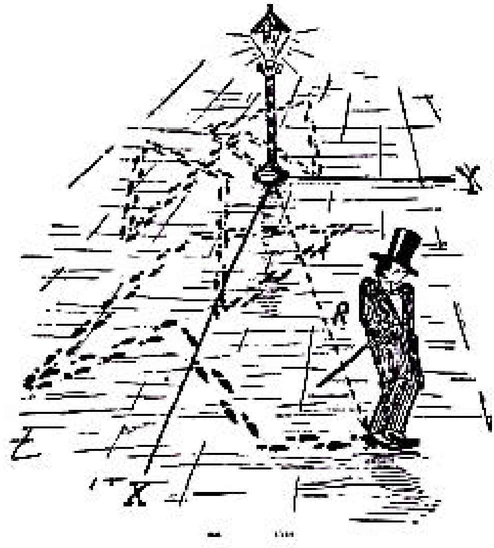
4 — Jalan Acak

Peristiwa jalan acak (*random walk*) dapat dibayangkan laiknya orang yang sedang berjalan pada arah yang sebarang dengan syarat panjang setiap langkah adalah sama. Orang yang berjalan dengan cara seperti ini amat sulit untuk ditebak ke mana arahnya, mirip dengan kekhasan orang mabuk yang sedang berjalan. Karena itu, acapkali jalan acak juga disebut sebagai jalannya seorang pemabuk (*a drunkard's walk*) (Stewart, 2001). Sebutan ini mengacu pada judul fiksi sains karya Frederick Pohl di tahun 1960 (Wikipedia, 2005). Gambar 4.1 yang dibuat oleh George Gamow merupakan metafora dari sebutan *drunkard's walk* untuk jalan acak ini.

Menurut Baschnagel dan Paul (1999) dan Dimson dan Mussavian (2000), konsep jalan acak diperkenalkan sebagai sebuah ilmu oleh Karl Pearson dalam suratnya kepada *Na-*



Gambar 4.1: [Metafora]. Sebuah jalan acak (jalannya pemabuk). Sumber gambar: http://www.sos.siena.edu

ture tahun 1905. Dalam matematika dan fisika, jalan acak merupakan perumusan gagasan tentang langkah berturutan dengan arah yang acak pada setiap langkahnya. Jalan acak paling sederhana merupakan sebuah lintasan yang dibangun dengan aturan-aturan: ada titik awal (keberangkatan), jarak dari satu titik ke titik berikutnya adalah tetap dan setiap arah yang terpilih merupakan arah acak.

Berdasarkan hal di atas, andaikan $X_i, i \geq 1$ merupakan saling bebas dan berdistribusi sama dengan

$$\mathcal{P}(X_i = j) = a_j, \qquad j = 0, \pm 1, \cdots ,$$

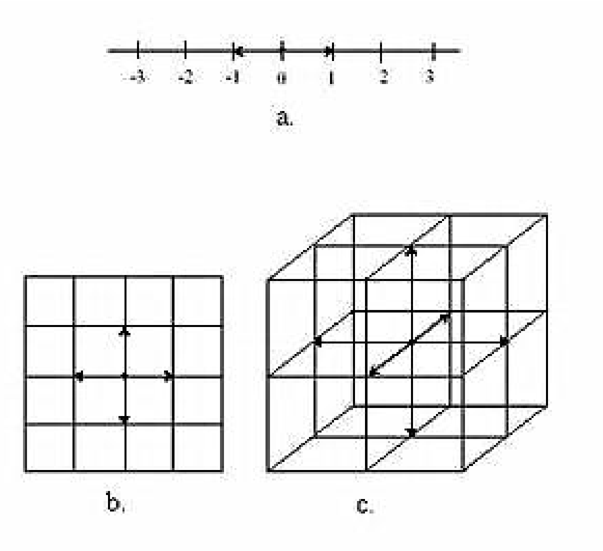
sehingga jika diambil

$$S_0 = 0 \qquad \text{dan} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

maka $\{S_n, n \geq 0\}$ disebut sebuah jalan acak. Jika tempat dari X_i adalah dalam $\mathbf{R}^m$, maka $\{S_n, n \geq 0\}$ dikatakan sebagai jalan acak dalam ruang $\mathbf{R}^m$.

Dalam tinjauan ini, barisan X_i adalah hasil keluaran dari percobaan yang saling bebas. Karena X_i adalah saling bebas, peluang setiap sejumlah barisan tertentu dari hasil keluaran dapat dihitung dengan mengalikan peluang setiap X_i. Peluang masing-masing X_i ini diberikan oleh distribusinya.

Ada beberapa cara untuk membayangkan sebuah jalan acak. Proses ini bisa dibayangkan melalui sebuah zarah yang ditempatkan pada titik asal dalam $\mathbb{R}^m$ pada waktu $n = 0$. Jumlahan S_n melambangkan posisi zarah pada akhir n detik. Sehingga, dalam rentang waktu $[n-1, n]$, zarah bergerak (atau melompat) dari posisi S_{n-1} ke S_n. Vektor yang melambangkan gerakan ini adalah $S_n - S_{n-1}$, yang juga sama dengan X_n. Hal ini mengisyaratkan bahwa dalam sebuah jalan acak, lompatan-lompatan adalah saling bebas dan berdistribusi sama. Jika $m = 1$, maka orang bisa membayangkan sebuah zarah pada garis riil berangkat dari titik asal, dan berakhir pada detik kapanpun, melompat satu satuan ke kanan atau kekiri, dengan peluang yang diberikan oleh distribusi X_i. Jika $m = 2$, seseorang dapat membayangkan sebuah proses yang terjadi di kota dengan bentuk-bentuk jalan yang persegi. Seseorang berangkat dari suatu sudut (yakni pada perpotongan 2 jalan) dan pergi mengambil 1 arah dari 4 kemungkinan sesuai



Gambar 4.2: (a) Jalan acak dengan $m = 1$. Pada jalan acak ini hanya ada 2 kemungkinan arah yaitu ke kanan atau ke kiri. (b) Jalan acak dengan $m = 2$, dengan 4 kemungkinan arah yaitu: ke selatan, utara, barat dan timur. (c) Jalan acak dengan $m = 3$, dengn 6 kemungkinan arah yaitu: ke selatan, utara, barat, timur, ke atas dan ke bawah

dengan distribusi X_i. Jika $m = 3$, seseorang bisa membayangkan berada di gedung olahraga, dimana seseorang bebas untuk bergerak dengan mengambil 1 arah dari 6 kemungkinan arah. Sekali lagi, peluang gerakan ini diberikan oleh distribusi dari X_i. Gagasan-gagasan ini bisa dilihat dalam gambar 4.2.

Model yang lain untuk menggambarkan jalan acak adalah percobaan pelantunan koin seperti yang disinggung dalam bab 2 (§2.3), dimana $X_i = 1$ untuk hasil keluaran 'muka' dan

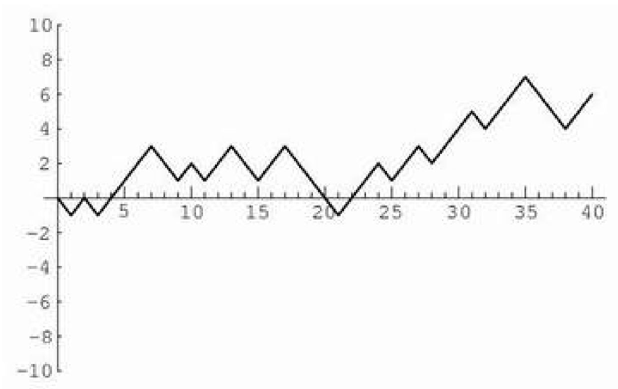
$X_i = -1$ untuk hasil keluaran 'belakang', juga merupakan sebuah jalan acak. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa untuk $p,\ 0 < p < 1$,

$$\mathcal{P}(X_i = 1) = p, \tag{4.1}$$
$$\mathcal{P}(X_i = -1) = q = 1 - p \tag{4.2}$$

dan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{4.3}$$

Dalam jalan acak ini, proses selalu naik (berjalan ke kanan) satu langkah (dengan peluang p) atau turun (berjalan ke kiri) satu langkah (dengan peluang q).



Gambar 4.3: Sebuah lintasan jalan acak yang merekam perjalanan sampai 40 langkah dengan pelemparan koin. Jika koin tampak 'muka' maka naik 1 langkah dan jika koin tampak 'belakang' maka turun 1 langkah

4.1 Asas Dualitas

Peubah $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ mempunyai distribusi gabungan yang sama dengan $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1)$. Ini disebut dengan asas dualitas (*duality principle*, prinsip dualitas). Asas ini dengan mudah terbukti karena $X_i, i > 1$, merupakan saling bebas dan terdistribusi sama.

Andaikan $X_1, X_2, \ldots$ merupakan peubah acak yang saling bebas dan terdistribusi/teragih sama dengan $E(X_i) > 0$. Jika $N = \min(n : \; X_1 + \cdots + X_n > 0)$, maka

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(N > n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_1 \leq 0,\, X_1 + X_2 \leq 0,\, \ldots,\, X_1 + \cdots + X_n \leq 0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_n \leq 0,\, X_n + X_{n-1} \leq 0,\, \ldots,\, X_n + \cdots + X_1 \leq 0),$$

dimana persamaan terakhir muncul dari dualitas. Karena itu

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(S_n \leq S_{n-1}, S_n \leq S_{n-2}, \ldots, S_n \leq 0) \quad (4.4)$$

sehingga

$$E(N) < \infty.$$

Persamaan terakhir ini menandakan bahwa jika $E(X) > 0$ maka jalan acak akan mempunyai harapan jumlah langkah yang berhingga.

Sekarang andaikan R_n sebagai jangkauan dari $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$

dan merupakan jumlahan nilai-nilai dari $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Dengan mengambil

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{jika } S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \ldots, S_k \neq S_0, \\ 0 & \text{untuk } S_k \text{ yang lain.} \end{cases}$$

maka

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

dan sehingga

$$\begin{aligned} E(R_n) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(I_k = 1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \ldots, S_k \neq 0) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(X_k \neq 0, X_k + X_{k-1} \neq 0, \ldots, \\ &\quad X_k + X_{k+1} + \cdots + X_1 \neq 0) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \ldots, \\ &\quad X_1 + \cdots + X_k \neq 0), \end{aligned} \tag{4.5}$$

dimana persamaan terakhir muncul dari dualitas. Oleh sebab itu

$$E(R_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_k \neq 0) \quad (4.6)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}(T > k), \quad (4.7)$$

dimana T adalah waktu untuk kembali pertama ke 0. Sekarang, ketika $k \to \infty$,

$$\mathcal{P}(T > k) \to \mathcal{P}(T = \infty) = \mathcal{P}(\text{tidak kembali ke } 0),$$

dan sehingga dari persamaan (4.6) dapat dilihat bahwa

$$\frac{E(R_n)}{n} \to \mathcal{P}(\text{tidak kembali ke } 0).$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(R_n)}{n} = \mathcal{P}(\text{jalan acak tidak pernah kembali ke } 0) \quad (4.8)$$

Dalam jalan acak dengan $\mathcal{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathcal{P}(X_i = -1)$, andaikan sekarang $p = \frac{1}{2}$ —disebut juga jalan acak setangkup (simetri)—, maka jalan acak merupakan *recurrent* sehingga

$$\mathcal{P}(\text{tidak kembali ke } 0) = 0 \qquad \text{ketika } p = \frac{1}{2}.$$

Oleh karena itu,

$$E(\frac{R_n}{n}) \to 0 \qquad \text{ketika } p = \frac{1}{2}.$$

Ketika $p = \frac{1}{2}$, andaikan $\alpha = \mathcal{P}(\text{kembali ke } 0|X_1 = 1)$. Karena $\mathcal{P}(\text{kembali ke } 0|X_1 = -1) = 1$ sehingga

$$\mathcal{P}(\text{kembali ke } 0) = \alpha p + 1 - p.$$

Dengan membuat keadaan pada X_2,

$$\alpha = \alpha^2 p + 1 - p,$$

atau sama saja dengan

$$(\alpha - 1)(\alpha p - 1 + p) = 0.$$

Karena $\alpha < 1$ dari transiensi, maka terlihat bahwa

$$\alpha = \frac{(1-p)}{p},$$

sehingga

$$E(\frac{R_n}{n}) \to 2p - 1 \qquad \text{ketika } p = \frac{1}{2}.$$

Dapat juga diubah menjadi,

$$E(\frac{R_n}{n}) \to 2(1-p) - 1 \qquad \text{ketika } p \leq \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Sekarang akan diselidiki jumlah harapan kunjungan ke keadaan k. Untuk $k > 0$ andaikan Y melambangkan jumlah kunjungan ke keadaan k sebelum kembali pertama kali ke titik asal. Dengan demikian Y dapat dinyatakan sebagai

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} I_n,$$

dengan

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{jika kunjungan ke keadaaan } k \text{ terjadi pada waktu } n \\ & \text{dan tidak kembali ke titik asal sebelum } n \\ 0 & \text{untuk kunjungan yang lain,} \end{cases}$$

atau I_k dapat juga dinyatakan

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{jika } S_n > 0, S_{n-1} > 0, \ldots, S_1 > 0, S_n = k \\ 0 & \text{sebaliknya,} \end{cases}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(S_n > 0, S_{n-1}, \ldots, S_1 > 0, S_n = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(X_n + \cdots + X_1 > 0, X_{n-1} + \cdots + X_1 > 0, \\ &\qquad \ldots, X_1 > 0, X_n + \cdots + X_1 = k) \end{aligned}$$

karena asas dualitas maka

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=l}^{\infty} \mathcal{P}(X_1 + \cdots + X_n > 0, X_2 + \cdots + X_n > 0, \\ &\qquad \ldots, X_n > 0, X_1 + \cdots + X_n = k), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(S_n > 0, S_n > S_1, \ldots, S_n > S_{n-1}, S_n = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(\text{ jalan acak simetri berada di } k \\ &\qquad \text{untuk pertama kalinya pada saat } n) \\ &= \mathcal{P}(\text{pernah berada di } k) \\ &= 1 \qquad \text{(dengan rekurensi)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Oleh karena itu, dalam jalan acak simetri jumlah harapan kunjungan ke keadaan k sebelum kembali ke titik asal adalah sama dengan 1 untuk semua $k \neq 0$.

4.2 Sifat Martinggil

Andaikan peubah acak $X_1, X_2, \ldots$ merupakan peubah acak saling bebas dengan nilai harap 0, maka peristiwa jalan acak $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\, n \geq 1\}$ merupakan sebuah martinggil. Hal ini dapat dilihat dalam perhitungan berikut:

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}|S_1, S_2, \ldots, S_n) &= E(S_n + X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n) \\ &= E(S_n|S_1, \ldots, S_n) \\ &\qquad + E(X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n) \\ &= S_n + E(X_{n+1}) \\ &= S_n \end{aligned} \tag{4.11}$$