5 — Gerak Brown

Gerak Brown adalah gerak acak malar zarah zat padat mikroskopik (dengan garis tengah kira-kira 1 mikrometer) bila tercelup di dalam medium fluida (Isaacs, 1994, hlm. 43). Nama Brown dinisbatkan kepada Robert Brown (1773-1858). Ia menyebutkan bahwa penelitiannya tentang gerak acak ini berangkat dari temuan Leuwenhoek (1632–1723) (Nelson, 2001, hlm. 5). Pada tahun 1827 ketika sedang meneliti zarah tepung sari, Brown menemukan gejala serupa yaitu zarah-zarah kecil bergerak secara acak dengan cepat (*rapid oscillatory motion*). Pada awalnya, Brown mengira gerak ini merupakan perwujudan suatu bentuk kehidupan, namun ternyata zarah-zarah tak organik yang kecil juga menunjukkan perilaku yang serupa (Isaacs, 1994, hlm. 43). Sumbangan Brown dalam menerangkan gejala *rapid oscillatory motion* ini adalah memberikan pijakan yang kuat bahwa gerakan ini merupakan gejala yang penting dan membuktikan bahwa gerakan ini tidak hanya berlaku untuk zarah organik tetapi juga ditemui pada zarah tak organik (Nelson, 2001, hlm. 8).

Sejak Brown memaklumkan hasil temuannya dalam *Philosophical Magazine* tahun 1828, gerakan zarah secara acak itu kemudian lebih dikenal sebagai gerak Brown (mengacu pada namanya; Robert Brown). Banyak ilmuwan kemudian berusaha untuk memberikan penjelasan mengenai fenomena gerak Brown ini. Namun, Halliday dan Resnick (1992, hlm. 811) menyebutkan bahwa tidak ada keterangan kuantitatif mengenai fenomena ini sampai dikembangkannya teori kinetik. Karenanya, Nelson (2001, hlm. 10–1) menyatakan bahwa penelitian tentang gerak Brown yang patut dicatat pada masa itu adalah eksperimen Gouy. Kesimpulan dari penelitian Gouy dituangkan dalam 7 butir utama berikut :

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.
2. Dua zarah nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu sama lain dalam jarak yang lebih dekat dibanding diameter mereka.
3. Gerakan ini semakin cepat untuk zarah yang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan zarah.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi.

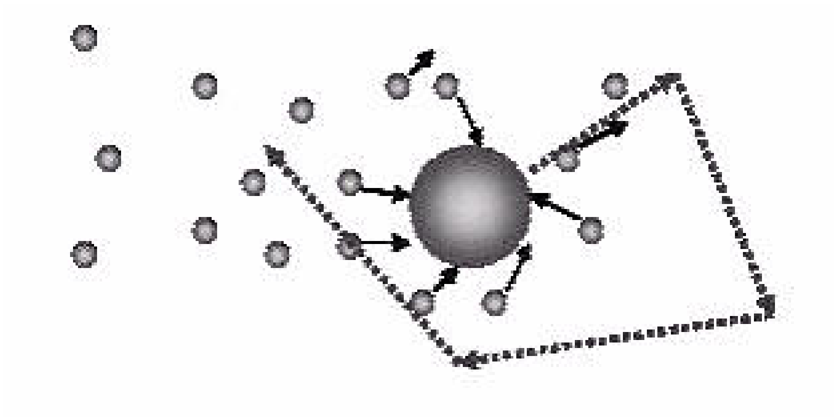
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti.

Pada masa itu secara bersamaan terjadi perdebatan yang sengit tentang teori atom, apakah atom sebagai kenyataan ilmiah atau tidak. Sebagaimana tradisi dalam ilmu fisika, hakim dari setiap perdebatan adalah eksperimen. Halliday dan Resnick (1992, hlm. 810-11) menyatakan bahwa melalui telaah mengenai gerak Brown secara kuantitatif, kebenaran teori kinetik atom pada akhirnya teruji sehingga perdebatan itu menjadi padam. Titik pancang padamnya perdebatan ini adalah bermula dari karya Albert Einstein tentang gerak Brown dalam *Annalen der Physik* tahun 1905.

5.1 Model Fisika untuk Gerak Brown

Einstein mengandaikan bahwa zarah-zarah yang tergantung dalam suatu fluida secara bersama-sama menanggung gerak termal dari medium dan secara rata-rata tenaga kinetik translasi dari setiap zarah adalah $3/2\ kT$, sesuai dengan prinsip ekipartisi tenaga. Dalam pandangan ini, maka gerak Brown berasal dari tumbukan molekul-molekul fluida, dan zarah-zarah yang tergantung mendapatkan tenaga kinetik rata-rata yang sama seperti molekul-molekul fluida tersebut.

Zarah-zarah yang tergantung tersebut adalah sangat besar dibandingkan dengan molekul-molekul fluida dan semua sisinya ditembaki secara terus-menerus oleh molekul-molekul tersebut. Jika zarah-zarah cukup besar dan jumlah molekul cukup banyak, maka jumlah molekul yang sama akan menumbuk semua sisi zarah-zarah pada setiap saat. Untuk zarah-zarah yang lebih kecil dan jumlah molekul yang lebih sedikit maka jumlah molekul yang menumbuk berbagai sisi



Gambar 5.1: Zarah Brown yang tergantung dalam fluida 'menderita' gaya sebarang K

zarah pada setiap saat semata-mata hanyalah merupakan kemungkinan. Besar jumlah ini mungkin tidak sama, sehingga akan terjadi fluktuasi. Akibatnya, setiap saat zarah mengalami gaya tak seimbang yang pada gilirannya menyebabkan zarah tersebut bergerak dengan berbagai cara. Dengan demikian zarah-zarah bertindak persis seperti molekul-molekul yang sangat besar di dalam fluida, dan geraknya secara kualitatif haruslah sama seperti gerak molekul-molekul fluida. Kaitannya dengan bilangan Avogadro, seandainya bilangan Avogadro adalah tak berhingga maka tidak akan ada fluktuasi sehingga tidak ada gerak Brown. Sebailknya, seandainya bilangan Avogadro adalah sangat kecil, maka gerak Brown akan sangat besar. Oleh karena itu, bilangan Avogadro bisa ditentukan dengan gerak Brown ini.

Secara garis besar, argumen Einstein dalam menurunkan gerak Brown ini dapat dibagi menjadi 2 bagian. Dalam argumen bagian pertamanya, Einstein mengandaikan bahwa gerak Brown yang dimulai pada saat $X(0) = 0$ akan mempunyai rapat peluang pada waktu t yaitu $N(0, t)$. Rapat peluang sebuah zarah Brown berada pada x dan waktu t bernilai

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,D\,t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\,D\,t}}. \tag{5.1}$$

Maka, untuk menyelesaikan persamaan tersebut, Einstein menurunkannya ke dalam persamaan difusi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} \tag{5.2}$$

dengan D adalah tetapan positif koefisien difusi.

Argumen bagian kedua menghubungkan D dengan besaran fisis yang lain. Untuk itu, andaikan zarah-zarah Brown tergantung (tercelup) dalam fluida, berada dalam pengaruh gaya eksternal K dan dalam sistem kesetimbangan. Dalam tinjauan ini gaya K dianggap sebagai gaya sebarang.

Dalam kesetimbangan, gaya K diimbangi oleh tekanan osmotik,

$$K = kT\,\frac{\mathrm{grad}\,\upsilon}{\upsilon} = kT\,\frac{\nabla\upsilon}{\upsilon}. \tag{5.3}$$

Di sini grad merupakan singkatan dari gradien yang melambangkan laju variasi terhadap koordinat dan ∇ adalah lambang singkat dari grad atau disebut juga operator turunan nabla Laplace. Lambang υ merupakan jumlah zarah per satuan volume, T adalah suhu mutlak, dan k adalah tetapan Boltzman yang mempunyai dimensi energi per suhu sehingga besaran kT mempunyai dimensi energi ($k = 1,381.10^{-23}$ J/K). Pengetahuan tentang k sebenarnya adalah pengetahuan tentang bilangan Avogadro sebab k adalah perbandingan antara tetapan gas universal R ($= 8,31$ J/mol K) dan bilangan Avogadro itu sendiri, dan oleh karenanya, ini akan mengarah pada ukuran molekul. Ruas kanan persamaan (5.3) diturunkan dengan menganggap zarah-zarah Brown identik dengan molekul gas dalam teori kinetik.

Zarah-zarah Brown yang bergerak dalam fluida menyebabkan timbulnya gesekan sehingga gaya K memberi kecepatan pada setiap zarah sebesar

$$\frac{K}{m\,\beta}$$

dengan β merupakan tetapan berdimensi frekuensi (satuan: per waktu) dan m adalah massa zarah. Oleh karena itu, sebanyak $\frac{\upsilon\,K}{m\,\beta}$ zarah melewati satuan luas per satuan waktu sesuai dengan aksi gaya K. Dengan kata lain, jika hanya difusi yang bekerja saja, υ akan memenuhi persamaan difusi sehingga jumlah zarah yang melewati satuan luas per waktu adalah

$$D\ \nabla\upsilon.$$

Dengan demikian, didapatkan

$$\frac{\upsilon K}{m\beta} = D\nabla\upsilon. \tag{5.4}$$

Dengan menggunakan persamaan (5.3) dan (5.4), maka K

dan υ dapat dilenyapkan dan didapat

$$D = \frac{kT}{m\beta}. \tag{5.5}$$

Kaitan di atas biasa dikenal sebagai kaitan Einstein . Kaitan ini berlaku bahkan ketika tidak ada gaya dan ketika hanya ada satu zarah Brown.

Andaikan kedua ruas dalam persamaan (5.3) dibagi dengan $m\beta$ dan dengan menggunakan persamaan (5.4), maka akan didapat persamaan baru

$$\frac{K}{m\beta} = D\frac{\nabla\upsilon}{\upsilon}.$$

Karena rapat peluang ρ hanyalah rapatan jumlah υ dibagi dengan jumlah zarah, maka persamaan di atas dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{K}{m\beta} = D\frac{\nabla\rho}{\rho}.$$

Ruas kiri persamaan di atas merupakan kecepatan yang diperoleh zarah karena aksi gaya K, maka

$$D\frac{\nabla\upsilon}{\upsilon} \tag{5.6}$$

merupakan kecepatan yang dibutuhkan oleh zarah untuk melawan efek gaya K.

Jika zarah Brown adalah bola dengan jejari a, maka teori gesekan Stokes memberikan $m\beta = 6\pi\eta a$, dengan η adalah koefisien viskositas fluida, sehingga dalam kejadian ini tetapan difusi menjadi

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \tag{5.7}$$

Suhu T dan koefisien viskositas η dapat diukur dan jejari zarah berbentuk bola dapat ditentukan, dan D dapat dicari dengan pengamatan statistik gerak Brown menggunakan persamaan (5.1). Dengan cara ini, tetapan Boltzman k (atau setara dengan bilangan Avogadro) dapat dihitung. Perhitungan ini dikerjakan oleh Perrin dan Chaudesaigues. Yang lebih menakjubkan, hasil perhitungan bilangan Avogadro yang didapat, yakni 6.10^{23} zarah/mol, hampir mendekati dengan nilai bilangan Avogadro yang sekarang ($N_A = 6,02.10^{23}$ /mol).

Perhitungan Einstein di atas hanya menentukan sifat alamiah gerakan dan nilai koefisien difusi yang berdasarkan pada andaian-andaian yang disusunnya. Secara terpisah, Smoluchowski mendapatkan persamaan (5.5) dengan faktor 32/27 pada ruas kanannya. Langevin memberikan penurunan yang lain terhadap persamaan (5.5) yang kemudian menjadi pijakan bagi karya Ornstein dan Uhlenbeck.

Karya Einstein ini sangat berpengaruh dalam fisika karena telah membuktikan dengan cara yang mudah dan konkret bahwa atom benar-benar ada. Namun demikian, Einstein tidak bisa memberikan bukti bahwa gerak Brown wujud (eksis) secara matematika (Ma, 1997, hlm. 49).

5.2 Model Matematika untuk Gerak Brown

Dalam beberapa pustaka, ada aneka lambang untuk menyebut gerak Brown. Lambang $B(t)$ diambil dari abjad pertama *Brownian motion* sekaligus untuk mengenang Robert Brown. Lambang $W(t)$ digunakan sebagai penghormatan terhadap Norbert Wiener yang telah membuktikan eksistensi gerak Brown secara matematis dalam disertasi doktornya tahun 1923, karena itu pula proses gerak Brown juga sering disebut dengan istilah proses Wiener. Sementara beberapa pustaka yang lain —misalnya Ross (1982)— menggunakan lambang yang berbeda yakni $Z(t)$ dan $z(t)$. Dalam buku ini, secara umum notasi $B(t)$ dipilih untuk melambangkan proses gerak Brown ini, meskipun di beberapa bagian menggunakan beberapa lambang yang berbeda.

Sebagaimana sudah disinggung ketika membahas proses Markov, gerak Brown merupakan pengembangan lebih lanjut dari jalan acak. Dari pembahasan itu dan mengingat kembali dalil limit pusat, maka peubah acak $X(t)$ merupakan peubah acak normal dengan nilai harap 0 dan variansi c^2t, kenaikannya merupakan kenaikan yang saling bebas, dan ketika perubahan nilai posisi jalan acak terhadap setiap selang waktu hanya bergantung pada selang itu sendiri maka kenaikannya adalah stasioner. Beberapa kesimpulan ini dapat diringkas sebagai takrif dari gerak Brown.

Secara lebih lengkap, sebuah proses stokastik $\{B(t),\ t \geq 0\}$ disebut proses gerak Brown jika memenuhi keadaan-keadaan berikut:

1. $B(0) = 0$,
2. proses $\{B(t),\ t \geq 0\}$ mempunyai kenaikan saling bebas

yang stasioner, yakni untuk $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ kenaikan dari $B(t_n) - B(t_{n-1}),\ B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \ldots,\ B(t_2) - B(t_1)$ merupakan peubah acak yang saling bebas,

3. untuk seluruh $t \geq 0$ dan $h > 0$, kenaikan $B(t+h) - B(t)$ terdistribusi secara normal dengan nilai harap $\mu\ h$ dan variansi $\sigma^2\ h$,
4. fungsi yang memetakan $t \mapsto B(t)$ merupakan fungsi kontinu.

Untuk nilai-nilai $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$, proses sering disebut sebagai gerak Brown standard (*standard Brownian motion*). Pandangan bahwa gerak Brown merupakan limit jalan acak menyajikan informasi bahwa $B(t)$ merupakan fungsi malar dari t namun berupa titik-titik sehingga tidak mulus dan karenanya fungsi ini tidak dapat diturunkan dimanapun juga. Andaian kenaikan yang saling bebas menyebabkan bahwa perubahan posisi antara waktu s dan $t+s$ —yakni $B(t+s) - B(s)$— merupakan saling bebas untuk seluruh nilai dalam proses sebelum waktu s. Karenanya, persamaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(B(t+s) \leq a \mid B(s) = x,\ B(u),\ 0 \leq u < s\right) \\
&= \mathcal{P}\left(B(t+s) - B(s) \leq a - x | B(s) = x,\right. \\
&\qquad \left. B(u), 0 \leq u < s\right) \qquad (5.8) \\
&= \mathcal{P}\left(B(t+s) - B(s) \leq a - x\right) \\
&= \mathcal{P}\left(B(t+s) \leq a | B(s) = x\right)
\end{aligned}$$

yang menyatakan bahwa peluang bersyarat untuk keadaan mendatang $B(t+s)$ hanya bergantung pada $B(s)$ sebagai keadaan sekarang. Sifat ini selaras dengan sifat proses Markov.

Gerak Brown yang dibahas di muka merupakan gerak Brown tanpa laju pertumbuhan (*drift*), nilai harap sama dengan 0. Sebuah gerak Brown $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown dengan laju pertumbuhan yang mempunyai koefisien laju pertumbuhan senilai μ jika memenuhi syarat-syarat:

1. $X(0) = 0$,
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ mempunyai kenaikan yang saling bebas dan stasioner,
3. $X(t)$ terdistribusi secara normal dengan nilai harap $\mu\, t$ dan variansi t.

Dengan merujuk pada syarat-syarat di atas, jika $X(t)$ merupakan gerak Brown dengan laju pertumbuhan, maka $X(t)$ akan memenuhi persamaan

$$X(t) = B(t) + \mu\, t, \qquad B(t) \text{ merupakan gerak Brown standard.} \tag{5.9}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa sebuah gerak Brown dengan laju pertumbuhan merupakan sebuah proses yang cenderung untuk berolak (*drift off*) pada tingkat μ. Gerak Brown ini juga dapat didekati dengan jalan acak. Untuk memahami ini, andaikan bahwa untuk setiap Δt satuan waktu proses bergerak ke positif atau negatif dengan panjang langkah Δx dengan peluang p dan $1 - p$. Jika diandaikan bahwa

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{jika pada langkah ke-}i \text{ positif} \\ -1 & \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}$$

maka $X(t)$ yakni posisi pada waktu t adalah

$$X(t) = \Delta x(X_1 + \cdots + X_{t/\Delta t}).$$

Pada proses ini nilai harap dan variansinya adalah

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \Delta x\,[t/\Delta t]\,(2p-1) \\ \mathrm{Var}[X(t)] &= (\Delta x)^2[t/\Delta t][1-(2p-1)^2]. \end{aligned}$$

Andaikan kemudian diambil nilai $\Delta x = \sqrt{\Delta y}$, $p = \frac{1}{2}(1+\mu\sqrt{t})$, dan $\Delta t \to 0$ maka

$$\begin{aligned} E[X(t)] &\to \mu t, \\ \mathrm{Var}[X(t)] &\to t, \end{aligned}$$

sehingga nampak jelas bahwa $\{X(t)\}$ merupakan gerak Brown dengan koefisien laju pertumbuhan μ.

Berdasarkan pembahasan dalam gerak Brown standard dan gerak Brown dengan laju pertumbuhan, jika gerak Brown $\{X(t),\, t \geq 0\}$ memiliki nilai harap μ dan variansi σ^2 maka persamaan gerak Brown secara umum akan menjadi

$$X(t) = \sigma B(t) + \mu t. \tag{5.10}$$

Dalam bentuk persamaan turunan, persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$dX(t) = \sigma dB(t) + \mu dt. \tag{5.11}$$

Sejauh ini, gerak Brown yang disinggung hanya merupakan peubah-peubah acak yang mengikuti gerak Brown tersebut.

Apabila logaritma dari suatu peubah acak mengikuti gerak Brown, maka proses ini juga merupakan gerak Brown. Andaikan $\{X(t),\, t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown dengan laju pertumbuhan μ dan variansi σ^2, maka proses $\{Y(t),\, t \geq 0\}$ yang memenuhi takrif

$$Y(t) = e^{X(t)} = e^{\sigma B(t) + \mu t} \tag{5.12}$$

juga merupakan gerak Brown. Nama khusus untuk gerak Brown jenis ini adalah gerak Brown geometrik (*geometric Brownian motion*) —acapkali disebut gerak Brown eksponensial.

5.3 Lemma Itô

Salah satu perampatan gerak Brown yang sangat masyhur adalah proses Itô. Jika $X(t)$ mengikuti proses Itô, maka

$$dX(t) = a(X,t)\, dt + b(X,t)\, B(t) \tag{5.13}$$

dengan parameter a dan b merupakan fungsi dari nilai-nilai peubah acuan X dan t, sedangkan $dB(t)$ merupakan gerak Brown. Lemma Itô menunjukkan bahwa sebuah fungsi Y dari X dan t mengikuti proses

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial X} a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial X}\, b\, dB(t). \tag{5.14}$$

Oleh karena itu, Y juga mengikuti proses Itô dengan laju pertumbuhan

$$\frac{\partial Y}{\partial X}a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}b^2 \tag{5.15}$$

dan variansi

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2 b^2. \tag{5.16}$$

Bukti

Dengan deret Taylor dari ΔY yang merupakan fungsi dari X dan t, maka di dapat

$$\begin{aligned}\Delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial Y}{\partial t}\Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\Delta X^2 + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial t}\Delta X \Delta t + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\Delta t^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(\Delta X \frac{\partial}{\partial X} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t}\right)^3 Y + \cdots . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Bentuk tercacah dari proses Itô (persamaan (5.13)) adalah

$$\Delta X = a(X,t)\Delta t + b(X,t)\sqrt{\Delta t}. \tag{5.18}$$

Dengan limit $\Delta t \to 0$, maka $\Delta X^2 \approx b^2(X,t)\sqrt{\Delta t}$. Penyisipan persamaan ini ke dalam persamaan (5.17) akan menghasilkan

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial Y}{\partial X} dX + \frac{\partial Y}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} b^2(X,t) dt \\ &= \left(\frac{\partial Y}{\partial X} a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial X} b \, dB(t). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Penerapan untuk gerak Brown geometrik

Jika diandaikan bahwa $S = e^Z$ dengan Z merupakan gerak Brown menurut persamaan

$$dZ = \mu dt + \sigma dB \tag{5.20}$$

maka dengan menggunakan lemma Itô dan

$$\frac{\partial S}{\partial Z} = e^Z = S, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial Z^2} = e^Z = S$$

akan didapat persamaan

$$\begin{aligned} dS &= S \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + S \sigma dB \\ \frac{dS}{S} &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB \end{aligned} \tag{5.21}$$

5.4 Persamaan Rambatan Panas

Persamaan rambatan panas (*heat equation*) mempunyai kaitan yang erat dengan gerak Brown. Dengan mengetahui bahwa $B(t)$ mempunyai $N(0,t)$ untuk agihan $t > 0$ jika $B(t)$ adalah gerak Brown, maka rapat peluang $\rho(x,t)$ dapat ditulis

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Dengan menghitung turunan sebagian dari $\rho(x,t)$ yakni

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\rho(x,t),\\
\frac{\partial\rho}{\partial x}(x,t) &= -\frac{x}{t}\rho(x,t),\\
\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}(x,t) &= \left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\rho(x,t),
\end{aligned}$$

maka dapat ditunjukkan bahwa $\rho(x,t)$ memenuhi persamaan turunan sebagian yang disebut juga persamaan rambatan panas berikut

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}(x,t). \tag{5.22}$$

Sifat ini dapat dilacak dengan mengandaikan bahwa f mencukupi syarat-syarat sebagai sebuah fungsi. Jika $u(x,t) = E[f(B(t)+x)]$, maka dapat dilihat pada saat $t = 0$ fungsi $u(x,0)$ akan bernilai $u(x,0) = f(x)$. Untuk $t > 0$, akan didapat persamaan

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\rho(x-z,t)dz. \tag{5.23}$$

Penurunan kedua ruas persamaan di atas terhadap t dan x secara serentak akan menghasilkan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\frac{\partial \rho}{\partial t}(x-z,t)dz \tag{5.24}$$

dan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x-z,t)dz. \tag{5.25}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa u juga memenuhi persamaan rambatan panas.

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{5.26}$$