakan kaos putih juga memakai topi berwarna coklat. Beberapa anggota tim bisa saja berada di dalam dua kelompok berbeda pada saat yang sama. Anggota tim yang mengenakan kaos putih dan memakai topi berwarna coklat tergabung kedua kelompok yang dimaksudkan. Mungkin juga ada anggota tim yang tidak masuk ke dalam salah satu kelompok karena tidak mengenakan kaos putih, dan tidak mengenakan topi berwarna coklat. Pada kasus seperti ini, banyaknya anggota tim yang pergi mendaki gunung tidak dapat diketahui dengan menjumlahkan banyaknya anggota tim yang mengenakan kaos putih dengan jumlah anggota tim yang memakai topi berwarna coklat.

Prinsip utama dan yang paling mudah dari pencacahan akan dijelaskan di bawah ini. Misalkan $\left|\mathrm{X}\right|$ menyatakan banyaknya elemen dari himpunan X yang berhingga. Jadi $\left|\{2,3,5,7\}\right| = 4.$ Pembahasan tentang anggota himpunan akan lebih mudah jika mahasiswa sudah memahami bahwa dua himpunan bagian dikatakan disjoin jika himpunan bagian tersebut tidak memiliki anggota himpunan yang sama.

A. Aturan Dasar Pencacahan

Banyak masalah pencacahan yang tidak dapat diselesaikan hanya dengan menggunakan aturan penjumlahan atau aturan perkalian. Meskipun demikian, dengan menggunakan kombinasi antara keduanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Hal ini terlihat penerapannya pada salah satu bahasa pemrograman komputer, yaitu BASIC. Dalam bahasa pemrograman ini, penamaan dari suatu variabel merupakan string yang terdiri atas satu atau dua karakter alfanumerik, dimana huruf kapital tidak dibedakan dengan huruf kecil. Nama variabel harus diawali dengan huruf dan harus berbeda dengan lima perintah dari dua karakter yang digunakan dalam bahasa program. Ada berapa nama variabel yang berbeda menurut program BASIC?

Misalkan V adalah banyaknya nama variabel yang berbeda di dalam versi BASIC ini. Selanjutnya misalkan V_1 adalah banyaknya nama variabel tersebut yang hanya terdiri atas satu karakter dan V_2 adalah variabel yang panjangnya dua karakter. Menurut aturan penjumlahan, $V = V_1 + V_2$. Perhatikan bahwa $V_1 = 26$, karena suatu variabel yang panjangnya hanya satu karakter pastilah merupakan suatu huruf. Selanjutnya berdasarkan aturan perkalian, terdapat 26.36 nama variabel yang panjangnya dua karakter yang diawali dengan suatu huruf dan diakhiri dengan karakter alfanumerik. Lima dari nama variabel ini tidak dihitung karena nama variabel tersebut telah digunakan sebagai perintah dasar dalam BASIC. Jadi $V_2 = 26.36 - 5 = 931$. Karena itu diperoleh $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ nama variabel yang berbeda dalam versi BASIC tersebut.

Misalkan terdapat sejumlah berhingga pilihan yang harus diambil. Jumlah pilihan yang akan diambil tidak tergantung pada pilihan yang diambil sebelumnya. Maka banyaknya cara mengambil pilihan tersebut adalah hasilkali dari banyaknya masing-masing pilihan-pilihan. Secara simbolis, misalkan c_i adalah banyaknya pilihan *i* yang akan diambil. Jika $1 \leq i \leq n, \text{dan}\ c_{i+1}$ tidak bergantung pada pilihan yang diambil untuk $1, \cdots, i,$ maka banyaknya cara untuk mengambil pilihan adalah $c_1 x c_2 x c_3 x \cdots x c_n$.

Jika kita akan menyusun kata secara acak dari susunan empat huruf yang ada, maka langkah pertama yang akan dilakukan adalah menuliskan salah satu kata yang memuat huruf-huruf tersebut. Langkah selanjutnya adalah memutuskan dari empat huruf yang tersedia, huruf mana yang harus dituliskan pertama kali. Dalam hal ini $c_1 = 4$. untuk setiap cara mengambil c_1, terdapat $c_2 = 3$ pilihan, yaitu huruf kedua yang akan dituliskan, $c_3 = 2$ dan $c_4 = 1$. Huruf-huruf yang diambil dalam setiap pilihan tergantung pada pilihan yang pertama kali diambil, tetapi jumlah pilihannya tetap sama. Inilah yang dimaksud bahwa pengambilan pilihan tidak bergantung pada pilihan yang diambil sebelumnya. Jadi berdasarkan prinsip pencacahan dasar, banyaknya kata yang dapat disusun dari empat huruf adalah $c_4\,x\,c_3\,x\,c_2\,x\,c_1 = 4\,x\,3\,x\,2\,x\,1$.

Perkalian yang berbentuk $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ memiliki sifat yang sangat penting di dalam kombinatorika. Perkalian seperti ini dituliskan dengan lambang *n*! dan dibaca *n* faktorial. Penggunaannya akan ditunjukkan melalui beberapa contoh masalah penyusunan.

Banyaknya kata yang terdiri atas empat huruf dapat dibuat dengan menyusun huruf-huruf dalam kata MATH adalah 4! = 24.

MAHT	MATH	MTAH	MTHA	MHAT	MHTA
ATMH	ATHM	AMTH	AMHT	AHMT	AHTM
THAM	THMA	TMAH	TMHA	TAMH	TAHM
HMTA	HMAT	HATM	HAMT	MTMA	HTAM

Bagaimana dengan kata MATHS? Tentu saja banyaknya kata yang dapat disusun dari semua huruf di dalam kata MATHS adalah sebanyak 5! = 120 kata. Kita dapat menyusun suatu daftar sistematis yang terdiri atas 5 baris, dengan masing-masing baris terdiri atas 4! = 24 kata.

Bagaimana lagi dengan kata OBOR? Ada berapa banyak kata yang terdiri atas 4 huruf dari kata OBOR tersebut yang dapat disusun? Apakah prinsip pencacahan dasar masih dapat diterapkan? Sekali lagi, bayangkan bahwa kita akan memilih secara acak kata yang terdiri atas semua huruf tersebut. Keputusan yang akan diambil adalah memilih satu dari huruf O, B, atau R (bukan memilih dari O, B, O, dan R). Jadi untuk kasus ini, $c_1 = 3$. Banyaknya cara untuk mengambil c_2 tergantung pada huruf yang pertama dipilih. Misalkan B dipilih sebagai huruf pertama, maka pilihan kedua hanya dua kemungkinan yaitu huruf O atau R. Tetapi jika huruf yang pertama dipilih adalah O, maka pilihan berikutnya ada tiga kemungkinan, yaitu B, O, atau R. Apakah kemungkinan yang terjadi adalah $c_2 = 2$ atau $c_2 = 3$? Jawabannya adalah bahwa *prinsip pencacahan dasar tidak berlaku dalam kasus ini* (setidak-tidaknya tidak langsung). Prinsip pencacahan dasar hanya berlaku jika banyaknya pilihan $i+1$ tidak bergantung pada i pilihan yang diambil sebelumnya.

Untuk mencacah semua kemungkinan susunan huruf di dalam kata OBOR, kita membedakan kedua huruf O, misalnya dengan menuliskannya sebagai OBoR. Selanjutnya dengan menggunakan prinsip pencacahan dasar, diperoleh 4! = 24 kata yang *terlihat* berbeda dari huruf O, B, o, dan R.

BOoR	BORo	BoOR	BoRO	BROo	BRoO
OBoR	OBRo	OoBR	OoRB	ORBo	ORoB
oBOR	oBRO	oOBR	oORB	oRBO	oROB
RBOo	RBoO	ROBo	ROoB	RoBO	RoOB

Dari daftar kata-kata yang tersusun pada daftar di atas, terdapat kata seperti OBoR dan oBOR yang terlihat berbeda karena kita telah membedakan kedua huruf O. Faktanya, kedua kata tersebut adalah sama. Jadi, banyaknya kata yang dapat disusun dari kata OBOR bukannya 4! Melainkan 4!/2 = 12.

Bagaimana dengan UMUM? Pertama, tuliskan sebagai UMum. Seperti kasus sebelumnya, banyaknya kata yang dapat disusun dari huruf-huruf tersebut adalah 4! = 24. Jumlah ini harus dibagi dibagi 2 karena ada dua U. Selanjutnya jumlah tersebut dibagi 2 lagi, karena adanya 2 huruf M di dalam kata tersebut. Dengan demikian, banyaknya kata yang dapat disusun dari huruf UMUM adalah $24/(2\mathrm{x}2)=6$. Secara eksplisit susunan semua huruf tersebut adalah:

MMUU MUMU MUUM UMMU UMUM UUMM

Bagaimana lagi untuk kata LULL? Ada berapa banyak kata yang dapat disusun dengan menggunakan semua huruf di dalam kata tersebut? Dengan contoh kata UMUM, dapatkah dipastikan bahwa banyaknya kata yang dapat disusun dari LULL adalah 4!/3 = 8? Ternyata tidak. Dengan mudah dapat dilihat bahwa jawaban yang sebenarnya adalah 4. Bagaimana bisa? Dengan mengetahui kemungkinan semua letak huruf U, maka susunan kata-kata yang terbentuk adalah

ULLL, LULL, LLUL, LLLU

Untuk menunjukkan bahwa 4!/3 adalah jawaban yang salah, kita menyusun huruf-huruf di dalam LULL dengan membedakan ketiga huruf L menjadi L_1, L_2, dan L_3 sehingga susunan semua huruf ada 4! = 24. Jika susunan ke-24 kata tersebut dituliskan dengan menghapus semua indeks pada huruf L, berapa kata LLLU yang muncul? Jawaban untuk pertanyaan ini dapat diselesaikan dengan prinsip pencacahan dasar. Ada tiga pilihan: kemungkinan pertama adalah menempatkan tiga L berturut-turut di depan. Ada dua kemungkinan yang dapat dipilih selanjutnya, yaitu huruf mana dari kedua huruf L yang tersisa yang akan dituliskan pada urutan kedua, dan satu pilihan untuk kemungkinan ketiga, yaitu huruf L mana yang akan dituliskan pada urutan ketiga. Dengan kata lain, LLLU akan muncul sebanyak 3! = 6 kali. Jadi banyaknya cara menyusun keempat huruf tersebut adalah 4!/3! = 24/6 = 4 kali.

Anda bersiap untuk menyelesaikan banyaknya susunan huruf yang dapat dibuat dari semua kata di dalam MISSISSIPPI? Cara penyelesaiannya sama saja. Misalkan semua hurufnya berbeda, maka akan diperoleh banyaknya susunan adalah 11! Karena ada 4 huruf I di dalamnya, maka 11! harus dibagi 4!. Selanjutnya harus dibagi dengan 4! untuk 4 huruf S, dan dibagi 2! untuk 2 huruf P. Jadi banyaknya kata yang dapat disusun dengan semua huruf MISSISSIPPI adalah

$$\frac{11!}{4!4!2!1!} = 34.650.$$

Masalah MISSISSIPPI dapat diselesaikan dengan suatu cara khusus yang dinamakan *koefisien multinomial*, yang akan dipelajari pada Bab III tentang permutasi dan kombinasi. Koefisien multinomial dituliskan dalam bentuk

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\cdots r_k!}, \qquad (2.1)$$

dimana $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_k = n$.

Dengan menggunakan koefisien binomial, dapat diketahui bahwa banyaknya kata yang dapat dibentuk dari semua huruf yang terdapat di dalam kata SASSAFRAS adalah

$$\binom{9}{4,3,1,1} = \frac{9!}{4!\,\mathrm{x}\,3!\,\mathrm{x}\,1!\,\mathrm{x}\,1!} = \frac{9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } \cancel{6} \text{ x } 5 \text{ x } \cancel{4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1}}{\cancel{4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1} \text{ x } \cancel{3 \text{ x } 2 \text{ x } 1} \text{ x } 1 \text{ x } 1} = 2520$$

Contoh 2.1. Suatu susunan huruf terdiri atas A, I, L, S, dan T. kelima huruf akan disusun menjadi suatu kata yang terdiri atas enam huruf yang diawali dan diakhiri huruf konsonan, dan mengapit dua vokal yang tidak berdampingan. Konsonan yang berdekatan harus berbeda. Ada berapa kata yang dapat dibentuk?

Jawab. Dengan menyusun secara sistematis daftar yang diperlukan, maka daftar susunan kata yang dapat dibentuk adalah LALALS, LALALT, LALASL, LALAST, LALATL, LALATS, LALILS, dan berakhir dengan TSITAT, TSITIL, TSITIS, TSITIT.

A.1. Aturan Penjumlahan

Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga yang disjoint (saling lepas), maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| \qquad (2.2)$$

Bukti. Kedua sisi persamaan ini menunjukkan banyaknya anggota himpunan yang sama, yaitu himpunan $A \cup B$. Sisi kiri secara langsung menunjukkan jumlah anggota himpunan tersebut, sedangkan sisi kanan menunjukkan banyaknya anggota himpunan A dan B secara terpisah. Pada masing-masing kasus, setiap anggota himpunan dihitung dengan tepat satu kali (karena A dan B disjoin), sehingga kedua sisi persamaan di atas adalah sama.

Aturan Penjumlahan sering juga dinyatakan sebagai berikut: Jika suatu tugas dapat dilakukan dengan salah satu cara dari n_1 cara atau salah satu cara dari n_2 cara, dimana tidak satupun cara dari n_1 yang sama dengan salah satu cara di n_2 maka ada $n_1 + n_2$ cara untuk melakukan tugas tersebut di atas. Ringkasnya, jika suatu tugas dapat dilakukan dengan *m* cara dan tugas kedua dapat dilakukan dalam *n* cara dimana kedua tugas tersebut tidak dapat dilakukan secara serempak, maka banyaknya pilihan untuk menyelesaikan salah satu cara dari kedua tugas tersebut dapat dilakukan dengan *m* + *n* cara.

Contoh 2.2. Seorang guru mengajar di kelas 4, kelas 5, dan kelas 6. Jika jumlah siswa kelas 4 adalah 25 orang, jumlah siswa kelas 5 adalah 24 orang, dan jumlah siswa kelas 6 adalah 23 orang, maka jumlah siswa yang diajar oleh guru tersebut ada sebanyak 25 + 24 + 23 = 72 orang siswa.

Contoh 2.3. Penelitian dilakukan terhadap matakuliah Analisis Real, Matematika Diskrit, dan Struktur Aljabar. Jumlah peserta matakuliah Analisis Real adalah 25 orang, jumlah peserta matakuliah Matematika Diskrit adalah 27 orang, dan jumlah peserta matakuliah Struktur Aljabar adalah 20 orang. Jumlah mahasiswa yang menjadi sampel dalam penelitian tersebut adalah 25 + 27 + 20 = 72 orang.

Contoh 2.4. Seorang mahasiswa akan membeli sebuah motor. Ia dapat memilih salah satu jenis dari tiga merk motor, Honda 3 pilihan, Suzuki 2 pilihan, dan Yamaha 2 pilihan. Dengan demikian, mahasiswa tersebut mempunyai mempunyai pilihan sebanyak 3 + 2 + 2 = 7 untuk membeli motor yang diinginkan.

Contoh 2.5. Karakter-karakter yang dapat bentuk dari suatu metik ketik standar terdiri atas delapan angka (angka 2 – angka 9), 26 huruf kapital, 26 huruf kecil, dan 24 tanda baca dan simbol khusus. Ada berapa jumlah karakter yang dapat diketik dengan mesin ketik tersebut? Berdasarkan aturan penjumlahan, jumlah karakter yang dapat disusun adalah $8+26+26+24=84,$ tanpa pengulangan karakter.

Masalah seperti di atas mudah diselesaikan karena susunannya sederhana. Tetapi di dalam masalah-masalah yang lebih kompleks, penyelesaian dapat dilakukan dengan terlebih dulu memastikan apakah aturan penjumlahan dapat digunakan atau tidak. Jika aturan penjumlahan dapat digunakan, maka masalah yang ada dapat diuraikan atas bagian-bagian, menghitung kemungkinan pada setiap bagian, kemudian menjumlahkan hasilnya.

Untuk himpunan *A* dan *B,* digunakan simbol $A \cup B$ untuk menyatakan gabungan kedua himpunan tersebut. Untuk sebarang himpunan *S*, ukuran dari himpunan *S* dilambangkan dengan $|S|$. Jadi menurut aturan penjumlahan, jika himpunan *A* dan *B* yang saling lepas maka $|A \cup B| = |A| + |B|$. Untuk sebarang himpunan $A_1, A_2, \cdots, A_n$, notasi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ atau $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ digunakan untuk menyatakan gabungan dari keseluruhan himpunan tersebut. Dengan demikian jika terdapat *n* himpunan yang saling lepas, maka ukuran (banyaknya anggota) dari himpunan gabungan yang dimaksud adalah

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \tag{2.3}$$

atau

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \tag{2.4}$$

Contoh 2.6. Perpustakaan suatu universitas memiliki 40 judul koleksi buku teks bidang sosiologi dan 50 judul koleksi buku teks antropologi. Menurut aturan penjumlahan, seorang mahasiswa di universitas tersebut dapat memilih 90 buku teks sosiologi atau antropologi dari perpustakaan.

Contoh 2.7. Aturan penjumlahan dapat diterapkan dalam kasus dua tugas apabila tidak ada di antara kedua tugas tersebut tidak dapat dilakukan secara bersamaan. Misalkan seorang instruktur komputer yang memiliki 7 buku tentang C++, Java, dan Perl, dapat merekomendasikan salah satu dari 21 buku tersebut kepada seorang bimbingannya untuk mempelajari bahasa pemrograman C++ atau Java, atau Perl.

Contoh 2.8. Suatu tugas akhir mata kuliah komputer yang terdiri atas tiga proyek. Pilihan pertama 23 tugas, tugas kedua 15 tugas, dan tugas ketiga 19 tugas. Tidak ada tugas yang sama dalam ketiga bentuk tersebut. Ada berapa pilihan tugas yang dapat dipilih seorang mahasiswa?

Jawab. Seorang mahasiswa dapat memilih satu proyek dengan memilih salah satu dari proyek pertama, kedua, atau ketiga. Menurut aturan penjumlahan, ada 23 + 15 + 19 = 57 cara untuk menyelesaikan proyek tersebut.

Contoh 2.9. Dalam suatu program komputer, terdapat kode listing seperti di bawah ini. Tentukan nilai *k* dari hasil eksekusi program tersebut, jika $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_m$ adalah bilangan-bilangan bulat positif.

$$
\begin{array}{l}
\text{k:=0} \\
\text{for } i_1 = 1 \text{ to } n_1 \\
\quad \text{k:=k+1} \\
\text{for } i_2 = 1 \text{ to } n_2 \\
\quad \text{k:=k+1} \\
\qquad \vdots \\
\text{for } i_m = 1 \text{ to } n_m \\
\quad \text{k:=k+1}
\end{array}
$$

Jawab. Nilai awal dari *k* adalah nol. Diketahui bahwa blok kode program ini terdiri atas *m* loop. Setiap kali loop berpindah, nilai *k* bertambah 1. Untuk menentukan nilai *k* setelah program ini dieksekusi, maka kita harus memastikan berapa kali loop berpindah. Perhatikan bahwa terdapat n_1 cara untuk berpindah sampai ke loop ke-*i*. Karena loop hanya bisa berpindah satu kali maka menurut aturan jumlah, nilai akhir dari *k* adalah banyaknya cara berpindah dalam *m* loop yaitu $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m$.

Prinsip penjumlahan digunakan jika terdapat r_1 objek berbeda di dalam himpunan pertama, r_2 objek berbeda di dalam himpunan kedua, . . ., r_m objek berbeda di dalam himpunan ke-*m*, dana jika masing-masing himpunan ini saling lepas (disjoint), dan tidak ada dua di antara pekerjaan tersebut yang dapat dilakukan bersamaan maka banyaknya cara untuk memilih salah satu objek dari ke-*m* himpunan tersebut adalah $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_m$.

A.2. Aturan Penjumlahan Umum

Misalkan $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ adalah himpunan-himpunan berhingga yang disjoin satu dengan lainnya, maka

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_n| \tag{2.5}$$

Bukti. Sebagaimana pembuktian prinsip penjumlahan sebelumnya, kedua sisi persamaan menunjukkan himpunan yang sama, yaitu himpunan $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ karena itu sisi kiri dan kanan memiliki anggota himpunan yang sama banyak.

Pernyataan di atas menekankan adanya *dua* himpunan berhingga yang disjoin, tetapi tidak ada hal istimewa dalam bilangan *dua* yang disebutkan di sini. Jika dimisalkan bahwa semua anggota tim pendaki gunung tidak dapat melanjutkan pendakian masing-masing dengan alasan yang berbeda, misalnya 5 orang berhenti karena kelelahan, 3 orang berhenti karena sepatunya rusak, 4 orang berhenti karena kehilangan jejak, kita masih tetap dapat menyimpulkan bahwa jumlah anggota tim tersebut ada sebanyak 5 + 3 + 4 = 12 orang. Kasus ini merupakan contoh penerapan Prinsip Penjumlahan Umum.

Dapat disimpulkan bahwa jika terdapat r_1 objek berbeda di dalam himpunan pertama, r_2 objek berbeda di dalam himpunan kedua, dan seterusnya, sampai r_n objek berbeda di dalam himpunan ke-*n* dan jika semua himpunan-himpunan tersebut disjoin satu sama lain, maka banyaknya cara memilih salah satu objek dari *n* himpunan tadi ada $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n$.

A.3. Aturan Pengurangan

Jika suatu tugas dapat diselesaikan dalam n_1 cara atau n_2 cara, maka banyaknya cara menyelesaikan tugas tersebut adalah $n_1 + n_2$ dikurangi banyaknya cara menyelesaikan tugas dengan cara pertama yang juga termasuk cara kedua. Prinsip pengurangan ini dinamakan juga prinsip inklusi-eksklusi, yang secara khusus digunakan untuk menentukan banyaknya anggota himpunan dalam irisan dua himpunan. Misalkan A_1 dan A_2 adalah himpunan-himpunan, maka terdapat $|A_1|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_1 dan $|A_2|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_2. Banyaknya cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_1 atau himpunan A_2 yaitu banyaknya cara memilih salah satu anggota dari himpunan gabungnnya, sama dengan jumlah banyaknya cara memilih salah satu anggota himpunan A_1 dengan banyaknya cara memilih salah satu anggota himpunan A_2 dikurangi jumlah banyaknya cara memilih salah satu anggota himpunan A_1 yang juga merupakan anggota himpunan A_2. Karena ada $|A_1 \cup A_2|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan A_1 atau A_2 dan $|A_1 \cap A_2|$ cara untuk memilih salah satu anggota himpunan bersama antara kedua himpunan tersebut, maka diperoleh

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \tag{2.6}$$

Contoh 2.10. Ada berapa banyaknya string 8 bit yang diawali dengan bit 1 atau diakhiri dengan dua bit 00?

Jawab. Suatu bit string yang panjangnya 8 yang diawali dengan bit 1 dapat disusun dalam $1^1 2^7 = 128$ cara. Banyaknya cara tersebut diperoleh dari aturan perkalian, dimana bit pertama hanya dapat dipilih dalam satu cara (yaitu bit 1) sedangkan ketujuh bit lainnya masing-masing dapat dipilih dalam dua cara (yaitu 1 atau 0). Dengan cara yang sama, dapat ditentukan bahwa banyaknya cara menyusun string yang panjangnya 8 dan diakhiri dengan bit 00 dapat dilakukan dalam $2^6.1^2 = 64$ cara, karena masing-masing enam bit pertama dapat disusun dalam dua cara sedangkan dua bit terakhir hanya dapat disusun dalam satu cara.

Beberapa cara menyusun string 8 bit yang diawali dengan bit 1 adalah sama dengan cara menyusun string 8 bit yang diakhiri dengan bit 00. Susunan string seperti itu ada sebanyak $2^5 = 32$ cara sesuai dengan aturan perkalian karena bit pertama dapat disusun dalam satu cara saja, masing-masing bit kedua sampai bit keenam dapat disusun dalam dua cara, dan dua bit terakhir dapat disusun dalam satu cara. Akibatnya, jumlah string 8 bit yang diawali dengan bit 1 atau diakhiri dengan bit 00 adalah 128 + 64 – 32 = 160 cara.

Contoh 2.11. Suatu perusahaan komputer menerima 350 berkas lamaran dari lulusan ilmu komputer. Misalkan 220 pelamar menguasai pemrograman C++, 147 pelamar menguasai pemrograman Delphi, dan 51 pelamar menguasai pemrograman C++ dan juga Delphi. Ada berapa pelamar yang tidak menguasai pemrograman C++ dan juga tidak menguasai pemrograman Delphi?

Jawab. Untuk menentukan banyaknya pelamar yang tidak menguasai pemrograman C++ maupun Delphi maka digunakan prinsip pengurangan. Total pelamar dikurangi dengan banyaknya pelamar yang menguasai pemrograman C++ dan menguasai pemrograman Delphi. Misalkan A_1 adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman C++ dan A_2 adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman Delphi. Maka $A_1 \cup A_2$ adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman C++ atau Delphi (atau kedua-duanya) dan $A_1 \cap A_2$ adalah himpunan pelamar yang menguasai pemrograman C++ dan Delphi. Berdasarkan aturan pengurangan, banyaknya pelamar yang menguasai pemrograman C++ atau Delphi (atau kedua-duanya) sama dengan:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 220 + 147 - 51 = 316.$$

Disimpulkan bahwa 350 – 316 = 34 pelamar tidak menguasai pemrograman C++ dan juga tidak menguasai pemrograman Delphi.

Masalah tim pendaki gunung yang telah disebutkan sebelumnya, dapat juga ditinjau dengan cara berbeda, misalnya sebagai berikut: Dua belas orang mahasiswa akan pergi mendaki gunung. Lima orang di antaranya berhenti dan tidak melanjutkan pendakian, sedangkan anggota tim lainnya berhasil menyelesaikan misi. Berapa orang anggota tim yang berhasil melanjutkan pendakian sampai ke puncak? Jawabannya adalah 12 – 5 = 7. Masalah dengan dua himpunan berhingga seperti ini, jika A adalah himpunan berhingga, dan $B \subseteq A$. Maka $|A - B| = |A| - |B|$. Kesamaan ini dapat dibuktikan melalui aturan penjumlahan. Menurut Aturan Penjumlahan, kesamaan tersebut adalah benar, karena A – B adalah himpunan yang disjoin, dan himpunan gabungannya adalah A. Dengan kata lain, kedua sisi dalam persamaan itu menyatakan banyaknya elemen himpunan A, tetapi sisi kiri menyatakan menyatakan banyaknya anggota himpunan yang tidak terdapat di B, kemudian menentukan banyaknya anggota himpunan yang ada di B. Dengan demikian, terbukti dengan mengurangkan $|B|$ dari kedua sisi persamaan $|A - B| = |A| - |B|$.

Contoh 2.12. Misalkan diketahui himpunan-himpunan $A = \{2,3,5,7\}$ dan $B = \{4,5,7\}$ maka $A - B = \{2,3\}$. Perhatikan bahwa A – B dapat terdefinisi bahkan meskipun B bukanlah himpunan bagian dari A. Meskipun demikian prinsip pengurangan berlaku hanya jika B merupakan himpunan bagian dari A. Untuk menyederhanakan pembahasan, maka diperkenalkan dua himpunan yang berbeda. Jika *A* dan *B* adalah dua himpunan, maka *A* –

B adalah himpunan yang terdiri atas anggota-anggota himpunan *A* yang bukan merupakan anggota himpunan *B*.

Pendekatan $B \subseteq A$ sangat penting dalam kasus ini. Mahasiswa dapat membuktikan bahwa prinsip pengurangan tidak berlaku pada himpunan-himpunan A dan B di dalam Contoh 2.12. Misalkan pada kasus lain, A adalah himpunan semua bilangan bulat positif satu digit yang merupakan kelipatan 2, dan B adalah himpunan semua bilangan bulat positif satu digit yang merupakan kelipatan 3. Dengan demikain dapat diketahui bahwa $A = \{2,4,6,8\}$ sehingga $|A| = 4$ dan $B = \{3,6,9\}$ sehingga $|B| = 3$. Jadi $|A| - |B| = 4 - 3 = 1$ dan $|A - B| = |\{2,4,8\}| = 3$. Tetapi karena $4 - 3 \neq 3$ maka jelas bahwa prinsip pengurangan tidak berlaku dalam kasus ini. Dari contoh ini terlihat bahwa prinsip pengurangan tidak terpenuhi karena B bukanlah himpunan bagian dari A.

Contoh 2.13. Buktikan bahwa banyaknya bilangan bulat positif yang kurang atau sama dengan 1000 yang memiliki setidak-tidaknya dua digit berbeda adalah 1000 – 27 = 973.

Bukti: Misalkan A adalah himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang atau sama dengan 1000, dan misalkan B adalah himpunan bagian dari A yang terdiri atas semua bilangan bulat positif yang kurang atau sama dengan 1000, yang tidak memiliki dua digit berbeda. Dapat diklaim bahwa $|A - B|$ = 973. Berdasarkan Prinsip Pengurangan, diketahui bahwa $|A - B| = |A| - |B|$. Selanjutnya diketahui juga bahwa $|A| = 1000$. Bukti dari perntanyaan di atas dapat ditemukan jika dapat ditunjukkan bahwa $|B| = 27$. Apa saja anggota himpunan B? Anggota himpunan B adalah semua bilangan bulat positif yang memiliki sebanyak-banyaknya tiga digit yang tidak memiliki dua digit yang berbeda. Termasuk di dalam himpunan ini adalah sebarang anggota himpunan B yang hanya terdiri dari satu digit, atau yang salah satu digitnya berulang satu kali, dua kali, atau tiga kali. Jadi anggota himpunan B adalah 1, 2, 3, . . ., 9, 11, 22, 33, . . ., 99, dan 111, 222, . . ., 999. Jumlah dari semua anggota himpunan B adalah 27, yang membuktikan klaim tersebut di atas. Menggunakan Prinsip Pengurangan akan menyederhanakan perhitungan karena $|A|$ mudah dihitung sehingga $|B|$ juga akan lebih mudah dihitung. Karena itu, menghitung $|A| - |B|$ lebih cepat dilakukan dari pada menghitung $|A - B|$ secara langsung.

A.4. Aturan Perkalian

Misalkan *X* dan *Y* adalah dua himpunan berhingga. Maka banyaknya pasangan berurutan (x, y) yang memenuhi $x \in X$ dan $y \in Y$ adalah $|X| \cdot |Y|$ yang sering dinyatakan dalam bentuk $n(X) \cdot n(Y)$.

Bukti. Ada $|X|$ pilihan untuk elemen pertama dari pasangan (x, y), dan selanjutnya tanpa memperhatikan pilihan apapun untuk *x*, terdapat $|Y|$ pilihan untuk *y*. Setiap pilihan *x* dapat dipasangkan dengan setiap pilihan dari *y*, sehingga dengan demikian pernyataan tersebut di atas terbukti.

Dapat dilihat bahwa himpunan semua pasangan berurutan (x, y) sedemikian sehingga $x \in X$ dan $y \in Y$ dinamakan hasilkali langsung atau hasilkali Cartesian antara *X* dan *Y*, dan sering dilambangkan dengan XY. Pasangan (x, y) dinamakan pasangan berurutan karena urutan letak kedua anggotanya diperhatikan, artinya $(x, y) \neq (y, x)$. Misalkan suatu prosedur dapat dipilah menjadi dua tugas. Jika terdapat n_1 cara untuk melakukan tugas pertama, dan untuk setiap cara melakukan tugas pertama ini, terdapat n_2 cara untuk melaksanakan tugas kedua, maka terdapat $n_1 n_2$ cara untuk menyelesaikan prosedur tersebut.

Contoh 2.14. Jika huruf-huruf dalam kata KOMPUTER dapat digunakan berulang, maka banyaknya susunan 12 huruf adalah $8^{12} \approx 6.872 \text{ x } 10^{10.}$

Contoh 2.15. Berapa banyak string yang terdiri atas 7 karakter, yang dapat dibentuk dari dua bit (angka 0 dan 1).

Jawab. Setiap satuan string terdiri atas dua pilihan, yaitu 0 atau 1. Dengan demikian, string yang terdiri atas 7 karakter dapat disusun dalam $2^7 = 128$ cara.

Contoh 2.16. Seorang dosen mengajar mata kuliah matematika diskrit, aljabar, dan trigonometri. Jumlah peserta mata kuliah matematika diskrit adalah 20 orang, peserta mata kuliah aljabar adalah 25 orang, dan jumlah peserta mata kuliah trigonometri adalah 30 orang. Jika dosen tersebut akan memilih tiga orang mahasiswa yang masing-masing satu orang mewakili peserta mata kuliah, maka dosen tersebut dapat memilih mahasiswa dalam 20 x 25 x 30 = 15.000 cara.

Contoh 2.17. Berapa banyak bilangan ganjil yang terletak antara 1000 dan 9999, jika (a) semua angkanya berbeda, dan (b) angkanya boleh berulang?

Jawab:

(a) Jika semua angkanya berbeda, maka:
- posisi satuan terdiri atas 5 kemungkinan yaitu 1, 3, 5, 7, dan 9,
- posisi ribuan terdiri atas 8 kemungkian yaitu 1 sampai dengan 9,
- posisi ratusan terdiri atas 8 kemungkinan yaitu 0 sampai dengan 9, kecuali dua angka yang telah digunakan pada posisi satuan dan ribuan, dan
- posisi puluhan terdiri atas 7 kemungkinan yaitu 0 sampai 9, kecuali tiga angka yang telah digunakan pada posisi satuan, ribuan, dan puluhan.

Jadi banyaknya bilangan ganjil yang terletak antara 1000 dan 9999 jika semua angkanya berbeda adalah (5)(8)(8)(7) = 2240.

(b) Jika angkanya boleh berulang, maka:
- posisi satuan terdiri atas 5 kemungkinan yaitu 1, 3, 5, 7, dan 9,
- posisi ribuan terdiri atas 9 kemungkian yaitu 1 sampai dengan 9,
- posisi ratusan terdiri atas 10 kemungkinan yaitu 0 sampai dengan 9, dan
- posisi puluhan terdiri atas 10 kemungkinan yaitu 0 sampai 9.

Jadi banyaknya bilangan ganjil yang terletak antara 1000 dan 9999 jika angkanya boleh berulang adalah (5)(9)(10)(10) = 4500.

Teorema 2.1. Misalkan A adalah suatu himpunan yang akan dihitung jumlah anggotanya. Andaikan terdapat himpunan bagian A_1 sehingga untuk setiap anggota himpunan A_1, terdapat himpunan bagian A_2 sedemikian sehingga setiap anggota himpunan A dapat dicirikan secara unik dengan pasangan anggota himpunan A_1 dan A_2, dan untuk setiap anggota himpunan A_1, jumlah pasangannya di A_2, selalu tetap yaitu $|A_2|$, maka, $|A| = |A_1||A_2|$.

Suatu dealer mobil memasarkan lima jenis model, dan setiap model tersedia dalam tujuh warna yang berbeda. Jika seorang calon pembeli hanya tertarik pada model dan warna mobil, maka dapat ditentukan ada berapa cara pembeli tersebut memilih mobil yang akan dibeli.

Misalkan kelima model dilambangkan dengan huruf-huruf *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E*, dan warna mobilnya dilambangkan dengan angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7. Masing-masing pilihan dapat dinyatakan sebagai suatu pasangan satu huruf dan satu angka tadi. Pada Tabel 1 di bawah ini, baris menunjukkan model dan kolom menyatakan warna mobil. Total pilihan pembeli ada sebanyak 5 x 7 = 35.

Tabel 1. Pilihan untuk lima model dan tujuh warna mobil

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
A	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
B	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
D	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
E	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7

Contoh 2.18. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat positif *k*, banyaknya bilangan bulat positif yang terdiri atas *k*-digit adalah 9.10^{k-1}.

Bukti: Suatu bilangan bulat positif *k*-digit adalah $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)$ dengan x_i adalah digit ke-*i* dalam bilangan bulat yang dimaksud. Jadi x_1 berasal dari $X_1 = \{1, 2, \cdots, 9\}$ sedangkan x_i berasal dari $X_i = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ untuk $2 \le i \le k$. Oleh karena itu, $|X_1| = 9$ dan $|X_i| = 10$ untuk $2 \le i \le k$.

Contoh 2.19. Buktikan bahwa banyaknya bilangan bulat positif 2-digit ada 90.

Jawab: Suatu bilangan bulat positif yang terdiri atas dua digit adalah pasangan berurutan (*x*, *y*), dengan *x* adalah digit pertama sedangkan *y* adalah digit kedua. Perhatikan bahwa *x* berasal dari himpunan $X = \{1, 2, \cdots, 9\}$, dan *y* berasal dari himpunan $Y = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. Dengan demikian $|X| = 9$ dan $|Y| = 10$. Berdasarkan Teorema 2.1, banyaknya pasangan berurutan (x, y) yang dimaksudkan di atas ada $|X| \text{x} |Y| = 9 \text{x} 10 = 90$.

Contoh 2.20. Ada berapa bilangan bulat positif 4-digit yang diawali dan diakhiri angka-angka genap?

Jawab: Digit pertama harus berasal dari himpunan yang terdiri atas 4-anggota himpuan yaitu $\{2,4,6,8\}$ dan digit terakhir berasal dari himpunan yang terdiri atas 5-anggota himpunan yaitu $\{0,2,4,6,8\}$. Digit kedua dan ketiga berasal dari himpunan dengan 10 anggota himpunan yaitu $\{0,1,2,\cdots,9\}$. Oleh karena itu, banyaknya bilangan bulat positif yang memenuhi sifat tersebut di atas ada 4.10.10.5 = 2000 bilangan.

Contoh 2.21. Mahasiswa program studi matematika akan memilih ketua dan sekretaris dalam rangka pelaksanaan seminar nasional. Jika disepakati bahwa ketua dipilih dari 8 orang laki-laki dan sekretaris dipilih dari 6 orang wanita, maka berdasarkan aturan perkalian, banyaknya cara yang mungkin dalam menetapkan pasangan ketua dan sekretaris adalah 8 x 6 = 48 cara.

Contoh 2.22. Nomor kode peserta tes penerimaan mahasiswa baru terdiri atas dua huruf diikuti empat angka.

a) Jika huruf dan angka tidak berulang di dalam nomor kode tersebut, maka ada 26 x 25 x 10 x 9 x 8 x 7 = 3.276.000 kode yang dapat disusun.
b) Jika huruf dan angka boleh berulang, maka ada 26 x 26 x 10 x 10 x 10 x 10 = 6.760.000 nomor kode yang dapat disusun.
c) Jika huruf dan angka boleh berulang seperti pada bagian (b), ada berapa nomor kode yang hanya menggunakan huruf vokal dan bilangan genap?

Contoh 2.23. Untuk menyimpan data, memori utama dari suatu komputer disusun dari sejumlah besar rangkaian. Masing-masing rangkaian dapat menyimpan data satu *bit* – yaitu salah satu dari kode biner 0 atau 1. Rangkaian penyimpanan data tersebut tersusun dalam suatu unit yang disebut sel memori. Untuk mengidentifikasi sel tersebut di dalam memori utama suatu komputer, masing-masing sel ditandai dengan nama unik yang dinamakan *address*. Untuk beberapa komputer seperti mikrokontroller, address dinyatakan dalam bentuk susunan delapan bit yang secara kolektif dinamakan *byte*. Berdasarkan aturan perkalian, dapat diketahui bahwa ada 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^8 = 256 byte. Jadi ada 256 address yang dapat digunakan oleh sel untuk menyimpan data atau informasi tertentu.

Peralatan rumah tangga seperti oven microwave menggunakan chip mikrokontroller untuk mengendalikan tempertatur di dalamnya. “Komputer-komputer kecil” tersebut mengandung ribuan sel memori dan menggunakan dua address dua-byte untuk mengidentifikasi sel-sel yang ada di dalam memori utama. Address seperti itu tersusun atas dua byte berturut-turut, atau 16 bit berturut-turut. Jadi ada 256 x 256 = 2^8 x 2^8 = 2^{16} = 65.536 address yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi sel-sel di memori utama.

Perangkat komputer tertentu menggunakan sistem address 4 byte. Sistem address 32 bit seperti ini digunakan untuk merancang arsitektur processor Pentium yang terdiri atas 2^8 x 2^8 x 2^8 x 2^8 = 2^{32} = 4.294.967.296 address untuk mengidentifikasi sel-sel di memori utama. Processor Itanium, menggunakan address 8 byte yang terdiri atas 2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616 address untuk mengidentifikasi sel-sel di memori utama. Semakin tinggi address yang digunakan, semakin besar kapasitas data dan informasi yang dapat tersimpan pada sistem komputer tersebut.

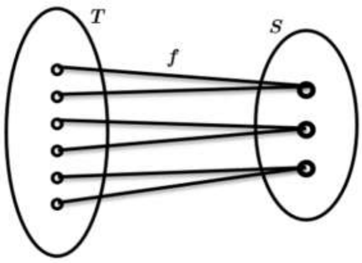
A.5. Aturan Pembagian

Misalkan sejumlah keluarga diundang ke suatu pesta anak-anak. Setiap keluarga datang dengan membawa dua anak. Di pesta tersebut, anak-anak bermain di ruangan tertentu sementara petugas jaga mengawasi mereka. Jika seorang pengunjung melihat ke ruang bermain anak-anak, dapatkan pengunjung tersebut mengetahui berapa jumlah keluarga di pesta tersebut?

Jawaban terhadap pertanyaan ini tidak sulit. Pengunjung tersebut dapat menghitung jumlah anak di ruang bermain kemudian membagi jumlahnya dengan dua. Di dalam masalah ini digunakan teknik menghitung yang sangat umum. Jika kita akan menghitung banyaknya anggota dari himpunan tertentu, misalnya *S*, seringkali lebih mudah menghitung banyaknya anggota dari himpunan lain misalnya *T,* sehingga setiap anggota himpunan *S* yang berkaitan dengan *d* anggota dari *T*, dimana setiap anggota himpunan *T* berhubungan dengan salah satu anggota himpunan *S*. Relasi antara himpunan *T* dan *S* dijelaskan melalui Definisi 2.2 di bawah ini.

Definisi 2.2. Misalkan *S* dan *T* adalah himpunan-himpunan berhingga, dan misalkan *d* adalah suatu bilangan bulat tetap. Fungsi $f : T \rightarrow S$ merupakan pemetaan *d*-ke-satu jika untuk setiap anggota himpunan $s \in S$ terdapat dengan tepat *d* anggota himpunan $t \in T$

sehingga $f(t) = s.$ Ingat bahwa fakta *f* adalah fungsi yang secara otomatis menjamin bahwa $f(t)$ adalah unik untuk setiap $t \in T.$



Gambar 2.1. Pemetaan $f : T \rightarrow S$

Teorema 2.2 Prinsip Pembagian.

Misalkan *S* dan *T* adalah himpunan-himpunan berhingga sehingga terdapat suatu fungsi *d*-ke-1 $f : T \rightarrow S.$ Maka

$$|S| = \frac{|T|}{d} \tag{2.7}$$

Bukti. Hal ini merupakan konsekuensi langsung dari Definisi 2.2.

Menurut aturan pembagian, terdapat *n*/*d* cara untuk melakukan suatu tugas jika tugas tersebut dapat dijalankan melalui suatu prosedur yang dapat dilakukan dalam *n* cara, dan untuk setiap cara *w*, terdapat tepat *d* dari *n* cara yang berkorespondensi dengan cara *w*.

Dengan kata lain aturan pembagian dapat dinyatakan dalam bentuk himpunan sebagai berikut: *Jika himpunan berhingaa A adalah gabungan dari n subset-subset yang saling lepas yang masing-masing memiliki d anggota, maka* $n = |A| / d.$ Aturan pembagian ini juga dapat dinyatakan sebagai fungsi: *Jika f adalah suatu fungsi dari A ke B dimana A dan B adalah himpunan-himpunan berhingga, dan bahwa untuk setiap nilai* $y \in B$ *terdapat tepat d nilai* $x \in A$ *sedemikian sehingga* $f(x) = y$ (*artinya fungsi f bersifat d-ke-satu*), *maka* $|B| = |A| / d.$

Contoh 2.24. Berapa kemungkinan bahwa 30 orang mahasiswa peserta matakuliah matematika diskrit lahir pada tanggal yang berbeda?

Jawab. Asumsikan bahwa selama 365 hari dalam satu tahun, selalu terdapat *satu* bayi yang lahir. Jika banyaknya cara menentukan tanggal kelahiran 30 orang dalam satu tahun adalah N dan setiap tanggal kelahiran yang berbeda, dinyatakan dengan D. Banyaknya kemungkinan bahwa ke-30 orang mahasiswa lahir pada tanggal yang berbeda adalah D/N.

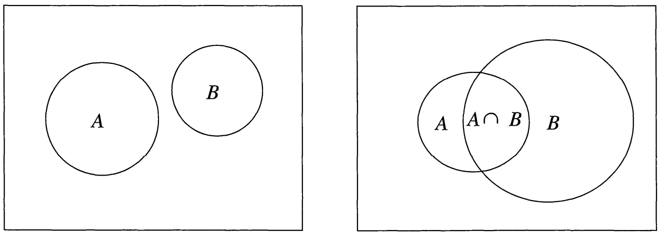
Contoh 2.25. Banyaknya permutasi dari huruf-huruf di dalam kata KOMPUTER adalah 8!. Jika hanya 5 dari huruf tersebut yang digunakan maka banyaknya permutasi adalah $P(8,5) = 8!/(8-5)! = 8!/3! = 6720$.

Contoh 2.26. Ada berapa cara berbeda untuk mendudukkan empat orang mengelilingi satu meja, dimana dua tempat duduk dianggap sama jika setiap posisi duduk seseorang diapit oleh orang yang sama dengan posisi awal?

Jawab. Misalkan dipilih sebarang tempat duduk dan menandai tempat tersebut dengan kursi 1. Tempat duduk lainnya ditandai juga dengan kursi 2, 3, dan 4 berturut-turut searah jarum jam. Perhatikan bahwa ada 4 cara memilih orang untuk duduk di kursi 1, tiga cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 2, dua cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 3, dan satu cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 4. Jadi ada $4! = 24$ cara untuk menyusun keempat orang tersebut pada kursi-kursi yang disiapkan. Namun demikian, dari empat pilihan untuk duduk di kursi 1 akan menghasilkan posisi duduk yang sama karena hanya ada dua susunan yang berbeda jika seseorang diapit oleh dua orang yang sama dengan posisi awal. Karena ada empat cara untuk memilih orang yang akan duduk di kursi 1, maka menurut aturan pembagian, terdapat $24/4 = 6$ susunan duduk yang berbeda dari empat orang mengelilingi meja tersebut.

Aturan dasar di dalam kombinatorika akan memberi petunjuk cara menghitung sekumpulan susunan yang memenuhi syarat tertentu atau yang berada di dalam sekumpulan susunan yang terbentuk dari beberapa kumpulan lainnya. Misalkan terdapat dua himpunan benda A dan B (objek dapat berupa susunan dari beberapa objek lainnya). Gabungan dari kedua himpunan tersebut, $A \cup B$, yang didefinisikan sebagai $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$, adalah himpunan benda yang terdapat di A atau di B, atau di A dan B. Sedangkan irisan kedua himpunan tersebut, yang didefinisikan $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$ adalah himpunan benda-benda di A dan B. Dapat dikatakan bahwa aturan paling sederhana dari "prinsip pencacahan" adalah gabungan dua himpunan yang tidak memiliki irisan. Himpunan seperti ini dinamakan himpunan saling lepas (disjoint). Aturan penjumlahan menyatakan bahwa "*banyaknya elemen di dalam gabungan* *dari suatu kumpulan berhingga himpunan-himpunan yang saling lepas adalah jumlah dari banyaknya elemen di dalam masing-masing himpunan tersebut.*

Gambar 2.2 menyatakan himpuan A dan B sebagai himpunan bagian dari suatu himpunan semesta. Aturan penjumlahan berlaku pada himpunan yang saling lepas, tetapi tidak berlaku pada himpunan-himpunan yang beririsan. Jika himpunan tersebut beririsan, ukuran $A \cup B$ bukanlah jumlah dari elemen *A* dan *B*.



Gambar 2.2. Himpunan A dan B yang disjoint dan beririsan

Jika suatu himpunan A terdiri atas himpunan bagian $A_1, A_2, \cdots, A_n$ maka jumlah unsur pada himpunan A akan sama dengan jumlah semua unsur yang ada pada setiap himpunan bagian $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Secara tidak langsung, pada prinsip penjumlahan, setiap himpunan bagian $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tidak saling tumpang tindih (saling lepas). Untuk himpunan yang saling tumpang tindih tidak berlaku lagi prinsip penjumlahan, dan ini harus diselesaikan dengan prinsip inklusi-eksklusi yang akan dibahas kemudian.

Contoh 2.27. Berbeda dengan Contoh 2.25 dan Contoh 2.26, banyaknya susunan huruf-huruf dari kata BALL ada 12, bukan 4! (= 24). Alasannya adalah bahwa kata BALL tidak terdiri atas 4 huruf yang berbeda, melainkan 4 huruf yang terdiri atas tiga huruf berbeda, dan satu huruf berulang.

Contoh 2.28. Dengan menggunakan Contoh 2.27, dapat diketahui banyaknya susunan 9 huruf dalam kata DATABASES. Pada kata tersebut ada 1 huruf D, 3 huruf A, 1 huruf T, 1 huruf B, 1 huruf E, dan 2 huruf S. dengan demikian akan diperoleh 3! = 6 susunan kata dengan huruf-huruf A yang dibedakan dengan kode indeks. Demikian juga, untuk dua huruf S diperoleh 2! = 2 susunan kata dengan S yang dibedakan dengan kode indeks. Karena itu banyaknya permutasi yang dapat disusun dari kata $DA_1TA_2BA_3S_1ES_2$ adalah

(2!)(3!). Jadi banyaknya susunan yang dapat dibuat dari kata DATABASES adalah 9!/(2!.3!) = 30.240.

Dari Contoh 2.25 - 2.27 dapat disimpulkan bahwa jika terdapat *n* objek yang terdiri atas n_1 objek tipe pertama, n_2 objek tipe kedua, … , dan n_r objek tipe ke-*r*, dimana $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r = n$ maka banyaknya susunan yang dapat dibentuk dari *n* objek adalah $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

Aturan perkalian menyatakan bahwa himpunan gabungan dari *m* himpunan saling lepas yang masing-masing memiliki *n* anggota akan memiliki *m* x *n* anggota. Pernyataan ini dapat dibuktikan dengan menggunakan prinsip penjumlahan seperti yang dilakukan pada beberapa contoh yang telah ditunjukkan. Tetapi pendekatan yang lebih konkrit mengenai aturan perkalian adalah sebagai berikut: jika terdapat *m* orang anggota yang masing-masing dapat mencalonkan diri sebagai ketua dan masing-masing dapat berpasangan dengan *n* anggota lainnya sebagai calon sekretaris, maka banyaknya pasangan cara menyusun calon ketua dan sekretaris adalah *m* x *n.*

Prinsip perkalian digunakan untuk melakukan suatu pekerjaan yang terdiri atas *m* prosedur berurutan. Misalkan ada r_1 kemungkinan prosedur pada tahapan pertama, ada r_2 kemungkinan prosedur pada tahapan kedua, . . . , ada r_m kemungkinan prosedur pada tahapan ke-*m*. Jika banyaknya kemungkinan pada masing-masing tahapan tidak tergantung pada pilihan yang diambil pada tahapan sebelumnya, dan jika semua kemungkinan tersebut berbeda, maka total prosedur yang dapat dilakukan adalah $r_1r_2r_3\cdots r_m$. Prinsip perkalian dipergunakan apabila suatu pekerjaan terdiri atas beberapa kelompok atau tahap yang terpisah satu sama lainnya. Dengan kata lain prinsip perkalian digunakan untuk menyelesaikan pekerjaan yang tidak dapat diselesaikan secara bersamaan, melainkan haru diselesaikan tahapan demi tahapan. Setiap tahap dapat dilakukan dengan beberapa cara, dan setiap tahap dilanjutkan pada tahap berikutnya, yang juga terdiri atas beberapa pilihan. Dengan demikian keseluruhan pilihan yang mungkin dapat dilakukan untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut merupakan hasil kali dari banyaknya pilihan pada suatu tahap dengan tahap lainnya.

Contoh 2.29. Misalkan suatu kelompok mahasiswa memiliki 15 orang anggota, akan memilih seorang ketua dan seorang sekretaris. Ada berapa cara yang dapat dilakukan untuk memilih ketua dan sekretaris?

Untuk menyelesaikan masalah di atas, cara yang dapat dilakukan adalah menyusun daftar dua nama sebagai calon ketua dan sekretaris. Banyaknya daftar pasangan calon ketua dan sekretaris yang dapat disusun dari semua nama anggota adalah jawaban yang diinginkan dalam persoalan ini. Diketahui, banyaknya daftar pasangan ada $15 \times 14 = 210$. Banyaknya daftar pasangan yang mungkin adalah dengan mengandaikan bahwa masing-masing anggota memiliki peluang yang sama untuk terpilih sebagai ketua atau sekretaris. Jika seorang anggota mencalonkan diri sebagai ketua, maka ada 14 anggota lain yang dapat terpilih sebagai sekretaris. Calon ketua tidak dapat lagi dicalonkan sebagai calon sekretaris, demikian sebaliknya. Hal yang sama berlaku juga untuk anggota lainnya. Karena ada 15 orang anggota yang masing-masing mencalonkan diri sebagai ketua dan masing-masing memiliki daftar nama 14 orang calon sekretaris, maka banyaknya daftar pasangan calon ketua dan sekretaris adalah $15 \times 14 = 210$.

Misalkan sebuah prosedur dapat dipecah dalam dua penugasan. Penugasan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan tugas kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara setelah tugas pertama dilakukan. Dengan demikian, dalam mengerjakan prosedur tersebut ada $(n_1.n_2)$ cara. Pada prinsip perkalian, bisa terjadi saling tumpang tindih (tidak saling lepas).

Contoh 2.30. Ada berapa pelat nomor polisi yang dapat dibuat jika setiap pelat terdiri atas tiga huruf diikuti dengan dua angka?

Jawab. Ada 26 pilihan untuk masing-masing huruf di depan, dan 10 pilihan untuk dua angka di belakangnya. Jadi, ada $(26)^3(10)^2$ = 1.757.600 pelat nomor polisi yang dapat dibuat. Jika huruf dan angka tidak boleh berulang pada pelat nomor polisi tersebut, maka ada (26)(25)(24)(10)(9) = 1.404.000 pelat. Dengan kata lain, banyaknya pelat nomor polisi yang mengandung huruf dan angka berulang adalah 1.757.600 - 1.404.000 = 353.600 pelat.

Contoh 2.31. Pada suatu rak buku, tersedia 5 buku berbahasa Spanyol, 6 buku berbahasa Perancis, dan 8 berbahasa Jerman. Ada berapa cara mengambil dua buku dalam bahasa berbeda?

Jawab.

- Ada (5)(6) = 30 cara mengambil satu buku berbahasa Spanyol dan satu buku berbahasa Perancis,
- Ada (5)(8) = 40 cara mengambil satu buku berbahasa Spanyol dan satu buku berbahasa Jerman, dan
- Ada (6)(8) = 48 cara mengambil satu buku berbahasa Perancis dan satu buku berbahasa Jerman.

Dengan demikian, banyaknya cara memilih dua buku dalam bahasa berbeda ada 30 + 40 + 48 = 118 cara.

Contoh 2.32. Jika diketahui angka-angka yang tersedia adalah 1, 3, 6, 7, 8, 9, maka:

(a) Ada berapa bilangan berdigit 4 yang dapat dibuat jika angka tersebut boleh berulang?

(b) Ada berapa banyaknya bilangan tersebut yang kurang dari 7000?

(c) Ada berapa bilangan genap?

(d) Berapa banyaknya bilangan dalam (a) – (c) jika angka tidak berulang?

Jawab.

Jika angka boleh berulang:

(a) $6^4 = 1296$. (b). $3(6^3) = 648$ (c). $2(6^3) = 432$.

(d) Jika angka tidak berulang:

(a) (6)(5)(4)(3) (c). (3)(5)(4)(3) (c). (2)(5)(4)(3)

Contoh 2.33. Setiap operator pada suatu jaringan komputer memiliki password yang panjangnya 6 sampai 8 karakter. Masing-masing password hanya menggunakan huruf kapital dan terdiri atas setidak-tidaknya satu angka. Ada berapa kemungkinan password yang ada?

Jawab. Misalkan P adalah banyaknya kemungkinan susunan password, dan P_i adalah banyaknya password yang panjangnya i karakter. Dengan demikian, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_6 + \mathrm{P}_7 + \mathrm{P}_8$. Untuk menghitung P_6 maka harus dihitung banyaknya kemungkinan susunan password yang terdiri atas 6 karakter tanpa menggunakan angka, yaitu 26^6 = 308.915.776, kemudian dikurangkan dari banyaknya kemungkinan susunan password yang menggunakan huruf maupun angka, yaitu $36^6 = 2.176.782.336$. Jadi, $P_6 = 36^6 - 26^6 = 2.612.282.842.880$. dengan cara yang sama, diketahui $P_7 = 36^7 - 26^7$ dan $P_8 = 36^8 - 26^8$. Akhirnya diketahui ada $P = 2.684.483.063.360$ kemungkinan susunan password.

Contoh 2.34. Berapa banyak string dengan panjang tujuh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1)?

Jawab. Setiap suku pada string tersebut mempunyai dua cara pemilihan, yaitu 0 atau 1. Dengan demikian, pada pemilihan string dengan panjang tujuah dapat dilakukan dengan: $2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 2^7 = 128$ cara.

Contoh 2.35. Seorang dosen mengajarkan matakuliah Analisis Real, Matematika Diskrit, dan Struktur Aljabar. Jika jumlah peserta matakuliah Analisis Real adalah 25 orang, jumlah peserta matakuliah Matematika Diskrit adalah 27 orang, dan jumlah peserta matakuliah Struktur Aljabar adalah 20 orang. Jika dosen tersebut ingin memilih tiga orang mahasiswa mengikuti olimpiade matematika, dimana seorang mahasiswa dari setiap matakuliah yang diajarkannya, maka dosen tersebut mempunyai 25 x 27 x 20 = 13.500 cara memilih susunan tiga mahasiswa tersebut.

Contoh 2.36. *Password* suatu login pada sistem komputer panjangnya lima sampai tujuh karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf (huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan) atau angka. Berapa banyak *password* yang dapat dibuat untuk suatu login?

Jawab: Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A – Z) dan banyak angka adalah 10 (0 – 9), jadi seluruhnya 36 karakter.

Jumlah kemungkinan susunan *password* dengan panjang 5 karakter adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36) = (36)^5 = 60.466.176.$$

Jumlah kemungkinan susunan *password* dengan panjang 6 karakter adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = (36)^6 = 2.176.782.336$$

Jumlah kemungkinan susunan *password* dengan panjang 7 karakter adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = (36)^7 = 78.364.164.096$$

Jumlah seluruh *password* yang dapat disusun adalah

$$60.466.176 + 2.176.782.336 + 78.364.164.096 = 80.601.412.608\,.$$

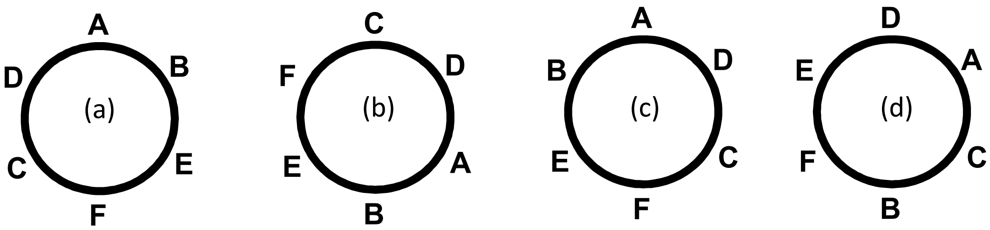
Jadi, untuk suatu login pada sistem komputer tersebut akan mempunyai 80.601.412.608 buah kemungkinan *password*. Jika setiap password diketik selama 1 detik maka diperlukan 2591 tahun untuk menemukan password yang tepat.

Bentuk umum dari aturan perkalian dapat dinyatakan sebagai berikut: *Jika daftar di dalam himpunan S yang terdiri atas k anggota, memiliki sifat-sifat sebagai berikut:*

(1) *Terdapat* m_1 *elemen pertama yang berbeda dalam himpunan S.*

(2) *Untuk setiap cara menyusun* $i-1$ *elemen pertama dalam daftar, terdapat* m_i *cara menyusun elemen* $ke-i$ *pada daftar tersebut, maka himpunan S terdiri atas* $m_1.m_2.\cdots.m_k$ *daftar.*

Contoh 2.37. Jika enam orang yaitu A, B, C, D, E, F, duduk mengelilingi suatu meja bundar, ada berapa banyak susunan keliling yang mungkin, jika susunan duduk dianggap sama jika semua orang berpindah dalam arah yang sama secara bersama-sama? Pada gambar di bawah ini, (a) dan (b) dianggap sama, sedangkan (b), (c), dan (d) dianggap berbeda.



Gambar 2.3. Susunan enam orang mengelilingi meja

Contoh 2.38. Misalkan tiga buah dadu (merah, biru, hijau) dilemparkan di atas meja. Jika setiap angka yang muncul dari ketiga butir dadu tersebut diperhatikan, ada berapa cara berbeda munculnya mata dadu tersebut?

Jawab. Karena ada tiga dadu yang dilempar dan masing-masing dadu bersisi enam, maka banyaknya cara kemunculan angka dadu ada sebanyak 6^3 kemungkinan.

Contoh 2.39. Ada berapa banyaknya bilangan 3-digit yang dapat dibagi 7?

Jawab.

Dari bilangan 3-digit,

$100, 101, \cdots, 111, 112, \cdots, 994, 995, \cdots, 999,$

Bilangan-bilangan

$105, 112, \cdots, 700, 707, 714, \cdots, 994$

Dapat dibagi 7, karena

$105 = 7(15), \quad 112 = 7(16), \quad \cdots 700 = 7(100),$

$707 = 7(101), \quad 714 = 7(102), \quad \cdots 994 = 7(142)$

Dengan demikian diketahui bahwa ada hubungan antara bilangan-bilangan kelipatan 7 dengan bilangan-bilangan 15, 16, …, 101, 102, …,142. Jadi banyaknya bilangan 3-digit yang dapat dibagi 7 sama dengan 15 sampai dengan 142. Dalam hal ini, terdapat 142 – 15 + 1 = 128 bilangan 3-digit kelipatan 7.

Contoh 2.40. Pada suatu acara makan malam, seorang tamu dapat memilih 4 menu makanan pembuka, dan 2 pilihan makanan penutup. Ada berapa menu yang dapat dipilih oleh tamu tersebut?

Jawab. Banyaknya menu pilihan pembuka dan penutup adalah 4 x 2 = 8 pilihan.

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai masalah yang berhubungan dengan kombinatorika, misalnya ada berapa cara yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan tugas tertentu. Pada hampir sebagian besar kasus, membuat daftar dan mencacah kemungkinan cara penyelesaian masalah bukan pilihan yang tepat khususnya jika terdapat banyak cara penyelesaian yang dapat ditempuh. Selain itu mencacah semua kemungkinan tidak akan memberikan informasi yang lebih penting dibandingkan dengan banyaknya cara yang dapat dilakukan.

Misalkan suatu perusahaan mebel, akan membuat 3 jenis model kursi masing-masing dengan 4 pilihan warna yaitu merah, biru, hijau, dan putih. Kombinasi model dan warna meja juga masing-masing dibuat dalam 3 pilihan bahan kayu. Dengan demikian banyaknya semua kemungkinan model dan warna kursi yang akan dibuat oleh perusahaan mebel tersebut ada sebanyak 3x4x3=36.

Contoh yang lain misalkan pelat nomor polisi kendaraan yang terdiri atas dua huruf, empat angka, dan dua huruf disusun secara berurutan seperti pada Gambar 2.4.

DP 2345 TU

Gambar 2.4. Contoh nomor polisi pada kendaraan

Daftar semua kemungkinan tanda nomor yang dapat dibuat sesuai dengan susunan tersebut adalah (26)(26)(10)(10)(10)(10)(26)(26) = 4569760000 (diperlukan waktu selama 147 tahun untuk menghitung pelat jika setiap pelat dihitung dengan kecepatan 1 detik).

Contoh 2.41. Seorang sekretaris memasukkan 10 surat yang berbeda ke dalam 10 amplop. Ada berapa cara sekretaris tersebut dapat memasukkan surat ke dalam amplop sedemikian sehingga masing-masing surat berada di dalam amplop yang berbeda?

Contoh 2.42. Ada berapa cara *n* pasangan suami istri duduk pada meja sedemikian sehingga laki-laki dan perempuan duduk berselang seling, dan tidak ada pasangan suami istri duduk bersebelahan?

Contoh 2.43. Tentukan ada berapa cara mencabut kartu ratu berwarna merah atau raja berwarna hitam dari satu set kartu bridge.

Jawab. Misalkan A adalah kartu ratu berwarna merah dan B adalah kartu raja berwarna hitam. Dalam hal ini, $n(A) = 2 = n(B)$. Karena A dan B adalah himpunan yang disjoin, maka menurut aturan penjumlahan, $|A \cup B| = |A| + |B| = 2 + 2 = 4.$ Dengan demikian banyaknya cara mencabut kartu ratu berwarna merah atau kartu raja berwarna hitam ada 4 cara.

Contoh 2.44. Sebelum berangkat ke kantor, seseorang memiliki kebiasaan mengenakan baju dengan lima kancing, celana, kaos kaki, sepatu, dasi, dan jas dengan tiga kancing secara berturut-turut. Dengan tidak memperhatikan urutan memasang kancing baju dan jas, tentukan ada berapa cara yang berbeda orang tersebut mengenakan pakaian. Jika urutan pemasangan kancing diperhitungkan, ada berapa cara yang berbeda yang dapat dilakukan sebelum orang tersebut siap berangkat ke kantor?

B. Aturan Perkalian dan Penjumlahan

Pada bagian ini akan dipelajari dua aturan hitung yang sangat mendasar. Aturan-aturan ini membantu dalam mengorganisasi cara berpikir tentang cara menghitung tertentu dan menghindari enumerasi eksplisit. Aturan yang pertama didasarkan pada pemisahan suatu peristiwa menjadi kasus-kasus yang lebih sederhana, menghitung setiap kasus, kemudian menjumlahkan hasil-hasilnya. Aturan kedua dapat digunakan dalam situasi yang sama dengan Contoh 2.53, dimana setiap peristiwa dapat terjadi secara bertahap (mengundi dadu merah *kemudian* mengundi dadu biru). Aturan ini dapat digunakan tersendiri maupun secara konjungsi untuk menyusun landasan dari hampir semua teknik menghitung yang dipelajari. Kedua aturan yang disebutkan di atas dapat membantu dalam melakukan penghitungan tanpa harus mendaftarkan semua objek yang sedang dihitung.

Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga yang disjoin, maka banyaknya elemen himpunan $A \cup B$ adalah jumlah dari banyaknya elemen himpunan A dengan banyaknya elemen himpunan B. Fakta ini sering dinyatakan sebagai aturan penjumlahan, yang menyatakan bahwa jika A dan B adalah peristiwa-peristiwa yang saling lepas, yaitu kejadian yang tidak terjadi bersamaan, dan A terjadi dalam m cara dan B terjadi dalam n cara maka peristiwa A atau B dapat terjadi dalam $m + n$ cara.

Contoh 2.45 (a) Ada berapa cara mengambil satu kartu *as atau ratu* dari tumpukan kartu bridge? (b) Ada berapa cara mengambil satu kartu as atau kartu merah dari tumpukan kartu bridge?

Jawab. (a) Misalkan A adalah peristiwa terambilnya satu kartu as dan B adalah terpilihnya kartu ratu. Ada 4 kartu as dan 4 kartu ratu di dalam tumpukan, maka A dapat terjadi dalam 4 cara dan B dapat terjadi dalam 4 cara. Kedua peristiwa ini adalah disjoin sehingga menurut aturan penjumlahan banyaknya cara mengambil satu kartu as dan satu kartu ratu adalah $4 + 4 = 8$ cara. (b) karena diketahui bahwa ada 4 kartu as dan 26 kartu merah di dalam tumpukan kartu, mungkin mahasiswa akan menyimpulkan bahwa ada $4 + 26 = 30$ cara mengambil kartu as atau kartu merah dari tumpukan. Tetapi jawaban ini salah, karena A dan B bukanlah peristiwa yang disjoin satu sama lain. Apa yang dilakukan pada jawaban (b) di atas adalah menghitung interseksi dari peristiwa A dan B sebanyak dua kali.

Kesalahan seperti ini sering terjadi. Karena terdapat dua elemen dalam himpunan irisan (ada dua kartu as berwarna merah) maka jumlah di atas harus dikurangkan dengan banyaknya elemen di dalam himpunan irisan sehingga diperoleh jawaban yang benar yaitu n(A) + n(B) – n($A \cap B$) = 4 + 26 – 2 = 28. Cara ini akan dibahas lebih rinci pada Bab IV tentang inklusi dan eksklusi.

Pendekatan lain yang juga dapat dilakukan adalah memisalkan A adalah terambilnya kartu aas hitam dan B adalah terambilnya kartu merah. Kedua peristiwa ini disjoin satu dengan yang lain. Dengan cara ini terlihat bahwa peristiwa A atau B sama dengan peristiwa mengambil satu kartu as dan satu kartu merah, dan berdasarkan aturan penjumlahan banyaknya cara mengambil satu kartu as hitam atau satu kartu merah adalah 2 + 26 = 28 cara.

Penjelasan yang telah diuraikan di atas menggambarkan beberapa hal penting. Penghitungan harus dilakukan dengan teliti karena mudah sekali terjadi kekeliruan. Jawaban yang salah dapat dikoreksi kemudian, tetapi dengan memperhatikan soal dari sudut pandang yang sedikit berbeda akan menghindarkan mahasiswa dari langkah koreksi yang menghambat. Dapat juga dilihat pada kasus ini bahwa suatu masalah dapat diselesaikan dengan berbagai cara.

Masalah dadu pada Contoh 2.53 memperlihatkan semua kemungkinan yang dapat muncul jika dua dadu berbeda dilempar bersama-sama. Peristiwa ini dapat diuraikan menjadi dua tahapan, yaitu melemparkan dadu pertama kemudian melemparkan dadu kedua. Jelas bahwa kedua tahapan tersebut tidak berhubungan atau tidak saling mempengaruhi karena hasil dari lemparan dadu pertama tidak mempengaruhi hasil lemparan dadu kedua. Bagaimanapun hasil lemparan dadu pertama, lemparan dadu kedua akan tetap memiliki enam kejadian yang berbeda. Representasi semua kemungkinan hasil lemparan dadu ditampilkan sebagai himpunan pasangan berurutan dari bilangan-bilangan asli untuk semua nilai (1 – 6). Elemen pertama menyatakan nilai untuk dadu pertama, sedangkan elemen kedua menyatakan nilai pada dadu kedua. Jadi dengan mudah dapat dilihat bahwa banyaknya kemungkinan munculnya setiap jumlah mata dadu dari kedua dadu adalah 6 x 6 = 36. Secara umum dapat dikatakan bahwa jika S adalah suatu himpunan pasangan berurutan dari bilangan-bilangan asli sedemikian sehingga elemen pertama dapat terjadi dalam m cara, dan untuk setiap m cara tersebut terdapat n cara untuk elemen kedua, maka banyaknya elemen himpunan S adalah m x n. Fakta ini dinyatakan sebagai aturan perkalian: misalkan peristiwa C dapat diuraikan menjadi dua tahap A dan B dan bahwa tahap A terjadi dalam m cara. Misalkan kedua peristiwa tidak saling mempengaruhi, artinya tahap *B* terjadi dalam *n* cara berapapun nilai yang dihasilkan pada tahap *A*. Maka peristiwa *C* dapat terjadi dalam *m* x *n* cara.

Contoh 2.46. Ada berapa cara mencabut (kartu tidak dikembalikan setelah dicabut) satu kartu as merah dan selanjutnya satu kartu merah lainnya dari tumpukan kartu bridge?

Jawab. Tahap *A* adalah mencabut satu kartu as merah, dan tahap *B* adalah mencabut satu kartu merah lainnya. Karena itu jawaban yang benar adalah 2 x 25 = 50 cara. Dalam contoh ini, cara terjadinya peristiwa *B* tergantung pada cara terjadinya peristiwa *A*. Jika pada tahap *A* terambil kartu as merah maka tahap *B* terdiri atas 24 cara mengambil kartu merah lain (karena kartu as merah sudah terambil). Aturan perkalian menunjukkan bahwa banyaknya cara terjadinya tahap *B* adalah 25 pada masing-masing kejadian tahap *A*.

Contoh 2.47. Ada berapa cara mencabut satu kartu as dan kemudian mencabut satu kartu merah dari tumpukan kartu bridge?

Jawab. Jika tidak teliti menjawab soal ini, mahasiswa dapat melakukan kesalahan dengan memisalkan bahwa tahap *A* adalah peristiwa mencabut satu kartu as dan tahap *B* adalah peristiwa mencabut satu kartu merah. Dengan menerapkan aturan perkalian maka diperoleh 4 x 26 = 104 cara. Tentu saja jawaban ini salah karena tahap *A* dan *B* tidak berkaitan seperti pada kasus sebelumnya. Jika dicabut kartu as hitam pada tahap *A* maka tahap *B* dapat terjadi dalam 26 cara. Tetapi jika pada tahap *A* dicabut kartu as merah maka tahap *B* dapat terjadi dalam 25 cara. Dalam hal ini terjadi penghitungan dua situasi yang tidak mungkin terjadi – mencabut kartu as diamond kemudian mencabut kartu tersebut sekali lagi, dan mencabut kartu as hati kemudian mencabut kartu as hati sekali lagi. Jawaban yang benar adalah 104 – 2 = 102.

Pendekatan lain diperoleh dari analisis yang telah dijelaskan. Penerapan aturan penjumlahan dilakukan dengan memisalkan tahap *A* sebagai peristiwa mencabut kartu as hitam kemudian dilanjutkan dengan mencabut kartu merah, dan tahap *B* sebagai peristiwa mencabut satu kartu as merah yang dilanjutkan dengan mencabut satu kartu merah lainnya. Dengan demikian peristiwa *A* atau *B* identik dengan peristiwa mencabut satu kartu as dan kemudian mencabut satu kartu merah. Kedua peristiwa ini disjoin karena kartu yang pertama dicabut terdiri atas kartu yang warnanya berbeda. Dengan aturan perkalian diketahui tahap *A* terjadi dalam 2 x 26 = 52 cara dan tahap *B* terjadi dalam 2 x 25 = 50 cara. Jadi jawaban yang benar adalah 52 + 50 = 102 cara. Dalam kasus ini aturan penjumlahan dan aturan perkalian diterapkan sekaligus.

Aturan penjumlahan dapat dikembangkan pada sebarang peristiwa dengan jumlah kasus yang berhingga. Demikian juga aturan perkalian, dapat dikembangkan pada sebarang peristiwa dengan jumlah tahap yang berhingga. Aturan penjumlahan akan ditunjukkan lagi dengan suatu ilustrasi.

Contoh 2.48. Berapa kemungkinan bahwa setidak-tidaknya dua dari *n* orang yang terpilih lahir pada tanggal dan bulan yang sama?

Jawab. Kemungkinannya adalah k/t dimana *t* adalah banyaknya cara menandai tanggal kelahiran dari *n* orang, dan *k* adalah banyaknya cara menandai tanggal lahir sedemikian sehingga setidak-tidaknya terdapat dua orang yan g lahir pada tanggal dan bulan yang sama. Nilai *t* dapat diketahui dengan menjabarkan proses penandaan tanggal kelahiran atas *n* tahapan: menandai orang pertama lahir pada tanggal pertama, menandai orang kedua lahir pada tanggal kedua, dan seterusnya. Dengan mengasumsikan bahwa ada 365 hari dalam setahun dan bahwa tanggal kelahiran terdistribusi secara acak, maka ada 365^n kemungkinan.

Selanjutnya akan ditentukan *k*, yaitu banyaknya cara menandai tanggal lahir sedemikian sehingga terdapat setidak-tidaknya dua orang lahir pada tanggal dan bulan yang sama. Tidak mudah menentukan *k* secara langsung. Untuk itu dimisalkan *m* adalah banyaknya cara untuk menandai tangal kelahiran sehingga tidak ada orang yang lahir pada tanggal dan bulan yang sama. Berdasarkan aturan penjumlahan, $m+k=365^n$, sehingga $k=365^n-m.$ Untuk menentukan *m* maka proses penandaan tanggal dan bulan kelahiran dijabarkan ke dalam *n* tahapan, yaitu dengan menandai orang pertama dengan tanggal pertama, menandai orang kedua dengan tanggal kedua, dan seterusnya. Dengan asumsi bahwa terdapat 365 hari dalam setahun maka $m=365 \text{ x } 364 \text{ x } 363 \text{ x} \cdots \text{x} \left(365-\left(n-1\right)\right).$ Hal ini berarti bahwa $k=365^m-m$ yaitu $365^m-365 \text{ x } 364 \text{ x } 363 \text{ x} \cdots \text{x} \left(365-\left(n-1\right)\right).$ Jadi dari *n* orang yang dipilih secara acak, setidak-tidaknya terdapat dua orang yang lahir pada tanggal dan bulan yang sama memiliki kemungkinan sebesar

$$\frac{365^n \text{ - } 365 \text{ x } 364 \text{ x } 363 \text{ x} \cdots \text{x } (365\text{-}(n\text{-}1))}{365^n}.$$

Kemungkinan ini memiliki nilai yang lebih besar dari 0,5 jika $n \geq 23$. Dan jika $n > 30$ maka nilai kemungkinannya lebih dari 0,7.

A.1. Pasangan Berurutan

Suatu daftar yang terdiri atas dua anggota himpunan dan berurutan disebut pasangan berurutan. Jika elemen pertama adalah *a* dan elemen kedua adalah *b* maka himpunan pasangan berurutan dari himpunan tak kosong *A* dan *B* didefinisikan sebagai

$$(a, b) = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\} \tag{2.8}$$

Contoh 2.49. Seorang mahasiswa memiliki tiga handphone dan empat kartu SIM. Ada berapa pasangan handphone dan kartu SIM yang dapat digunakan untuk menelepon?

Dalam contoh ini, dapat diketahui bahwa kombinasi handphone dengan kartu SIM dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (handphone, kartu SIM). Menurut aturan perkalian, tiga handphone dipasangkan dengan empat kartu SIM akan menghasilkan 12 kemungkinan pasangan.

Teorema 2.3. Jika himpunan *M* memiliki *m* anggota dan himpunan *N* memiliki *n* anggota, maka terdapat *mn* pasangan berurutan yang dapat dibuat dari himpunan *M* dan himpunan *N*. Bukti dari teorema ini dilakukan dengan cara yang sama dengan Contoh 2.49.

A.2. Perkalian Cartesian

Himpunan semua pasangan berurutan seperti yang disebutkan pada Contoh 2.49. dan Teorema 2.3 sering dinamakan perkalian Cartesian. Perkalian Cartesian dari *M* sebagai elemen pertama dan *N* sebagai elemen kedua dinyatakan dengan $M \text{ x } N$. Banyaknya elemen dari $|M \text{ x } N| = |M| \cdot |N|$.

Contoh 2.50. Misalkan suatu kelompok kegiatan mahasiswa akan memilih ketua, sekretaris dan bendahara, maka masalah yang akan diselesaikan terdiri atas daftar tiga elemen. Selanjutnya jika kelompok kegiatan tersebut akan memilih wakil ketua juga, maka daftar yang akan dibuat terdiri atas empat elemen. Banyaknya daftar yang disusun dari empat nama calon ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara, dari 15 anggota adalah 15.14.13.12.

A.3. Daftar Elemen-elemen Berbeda

Aturan perkalian menghasilkan beberapa rumusan yang penting. Tanpa rumus tersebut, perhitungan biasa dilakukan secara langsung. Simbol $n!$ yang disebut *n* factorial, menyatakan perkalian dari *n* bilangan bulat pertama, yaitu $n! = n(n-1)\cdots 3.2.1$. Simbol $0!$ digunakan untuk menyatakan bilangan 1.

Teorema 2.4. Banyaknya cara menyusun daftar semua elemen dari suatu himpunan yang terdiri atas *n* elemen adalah *n*! jka tidak ada elemen himpunan yang terdaftar dua kali. Bukti Teorema 2.4 dapat dilakukan langsung dengan aturan perkalian.

Suatu daftar yang terdiri dari semua anggota suatu himpunan (tanpa perulangan) biasa disebut *permutasi* dari himpunan tersebut. Daftar yang terdiri dari *k* elemen yang berbeda yang dipilih dari himpunan *S* yang memiliki *n* elemen, disebut **permutasi *k* elemen** dari *S* atau permutasi *k* elemen yang dipilih dari *S.* Jika *x* adalah elemen himpunan *S* terdapat di dalam daftar yang disusun, maka *x* adalah anggota permutasi tersebut; jika *x* menempati urutan ke-*j* dalam daftar maka *x* adalah anggota ke-*j* permutasi.

Seringkali kita akan menentukan banyaknya permutasi *k* elemen dari suatu himpunan. Banyaknya permutasi *k* elemen dari suatu himpunan yang memiliki *n* anggota dinyatakan dengan $(n)_k$ dan dinamakan ***faktorial susut*** atau pangkat faktorial. Banyaknya permutasi tersebut adalah $\frac{n!}{(n-k)!}$. Kuantitas ini sering juga dinyatakan dengan $P(n,k)$ atau ${}_nP_k$ yaitu banyaknya permutasi *n* objek yang dipilih sebanyak *k* setiap pemilihan.

Teorema 2.5. Banyaknya permutasi *k* elemen yang dipilih dari suatu himpunan dengan *n* anggota adalah

$$\frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k = n(n-k)\cdots(n-k+1), \text{ untuk } k \le n \tag{2.9}$$

Bukti. Jika *k* = 1, dan banyaknya elemen di dalam himpunan itu ada sebanyak maka daftar yang dapat dibuat ada sebanyak $\frac{n!}{(n-1)!}$. Untuk sebarang bilangan *k*, terdapat *n* pilihan untuk elemen pertama, *n* – 1 pilihan untuk elemen kedua, *n* – 2 pilihan untuk elemen ketiga, dan seterusnya, sampai diperoleh $n - k + 1$ pilihan untuk elemen ke-k. Sehingga berdasarkan aturan perkalian, diperoleh $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ daftar.

A.4. Susunan Dengan Perulangan

Contoh-contoh yang telah disebutkan sebelumnya adalah penyusunan suatu susunan yang dipilih dari semua elemen suatu himpunan, tanpa adanya perulangan elemen dalam himpunan tersebut. Dalam situasi tertentu, penyusunan daftar yang diambil dari semua elemen suatu himpunan dapat dilakukan dengan perulangan elemen tertentu.

Contoh 2.51. Prosesor dari suatu komputer akan menerima empat perintah dari memory. Setiap perintah dapat disimpan pada lima media penyimpanan data yang terhubung dengan prosesor. Ada berapa cara perintah tersebut dapat disimpan ke dalam media penyimpanan?

Jawab. Karena terdapat lima kemungkinan tempat penyimpanan data, maka keempat perintah dapat disimpan sebanyak 5.5.5.5 cara.

Teorema 2.6. Banyaknya susunan yang panjangnya k yang masing-masing dipilih dari suatu himpunan yang memiliki n anggota (dengan perulangan), adalah n^k.

Bukti. Untuk setiap posisi di dalam daftar, terdapat n pilihan, sehingga dengan menerapkan aturan perkalian, diperoleh n^k daftar.

A.5. Pendekatan Stirling untuk *n*!

Di dalam bukunya *Metodus Differentialis,* tahun 1730, James Stirling menulis sebuah pernyataan penting bahwa untuk nilai-nilai n yang besar, kuantitas $n!$ kira-kira besarnya sama dengan $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, dengan e adalah basis dari logaritma natural. Semakin besar nilai n, rasio antara $n!$ dengan $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ akan mendekati 1 (meskipun selisih antara kedua besaran tersebut semakin besar jika n semakin besar). Pendekatan Stirling ini mempersingkat perhitungan untuk memperoleh nilai pendekatan $n!$ untuk nilai-nilai n yang besar.

Contoh 2.52. Perhatikan bahwa perkiraan nilai 80! dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$\left(\frac{80}{e}\right)^{80}=\left(\frac{80}{e}\right)^{64}.\left(\frac{80}{e}\right)^{16},$$

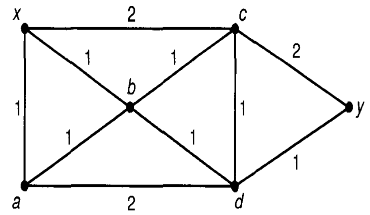
sehingga kita dapat menghitung rasio $r=\frac{80}{e}$ untuk menentukan $r^2, r^4, r^8, r^{16}, r^{32}$, dan r^{64} kemudian menemukan r^{80} yang selanjutnya dikalikan dengan $\sqrt{160\pi}$.

Persoalan kombinatorik bukan merupakan persoalan yang baru dalam kehidupan nyata. Banyak persoalan kombinatorik yang sederhana telah diselesaiakan dalam masyarakat. Misalkan, saat pemilihan pemain untuk tim sepak bola yang terdiri dari 11 pemain. Apabila ada 20 orang ingin membentuk suatu tim sepak bola, ada berapa kemungkinan komposisi pemain yang dapat terbentuk? Contoh lain adalah dalam menentukan sebuah *password* panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan *password* yang dapat dibuat? Tetapi selain itu para ilmuwan pada berbagai bidang juga sering menemukan sejumlah persoalan yang harus diselesaikan. Pada Bab ini, kita akan membahas tentang kombinatorik, permutasi dan apa yang terkait dengan itu. Kombinatorik merupakan cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

A.6. Lintasan Terpendek

Misalkan suatu sistem lalulintas yang terdiri atas jalan raya dan persimpangan-persimpangan. Sesorang sedang berjalan dari persimpangan A ke persimpangan B. Secara umum ada beberapa lintasan yang dapat ditempuh dari titik A ke titik B. Masalahnya adalah lintasan mana yang terpendek yang dapat dipilih dari A ke B. Di dalam kombinatorik, hal seperti ini dinamakan *optimasi.* Salah satu cara mengetahui lintasan terpendek tersebut adalah dengan membuat daftar semua jalur dari A ke B. Untuk menempuh lintasan terpendek, tidak menjadi masalah jika seseorang harus melalui suatu jalur lebih dari satu kali. Namun demikian cara ini bukanlah pilihan yang efisien khususnya untuk sistem yang jauh lebih besar. Dalam masalah ini yang diperlukan adalah algoritma untuk menentukan lintasan terpendek. Di dalam ilmu manajemen, masalah ini dikenal dengan istilah *critical path method* (metode jalur kritis).

Persoalan menentukan lintasan terpendek antara dua titik dapat ditinjau secara abstrak. Misalkan *X* adalah sejumlah objek yang berhingga yang dinamakan *vertex* atau *vertice* atau simpul, dan *E* adalah sejumlah garis yang menghubungkan pasangan-pasangan simpul yang disebut *edge* (sisi). Pasangan berurutan antara simpul dengan sisi (*X, E*) disebut *graf.*



Gambar 2.5. Lintasan terpendek pada graf

Suatu *graf* merupakan contoh struktur diskrit yang berkembang khususnya dalam mempelajari kombinatorika. Prinsip graf telah dikembangkan secara luas di dalam berbagai bidang, antara lain psikologi, sosiologi, kimia, genetika, dan ilmu komunikasi. Mahasiswa dapat memberikan berbagai contoh untuk masalah-masalah yang memiliki beberapa kemungkinan penyelesaian untuk setiap kemungkinan lainnya.

C. Dua Model Pencacahan

Misalkan dari *n* objek yang berbeda yaitu $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ akan diambil sampel sebanyak *r* objek. Ada berapa cara yang dapat dilakukan? Pertanyaan seperti ini sebenarnya tidak terlalu jelas karena adanya kata-kata "diambil sampel" yang sering disalahartikan.

(i) Apakah sampel yang akan diambil harus berurutan? Misalkan diambil sampel *r* sebanyak 2 satuan, apakah dengan mengambil sampel x_1 kemudian x_2 berbeda jika pertama diambil x_2 kemudian x_1?

(ii) Apakah sampel yang terambil boleh berulang? Misalkan akan diambil sampel sebanyak 2 satuan, bolehkah sampel pertama x_1 dan sampel kedua juga x_1? Dalam hal ini apakah setelah objek pertama diambil sebagai sampel, onjek tersebut dikembalikan ke kumpulan *n* objek tadi?

Karena masing-masing pertanyaan memiliki dua kemungkinan jawaban, maka menurut aturan perkalian, masalah seperti ini terdiri atas empat masalah yang terpisah yaitu:

(1) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel dibedakan, dan sampel boleh diambil berulang?

(2) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel dibedakan, dan sampel tidak boleh diambil berulang?

(3) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel tidak dibedakan, dan sampel boleh diambil berulang?

(4) Ada berapa sampel yang dapat diambil jika urutan pengambilan sampel tidak dibedakan, dan sampel tidak boleh diambil berulang?

Untuk menyelesaikan masalah-masalah ini perlu diperhatikan beberapa terminologi. Jika urutan pengambilan sampel dibedakan, maka objek yang akan diambil dinamakan *susunan* (*arrangement*). Jika urutan sampel tidak dibedakan, maka objek yang akan diambil dinamakan *pilihan* (*selections*). Jika sampel boleh berulang, maka objek yang diambil dinamakan *pengembalian* (*replacement*). Susunan *r* objek dengan pengembalian disebut *r*-barisan (*r-sequence*). Suatu *r-permutasi* adalah susunan tanpa pengembalian. Susunan kartu acak dalam permainan bridge adalah contoh permutasi. Selanjutnya, pemilihan *r* objek tanpa pengembalian disebut *r*-kombinasi, misalnya himpunan bagian. Pemilihan *r* objek dengan pengembalian disebut *r*-multiset. Susunan huruf-huruf yang dapat dibentuk dari MISSISSIPPI dapat digolongkan sebagai suatu multiset yang terdiri atas 4 S, 4 I, 2 P, dan 1 M.

Terminologi ini pada umumnya tidak disebutkan dalam soal yang akan diselesaikan. Oleh karena itu mahasiswa harus membaca soal dengan teliti agar dapat memastikan cara menyelesaikan soal tersebut. Selain itu, terminologi yang sama dapat memiliki nama yang berbeda. Sebagai contoh, *r*-kombinasi seringkali dituliskan dengan nama *r*-set, dan *r*-multiset sering dituliskan *r-assortment*.

Misalkan suatu kelas terdapat sejumlah *n* mahasiswa. Keseluruhan mahasiswa yang terdaftar di dalam kelas tersebut akan dibentuk kelompok-kelompok kecil yang anggota-anggotanya sama banyak, misalkan sama dengan *r*. Ada empat kemungkinan cara membentuk kelompok kecil dari kelompok mahasiswa tersebut. Masing-masing kelompok kecil itu juga memiliki kemungkinan tertentu dalam pembentukannya.

Cara Pertama: Dari sejumlah *n* mahasiswa dalam kelas, akan dibentuk menjadi beberapa kelompok kecil yang masing-masing terdiri atas *r* orang mahasiswa. Setelah seorang mahasiswa didaftar sebagai anggota kelompok kecil, mahasiswa yang bersangkutan kembali ke kelompok besar untuk kemudian dapat terpilih kembali menjadi anggota kelompok kecil lainnya. Urutan nama mahasiswa yang didaftar menjadi anggota kelompok kecil juga perlu diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dibedakan dengan mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris pertama, kolom pertama).

Cara Kedua: Setelah seorang mahasiswa didaftar ke dalam kelompok kecil, mahasiswa yang tersebut tidak kembali ke kelompok besar. Urutan nama mahasiswa yang diambil menjadi anggota kelompok kecil juga perlu diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dibedakan dengan mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris pertama, kolom kedua).

Cara Ketiga: Mahasiswa yang sudah terdaftar sebagai anggota kelompok kecil, kembali ke kelompok besar. Urutan nama mahasiswa yang diambil menjadi anggota kelompok kecil tidak perlu diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dianggap sama saja jika mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris kedua, kolom pertama).

Cara Keempat: Mahasiswa yang sudah terdaftar sebagai anggota kelompok kecil, tidak kembali ke kelompok besar. Urutan nama mahasiswa yang diambil menjadi anggota kelompok kecil diperhatikan. Mahasiswa pertama yang terpilih kemudian mahasiswa kedua, dianggap berbeda jika mahasiswa kedua kemudian mahasiswa pertama. (baris kedua, kolom kedua).

Jika akan diambil 2 orang mahasiswa sebagai sampel dari antara 3 orang mahasiswa, yaitu $\{x_1, x_2, x_3\}$. Dalam hal ini masalah yang dihadapai adalah $n = 3$ dan $r = 2$. Gambar di bawah ini menjelaskan empat cara penyelesaian yang berbeda.

	BERULANG	TIDAK BERULANG
SUSUNAN	$x_1x_1 \quad x_2x_1 \quad x_3x_1$ $x_1x_2 \quad x_2x_2 \quad x_3x_2$ $x_1x_3 \quad x_2x_3 \quad x_3x_3$ $r-$ barisan, untuk $r=2$ n^r	$x_1x_2 \quad x_2x_1 \quad x_3x_1$ $x_1x_3 \quad x_2x_3 \quad x_3x_2$ $r-$ permutasi, untuk $r=2$ $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$
SELEKSI	$\{x_1,x_1\} \quad \{x_2,x_2\}$ $\{x_1,x_2\} \quad \{x_2,x_2\}$ $\{x_1,x_3\} \quad \{x_3,x_3\}$ $r-$ multiset, untuk $r=2$ $\begin{pmatrix} r+n-1 \\ r \end{pmatrix}$	$\{x_1,x_2\}$ $\{x_1,x_3\}$ $\{x_2,x_3\}$ $r-$ kombinasi, untuk $r=2$ $C(n,r)=\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}=\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$

Bagaimana dengan kasus $r = 0$? Apa pentingnya sampel berukuran 0? Sebagaimana telah disebutkan sebelumnya, *r*-kombinasi dapat dianggap sebagai himpunan bagian yang terdiri atas *r* elemen, sehingga oleh karena itu suatu 0-kombinasi dapat dianggap sebagai himpunan kosong. Karena hanya ada satu himpunan kosong, maka dapat dipastikan bahwa hanya ada satu 0-kombinasi. Ahli matematika juga sepakat bahwa hanya ada tepat satu 0-barisan, satu 0-permutasi, dan satu 0-multiset.

Proposisi 2.1. Banyaknya *r*-barisan dari *n* objek adalah n^r.

Bukti. Jika $r = 0$ maka $n^r = n^0 = 1$, sesuai dengan mengingat bahwa hanya ada satu 0-barisan. Selanjutnya untuk $n \geq 1$. Susunan *r*-barisan dapat diuraikan menjadi *r* langkah.

Langkah pertama adalah mengambil objek pertama, langkah kedua mengambil objek kedua, dan seterusnya. Pada masing-masing langkah diambil *n* pilihan. Berdasarkan aturan perkalian susunan ini dapat dilakukan dalam n^r cara.

Proposisi 2.2. Jumlah *r*-permutasi dari *n* objek adalah $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

Bukti. *r*-permutasi dari *n* objek dilambangkan dengan $P(n,r)$. Jika *r* = 0, maka menurut definisi, $P(n,r)=1$. Jika $r>n$ maka $P(n,r)=0$ karena faktanya, tidak ada cara mengambil *r* objek yang berbeda dari $r>n$ objek. Jadi untuk $n\geq r\geq 1$ maka susunan *r*-permutasi menjadi *r* langkah. Objek pertama diambil kemudian selanjutnya diambil objek kedua yang BERBEDA, dan seterusnya. Ada *n* pilihan pada langkah pertama, *n* – 1 pilihan pada langkah kedua, … , dan *n* – *r* + 1 pilihan pada langkah ke-*r*. Dengan demikian menurut aturan perkalian, susunan ini dapat dilakukan dengan $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ cara.

Jika *n* = *r,* maka diperoleh banyaknya cara menyusun *n* objek yang berbeda di dalam satu baris. Susunan sedemikian itu dipandang sebagai suatu permutasi, *n*-permutasi. Banyaknya cara menyusun *n* orang dalam satu baris adalah $n(n-1)(n-2)\cdots 2.1$. Pernyataan ini umum dinamakan *n*!. Sebagai contoh, 6 orang dapat disusun dalam 6 cara yaitu $6!=6.5.4.3.2.1=720$. Perhatikan bahwa $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2.1$ hanya untuk *n* > 1. Didefinisikan bahwa 0! = 1 sehingga $n!=n(n-1)!$ untuk $n\geq 1$.

Selanjutnya, $P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ dapat diterapkan untuk semua bilangan real *n* dan bilangan asli *r* (meskipun kita hanya mempunyai interpretasi fisis mengenai bilangan asli *n* dan *r*). Sebagai contoh, $P(-1,0)=1$ dan $P(2,3)=0$.

Contoh 2.53. Berapa probabilitas diperolehnya jumlah mata yang kurang dari 5 jika dua dadu berbeda (merah dan biru) dilempar bersamaan?

Jawab. Penyelesaian masalah nyata seperti ini dapat diselesaikan dengan cara mencoba menyusun suatu model matematika yang tepat. Salah satu pendekatan yang dapat dilakukan adalah dengan mengandaikan jumlah mata dadu yang mungkin yaitu {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} dan misalkan {2, 3, 4} adalah subset dari semua kemungkinan jumlah mata dadu yang akan muncul. Menurut definisi, peluang terjadinya subset ini adalah 3/11. Ini merupakan pernyataan matematis, tetapi apakah tidak ada makna lain dari hasil tersebut? Misalkan terdapat sepasang dadu yang dilemparkan satu juta kali dan ternyata kemunculan mata dadu berjumlah kurang dari 5 sama sekali tidak mendekati 3/11. Kesimpulan apa yang diperoleh? Mungkin lemparan dadu belum mencukupi, atau mungkin dadu yang digunakan tidak seimbang pada masing-masing sisinya. Akhirnya disimpulkan bahwa model matematika yang diperoleh adalah model yang salah. Tetapi model mana yang lebih baik? Kata kunci yang harus ddingat adalah bahwa definisi yang digunakan dalam menentukan kepastian peluang kejadian tertentu adalah kemungkinan yang *equally likely* (memiliki kementakan yang sama). Jadi jelas bahwa munculnya jumlah dua mata tidak memiliki peluang yang sama dengan jumlah tiga mata. Hanya ada satu cara munculnya jumlah dua mata dan ada dua cara munculnya jumlah tiga mata dadu – yaitu satu mata pada dadu merah dan dua mata pada dadu biru, atau sebaliknya. Hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk kumpulan pasangan berurutan dari jumlah mata dadu yang mungkin muncul jika dua dadu berbeda dilempar bersamaan. Elemen pertama dari pasangan berurutan menyatakan mata dadu yang muncul dari dadu pertama (merah) dan elemen kedua menyatakan mata mata dadu yang muncul dari dadu kedua (biru).

$$\begin{matrix} \{(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\} \end{matrix}$$

Jumlah mata dadu yang diinginkan adalah kurang dari 5. Jadi subset yang diperlukan adalah pasangan berurutan yang berjumlag kurang dari 5.

$$\begin{matrix} \{(1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & \\ (3,1)\} & & \end{matrix}$$

Dalam kasus ini, peluang munculnya jumlah mata dadu kurang dari 5 adalah 6/36 = 1/6, sesuai dengan percobaan yang dilakukan.

Kasus di atas menggambarkan dua hal penting. Pertama, penyelesaian masalah peluang harus dilakukan dengan memilih model yang tepat. Kedua, salah satu teknik untuk menghitung peluang terjadinya suatu peristiwa adalah dengan membuat daftar semua kemungkinan yang bisa terjadi. Enumerasi secara eksplisit seperti ini seringkali panjang dan rumit. Untuk menghindari masalah tersebut, pada bab ini akan dipelajari masalah dasar dimana sebagian besar persoalan akan diminimalkan dengan menggunakan pembuktian matematis yang akan dijelaskan selanjutnya.

Contoh. 2.54. Suatu tim baseball terdiri atas 25 orang pemain. Tunjukkan bahwa terpilihnya 9 orang dalam satu barisan dapat dihitung dengan cara yang sama dengan memilih 9 sampel dari {1, 2, 3, … , 25} dimana urutan tidak diperhatikan dan tidak ada angka yang berulang.

Jawab. Satu barisan dapat dibentuk dengan mendaftar urutan 9 pemain dari 25 anggota tim. Masalah umumnya adalah berapa banyak sampel sebanyak *r* objek yang diambil dari $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ jika urutan tidak dipentingkan dan tidak ada objek berulang.

D. Model Distribusi Pencacahan

Jika *r* bola yang akan didistribusikan ke dalam *n* kotak yang berbeda, ada berapa cara mendistribusikan bola-bola tersebut? Masalah distribusi ini dikenal sebagai *masalah penempatan* atau *masalah alokasi*. Terlihat dari pernyataan di atas bahwa masalah tidak dijelaskan secara spesifik, khususnya pada bagian pernyataan "*r* bola yang akan didistribusikan" yang bermakna bias karena:

(i)' Tidak dijelaskan apakah bola tersebut identik atau berbeda

(ii)' Tidak diketahui berapa bola yang akan dimasukkan ke dalam setiap kotak: Apakah boleh memasukkan sebarang jumlah bola, atau paling banyak satu bola per kotak.

Karena ada dua jawaban untuk setiap pertanyaan, maka menurut aturan perkalian masalah ini dapat dibedakan ke dalam empat masalah yang berbeda.

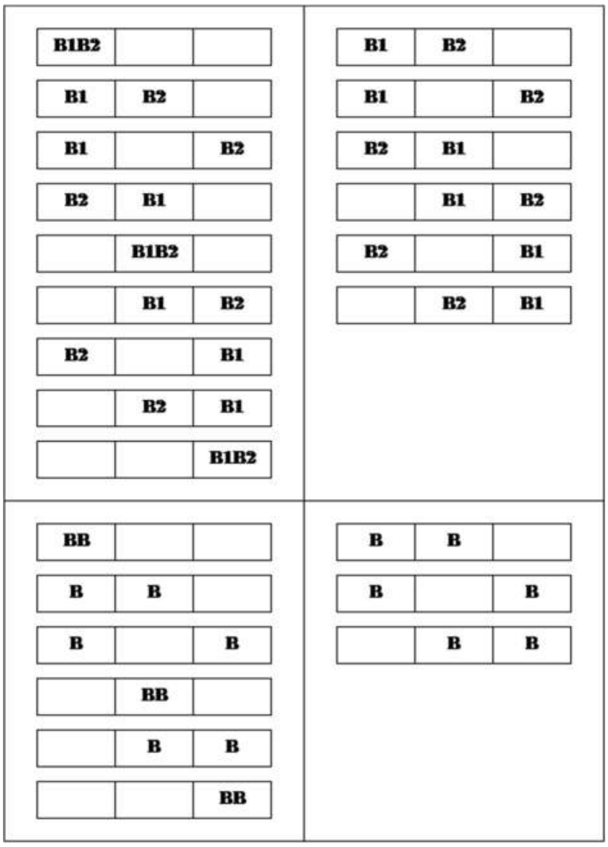
(1)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola yang berbeda ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan sebarang jumlah bola pada setiap kotak?

(2)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola yang berbeda ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan jumlah sebanyak-banyaknya satu bola yang boleh dimasukkan ke dalam setiap kotak?

(3)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan jumlah sebanyak-banyaknya satu bola yang boleh dimasukkan ke dalam setiap kotak?

(4)' Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak yang berbeda, dengan sebarang jumlah bola yang dapat dimasukkan ke dalam setiap kotak?

Contoh 2.54. Gambar 2.6. menunjukkan 4 masalah yang berbeda dan penyelesaiannya untuk $n = 3$ dan $r = 2$. Masalah yang sama telah diperlihatkan sebelumnya dan terlihat bahwa penyelesaian masing-masing situasi dapat dilakukan dengan mudah.



Gambar 2.6. Penyelesaiannya susunan objek untuk $n = 3$ dan $r = 2$.

Terlihat dalam kasus ini adanya dua model pencacahan. Pertama, adalah pencacahan yang menyangkut pendistribusian dua bola ke dalam tiga kotak yang berbeda. Model yang kedua adalah pengambilan dua bola dari Kedua model tersebut ekivalen. Misalkanlah adalah kotak ke-*i*. Jika bola tersebut identik maka bola nomor satu menyatakan posisi pertama di dalam susunan dan bola nomor dua menyatakan posisi kedua. Dengan kata lain, memasukkan bola nomor satu ke dalam kotak ke-*i* adalah ekivalen dengan menempatkan pada posisi pertama di dalam susunan, dan memasukkan bola nomor dua ke dalam kotak ke-*i* adalah ekivalen dengan menempatkan pada posisi kedua dalam susunan. Jika bola tersebut identik, maka urutan posisi tidak penting.

Memasukkan satu bola ke dalam kotak ke-*i* bermakna sama dengan mengambil tanpa memperhatikan urutan. Jadi jelas bahwa masalah penempatan eksklusif menyatakan pengambilan objek-objek tanpa perulangan.

Perhatikan kembali pertanyaan (i) dan (ii) serta permasalahan (1)–(4) pada halaman 39, bandingkan dengan $(\mathrm{i})'$ dan $(\mathrm{ii})'$ serta masalah $(1)' - (4)'$ pada halaman 45-46 di atas. Dapat dilihat bahwa (i) dan menanyakan hal yang sama, demikian pula (ii) dan Jawaban terhadap masalah (1) dan adalah sama, demikian juga untuk ketiga masalah lainnya. Dengan demikian, dapat disusun empat proposisi di bawah ini.

Proposisi 2.3. Ada cara untuk mendistribusikan *r* bola yang berbeda ke dalam *n* kotak yang berbeda dimana setiap kotak berisi sebarang banyaknya bola.

Proposisi 2.4. Ada cara mendistribusikan *r* bola berbeda ke dalam *n* kotak berbeda dimana setiap kotak berisi sebanyak-banyaknya satu bola.

Proposisi 2.5. Ada cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak berbeda dimana setiap kotak berisi paling banyak satu bola.

Proposisi 2.6. Ada cara untuk mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak berbeda dimana setiap kotak berisi sebarang banyaknya bola.

Contoh 2.55. Tentukan peluang adanya satu kotak yang kosong jika sepuluh bola identik didistribusikan secara acak ke dalam lima kotak yang berbeda.

Jawab. Ada C(5-1+10,10) cara mendistribusikan 10 bola indentik ke dalam 5 kotak berbeda, dengan sebarang banyaknya bola dimasukkan ke dalam setiap kotak. Selanjutnya ditentukan banyaknya cara mendistribusikan 10 bola identik ke dalam 5 kotak berbeda sedemikian sehingga terdapat dengan tepat satu lubang yang kososng. Jadi pendistribusian bola tersebut dapat disusun dalam tiga tahap. Pertama, kotak kosong tersebut dapat ditentukan dalam C(5,1) cara. Selanjutnya dapat dipastikan bahwa keempat kotak yang tersisa tidak akan kosong karena setidak-tidaknya satu bola dapat dimasukkan ke dalam setiap kotak. Karena bolanya identik maka cara di atas hanya dapat dilakukan dalam 1 cara. Tahap terakhir adalah mendistribusikan 6 bola identik yang tersisa ke dalam 4 kotak yang berbeda, dengan sebarang jumlah bola pada masing-masing kotak. Cara ini dapat dilakukan dalam C(4-1+6, 6) cara. Dengan menerapkan aturan perkalian, diperoleh 5 x 1 x C(4 – 1 + 6, 6) cara mendistribusikan 10 bola identik ke dalam 5 kotak berbeda dengan 1 kotak yang kosong. Jadi peluangnya adalah 5 x C(4 – 1 + 6, 6)/C(5 – 1 + 10, 10) = (5 x 84)/1001 = 0,419.

Contoh 2.56. Masalah kombinatorika umumnya dapat diterapkan pada dunia nyata. Pada sebagian besar masalah dapat terlihat bahwa masalah tersebut melibatkan barisan, permutasi, kombinasi, atau multiset. Tetapi tidak selamanya demikian karena beberapa kasus tidak hanya diselesaikan dengan salah satu metode, tetapi harus menggunakan beberapa cara sekaligus.

Misalkan suatu sistem "dunia nyata" yang di dalamnya terdistribusi r partikel, masing-masing pada n tingkatan energi yang berbeda. Konfigurasi keseluruhan sistem digambarkan dengan distribusi partikel-partikel pada berbagai tingkatan. Misalnya partikel tersebut berupa atom-atom atau molekul-molekul gas ideal yang pada temperatur dan keadaan tertentu dapat mengandung tingkatan energi tertentu. Partikel tersebut juga mungkin berupa elektron-elektron dan tingkatannya dapat berupa tingkatan energi pada atom tertentu. Atau jika partikel tersebut berupa foton-foton, maka tingkatannya dapat berbeda-beda sesuai tingkat energinya. Ada berapa konfigurasi sistem yang dapat terbentuk?

Jawab. Seperti telah disebutkan, masalah ini tidak dapat dipastikan situasinya karena partikel tersebut tidak dapat dipastikan apakah identik atau berbeda, dan juga tidak dapat dipastikan apakah pada tingkatan energi tertentu boleh terdapat lebih dari satu partikel. Di dalam ilmu-ilmu fisika posisi partikel-partikel ini tidak dapat dipastikan, karena itu dijelaskan dengan menggunakan Teori Ketidakpastian. Meskipun demikian, situasi seperti ini hendaknya tidak mengaburkan pemahaman mahasiswa terhadap suatu konsep matematis. Masalah yang tidak pasti dapat dijelaskan dengan berbagai interpretasi yang berbeda sehingga tujuan utama kuliah ini tetap tercapai, yaitu belajar untuk menentukan masalah kombinatorik dengan tepat.

Seperti diketahui, ada empat kemungkinan penyelsaian untuk kasus ini, tergantung cara pandang terhadap konfigurasi sistem tersebut, apakah sebagai barisan, permutasi, kombinasi, atau sebagai multiset. Ahli fisika secara spesifik telah menetapkan tiga dari empat kemungkinan tersebut.

Jika partikel tersebut berbeda dan sebarang banyaknya partikel boleh menempati posisi tertentu, diperoleh konfigurasi. Sistem-sistem yang memenuhi asumsi ini digambarkan dengan statistik Maxwell-Boltzmann dan konfigurasinya dapat dipandang sebagai suatu barisan. Jika partikel-partikel tersebut identik, dan sebarang banyaknya partikel yang boleh menempati posisi tertentu, maka diperoleh konfigurasi. Sistem-sistem yang memenuhi asumsi seperti ini dapat digambarkan dengan statistik Bose-Einstein dan konfigurasinya dapat dipandang sebagai suatu multiset. Selanjutnya, jika partikel tersebut identik dan hanya boleh satu partikel yang menempati posisi tertentu, maka jumlah konfigurasinya ada sebanyak sistem-sistem yang memenuhi asumsi seperti ini dapat dijelaskan dengan statistik Fermi-Dirac dan konfigurasinya dapat dipandang sebagai suatu kombinasi.

Para ahli fisika tidak memberi nama untuk situasi yang dapat digambarkan sebagai permutasi. Asumsi untuk itu seringkali mudah disusun, tetapi harus dipahami bahwa tidak ada alasan kuat untuk memilih suatu asumsi lebih baik dari asumsi yang lain. Pilihan yang tepat di dalam suatu situasi nyata tergantung pada asumsi mana yang berkaitan langsung dengan pengetahuan empiris. Misalnya atom-atom atau molekul-molekul gas ideal pada suhu tertentu dapat digambarkan dengan tepat berdasarkan statistika Maxwell-Boltzmann, distribusi foton-foton dalam tingkat-tingkat energi tertentu memenuhi statistika Bose-Einstein, dan distribusi elektron-elektron pada tingkat energi tertentu dalam suatu atom akan dapat digambarkan dengan statistik Fermi-Dirac. Dengan kata lain, pada situasi dunia nyata mahasiswa harus memilih alternatif yang logis, atau jika tidak ada pilihan lain yang lebih tepat untuk menggambarkan suatu asumsi yang dirumuskan.

Contoh 2.57. Strategi dengan susunan

(a) Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata KALENG sedemikian sehinga huruf-huruf vokalnya terletak berurutan secara alfabetis?

(b) Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata KALENG sedemikian sehingga huruf-huruf vokalnya terletak berdampingan?

(c) Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata BANDANAS sedemikian sehingga huruf-huruf vokalnya tidak terletak berdampingan?

Jawab.

(a) Terdapat 6 spasi untuk menempatkan enam huruf-huruf dalam kata KALENG. Konstruksi susunan huruf-huruf dengan cara ini dapat diuraikan menjadi tiga tahap. Tahap pertama dilakukban dengan memilih spasi untuk menempatkan huruf-huruf vokal. Cara ini dapat dilakukan dalam C(6,2) cara. Tahap kedua adalah menyisipkan vokal-vokal dalam urutan alfabetis, misalnya menempatkan A pada posisi paling awal dan E pada posisi paling akhir. Tahap ketiga adalah dengan menyisipkan konsonan pada posisi lainnya, yang dapat dilakukan dalam 4! Cara. Dengan menerapkan aturan perkalian, diketahui bahwa huruf-huruf dalam kata KALENG dapat disusun sedemikian sehinga huruf-huruf vokalnya terletak berurutan secara alfabetis dengan C(6,2).4! = 360 cara.

(b) Penyelesaian ini dapat dilakukan dalam dua tahap. Tahap pertama adalah dengan memastikan agar huruf-huruf vokalnya selalu terletak berdekatan. Jadi A dan E dapat disusun dalam dua cara yaitu AE atau EA. Tahap kedua adalah menempatkan huruf AE atau EA dengan empat huruf lainnya. Langkah ini dapat dilakukan dalam 5! Cara. Oleha karena itu berdasarkan aturan perkalian, diperoleh 2 x 5! = 240 cara.

(c) Sebelum menyusun langkah penyelesaian, mahasiswa sebaiknya membayangkan suatu strategi pencacahan. Dalam hal ini terdapat tiga vokal dan lima konsonan. Letak huruf-huruf uruf ini dapat dibayangkan sebagai susunan tiga V dan lima K. Pertama, mahasiswa dapat membayangkan banyaknya cara menyusun tiga V dan lima K tanpa adanya V yang berdekatan. Selanjutnya *V* dan K. diganti kembali dengan huruf yang sebenarnya.

KONSTRUKSI: Pada tahap pertama, dibuat susunan *V* dan K tanpa *V* yang berturutan. Letakkan *V* pada posisi yang diperbolehkan: *V_V_V*. Selanjutnya akan diletakkan setidak-tidaknya satu K di antara masing-masing *V* sehingga diperoleh susunan *VKVKV*. Kemudian K yang tersisa ditempatkan pada empat posisi yang mungkin yaitu di depan *V* yang pertama, di antara *V* yang pertama dan *V* yang kedua, di antara *V* yang kedua dan ketiga, dan posisi kanan setelah *V* yang ketiga. Penempatan ini ekivalen dengan pendistribusian tiga bola identik ke dalam empat kotak yang berbeda. Jadi tahap pertama dapat dilakukan dengan $C(4\text{-}1+3,3) = 20$ cara. Pada tahap kedua, setiap *V* diganti dengan huruf-huruf vokal. Karena ada huruf *A,* maka ketiga huruf tersebut hanya dapat dilakukan dalam satu cara. Langkah terakhir dilakukan dengan mengganti K dengan huruf-huruf konsonan. Dari contoh terakhir, cara ini dapat dilakukan dalam 5!/2! = 60 cara. Berdasarkan aturan perkalian, jawaban terhadap maslah ini adalah 20 x 60 = 1200.

Contoh. 2.58. Masalah Solusi Bulat dari Suatu Persamaan.

Ada berapa banyaknya solusi bulat dari $X_1 + X_2 + X_3 = 10$, dengan $X_i \geq 0$?

Jawab. Salah satu solusinya adalah $X_1 = X_2 = 0$ dan $X_3 = 10$. Untuk setiap variabel ini, dapat diandaikan bahwa ada 10 bola identik yang akan didistribusikan ke dalam tiga kotak. Banyaknya bola di dalam masing-masing kotak akan disesuaikan dengan nilai variabel terkait. Jadi persoalan ini ekivalen dengan banyaknya cara mendistribusikan 10 bola identik ke dalam tiga kotak berbeda, di mana setiap kotak berisi sebarang banyaknya bola atau *C*(3 – 1 + 10, 10) = 66.

Contoh 2.58 merupakan masalah solusi bulat dari suatu persamaan. Penjelasan yang telah dijabarkan dapat digeneralisasi dengan mudah, dan menunjukkan bahwa jika nilai variabel-variabelnya adalah builangan bulat nonnegatif, maka persoalan tersebut ekivalen dengan masalah multiset pendistribusian. Jadi, ketiga permasalahan di bawah ini adalah ekivalen.

(1) Ada berapa cara memilih *r* objek dari *n* objek dimana masing-masing objek dapat dipilih secara berulang.

(2) Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* kotak berbeda, dimana setiap kotak dapat diisi sebarang banyaknya bola.

(3) Ada berapa solusi bulat dari persamaan $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r$, dengan $X_i \geq 0$.

Contoh 2.59. Suatu perusahaan menghasilkan 10.000 chip komputer. Sampel yang diambil sebanyak 100 chip menunjukkan bahwa 5 di antaranya rusak. Berapakah peluang jika ditemukan *k* chip yang rusak?

Jawab. Ada *C*(10000,100) cara memilih 100 chip dari 10000 chip yang diproduksi. Kemudian akan ditentukan ada berapa cara memilih sampel yang di dalamnya terdapat 5 chip yang rusak. Pemilihan sampel dengan cara ini dapat dipilah menjadi dua tahap. Tahap pertama adalah memilih chip yang rusak dari *C*(*k*, 5) cara. Selanjutnya dipilih 95 chip yang tidak rusak dalam *C*(10000 – *k*, 95) cara. Mernurut aturan perkalian, banyaknya sampel tersebut adalah *C*(*k*, 5)*C*(10000 – *k*, 95). Oleh karena itu peluangnya adalah

$$\frac{C(k,5)C(10000-k,95)}{C(10000,100)}.$$

Jika sampel dipilih secara acak, maka diharapkan ada 500 chip yang rusak di antara semua chip yang diproduksi. Apakah angka harapan seperti itu dapat diterima secara formal? Kata kuncinya tergantung pada seberapa besar nilai *k* mempengaruhi kemungkinan yang akan terjadi. Faktanya, jika dipilih k = 500 maka kemungkinan akan semakin tinggi. Artinya dengan memilih k = 500 maka peristiwa yang benar-benar terjadi adalah kejadian yang paling mungkin terjadi. Untuk alasan ini, pilihan k = 500 disebut estimasi kemiripan maksimum (*maximum likelihood estimate.*)

Contoh 2.60. Paradoks De Mere

(a) Berapa peluang munculnya mata 6 dari peristiwa melempar satu dadu sebanyak empat kali?

(b) Berapa peluang munculnya mata dadu 6 dan 6 bersamaan jika dua dadu berbeda dilempar bersamaan sebanyak 24 kali?

Jawab. Kasus ini merupakan salah satu masalah peluang yang paling awal diketahui. Chevalier De Mere (1607 – 1684), seorang penjudi terkenal pada abad ke-17, menduga bahwa peluang dari kedua peristiwa tersebut adalah sama. Penjelasannya adalah bahwa ada 6 kemungkinan yang akan terjadi jika satu dadu dilempar. Salah satu kemungkinan dari keenam kemungkian tersebut adalah munculnya mata 6. Untuk menghasilkan terjadinya salah satu peluang ini, maka dadu dilempar sebanyak 2/3 kali dari total kemungkinan yang bisa terjadi. Jadi dalam peristiwa melampar dua dadu bersamaan, terdapat 36 kemungkinan yang akan muncul. Salah satunya adalah munculnya mata 6 dan 6 bersamaan. Jika kedua dadu dilempar sebanyak 24 kali, maka diharapkan angka tersebut muncul.

De Mere juga telah mengetahui berdasarkan hasil pengamatannya bahwa peluang pertama akan lebih besar dari ½ karena itu peluang kedua akan lebih kecil dari ½. Menurut De Mere, paradoks ini mencerminkan suatu inkonsistensi yang mendasar di dalam matematika. Hal ini disampaikannya kepada Pascal kemudian Pascal meneruskannya kepada Fermat. Korespondensi antara Pascal dan Fermat mengenai paradoks ini banyak menghasilkan temuan tentang probabilitas dan kombinatorika.

(a) Banyaknya cara melemparkan satu dadu sebanyak 4 kali adalah 6^4. Untuk menentukan banyaknya cara yang mungkin diperoleh dari peristiwa melemparkan dadu sebanyak empat kali dan memperoleh setidak-tidaknya satu kali 6 tidak mudah ditentukan secara langsung. Jadi dimisalkan banyaknya kemungkinan tersebut adalah *M*. Selanjutnya misalkan *N* adalah banyaknya cara yang mungkin diperoleh dari peristiwa melempar dadu 4 kali, dan *O* adalah banyaknya kemungkinan yang akan diperoleh dari peristiwa melempar dau sebanyak empat kali, tanpa munculnya mata 6. Menurut aturan penjumlahan, $N = M + O$, maka $M = N - O$. Sudah diketahui bahwa $N = 6^4$. Untuk menentukan O, maka peristiwa melempar satu dadu sebanyak 4 kali tanpa munculnya mata 6 menjadi 4 tahap. Masing-mnasing tahapan terdiri atas lima kemungkinan, sehingga $O = 5^4$. Jadi $M = 6^4 - 5^4$, dan probabilitasnya adalah

$$\frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 0,5177.$$

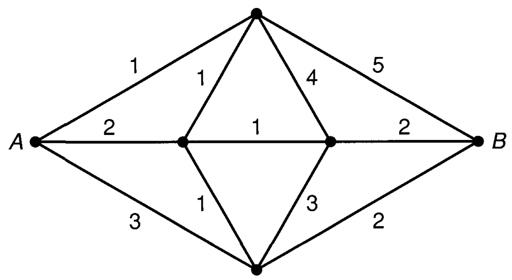
(b) Dengan cara yang sama, diketahui bahwa peluang munculnya mata dadu 6 dan 6 bersamaan jika dua dadu berbeda dilempar bersamaan sebanyak 24 kali adalah

$$\frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 0,4914.$$

E. Soal-Soal Latihan

1. Hitunglah:
   a. $C(10,8)$
   b. $C(5,2)C(6,2)$
   c. $C(5,1)/C(7,7)$
2. Sederhanakan:
   a. $C(n,0)$
   b. $C(n,1)$
   c. $C(n,n-1)$
   d. $C(n,n)$
3. Hitunglah:
   a. $P(8,4)$
   b. $P(7,0)$
   c. $P(n,1)$
   d. $\frac{P(4,2)}{P(6,3)}$
4. Buktikan bahwa $P(n,n) = P(n,n-1)$
5. Ada berapa kata berbeda yang dapat disusun dengan menggunakan kata-kata berikut ini?
   a. ALLELE
   b. BANANA
   c. PAPAYA
   d. BUBBLE
   e. ALABAMA
   f. TENNESSEE
   g. HALEAKALA
   h. KAMEHAMEH
   i. MATHEMATICS

6. Suatu dewan kota terdiri atas tujuh orang anggota, akan memilih seorang walikota dan wakil walikota dari antara ketujuh orang anggota dewan kota tersebut. Ada berapa cara pemilihan dapat disusun?
7. Berapa cara yang dapat dilakukan untuk membagikan tiga buah yang berbeda kepada lima orang anak sehingga seorang anak hanya dapat menerima satu buah? Jika seorang anak dapat menerima sebarang banyaknya buah?
8. Misalkan terdapat berbagai buah-buahan dengan varietas yang berbeda di dalam suatu toko buah.
   (a) Ada berapa cara lima orang dapat memilih buah masing-masing satu?
   (b) Ada berapa cara lima orang dapat memilih buah masing-masing satu, masing-masing varietas?
   (c) Ada berapa cara setiap orang memilih dua buah untuk setiap varitas yang berbeda?
   (d) Ada berapa cara setiap orang memilih sebarang dua buah?
9. Ada berapa digit dalam bilangan 272! ?
10. Pada diagram graf di bawah ini, tentukan semua lintasan terpendek yang dapat ditempuh dari A ke B. Panjang lintasan ditandai dengan angka-angka pada masing-masing jalur.



11. Sebuah perusahaan akan merekrut 3 orang karyawan dari 8 orang pelamar. Ada berapa cara memilih 3 karyawan tersebut jika
    a. Ketiga karyawan tersebut ditempatkan pada jenis pekerjaan sama
    b. Ketiga karyawan tersebut ditempatkan pada tiga jenis pekerjaan berbeda
12. Diberikan balok berhuruf A, B,C,D, E, F (setidaknya ada 10 buah balok untuk tiap huruf) Ada berapa rangkaian 5 huruf dimana urutan tidak diperhatikan dan boleh ada pengulangan jika:
    a. Tidak ada syarat lain
    b. Tepat ada 2 huruf A
    c. Minimal ada 3 huruf A
    d. Maksimal ada 2 huruf A

13. Dari huruf a-z diambil 5 buah huruf, 3 konsonan dan 2 vocal menjadi suatu kata yang hurufnya tidak boleh berulang,
    b. Ada berapa kata yang bisa dibentuk?
    c. Jika harus diawali K dan diakhiri huruf L, berapa kata yang bisa dibentuk?
    d. Jika harus ada huruf K, berapa kata yang bisa dibentuk?
    e. Jika harus ada huruf K dan L, berapa kata yang bisa dibentuk?
    f. Jika harus ada huruf K dan A, berapa kata yang bisa dibentuk?
14. Sebuah toko kaos menjual hanya menjual 2 jenis warna kaos yaitu berwarna merah dan biru. Berapa banyak cara memilih 5 buah kaos?
15. Lima orang mahasiswa (3 pria dan 2 wanita) ingin menemui kaprodi untuk meminta penambahan kelas. Kaprodi hanya bersedia ditemui oleh 3 utusan yang terdiri dari setidaknya 1 wanita. Berapa kemungkinan pembentukan 3 utusan tersebut?
16. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk dari kata 'TELEVISI'?
17. Sebuah toko buah hanya menjual 5 jenis buah yaitu semangka, jeruk, nenas, pepaya dan melon (tiap jenis > 10 buah). Berapa banyak cara memilih 3 buah?
18. Seorang dosen memberi 6 buah soal kepada mahasiswa dengan syarat setiap mahasiswa harus mengerjakan 5 buah soal saja dan soal no 1 wajib dikerjakan. Ada berapa cara memilih soal tersebut?
19. Sebuah toko pakaian hanya menyediakan 4 model pakaian. Berapa cara memilih 6 pakaian ?
20. Lomba cepat-tepat diikuti oleh 6 grup peserta yang masing-masing terdiri dari 3 orang. Peserta dalam 1 grup harus duduk berdampingan.
    a. Jika semua peserta duduk dalam 1 baris, berapa cara yang didapat untuk menyusun mereka
    b. Jika semua peserta duduk dalam 1 lingkaran, berapa cara yang didapat untuk menyusun
21. Tentukan banyaknya cara agar 4 buku matematika, 3 buku sejarah, 3 buku kimia, dan 2 buku sosiologi dapat disusun sedemikian sehingga
    a. semua buku yang topiknya sama letaknya bersebelahan,
    b. urutan buku dalam susunan bebas.
22. Tentukan banyaknya "kata" yang terbentuk dari huruf-huruf dalam kata "SELEBES" jika:
    a. setiap "kata" berawal dengan huruf E dan berakhir dengan E,
    b. pada setiap "kata", tiga huruf E berdampingan satu sama lain.

23. Palindrom adalah barisan karakter (huruf atau angka) yang bila dibaca dari depan atau dari belakang adalah sama. Contoh: KATAK, MALAM, 21477412, 36963. Untuk soal ini kita hanya meninjau palindrom yang dibentuk dari barisan angka. Berapa banyak bilangan palindrom 9-angka yang dapat dibentuk dari angka 0, 1, …, 9 dengan ketentuan tidak boleh ada pengulangan angka pada setengah bagian (misalnya, 366191663 tidak dibenarkan karena 6 dipakai 2 kali)?
24. Dari 5 buah apel dan 4 buah jeruk, ingin dipilih 4 buah dimana diantaranya harus ada paling sedikit 2 buah jeruk. Berapa cara memilihnya?
25. Jika suatu toko menjual 3 ukuran T-Shirt dengan 6 warna berbeda, dan setiap T-Shirt bisa bergambar naga, buaya atau tidak bergambar sama sekali, berapa jenis T-Shirt berbeda yang dapat anda beli?
26. Berapa banyak bilangan berdigit 3 yang kurang dari 400 yang bisa dibentuk dari 6 angka 2,3,4,5,7,9 dan pengulangan tidak diperbolehkan?
27. Ada berapa bilangan bulat genap antara 1 dengan 99?
28. Sebuah koin dilemparkan sebanyak 30 kali. Ada berapa kemungkinan kombinasi munculnya gambar dan angka?
29. Ada berapa cara menjawab 50 butir soal pilihan ganda jika 20 butir di antaranya terdiri atas 3 pilihan, dan 30 butir di antaranya terdiri atas 5 pilihan.
30. Tes penerimaan mahasiswa baru terdiri atas 20 butir soal B-S, dan 80 butir soal pilihan ganda. Jika soal pilihan ganda terdiri atas 5 pilihan jawaban dan jawaban dipilih secara acak, ada berapa cara menjawab untuk memperoleh skor 100? Berapa kemungkinan diperoleh skor 100 jika seorang peserta tes menjawab secara acak?
31. Nomor plat kendaraan di suatu negara terdiri atas 3 huruf diikkuti 4 angka. Ada berapa nomor plat kendaraan yang dapat dibuat jika setiap nomor dan angka dapat berulang? Jika angka saja yang boleh berulang?
32. Ada berapa bilangan bulat antara 100 dan 999 yang semua angkanya berbeda? Berapa bilangan ganjil?
33. Berapa kalikah angka 3 ditulis dalam barisan bilangan 1 sampai dengan 1000?
34. Ada berapa cara menyusun huruf-huruf dalam kata KOMPUTER sedemikian sehingga huruf vokal terletak berdekatan?