BAB I
DASAR-DASAR LOGIKA
DAN PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Matematika merupakan kajian abstrak yang rumit. Karena itu untuk mempelajari matematika kita harus menerima fakta bahwa banyak konsep matematika yang tidak dapat dirumuskan dengan cara yang sederhana. Untuk menyatakan bahwa suatu pernyataan adalah benar, harus dibuktikan kebenaran dari kajian tersebut.

Suatu argumen matematis diterima sebagai pernyataan yang benar karena adanya **bukti**. Bukti bahwa suatu pernyataan matematis adalah pernyataan yang benar dinamkan **teorema**. Beberapa teorema pada topik yang sama akan mem-bentuk **logika.** Untuk mempelajari suatu topik matematika kita harus menyusun argumen-argumen matematis dalam topik tersebut, tidak cukup hanya dengan membaca penjelasannya. Dengan memahami bukti dari suatu teorema maka bukti tersebut dapat dikembangkan dan disesuaikan dengan situasi baru.

A. Pernyataan atau Proposisi

Definisi 1.1. Pernyataan atau proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar atau salah tetapi tidak dapat bernilai benar dan sekaligus salah.

Kalimat-kalimat di bawah ini adalah pernyataan:

- Sebarang bilangan genap dapat dinyatakan sebagai $2n$, dengan $n \in \mathbb{Z}$.
- Bilangan 6 adalah bilangan prima.
- Akar kuadrat dari suatu bilangan selalu lebih kecil dari bilangan itu sendiri.
- $(e^{\pi})^2 = e^{2\pi}$
- Semua warganegara Indonesia sudah pernah melihat Tugu Monas secara langsung.

Kalimat-kalimat di bawah ini bukan pernyataan:

- Apakah $(e^{\pi})^2 = e^{2\pi}$?
- Nilai $x > 5$
- Siapa yang lahir pada bulan Agustus?
- Hari ini kita akan mengunjungi Taman Safari
- Sebaiknya kamu tidak perlu menghadiri pertemuan itu.
- Buktikanlah bahwa $x + 2 = 8$

B. Kuantor

B.1. Pernyataan Berkuantor

Kalimat yang mengandung variabel tidak dapat dikatakan sebagai suatu pernyataan. Kalimat "$x+2$ adalah bilangan bulat", tidak dapat dipastikan nilai logikanya benar atau salah, karena adanya variabel *x*. Jika *x* diganti dengan -5, -1, atau 3, maka pernyataan yang dihasilkan akan bernilai salah. Kalimat seperti ini dinamakan kalimat terbuka.

Jika variabel-variabel dari suatu kalimat terbuka diganti dengan nilai tertentu, maka kalimat tersebut akan memiliki nilai logika tertentu. Selain meng-ganti variabelnya, pembentukan suatu proposisi dari fungsi proposisi juga dapat dilakukan dengan cara kuantifikasi. Pernyataan-pernyataan terkuantifikasi dapat menyatakan benar atau tidaknya proposisi yang dibicarakan. Pembahasan yang melibatkan proposisi dan kuantifikasi seperti ini dinamakan *kalkulus predikat.*

Definisi 1.2. Suatu kalimat deklaratif disebut kalimat terbuka jika:
1. Kalimat tersebut mengandung satu atau lebih variabel, dan
2. Kalimat tersebut bukan merupakan pernyataan, tetapi
3. Kalimat tersebut berubah menjadi pernyataan jika variabel-variabelnya diganti dengan nilai tertentu yang dimungkinkan.

Jika kalimat "$\mathrm{x}+2$ adalah bilangan genap" diuji berdasarkan Definisi 1.2, maka dapat diketahui bahwa kalimat tersebut merupakan kalimat terbuka yang mengandung variabel tunggal *x*. Misalkan "$\mathrm{x}+2$ adalah bilangan genap" dilam-bangkan dengan $\mathrm{p(x)}$ maka $\sim \mathrm{p(x)}$ dapat dibaca sebagai kalimat terbuka yang berbunyi "$\mathrm{x}+2$ *bukan* bilangan genap," atau "$\mathrm{x}+2$ adalah bilangan ganjil."

$\mathrm{p}(5)$: 7 (= 5 + 2) adalah bilangan genap (Salah)

$\sim \mathrm{p}(7)$: 9 bukan bilangan genap (Benar)

Selanjutnya kalimat terbuka yang mengandung dua variabel dapat digunakan notasi $\mathrm{q(x,y)}$ misalnya $\mathrm{q(x,y)}: \mathrm{y}+2, \mathrm{x}-\mathrm{y},\ \mathrm{dan}\ \mathrm{x}+2\mathrm{y}$ adalah bilangan genap.

$\mathrm{q}(4,2)$: 4, 2, dan 8 adalah bilangan genap (Benar)

Beberapa pernyataan dapat bernilai logika benar, dan beberapa per-nyataan lainnya bernilai logika salah. Oleh karena itu secara umum kalimat terbuka yang bernilai logika benar dapat dituliskan sebagai berikut:

(1). Untuk suatu *x*, berlaku $\mathrm{p(x)}$.

(2). Untuk beberapa $\mathrm{(x,y)}$ berlaku $\mathrm{p(x,y)}$.

Pernyataan-pernyataan “untuk suatu *x*, berlaku $\sim p(x)$” dan “untuk beberapa *x, y,* berlaku $\sim q(x,y)$,” juga bernilai benar. Karena pernyataan “untuk suatu *x* berlaku $p(x)$” dan “untuk suatu *x* berlaku $\sim p(x)$” kedua-duanya bernilai benar, maka pernyataan kedua bukanlah negasi dari pernyataan yang pertama, meskipun pernyataan kalimat terbuka $\sim p(x)$ adalah negasi dari pernyataan $p(x)$. Hal yang sama juga berlaku untuk pernyataan $q(x,y)$ dan $\sim q(x,y)$. Kata-kata seperti “untuk suatu *x*” dan “untuk beberapa *x*, *y*” digunakan untuk meng-kuantifikasi kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x,y)$.

B.2. Kuantor Universal dan Kuantor Eksistensial

Di dalam matematika terdapat banyak postulat, definisi, dan teorema, yang mengkuantifikasi kalimat terbuka. Kuantifikasi tersebut dapat berbentuk kuantor eksistensial atau kuantor universal. Pernyataan (1) yang menggunakan kuantor eksistensial, “untuk suatu *x*,” dapat pula dinyatakan sebagai “untuk setidak-tidaknya satu *x*” atau “terdapat suatu *x* sedemikian sehingga.” Kuantor seperti ini dituliskan dengan lambang $\exists x$ sehingga pernyataan “untuk suatu *x,* berlaku $p(x)$” secara ringkas dapat dinyatakan dengan lambang $\exists x, p(x)$. Selanjut-nya pernyataan (2) menjadi $\exists x \exists y, q(x,y)$ atau $\exists x, y, q(x,y)$. Kuantor universal dilambangkan dengan $\forall x$ untuk menyatakan “untuk semua *x*,” “untuk sebarang *x*.” Jadi pernyataan “untuk semua *x,y,*” “untuk sebarang *x,y,*” atau “untuk semua *x* dan *y*” dituliskan dengan notasi $\forall x \forall y$ atau $\forall x, y$. Jika suatu kalimat terbuka $r(x)$: “2*x* adalah bilangan genap” dengan himpunan semesta semua bilangan bulat, maka pernyataan $\forall x, r(x)$ adalah pernyataan yang benar. Jika pernyataan $\forall x, r(x)$ benar, maka semua bilangan bulat yang digunakan untuk mengganti *x* di dalam $r(x)$ selalu menghasilkan pernyataan yang benar. Sebaliknya jika pernya-taan $\exists x, r(x)$ merupakan pernyataan yang benar, maka pernyataan $\forall x, \sim r(x)$ dan $\exists x, \sim r(x)$ merupakan pernyataan yang salah karena $\forall x, \sim r(x)$ dan $\exists x, \sim r(x)$ adalah negasi dari $\exists x, r(x)$.

Variabel *x* dalam pernyataan $p(x)$ dan $r(x)$ disebut variabel bebas. Jika nilai *x* diganti dengan salah satu anggota himpunan semestanya, maka nilai kebe-naran pernyataan tersebut dapat diketahui. Jika $p(x)$ adalah pernyataan “*x* + 2 adalah bilangan genap,” maka dengan mengganti nilai variabel bebasnya, dapat diketahui bahwa $p(2)$ merupakan pernyataan yang benar tetapi merupakan per-nyataan yang salah untuk $p(3)$. Meskipun demikian, kalimat terbuka $r(x)$ akan menjadi suatu pernyataan yang benar untuk setiap subtitusi *x* yang diambil dari himpunan semesta bilangan bulat karena kuantifikasinya berlaku untuk semua *x*. Tidak demikian halnya untuk kalimat terbuka $p(x)$, pernyataan $\exists x, p(x)$ memiliki nilai logika yang selalu benar. Dalam representasi simbolik $\exists x, p(x)$, variabel *x* dinamakan variabel batas karena dibatasi oleh kuantor eksistensial $\exists$. Kasus yang sama berlaku juga untuk pernyataan $\forall x, r(x)$ dan $\forall x, \sim r(x)$, pada setiap kasus variabel *x* dibatasi oleh kuantor universal $\forall$. Untuk kalimat terbuka $q(x, y)$ terda-pat dua variabel bebas, yang kedua-duanya dibatasi oleh kuantor $\exists$ pada pernya-taan $\exists x \exists y, q(x, y)$ atau $\exists x, y, q(x, y)$.

Definisi 1.3. Kuantor Universal. Pernyataan $\forall x \in U, p(x)$ bernilai benar jika dan hanya jika untuk setiap nilai $x \in U$ pernyataan $p(x)$ berlaku. Konsekuensinya, pernyataan di atas akan bernilai salah jika dan hanya jika ada $x \in U$ yang meng-akibatkan $p(x)$ tidak berlaku.

Contoh 1.1. Setiap bilangan real yang lebih dari 2, kuadratnya adalah bilangan bulat. Dituliskan dengan notasi kuantor sebagai berikut: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Z}$.

Contoh 1.2. Kuadrat dari semua bilangan real adalah bilangan non-negatif. Dinyatakan dengan notasi kuantor sebagai berikut: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Contoh 1.3. Untuk setiap bilangan real *x*, jika *x* negatif, maka $|x| = -x$. Dinyatakan dengan notasi kuantor sebagai berikut: $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Contoh 1.4. Untuk setiap *x* bilangan real dengan $2 \leq x \leq 5$, diperoleh $4 \leq x^2 \leq 25$ dinyatakan dengan notasi kuantor sebagai berikut:
$\forall x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow 4 \leq x^2 \leq 25$.

Definisi 1.4. Kuantor Eksistensial. Pernyataan $\exists x \in U$ sedemikian sehingga $p(x)$, bernilai benar jika dan hanya jika terdapat suatu $x \in U$ sehingga berlaku $p(x)$ Sebaliknya, pernyataan tersebut bernilai salah jika dan hanya jika untuk setiap $x \in U$ maka $p(x)$ tidak berlaku.

Contoh 1.5. Ada $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x^2 = 2$. $\exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 = 2$.

Contoh 1.6. Akar dari persamaan $5x^2 = 40$ adalah suatu bilangan bulat.

Contoh 1.7. Ada dua bulangan bulat yang berbeda sedemikian sehingga pangkat tiga dari kedua bilangan tersebut bernilai sama.

Untuk himpunan semua bilangan real, kalimat terbuka $p(x), q(x), r(x),$ dan $s(x)$ yang dinyatakan dengan

$$
\begin{array}{llll}
p(x) & : x \geq 0 & r(x) & : x^2 - 3x - 4 = 0 \\
q(x) & : x^2 \geq 0 & s(x) & : x^2 - 3 > 0
\end{array}
$$

Mengakibatkan pernyataan-pernyataan di bawah ini menjadi benar.

1). $\exists x\left[p(x) \wedge r(x)\right]$

Bilangan real 4, misalnya, adalah anggota himpunan semesta sedemikian sehingga pernyataan $p(4)$ dan $r(4)$ merupakan pernyataan yang benar.

2). $\forall x\left[p(x) \Rightarrow q(x)\right]$

Jika di dalam $p(x)$ diganti *x* dengan suatu bilangan real negatif *a*, maka $p(a)$ merupakan pernyataan yang salah, tetapi $p(a) \Rightarrow q(a)$ adalah pernyataan yang benar, tidak tergantung pada nilai logika untuk $q(a)$. Jika nilai *x* pada per-nyataan $p(x)$ diganti dengan suatu bilangan real nonnegatif *b*, maka $p(b)$ dan $q(b)$ akan bernilai benar, demikian juga $p(b) \Rightarrow q(b)$. Akibatnya, $p(x) \Rightarrow q(x)$ bernilai benar untuk semua *x* yang diambil dari himpunan semesta semua bilangan real, dan pernyataan berkuantor $\forall x\left[p(x) \Rightarrow q(x)\right]$ adalah benar. Pernyataan ini dapat diubah menjadi salah satu bentuk pernyataan di bawah ini:

a) untuk setiap bilangan real *x*, jika $x \geq 0$ maka $x^2 \geq 0$.
b) kuadrat dari setiap bilangan real nonnegatif adalah bilangan real nonnegatif.
c) setiap bilangan real non-negatif memiliki kuadrat yang juga bilangan real non-negatif.
d) semua bilangan real nonnegatif memiliki kuadrat real dan nonnegatif

Pernyataan $\exists x\left[p(x) \Rightarrow q(x)\right]$ adalah pernyataan yang benar sedangkan per-nyataan berikut ini adalah pernyataan yang bernilai salah.

1′) $\forall x\left[q(x) \Rightarrow s(x)\right]$

Bukti bahwa pernyataan tersebut adalah pernyataan yang salah, dapat ditun-jukkan dengan memberikan satu *counterexample* – yaitu *satu nilai x* dimana pernyataan $q(x) \Rightarrow s(x)$ bernilai salah. Jadi tidak harus dibuktikan dengan meng-gunakan semua nilai *x* sebagaimana pada pernyataan 2). Dengan mengganti nilai *x* menjadi 1, maka diperoleh $q(1)$ merupakan pernyataan yang benar dan $s(1)$ adalah pernyataan yang salah. Oleh karena itu $q(1) \Rightarrow s(1)$

adalah pernyataan yang salah. Akibatnya pernyataan berkuantor $\forall x[q(x) \Rightarrow s(x)]$ adalah pernyataan yang salah. Perhatikan bahwa *x* = 1 bukan merupakan satu-satunya *counterexample* karena setiap bilangan real *a* antara $-\sqrt{3}$ dan $\sqrt{3}$ mengakibatkan $q(a)$ benar dan $s(a)$ salah.

2′) $\forall x[r(x) \vee s(x)]$

Banyak nilai yang memenuhi untuk *x*, antara lain 1, $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, dan 0, yang merupakan *counterexample*. Dengan mengubah kuantornya, akan diperoleh per-nyataan $\exists x[r(x) \vee s(x)]$ yang bernilai benar.

3′) $\forall x[r(x) \Rightarrow p(x)]$

Bilangan real -1 adalah salah satu penyelesaian dari persamaan $x^2 - 3x - 4 = 0$, sehingga $r(-1)$ adalah pernyataan yang benar, sedangkan $p(-1)$ adalah pernyataan salah. Oleh karena itu -1 menghasilkan *counterexample* unik yang menunjukkan bahwa pernyataan berkuantor ini adalah pernyataan yang ber-nilai salah. Pernyataan $(3')$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

a) untuk setiap bilangan real *x*, jika $x^2 - 3x - 4 = 0$ maka $x \geq 0$.
b) untuk setiap bilangan real *x*, jika *x* adalah solusi dari $x^2 - 3x - 4 = 0$ maka $x \geq 0$.

Sekarang dimisalkan $p(x)$ adalah sebarang kalimat terbuka dengan variabel *x*, dan himpunan semesta yang tidak kosong. Jika $\forall x, p(x)$ benar, maka $\exists x, p(x)$ juga benar. Dengan kata lain, $\forall x, p(x) \Rightarrow \exists x, p(x)$. Pernyataan ini merupakan implikasi logis – karena $\exists x, p(x)$ bernilai benar jika $\forall x, p(x)$ benar. Diketahui juga bahwa hipotesis dari implikasi ini adalah pernyataan berkuantor $\forall x, p(x)$ dan kesimpulannya adalah $\exists x, p(x)$ yang juga merupakan pernyataan berkuantor. Sebaliknya, tidak selamanya berlaku bahwa jika $\exists x, p(x)$ benar, maka $\forall x, p(x)$ juga benar. Dalam hal ini $\exists x, p(x)$ tidak secara umum mengimplikasikan $\forall x, p(x)$.

Definisi 1.4. Misalkan $p(x), q(x)$ adalah pernyataan-kalimat terbuka yang ter-definisi pada suatu himpunan semesta tertentu. Kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ disebut ekivalensi logis dan dituliskan $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ apabila $p(a) \Leftrightarrow q(a)$ ber-nilai benar untuk setiap nilai *a* dari himpunan semesta. Jika $p(a) \Leftrightarrow q(a)$ benar untuk setiap *a* dalam himpunan semesta, maka $\forall x[p(x) \Rightarrow q(x)]$ dan dikatakan bahwa $p(x)$ secara logika berimplikasi $q(x)$.

Misalkan suatu himpunan semesta semua segitiga pada bidang datar, dan $\mathrm{p(x), q(x)}$ adalah kalimat terbuka:

$\mathrm{p(x)}$: *x* adalah segitiga sama kaki

$\mathrm{q(x)}$: *x* adalah segitiga sama sisi.

maka untuk semua segitiga *a* tertentu (*a* adalah sifat tertentu dari *x*), dapat diketahui bahwa $\mathrm{p(a) \Leftrightarrow q(a)}$ adalah pernyataan yang benar untuk semua segitiga dalam bidang datar tersebut. Dengan demikian, $\forall \mathrm{x}[\mathrm{p(x) \Leftrightarrow q(x)}]$. Perhatikan bahwa $\forall \mathrm{x}[\mathrm{p(x) \Leftrightarrow q(x)}]$ jika dan hanya jika $\forall \mathrm{x}[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}]$ dan $\forall \mathrm{x}[\mathrm{q(x) \Rightarrow p(x)}]$.

Definisi 1.5. Untuk suatu kalimat terbuka $\mathrm{p(x), q(x)}$ yang merupakan pernyataan berkuantor universal dan terdefinisi pada himpunan semesta tertentu, $\forall \mathrm{x}[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}]$, maka

1). Kontraposisi dari $\forall \mathrm{x}[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}]$ adalah $\forall \mathrm{x}[\sim \mathrm{q(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{p(x)}]$

2). Konversi dari $\forall \mathrm{x}[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}]$ adalah $\forall \mathrm{x}[\mathrm{q(x) \Rightarrow p(x)}]$

3). Inversi dari $\forall \mathrm{x}[\mathrm{p(x) \Rightarrow q(x)}]$ adalah $\forall \mathrm{x}[\sim \mathrm{p(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{q(x)}]$

Contoh 1.8. Untuk himpunan semesta persegi pada bidang datar, misalkan $\mathrm{s(x)}$ dan $\mathrm{e(x)}$ sebagai pernyataan-kalimat terbuka.

$\mathrm{s(x)}$: *x* adalah suatu bujursangkar.

$\mathrm{e(x)}$: *x* adalah persegi panjang.

a). Pernyataan $\forall \mathrm{x}[\mathrm{s(x) \Rightarrow e(x)}]$ merupakan suatu pernyataan yang benar dan ekivalen logis dengan kontraposisinya, yaitu $\forall \mathrm{x}[\sim \mathrm{e(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{s(x)}]$ karena $[\mathrm{s(a) \Rightarrow e(a)}] \Leftrightarrow [\sim \mathrm{e(a)} \Rightarrow \sim \mathrm{s(a)}]$ untuk setiap *a*. Karena itu,

$$\forall \mathrm{x}[\mathrm{s(x) \Rightarrow e(x)}] \Leftrightarrow \forall \mathrm{x}[\sim \mathrm{e(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{s(x)}].$$

b). Pernyataan $\forall \mathrm{x}[\mathrm{e(x) \Rightarrow s(x)}]$ adalah pernyataan yang salah dan merupakan konversi dari pernyataan $\forall \mathrm{x}[\mathrm{s(x) \Rightarrow e(x)}]$. Pernyataan $\forall \mathrm{x}[\sim \mathrm{s(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{e(x)}]$ merupakan inversi dari pernyataan tersebut, dan merupakan pernyataan yang salah. Karena $[\mathrm{e(a) \Rightarrow s(a)}] \Leftrightarrow [\sim \mathrm{s(a)} \Rightarrow \sim \mathrm{e(a)}]$ untuk setiap persegi *a* tertentu, maka dapat disimpulkan bahwa konversi dan inversi adalah ekivalen logis satu sama lain, yaitu

$$\forall \mathrm{x}[\mathrm{e(x) \Rightarrow s(x)}] \Leftrightarrow [\sim \mathrm{s(x)} \Rightarrow \sim \mathrm{e(x)}].$$

Contoh 1.9. Misalkan $p(x)$ adalah pernyataan "$x > 3$". Bagaimana nilai kebenaran dari pernyataan $p(4)$ dan $p(2)$?

Berdasarkan pernyataan $p(x)$, diperoleh $p(4)$ dengan mengganti variabel x menjadi 4. Dengan demikian, proposisi $p(4)$ yang menyatakan bahwa "4 > 3" adalah pernyataan yang benar. Sebaliknya, $p(2)$ yang menyatakan bahwa "2 > 3" adalah pernyataan yang salah.

Contoh 1.10. Misalkan $q(x, y)$ adalah proposisi yang berbentuk $x = y + 3$. Bagaimanakah nilai kebenaran untuk $q(1, 2)$ dan $q(3, 0)$?

Untuk menentukan $q(1, 2)$ maka variabel x diganti dengan 1, dan variabel y diganti dengan 2. Dengan demikian proposisi $x = y + 3$ berubah menjadi "1 = 2 + 3" yaitu $q(1, 2)$ adalah proposisi yang bernilai salah. Selanjutnya, jika x diganti dengan 3 dan y diganti dengan 0, maka proposisi $q(3, 0)$ adalah proposisi yang bernilai benar.

B.3. Negasi Kuantor

Kuantor universal merupakan negasi dari kuantor eksistensial. Sebaliknya, kuantor eksistensial merupakan negasi dari kuantor universal.

- $\sim[\forall x \in U, p(x)] \equiv \exists x \in U \ni \sim p(x)$
- $\sim[\exists x \in U \ni p(x)] \equiv \forall x \in U, \sim p(x)$

Aturan negasi suatu pernyataan yang mengandung satu kuantor:

$$\sim[\forall x, p(x)] \Leftrightarrow \exists x, \sim p(x)$$
$$\sim[\exists x, p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$$
$$\sim[\forall x, \sim p(x)] \Leftrightarrow \exists x, \sim(\sim p(x)) \Leftrightarrow \exists x, p(x)$$
$$\sim[\exists x, \sim p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \sim(\sim p(x)) \Leftrightarrow \forall x, p(x)$$

Contoh 1.11.

(a). Negasi dari pernyataan: "Kuadrat dari **setiap** bilangan real adalah bilangan nonnegatif", adalah "**Ada** suatu bilangan real sedemikian sehingga kuadratnya **kurang dari nol**".

$$\sim\left[\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0\right] \equiv \exists x \in \mathbb{R} \ni x^2 < 0$$

(b). Negasi dari pernyataan "**Ada** bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan 2", adalah "Kuadrat dari semua bilangan bulat **tidak** ada yang sama dengan 2".

$$\sim\left[\exists n \in \mathbb{Z} \ni n^2 = 2\right] \equiv \forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \neq 2$$

Pernyataan yang diberikan pada contoh (a) adalah pernyataan yang benar, karena itu ingkarannya merupakan pernyataan yang salah. Sedangkan pernyataan yang diberikan pada contoh (b) merupakan pernyataan yang salah, karena itu negasinya merupakan pernyataan yang bernilai benar.

(c). Negasi dari pernyataan: “Hasilkali **sebarang** bilangan real dengan **sebarang** bilangan bulat adalah bilangan real”, adalah “**Ada** bilangan real yang jika dikalikan dengan sebarang bilangan bulat **tidak** menghasilkan bilangan real”, atau “**Ada** bilangan real yang jika dikalikan dengan bilangan bulat **tertentu**, **tidak** menghasilkan bilangan real”.

$$\begin{aligned}\sim\left[\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \ni nx \in \mathbb{R}\right] &\equiv \exists x \in \mathbb{R} \ni \sim\left[\forall n \in \mathbb{Z}, nx \in \mathbb{R}\right]\\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R} \ni \exists n \in \mathbb{Z} \ni nx \notin \mathbb{R}\\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z} \ni nx \notin \mathbb{R}\end{aligned}$$

(d). $$\begin{aligned}\sim\left[\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+ \ni y^2 = x\right] &\equiv \exists x \in \mathbb{R}^+ \ni \sim\left[\exists y \in \mathbb{R}^+ \ni y^2 = x\right]\\ &\equiv \exists x \in \mathbb{R}^+ \ni \forall y \in \mathbb{R}^+, y^2 \neq x\end{aligned}$$

(e). $$\begin{aligned}\sim\left[\exists n \in \mathbb{Z}^+ \ni \forall m \in \mathbb{Z}, m^n > 0\right] &\equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+, \sim\left[\forall m \in \mathbb{Z}, m^n > 0\right]\\ &\equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+, \exists m \in \mathbb{Z} \ni m^n \leq 0\end{aligned}$$

C. Metode Pembuktian Dalam Matematika

C.1. Pembuktian Langsung

Pada pembuktian langsung, hal-hal yang diketahui tentang teorema diturunkan secara langsung dengan teknik tertentu sehingga dapat ditarik kesimpulan dengan benar.

Contoh 1.12.

1. Buktikan bahwa 2 merupakan salah satu akar persamaan $x^2 + 2x - 8 = 0$
2. Buktikan bahwa semua bilangan genap $n \in [3, 31]$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari 2 bilangan prima.
3. Buktikan, untuk sembarang bilangan riil *x*, jika $|x| > 3 \Rightarrow x^2 > 9$

C.2. Pembuktian Tak Langsung

Dengan metode pembuktian tak langsung, fakta-fakta tidak digunakan secara langsung untuk menarik suatu kesimpulan. Metode pembuktian tak langsung antara lain **kontradiksi** dan **kontraposisi**.

a. Kontradiksi

Kontradiksi adalah suatu pernyataan yang selalu salah, apapun nilai kebenaran dari proposisi-proposisinya. Pembuktian proposisi *p* dilakukan dengan menentukan ingkaran dari ingkarannya sehingga diperoleh $\sim(\sim p) \equiv p$. Langkah-langkah pembuktian kontradiksi adalah sebagai berikut:

- Tentukan ingkaran dari pernyataan yang akan dibuktikan
- Bukti bahwa suatu pernyataan adalah benar, dapat diketahui dengan membuktikan bahwa ingkarannya bernilai salah.

Sebagai latihan, mahasiswa dapat membuktikan proposisi-proposisi berikut ini dengan kontradiksi.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \le \cos^2 x \le 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 3$
4. Untuk setiap himpunan P dan *Q*, $P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \wedge b \neq 0, \dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$
7. Jika *x* habis dibagi 6 maka *x* habis dibagi 2.
8. Jika x^2 bilangan genap $\Rightarrow$ *x* bilangan genap.

b. Kontraposisi

- Pembuktian bahwa $p \Rightarrow q$ adalah proposisi yang benar dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa **kontraposisi** $\sim q \Rightarrow \sim p$ adalah proposisi yang benar karena jika kontraposisinya benar maka implikasinya juga benar, $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$.

Contoh 1.13. Buktikan proposisi berikut ini:

1. Jika x^2 bilangan genap, maka *x* bilangan genap.

   Bukti.

   Misalkan $x = 2m + 1$ ganjil $(\sim q)$ maka $x^2 = 4m^2 + 4m + 1$

   $= 2(2m^2 + 2m) + 1$ adalah ganjil ($\sim p$).

2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 3$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x-2)(x-5) < 0 \Rightarrow 2 < x < 5$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \wedge x \neq 5, \dfrac{(x-2)}{(x-5)} < 0 \Rightarrow 2 < x < 5$

C.3. Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu metode pembuktian tidak langsung, yang dilakukan dengan menggunakan setidak-tidaknya dua proposisi. Proposisi pertama adalah basis induksi, proposisi kedua adalah hipotesis induksi. Langkah-langkah induksi matematika adalah sebagai berikut:

1) Langkah Basis

   Sebagai basis, diambil $n = 1$ dan harus dibuktikan P(1) benar, karena akan dibuktikan kebenarannya pernyataan P(n) untuk $n > 1$
2) Hipotesis Induksi

   Anggap bahwa untuk $n = k$, P(k) adalah proposisi yang benar.
3) Langkah Induksi

   Ambil $n = k$, jika P(k) benar, maka P(k + 1) benar.

Induksi Matematika akan diuraikan lebih lanjut pada bagian kahir dalam bab ini.

Definisi 1.6. Negasi atau ingkaran dari proposisi *p* yang dinyatakan dengan $\sim p$ atau $\neg p$ adalah proposisi "bukan *p*" atau "tidak *p*". Proposisi $\sim p$ bernilai benar jika proposisi *p* bernilai salah.

Definisi 1.7. Konjungsi dari dua proposisi *p* dan *q* yang dilambangkan $p \wedge q$ adalah proposisi *p* dan *q*, yang bernilai benar jika proposisi *p* dan *q* kedua-duanya bernilai benar.

Definisi 1.8. Disjungsi dari dua proposisi yang dilambangkan $p \vee q$ adalah proposisi *p* atau *q*, yang bernilai benar jika salah satu dari proposisi *p* atau *q* bernilai benar.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Definisi 1.9. Tautologi adalah proposisi yang nilai kebenarannya selalu benar.

Definisi 1.10. Kontradiksi adalah proposisi yang nilai kebenarannya selalu salah.

Definisi 1.11. Dua proposisi dikatakan **ekivalen** jika dan hanya jika kedua proposisi tersebut memiliki nilai tabel kebenaran yang sama.

Teorema 1.1. Jika *p, q,* dan *r*, adalah proposisi-proposisi, maka berlaku:

(a).	$p \equiv \sim(\sim p)$	Hukum negasi ganda
(b).	$\left.\begin{array}{l} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{array}\right\}$	Hukum komutatif
(c).	$\left.\begin{array}{l} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{array}\right\}$	Hukum Assosiatif
(d).	$\left.\begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}\right\}$	Hukum Distributif
(e).	$\left.\begin{array}{l} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{array}\right\}$	Hukum DeMorgan

Definisi 1.12. Untuk proposisi *p* dan *q*, kalimat bersyarat $q \Rightarrow p$ adalah proposisi "jika *p* maka *q*". Proposisi *p* disebut **anteseden** sedangkan proposisi *q* disebut **konsekuen**. Kalimat bersyarat $q \Rightarrow p$ bernilai benar jika dan hanya jika *p* bernilai salah atau *q* bernilai benar.

Definisi 1.13. Misalkan *p* dan *q* adalah proposisi-proposisi tertentu, maka:

Konversi (balikan) dari $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$

Kontrapositif (kontraposisi) dari $p \Rightarrow q$ adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$

Teorema 1.2. Untuk proposisi-proposisi *p* dan *q* berlaku:

(a) $p \Rightarrow q$ ekivalen dengan kontraposisinya, yaitu $\sim q \Rightarrow \sim p$

(b) $p \Rightarrow q$ tidak ekivalen dengan konversinya, yaitu $q \Rightarrow p$

Bukti. Pembuktian Teorema 1.2. dapat dilihat melalui tabel kebenaran berikut ini.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Definisi 1.14. Untuk proposisi-proposisi *p* dan *q*, kalimat bikondisional $p \Leftrightarrow q$ adalah proposisi "*p* jika dan hanya jika *q*". Bentuk proposisi $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar hanya jika proposisi *p* dan *q* kedua-duanya memiliki nilai kebenaran yang sama.

Teorema 1.3. Untuk proposisi-proposisi p, q, dan r, berlaku:

(a). $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

(b). $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

(c). $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

(d). $\sim (p \wedge q) \equiv p \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow \sim p$

(e). $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

(f). $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

(g). $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Pembuktian Teorema 1.3 dapat dilakukan secara langsung dengan menggunakan tabel kebenaran. Meskipun demikian, mahasiswa juga harus memahami makna dari ekivalensi ruas kiri dan kanan pada masing-masing pernyataan tersebut. Penjelasan untuk teorema 1.3 (a) adalah sebagai berikut: diketahui bahwa implikasi $p \Rightarrow q$ bernilai salah jika p bernilai benar dan q bernilai salah. Hal ini akan terjadi jika $\sim p$ dan q bernilai salah. Karena hal ini terjadi jika $\sim p$ dan q bernilai salah, maka tabel kebenaran untuk $p \Rightarrow q$ dan $\sim p \vee q$ adalah ekivalen.

Teorema 1.1. dan Teorema 1.3. memiliki banyak keterkaitan. Setelah mahasiswa membuktikan Teorema 1.1(a) dan 1.3(a), maka Teorema 1.3 (c) dapat dibuktikan sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 1.3 (a), dapat diketahui bahwa $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q)$, dan bahwa $\sim (\sim p \vee q) \equiv \sim (\sim p) \wedge \sim q$ menurut Teorema 1.1(e). Selanjutnya menurut Teorema 1.1(a), $\sim (\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$ jadi terbukti bahwa $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$.

Kemampuan membaca struktur kalimat dan menterjemahkannya menjadi bentuk simbolis dengan menggunakan hubungan-hubungan logika akan sangat membantu untuk menentukan nilai kebenaran kalimat tersebut. Terjemahan kalimat-kalimat menjadi simbol-simbol proposisional seringkali sangat kompleks. Makna ganda yang seringkali ditoleransi dalam bahasa sehari-hari dapat menghilangkan struktur dan kebermaknaannya jika diberlakukan juga di dalam matematika. Misalkan seorang dosen memberi penguatan kepada mahasiswa dengan kata-kata: "*jika kamu mendapatkan skor 75 atau lebih pada test berikutnya, maka kamu akan lulus kuliah ini*". Kalimat ini secara eksplisit merupakan kalimat implikatif, tetapi sebagian orang akan memaknainya sebagai suatu kalimat biimplikatif karena mungkin ada siswa yang bisa lulus kuliah tersebut meskipun skornya tidak mencapai 75. Pernyataan seperti ini tidak sama dengan situasi di dalam matematika, misalnya jika

$x = 2$ maka x merupakan akar dari persamaan $x^2 = 2x$ yang hanya memiliki makna implikatif $\Rightarrow$, karena $x^2 = 2x$ tidak harus mengimplikasikan $x = 2$.

D. Penarikan Kesimpulan

Misalkan suatu hari ini, Anda baru menyadari bahwa telepon seluler Anda hilang. Setelah mengingat-ingat, ada beberapa fakta yang Anda pastikan kebenarannya:

- Jika telepon selulerku ada di meja dapur, maka aku pasti sudah melihatnya ketika sarapan pagi.
- Saya menelpon paman tadi pagi ketika saya berada di kamar atau di depan rumah.
- Jika saya menelepon paman ketika berada di kamar, maka pastilah telepon selulerku tertinggal di meja belajar.
- Jika aku menelepon paman ketika berada di depan rumah, maka telepon selulerku tertinggal di meja teras.
- Aku tidak melihat telepon selulerku pada waktu sarapan pagi.

Misalkan:

- P : Telepon selulerku ada di meja dapur
- Q : Saya melihat telepon selulerku ketika sarapan pagi
- R : Saya menelepon paman di kamar
- S : Telepon selulerku tertinggal di meja belajar
- T : Saya menelepon paman di depan rumah
- U : Telepon selulerku tertinggal di meja teras

Dengan menggunakan simbol-simbol tersebut di atas, maka dapat dituliskan:

- $P \Rightarrow Q$
- $R \Rightarrow S$
- $R \vee S$
- $T \Rightarrow U$

Kesimpulan yang harus diambil mengenai keberadaan telepon seluler tersebut di atas, dapat diketahui berdasarkan cara yang logis menurut matemtika. Ada tiga metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulan yaitu *Modus Ponens, Modus Tollens* dan *Silogisme*. Kesimpulan atau konklusi ditarik dari beberapa pernyataan yang diasumsikan benar. Asumsi-asumsi tersebut dinamakan **premis**.

Bukti Langsung untuk $p \Rightarrow q$

Bukti.

Asumsikan p

$\vdots$

Karena itu, q

Jadi, $p \Rightarrow q$

Contoh 1.14: Misalkan *x* adalah bilangan bulat. Buktikan bahwa jika *x* ganjil, maka *x* + 1 adalah bilangan genap.

Bukti.

Bentuk dari teorema di atas adalah $p \Rightarrow q$ *dengan pernyataan p adalah "x adalah bilangan ganjil" dan q adalah "x* + 1 *adalah bilangan genap"*. **Misalkan *x* adalah bilangan bulat** (*x* dapat diasumsikan sebagai bilangan bulat, karena telah disebutkan dalam soal.) **Andaikan *x* adalah bilangan ganjil** (asumsi ini dipilih sebagai salah satu kemungkinan bahwa anteseden *p* bernilai benar. Akan dibuktikan *q*). Berdasarkan definisi, bilangan ganjil $x = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat *k*. (deduksi ini menggantikan pernyataan *P* dengan suatu pernyataan yang ekivalen, yaitu definisi bilangan ganjil. Selanjutnya $x + 1 = (2k + 1) + 1$ untuk suatu bilangan bulat *k*. Karena $(2k + 1) + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ adalah bilangan genap, yaitu bilangan bulat kelipatan dua, maka *x* + 1 adalah bilangan genap. Oleh karena itu disimpulkan bahwa jika *x* adalah bilangan ganjil, maka *x* + 1 adalah bilangan genap.

Contoh 1.15: Misalkan *a, b,* dan *c* adalah bilangan-bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.

Bukti.

Misalkan *a, b,* dan *c* adalah bilangan-bilangan bulat (diasumsikan bahwa hipotesis yang diberikan di dalam soal merupakan pernyataan yang benar). Selanjutnya diandaikan bahwa $a \mid b$ dan $b \mid c$ (anteseden merupakan pernyataan majemuk: *a* membagi *b* dan *b* membagi *c*) sehingga b = ak untuk suatu bilangan bulat *k,* dan c = bm untuk suatu bilangan bulat *m*. Karena c = bm = (ak)m = a(km) maka disimpulkan bahwa $a \mid c$. Jadi, jika $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$.

Contoh 1.16. Misalkan *a, b,* dan *c* adalah bilangan-bilangan bulat. Buktikan bahwa jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(b-c)$.

Bukti.

Misalkan *a, b,* dan *c* adalah bilangan-bilangan bulat, dimana $a|b$ dan $a|c$. Dengan demikian $b = ak$ untuk suatu bilangan bulat k dan $c = al$ untuk suatu bilangan bulat l. Jadi, $b - c = ak - al = a(k - l)$. Karena $k - l$ merupakan bilangan bulat, maka $a|(b-c)$.

Contoh 1.17. Misalkan *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan real positif. Buktikan bahwa jika $a < b$, maka $b^2 - a^2 > 0$.

Bukti.

Diketahui bahwa $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > 0$. Ketidaksamaan ini bernilai benar jika $(b - a) > 0$ dan $(b + a) > 0$. Ketidaksamaan $b - a > 0$ adalah pernyataan yang benar karena $b - a > 0 \equiv b > a$ yang telah disebutkan pada anteseden. Ketidaksamaan kedua juga benar karena diketahui dari soal bahwa *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan real positif, akibatnya $b + a > 0$. Karena $b - a > 0$ dan $b + a > 0$ maka $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > 0$.

D.1. Pembuktian Dengan Kontraposisi Untuk $p \Rightarrow q$

Asumsikan $\sim q$

$\vdots$

Karena itu, $\sim p$.

Jadi, $\sim q \Rightarrow \sim p$

Kesimpulan : $p \Rightarrow q$

Contoh 1.18. Misalkan *m* adalah suatu bilangan bulat. Buktikan bahwa jika m^2 bilangan genap, maka *m* juga bilangan genap.

Bukti. *Anteseden dalam soal ini adalah p, yaitu "m^2 bilangan genap" dan konsekuennya adalah q, yaitu "m bilangan genap".* Andaikan bahwa bilangan bulat *m* bilangan ganjil (andaikan $\sim q.$). Karena *m* ganjil maka $m = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat *k*. Selanjutnya, $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ adalah bilangan ganjil. Jadi kontraposisi yang menyatakan bahwa jika *m* bilangan ganjil, maka m^2 juga bilangan ganjil, membuktikan bahwa jika m^2 genap maka *m* juga genap.

D.2. Pembuktian Dengan Kontradiksi Untuk $p \Rightarrow q$

Pada khasus tertentu, pembuktian dengan menggunakan kontradiksi akan lebih mudah dari pada pembuktian dengan cara langsung. Pembuktian dengan kontradiksi dapat digambarkan sebagai berikut:

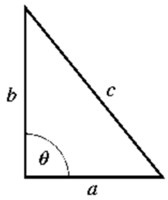
Andaikan $\sim p$
$\vdots$
Akibatnya q
$\vdots$
Maka $\sim q$
Karena $q \wedge \sim q$ kontradiksi, maka disimpulan p.

Contoh 1.19. Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.
Bukti.

Asumsikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional (asumsikan $\sim p$). Dengan demikian $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan bulat *a* dan *b*, dengan $b \neq 0$, dan *a* dan *b* tidak memiliki faktor persekutuan (*pernyataan q adalah "a dan b tidak memiliki faktor persekutuan*). Dari $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ diperoleh $2 = \frac{a^2}{b^2}$ berarti $2b^2 = a^2$. Dalam hal ini karena a^2 adalah bilangan genap maka *a* juga bilangan genap. Dengan kata lain, terdapat bilangan bulat *k* sedemikian sehingga $a = 2k$. Oleh karena itu, $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Jadi $b^2 = 2k^2$ yang menunjukkan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Selanjutnya, karena *a* dan *b* merupakan bilangan genap maka kedua bilangan tersebut memiliki faktor persekutuan yang sama, yaitu 2 (ternyata $\sim q$). Hal ini merupakan suatu kontradiksi, jadi disimpulkan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

D.3. Pembuktian Dua Tahap Untuk $p \Leftrightarrow q$

(i) Tunjukkan bahwa $p \Rightarrow q$
(ii) Tunjukkan bahwa $q \Rightarrow p$
Karena itu, $p \Leftrightarrow q$



Contoh 1.20. Panjang sisi-sisi segitiga di samping ini adalah *a, b,* dan *c.* Gunakan hukum kosinus untuk membuktikan bahwa segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku dengan sisi hipotenusa *c* jika dan hanya jika $a^2 + b^2 = c^2$.

Bukti.

Menurut hukum kosinus, $a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta$, dengan θ adalah sudut antara sisi-sisi *a* dan *b*. Jadi,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = c^2 &\Leftrightarrow 2ab\cos\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = 90^0 \end{aligned}$$

Kesimpulan: $a^2 + b^2 = c^2$ jika dan hanya jika segitiga tersebut siku-siku dengan sisi *c* sebagai hipotenusa.

Contoh 1.21. Dengan pembuktian langsung, pembuktian dengan kontraposisi, dan pembuktian dengan kontradiksi, buktikanlah pernyataan: Jika *x* dan *y* adalah bilangan ganjil, maka *xy* adalah juga bilangan ganjil, *x* dan *y* dari bilangan bulat.

Bukti langsung:

Asumsikan *x* dan *y* adalah bilangan ganjil. Dengan demikian terdapat bilangan bulat *m* dan *n* sedemikian sehingga $x = 2m + 1$ dan $y = 2n + 1$. Jadi hasil perkalian

$$\begin{aligned} xy &= (2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1 \\ &= 2p + 1, \text{ dengan } p = 2mn + m + n \end{aligned}$$

adalah bilangan ganjil.

Bukti dengan kontraposisi:

Kontraposisi dari pernyataan: *Jika x adalah bilangan ganjil dan y adalah bilangan ganjil maka xy adalah bilangan ganjil,* adalah pernyataan: *Jika xy genap maka x adalah bilangan genap dan y adalah bilangan genap.* Asumsikan *xy* adalah bilangan genap sehingga

2 merupakan faktor persekutuan dari *x* dan *y*. Tetapi karena 2 adalah bilangan prima dan 2 dapat membagi hasilkali *xy*, maka menurut Lemma Euclid, 2 membagi *x* atau 2 membagi *y*. Selanjutnya jika *xy* adalah bilangan genap, maka *x* adalah bilangan genap atau *y* adalah bilangan genap. Jadi jika *x* adalah bilangan ganjil dan *y* adalah bilangan ganjil maka *xy* adalah bilangan ganjil.

<u>Bukti dengan kontradiksi</u>

Misalkan pernyataan "jika *x* dan *y* adalah bilangan ganjil, maka *xy* adalah bilangan ganjil" merupakan pernyataan yang salah. Jadi ingkarannya adalah *x* dan *y* ganjil, dan *xy* genap. Karena *xy* genap maka 2 membagi *xy*. Menurut Lemma Euclid, 2 membagi atau 2 membagi *y*. Hail ini berarti salah satu dari *x* atau *y* adalah bilangan genap. Tetapi menurut soal, *x* ganjil dan *y* ganjil. Pernyataan ini kontradiksi. Jadi disimpulkan bahwa jika *x* ganjil dan *y* ganjil, maka *xy* adalah bilangan ganjil.

D.4. Modus Ponen, Modus Tollens, Silogisme

Bentuk Umum:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Premis 1} & \cdots\cdots\cdots \\
\text{Premis 2} & \cdots\cdots\cdots \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
\hline
\text{Kesimpulan} & \therefore \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Aturan Inferensial	Tautologi	Nama
$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ \therefore q \end{array}$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	Modus ponens
$\begin{array}{l} \neg q \\ \underline{p \Rightarrow q} \\ \therefore \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow q \end{array}$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Silogisme hipotetis
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$	Silogisme disjungtif

p $\therefore p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Penambahan
$p \wedge q$ $\therefore p$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Penyederhanaan
p q $\therefore p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \Rightarrow (p \wedge q)$	Konjungsi
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	$((p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \Rightarrow (q \vee r)$	Resolusi

a. Modus Ponen

Modus Ponen adalah suatu metode penarikan kesimpulan dengan prosedur sebagai berikut:

Jika $p \Rightarrow q$ benar dan p benar, maka q benar

Kalimat tersebut dapat dinayatakan dalam bentuk $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$. Tabel kebenaran untuk pernyataan tersebut merupakan suatu Tautologi, sehingga diperoleh kesimpulan yang benar.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Premis 1} & p \Rightarrow q & \text{(Benar)} \\ \text{Premis 2} & p & \text{(Benar)} \\ \hline \text{Kesimpulan} & \therefore q & \text{(Benar)} \end{array}\right\} \text{atau } ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

Tabel Kebenaran

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Contoh 1.22.

1. Isilah titik-titik di bawah ini, agar diperoleh penarikan kesimpulan yang benar.

a) $q \Rightarrow \neg p$
 …………
 $\therefore \neg p$

b). $\neg p \Rightarrow \neg q$
 $\neg p$
 $\therefore$ ………

c). $\ldots \Rightarrow \neg p$
 q
 $\therefore \neg p$

2. Manakah penarikan kesimpulan yang benar?

   a) Jika Linus membaca koran, maka Linus tahun ada lowongan kerja
      Linus tidak tahu ada lowongan kerja
      ∴ Linus tahu ada lowongan kerja

   b) Jika Yahya mendapat pekerjaan, maka Yahya akan menyumbang
      Yahya tidak mendapat pekerjaan
      ∴ Yahya menyumbang

   c) Jika Johan sarjana teknik maka Johan lulusan fakultas teknik
      Johan lulusan fakultas teknik
      ∴ Johan bukan sarjana teknik

a. Modus Tollens

Modus Tollens adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan: "jika $p \Rightarrow q$ benar dan $\sim q$ benar, maka $\sim p$ benar".

$$\left.\begin{array}{l} \text{Premis 1}: p \Rightarrow q \\ \underline{\text{Premis 2}: \sim q} \\ \text{Kesimpulan}: \sim p \end{array}\right\} \text{atau } ((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$$

Tabel Kebenaran

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q)$	$((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Contoh 1.23.

1. Buktikan bahwa Modus Tollens merupakan cara penarikan kesimpulan yang benar
2. Isilah titik-titik di bawah ini, agar diperoleh penarikan kesimpulan yang benar

   a). $\neg p \Rightarrow \neg q$
   $\underline{\ldots\ldots\ldots\ldots}$
   $\therefore p$

   b). $\neg p \Rightarrow q$
   $\underline{\neg q}$
   $\therefore \ldots\ldots$

   c). $\ldots\ldots \Rightarrow p$
   $\underline{\neg p}$
   $\therefore q$

   d) Jika Harun mempunyai uang, maka ia membeli laptop baru
   ………………………………………………………………………
   ∴ Harun tidak mempunyai uang

3. Manakah penarikan kesimpulan yang sah?
   a. Jika Aldi seorang pelukis maka ia suka menggambar
      Aldi tidak suka menggambar
      ―――――――――――――――
      $\therefore$ Aldi bukan seorang pelukis

   b. Jika hujan turun maka tanaman segar
      Tanaman layu
      ―――――――――――――――
      $\therefore$ Hujan tidak turun

b. Silogisme

Silogisme adalah suatu cara penarikan kesimpulan berdasarkan: "jika $p \Rightarrow q$ benar dan $q \Rightarrow r$ benar, maka $p \Rightarrow r$ benar"

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Premis 1:} & p \Rightarrow q \\ \text{Premis 2:} & q \Rightarrow r \\ \hline \text{Kesimpulan:} & p \Rightarrow r \end{array}\right\} \text{atau } ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Contoh 1.24.

1. Buktikan bahwa Silogisme merupakan cara penarikan kesimpulan yang benar.
2. Isilah titik-titik di bawah ini, agar diperoleh penarikan kesimpulan yang benar

   a). $\begin{array}{l} p \Rightarrow \neg q \\ \cdots \Rightarrow \neg r \\ \hline \therefore \cdots \Rightarrow \cdots \end{array}$ b). $\begin{array}{l} \cdots \Rightarrow \neg p \\ \cdots \Rightarrow \neg r \\ \hline \therefore \neg q \Rightarrow \cdots \end{array}$ c). $\begin{array}{l} r \Rightarrow \cdots \\ \neg q \Rightarrow \cdots \\ \hline \therefore \cdots \Rightarrow \neg p \end{array}$

   d). Jika p bilangan nyata maka $p^2 \geq 0$
      ………………..
      ―――――――――――――――
      $\therefore$ Jika p bilangan nyata maka $(p^2 + 2) > 0$

3. Manakah penarikan kesimpulan yang sah ?
   a. Jika Tikno lulus maka Ibunya bahagia
      Jika Ibunya bahagia maka ia tidak memotong sapi
      ―――――――――――――――
      $\therefore$ Jika Tikno lulus maka Ibunya memotong sapi

   b. Jika Surya pengacara maka ia sarjana hukum
      Jika Surya sarjana hukum maka ia kaya
      ―――――――――――――――
      $\therefore$ Jika Surya pengacara maka ia kaya

c. Silogisme Disjungsi

Apabila kita dihadapkan dengan 2 pilihan (A atau B), sedangkan kita tidak memilih A, maka satu-satunya pilihan yang mungkin adalah memilih B.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Premis 1:} p \vee q \\ \text{Premis 2:} \sim p \\ \hline \text{Kesimpulan:} q\end{array}} \quad \text{atau} \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{Premis 1:} p \vee q \\ \text{Premis 2:} \sim q \\ \hline \text{Kesimpulan:} p\end{array}}$$

Contoh 1.25.

1. Malam ini Agus makan di rumah atau di restoran

   Malam ini Agus tidak makan di rumah

   $\therefore$ Malam ini Agus makan di restoran

2. Ponselku ada di dalam kopor atau tertinggal di kamar

   Ponselku tidak tertinggal di kamar

   $\therefore$ Ponselku ada di dalam kopor

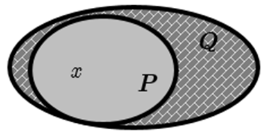
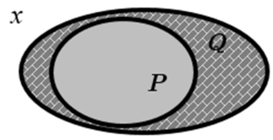
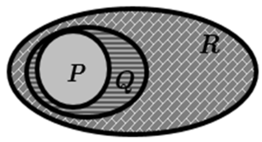
Ekivalensi Logis: Hukum-Hukum Logika

Di dalam semua cabang matematika, kita selalu ingin mengetahui bagaimana suatu entitas (keberadaan) yang dipelajari dikatakan sama, atau pada hakekatnya sama. Sebagai contoh di dalam Aljabar dan Aritmetika, telah diketahui bahwa dua bilangan real bukan nol, dikatakan sama jika kedua bilangan tersebut memiliki tanda yang sama dan nilai yang sama. Oleh karena itu untuk dua bilangan real yang tak nol x, y, jika $|x| = |y|$ dan $xy > 0$, maka $x = y$. Demikian pula sebaliknya, jika $x = y$ maka $|x| = |y|$ dan $xy > 0$.

E. Induksi Matematika

Matematika mempunyai perbedaan mendasar dengan ilmu-ilmu yang lainnya. Matematika disusun atas sekumpulan aksioma dan definisi, dimana semua teorema didasarkan. Semua teorema dapat diturunkan atau dibuktikan dengan menggunakan aksioma dan definisi, atau menggunakan teorema-teorema yang telah dibuktikan sebelumnya. Sebaliknya teori-teori yang dijumpai pada sebagian besar ilmu lain misalnya tentang Hukum-Hukum Newton di dalam Ilmu Fisika, seringkali dibangun berdasarkan hasil-hasil eksperimen yang tidak dapat dibuktikan kebenarannya.

d. Hubungan Modus Ponens, Modus Tollens, dan Silogisme dengan Himpunan

Penarikan Kesimpulan	Himpunan	Diagram Venn
Modus Ponens $p \Rightarrow q$ $\underline{p \quad\quad}$ $\therefore q$	$P \subseteq Q$ $\underline{x \in P}$ $\therefore x \in Q$	
Modus Tollens $p \Rightarrow q$ $\underline{\neg q \quad\quad}$ $\therefore \neg p$	$P \subseteq Q$ $\underline{x \notin Q}$ $\therefore x \notin P$	
Silogisme $p \Rightarrow q$ $\underline{q \Rightarrow r}$ $\therefore p \Rightarrow r$	$P \subseteq Q$ $\underline{Q \subseteq R}$ $\therefore P \subseteq R$	

Oleh karena itu, tidak cukup berargumentasi bahwa suatu pernyataan matematis adalah benar hanya dengan eksperimen-eksperimen dan observasi-observasi. Fermat (1601-1665) menyebutkan suatu konjektur bahwa jika *n* adalah sebarang bilangan bulat yang lebih besar dari 2, maka persamaan $x^n + y^n = z^n$ tidak memiliki penyelesaian berbentuk bilangan bulat positif. Konjektur Fermat ini tidak dapat disimpulkan kebenarannya tanpa pembuktian yang valid. Faktanya, para ahli matematika memerlukan waktu lebih dari tiga abad untuk mencari bukti tersebut, yang akhirnya diselesaikan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Inggris, Andrew Wiles pada tahun 1994.

Menurut Bussey dalam artikelnya pada tahun 1917, Blaise Pascal (1623-1662) mengenal seorang berkebangsaan Italia yang bernama D. Franciscus Maurolycus (1494-1575) telah menggunakan induksi matematika dalam bukunya yang diterbitkan pada tahun 1575. Di dalam buku tersebut, Maurolycus membuktikan dengan cara induksi bahwa bilangan-bilangan ganjil terbentuk dengan cara berturut-turut menambahkan 2 terhadap bilangan ganjil pertama, yaitu 1. Maurolycus juga membuktikan dengan induksi bahwa jumlah *n* bilangan ganjil pertama adalah n^2. Meskipun demikian, Pascal maupun Maurolycus tidak pernah menggunakan istilah *induksi* untuk pembuktian yang dilakukan seperti saat ini. Instilah induksi pertama kali digunakan oleh John Wallis pada tahun 1956 dalam kata-kata *per modum inductionis* dalam buku *Arithmetica Infinitorum.* Selanjutnya, istilah *induksi* *matematika* diperkenalkan oleh Augustus de Morgan (1806-1871) melalui artikel *induction* yang ditulisnya pada tahun 1838 untuk jurnal *Penny Cyclopedia*.

Pada tahun 1889, Giuseppe Peano (1858-1932) menyusun lima aksioma yang menyajikan definisi lengkap tentang bilangan asli. Kelima aksioma tersebut adalah:

(i) 1 adalah bilangan asli.

(ii) Setiap bilangan asli memiliki satu turutan yang unik. Bilangan turutan tersebut juga merupakan bilangan asli.

(iii) Tidak ada dua bilangan asli yang memiliki bilangan turutan yang sama,

(iv) 1 tidak merupakan turutan dari sebarang bilangan asli

(v) Jika suatu sifat dimiliki oleh 1 dan juga dimiliki oleh turutan semua bilangan asli, maka sifat tersebut dimiliki oleh semua bilangan asli.

Aksioma ini, khususnya aksioma kelima, menjadi landasan prinsip induksi matematika yang dirumuskan sebagai berikut: Misalkan *S* adalah subset dari himpunan semua bilangan asli yang memiliki dua sifat yaitu

(1) $1 \in \mathrm{S}$,

(2) untuk semua $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, jika $\mathrm{n} \in \mathrm{S}$, maka $\mathrm{n}+1 \in \mathrm{S}$. Maka $\mathrm{S} = \mathbb{N}$.

Prinsip Induksi Matematika (PMI = *The Principle of Mathematical Induction*) adalah suatu aksioma dari sistem bilangan-bilangan asli yang dapat digunakan untuk membuktikan pernyataan berkuantor yang berbentuk $\forall \mathrm{n} \mathrm{P}(\mathrm{n})$, dimana himpunan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan asli. Prinsip induksi memiliki beberapa bentuk yang ekivalen, yang semuanya didasarkan pada aksioma Peano. Aksioma tersebut menyatakan bahwa jika *S* adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga (i) $0 \in \mathrm{S}$ dan (ii) jika $\mathrm{n} \in \mathrm{S}$ maka $\mathrm{n}+1 \in \mathrm{S}$ sehingga $S = \mathbb{N}$. Pernyataan ini merupakan pernyataan yang sedikit rumit untuk dipahami karena tidak hanya berbentuk “jika … maka …”, tetapi hipotesisnya juga mengandung pernyataan “jika … maka …” yaitu jika $\mathrm{n} \in \mathrm{S}$ maka $\mathrm{n}+1 \in \mathrm{S}$. Jika aksioma ini diterapkan pada tabel kebenaran maka akan diperoleh prinsip induksi matematika. Secara umum, prinsip induksi matematika dapat diterapkan apabila semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan bulat yang berbentuk $\{\mathrm{k}, \mathrm{k}+1, \mathrm{k}+2, \cdots\}$ dengan *k* adalah sebarang bilangan bulat. Dalam hal ini, pernyataan induksi adalah sebagai berikut:

Misalkan P(n) adalah predikat pada domain $\{\mathrm{k}, \mathrm{k}+1, \mathrm{k}+2, \mathrm{k}+3, \cdots\}$, dengan *k* adalah anggota himpunan bilangan bulat Z.

Jika

(1) $\mathrm{P(k)}$ dan

(2) $\mathrm{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

maka $\forall \mathrm{n}, \mathrm{P(n)}$. "Untuk semua *n*", menyatakan untuk semua $\mathrm{n} \geq \mathrm{k}$.

Teorema 1.4. Jika untuk setiap bilangan bulat positif n terdapat pernyataan P_n yang bersesuaian, maka semua pernyataan P_n adalah benar, jika kedua syarat berikut ini terpenuhi:

1. P_1 benar
2. Untuk suatu bilangan bulat positif k sedemikian sehingga P_k benar, maka P_{k+1} juga benar.

Induksi matematika merupakan suatu metode khusus dalam pembuktian pernyataan tentang semua bilangan asli, misalnya "$n^3 - n$ selalu dapat dibagi 3", atau "Jumlah dari n bilangan bulat pertama adalah $\frac{\mathrm{n(n+1)}}{2}$. Selain itu, induksi matematika juga digunakan untuk memeriksa konjektur mengenai hasil dari suatu proses yang terjadi secara berulang dengan pola-pola perulangan yang berhingga. Salah satu contoh konjektur tersebut telah dirumuskan oleh Maurolycus pada tahun 1575 bahwa jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2. Bukti konjektur tersebut ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

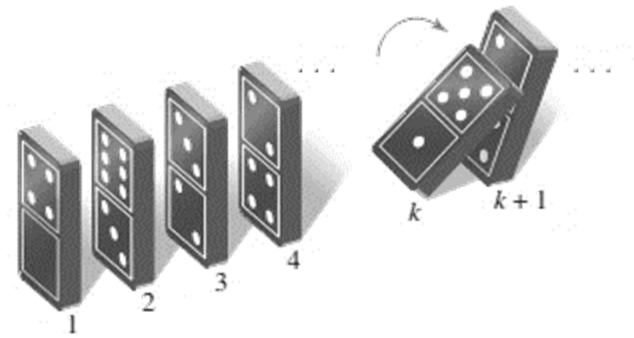
n	Jumlah dari n bilangan asli ganjil pertama	n^2
1	$1 =$	1
2	$1 + 3 =$	4
3	$1 + 3 + 5 =$	9
4	$1 + 3 + 5 + 7 =$	16
5	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$	25
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + (2n - 1) =$	n^2
.	.	.
.	.	.
.	.	.

E.1. Metode Pembuktian Dengan Induksi Matematika

Perhatikan suatu pernyataan yang menyatakan: “Untuk semua bilangan bulat $n \geq a$, berlaku sifat $P(n)$. Untuk membuktikan pernyataan tersebut dilakukan dua langkah sebagai berikut:

Langkah 1 (Langkah basis): Tunjukkan bahwa $P(a)$ benar.

Langkah 2 (Langkah induksi): Tunjukkan bahwa untuk semua bilangan bulat $k \geq a$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar. Untuk itu, anggap bahwa $P(k)$ benar, dengan $k \geq a$ adalah sebarang bilangan bulat (pengandaian ini disebut hipotesis induksi). Selanjutnya tunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar.



Gambar 1. Efek domino

Contoh 1.26. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

Bukti.

Langkah basis: untuk *n* = 1, diperoleh

$$1(1!) = 1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Langkah induksi: untuk *n* = *k,* anggap benar bahwa

$$1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) = (k+1)! - 1$$

sehingga untuk *n* = *k* + 1, diperoleh

$$\begin{aligned}
1(1!) + 2(2!) + \cdots + k(k!) + (k+1)(k+1)! \\
&= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! \\
&= (k+1)!\{1 + (k+1)\} - 1 \\
&= (k+1)!\{k+2\} - 1 \\
&= (k+1)!(k+1) \\
&= (k+2)! - 1
\end{aligned}$$

Contoh 1.27. Buktikan bahwa $23^n - 1$ dapat dibagi oleh 11 untuk semua *n* bilangan bulat positif.

Bukti. Langkah basis: untuk n = 1, jelas bahwa $23^1 - 1 = 22$ dapat dibagi 11.

Langkah induksi: untuk *n = k,* anggap bahwa $11 | 23^k - 1$ untuk suatu bilangan bulat positif *k.*

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk *n* = *k* + 1,

$$\begin{aligned} 23^{k+1} - 1 = 23.23^k - 1 \quad &= (11.2 + 1)23^k - 1 \\ &= 11.2.23^k + \underbrace{(23^k - 1)}_{\text{Langkah hipotesis}} \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $23^n - 1$ dapat dibagi oleh 11 untuk semua bilang bulkat positif *n*.

Contoh 1.28. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Bukti. Langkah basis: Untuk *n* = 1, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

Langkah induksi: Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-*n* adalah (2n-1). Akan ditunjukkan bahwa

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar karena

$$1 + 3 + 5 + \cdots + \overbrace{(2n - 1)}^{\text{suku ke}-n} + \underbrace{\overbrace{(2n + 1)}^{\text{suku ke}-(n+1)}}_{\substack{2(n+1)-1 \\ =2n+2-1 \\ =2n+1}} \qquad = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Karena telah ditunjukkan bahwa langkah basis dan langkah induksi benar, maka jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh 1.29. Buktikan dengan induksi matematika bahwa polinomial $x - y$ membagi polinomial $x^n - y^n$.

Bukti. Langkah basis: $(x-y)\mid(x^1-y^1)$ karena $x-y=(x-y)\cdot 1$. Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$.

Langkah induksi: Anggap bahwa $(x-y)\mid(x^n-y^n)$, akan ditunjukkan bahwa

$$(x-y)\mid(x^{n+1}-y^{n+1}).$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x^{n+1}-y^{n+1} &= xx^n-yy^n = xx^n-yx^n+yx^n-yy^n \\ &= \underbrace{\underbrace{(x-y)x^n}_{(x-y)\mid(x-y)x^n}+\underbrace{y(x^n-y^n)}_{\substack{(x-y)\mid y(x^n-y^n) \\ \text{sesuai hipotesis}}}}_{\substack{\text{catatan: jika } x\mid a \text{ dan } x\mid b \text{ maka } x\mid(a+b) \\ \text{karena:} \\ \left.\begin{array}{l} x\mid a\Rightarrow a=px \\ x\mid b\Rightarrow b=qx \end{array}\right\} a+b=px+qx=(p+q)x\Leftrightarrow x\mid(a+b)}} \end{aligned}$$

menunjukkan bahwa

$$(x-y)\mid(x-y)x^n+y(x^n-y^n)$$

Oleh karena itu

$$(x-y)\mid(x^{n+1}-y^{n+1})$$

dan dapat disimpulkan bahwa

$$(x-y)\mid(x^n-y^n)$$

untuk semua *n* bilangan asli.

Salah satu soal induksi ditugaskan kepada Gauss oleh gurunya, yaitu jumlah dari bilangan 1 sampai dengan 100. Gauss tidak menjelaskan cara memperoleh jawaban 5050 pada saat itu, tetapi sekarang kita mengetahui bahwa:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika. Jumlah semua bilangan tersebut secara langsung, sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S(n) & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ S(n) & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S(n) & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Jumlahan suku-suku $(n+1)$ ada sebanyak *n*, karena itu $2S(n)=n(n+1)$. Jadi jumlah $S(n+1)$ sama dengan $2S(n)/2$ yaitu $\frac{n(n+1)}{2}$.

Misalkan *S*(*n*) adalah pernyataan

$$S(n):1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

maka langkah-langkah induksi untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah:

Langkah Basis (*n* = 1): Pernyataan *S*(1) menyatakan bahwa $1=\frac{1(2)}{2}$ adalah pernytataan yang benar, jadi *S*(1) benar.

Langkah Induksi $(S(k)\Rightarrow S(k+1))$: Dengan menetapkan $k\geq 1$ dan mengandaikan bahwa $S(k):1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ adalah pernyataan yang benar (pernyataan ini disebut **hipotesis induksi**). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$S(k+1):1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

adalah juga pernyataan yang benar.

Dari sisi kiri, diketahui bahwa

$$S(k+1):(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{2}\right)$$
$$=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk $n\geq 1$ pernyataan $S(n)$ adalah pernyataan yang benar.

E.2. Prinsip Induksi Sederhana

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan mengenai bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif *n*. Untuk itu kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ *benar, dan*

untuk semua bilangan bulat positif n ≥ 1, jika $p(n)$ *benar maka* $p(n+1)$ *juga benar.*

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa *p*(*n*) benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
- Jika dapat ditunjukan bahwa kedua langkah tersebut benar maka pernyataan *p*(*n*) benar untuk semua bilangan bulat positif *n*.

Contoh 1.30. Teorema De Moivre

Misalkan θ adalah suatu bilangan real. Menurut De Moivre, untuk semua bilangan asli $n \in \mathbb{N}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$

Bukti.(Dalam pembuktian ini digunakan penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks, dan rumus-rumus jumlahan sudut-sudut trigonometri:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Langkah basis: untuk *n* = 1, jelas bahwa

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

Langkah induksi: asumsikan benar bahwa untuk *n* = *k,*

$$\exists k \in \mathbb{N} \ni (\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta.$$

Selanjutnya dengan menggunakan rumus jumlahan sudut-sudut trigonometri,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\langle\text{hipotesis}\rangle\\ &= \cos k\theta\cos\theta + i\sin k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i^2\sin k\theta\sin\theta\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta) = \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

Jadi disimpulkan bahwa

$$n \in N, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Contoh 1.31. Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Bukti.

Langkah basis. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), diperoleh:

$$2^0 = 2^{0+1} - 1$$

adalah pernyataan yang benar, karena $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$

Langkah induksi. Anggap benar bahwa untuk semua bilangan bulat tak-negatif $n = k$, maka

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

juga benar.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1}. \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Jadi terbukti $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n.

Contoh 1.32. Buktikan dengan induksi matematik bahwa pada sebuah himpunan beranggotakan n elemen, banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari himpunan tersebut adalah 2^n.

Contoh 1.33. Buktikan pernyataan "Untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan perangko 5 sen" benar.

Bukti.

Langkah basis. Untuk membayar biaya pos 8 sen dapat digunakan 1 buah perangko 3 sen dan 1 buah perangka 5 sen saja. Ini jelas benar.

Langkah induksi. Andaikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n ($n \geq 8$) sen dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar $n + 1$ sen juga dapat menggunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen. Terdapat dua kemungkinan yang akan diselidiki:

(a) Kemungkinan pertama, misalkan kita membayar biaya pos senilai *n* sen dengan sedikitnya satu perangko 5 sen. Dengan mengganti satu buah perangko 5 sen dengan dua buah perangko 3 sen, akan diperoleh susunan perangko senilai *n* + 1 sen.

(b) Kemungkinan kedua, jika tidak ada perangko 5 sen yang digunakan, biaya pos senilai *n* sen menggunakan perangko 3 sen semuanya. Karena $n \geq 8$, setidaknya harus digunakan tiga buah perangko 3 sen. Dengan mengganti tiga buah perangko 3 sen dengan 2 buah perangko 5 sen, akan dihasilkan nilai perangko *n* + 1 sen.

Contoh 1.34. Sebuah mesin ATM hanya menyediakan pecahan uang Rp 20.000,- dan Rp 50.000, -. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematik.

Pembuktian dengan induksi lemah (induksi biasa) seringkali tidak dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa jika $S(k)$ benar, maka $S(k+1)$ juga benar. Menggunakan fakta bahwa beberapa pernyataan $S(m)$ dimana $(m < k)$ dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa $S(k+1)$ benar. Pada situasi seperti ini pembuktian dapat dilakukan dengan **induksi kuat.** Induksi kuat dilakukan dengan **cara** yang sama dengan induksi lemah, **kecuali pada langkah kedua**. Pada langkah ini, asumsi **tidak hanya** ditetapkan pada $S(k)$ untuk menunjukkan bahwa $S(k+1)$ benar, tetapi **diasumsikan bahwa semua pernyataan** $S(1), S(2), \cdots, S(n), \cdots, S(k)$ adalah pernyataan yang benar, kemudian menunjukkan bahwa $S(k+1)$ juga adalah pernyataan yang benar. Analogi dengan efek domino, induksi kuat menyatakan bahwa jika *k* kartu domino pertama jatuh dan mengakibatkan kartu domino ke-$(k+1)$ jatuh, maka semua kartu tersebut pasti jatuh.

E.3. Prinsip Induksi Kuat

Proposisi 1.1. Pernyataan-pernyataan $S(1), S(2), S(3), \cdots$ semuanya benar.

Bukti (Induksi Kuat)

(1) Buktikan bahwa pernyataan pertama $S(1)$ atau beberapa pernyataan pertama $S(n)$ benar.

(2) Untuk sebarang bilangan bulat $k \geq 1$, akan dibuktikan bahwa
$$[S(1) \wedge S(2) \wedge S(3) \wedge \cdots \wedge S(k)] \Rightarrow S(k+1)$$

Penerapan induksi kuat di bawah ini akan dilakukan dengan induksi lemah, kemudian memperlihatkan masalah yang dijumpai dengan induksi lemah tersebut.

Contoh 1.35. Buktikan bahwa $12 \mid (n^4 - n^2), \forall n \in \mathbb{N}$.

Bukti (dengan induksi lemah)

Langkah basis: untuk $n = 1$, dapat ditunjukkan bahwa $12 \mid (n^4 - n^2)$ karena $12 \mid 0$. Selanjutnya pada langkah induksi, diasumsikan bahwa

$$12 \mid (k^4 - k^2)$$

kemudian akan ditunjukkan bahwa $12 \mid ((k+1)^4 - (k+1)^2)$

Perhatikan bahwa $12 \mid (k^4 - k^2)$ menunjukkan bahwa $(k^4 - k^2) = 12a$ untuk suatu $a \in \mathbb{Z}$.

Hubungan tersebut digunakan untuk menunjukkan bahwa $(k+1)^4 - (k+1)^2 = 12b$ untuk suatu $b \in \mathbb{Z}$.

Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - (k^2 + 2k + 1) \\ &= (k^4 - k^2) + 4k^3 + 6k^2 + 6k \\ &= 12a + 4k^3 + 6k^2 + 6k\end{aligned}$$

Pada tahap ini tidak ada ditunjukkan secara langsung bahwa penjabaran yang diperoleh dapat dibagi 12 dengan hasil bagi bilangan bulat. Karena itu diperlukan variasi induksi matematika yaitu induksi kuat.

Induksi kuat menggunakan asumsi bahwa $S(1), S(2), \cdots, S(k)$ adalah pernyataan-pernyataan yang benar, kemudian menunjukkan bahwa asumsi tersebut mengakibatkan $S(k+1)$ menjadi pernyataan yang benar. Secara spesifik dapat dikatakan bahwa jika $S(1)$ sampai dengan $S(k)$ adalah pernyataan yang benar, maka $S(k-5)$ adalah pernyataan yang benar karena $1 \leq k-5 \leq k$. Dengan induksi kuat akan ditunjukkan bahwa $S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$, bukan $S(k) \Rightarrow S(k+1)$ seperti pada induksi lemah. Langkah basis yang akan dilakukan adalah memeriksa bahwa pernyataan-pernyataan

$$S(1), S(2), S(3), S(4), S(5), S(6)$$

semuanya benar. Dengan demikian $S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$ menunjukkan bahwa semua $S(k)$ lainnya adalah benar. Sebagai contoh, jika $k = 6$, maka $S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$ adalah $S(1) \Rightarrow S(7)$ sehingga $S(7)$ adalah pernyataan yang benar. Jika $k = 7$, maka

$S(k-5) \Rightarrow S(k+1)$ adalah $S(2) \Rightarrow S(8)$ sehingga $S(8)$ adalah pernyataan yang benar. Demikian seterusnya.

Proposisi 1.2. Jika $n \in \mathbb{N}$ maka $12 \mid (n^4 - n^2)$.

Bukti. (dengan induksi kuat)

(1) Langkah basis. Perhatikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk enam bilangan bulat pertama:

$$n = 1 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 1^4 - 1^2 = 0$$
$$n = 2 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 2^4 - 2^2 = 12$$
$$n = 3 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 3^4 - 3^2 = 72$$
$$n = 4 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 4^4 - 4^2 = 240$$
$$n = 5 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 5^4 - 5^2 = 600$$
$$n = 6 \Rightarrow 12 \mid n^4 - n^2 = 6^4 - 6^2 = 1260$$

(2) Langkah induksi. Ambil $k \geq 6$ dan asumsikan bahwa $12 \mid \left(m^4 - m^2\right)$ untuk $1 \leq m \leq k$ yaitu asumsi bahwa pernyataan-pernyataan $S(1), S(2), \cdots, S(k)$ semuanya benar. Akan ditunjukkan bahwa $12 \mid ((k+1)^4 - (k+1)^2)$ yaitu pernyataan bahwa $S(k+1)$ benar. Karena $S(k-5)$ benar, maka diperoleh $12 \mid ((k-5)^4 - (k-5)^2)$. Misalkan

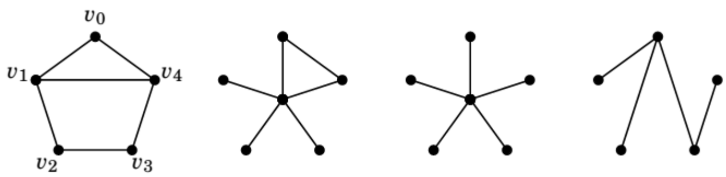
$$= k - 5, \text{ maka } 12 \mid \left(m^4 - m^2\right)$$

yang berarti $m^4 - m^2 = 12a$ untuk suatu bilangan bulat *a.* Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (m+6)^4 - (m+6)^2 \\
&= m^4 + 24m^3 + 216m^2 + 864m + 1296 - (m^2 + 12m + 36) \\
&= (m^4 - m^2) + 24m^3 + 216m^2 + 852m + 1260 \\
&= 12a + 24m^3 + 216m^2 + 852m + 1260 \\
&= 12(a + 2m^3 + 18m^2 + 71m + 105)
\end{aligned}$$

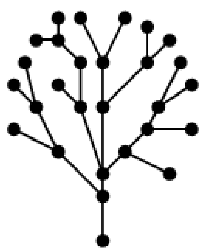
Karena $a + 2m^3 + 18m^2 + 71m + 105$ merupakan bilangan bulat, maka $12 \mid ((k+1)^4 - (k+1)^2)$ dan disimpulkan bahwa $12 \mid (m^4 - m^2)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh selanjutnya adalah objek dalam matematika yang disebut *graf*. Di dalam matematika, istilah *graf* digunakan dalam dua konteks. Yang pertama adalah grafik, yang digunakan dalam persamaan dan fungsi aljabar dan kalkulus. Konteks *graf* yang lainnya adalah suatu konfigurasi yang terdiri atas titik-titik atau noktah yang disebut **vertice** (simpul) dan **edge** (sisi) yaitu garis-garis yang menghubungkan dua simpul. Beberapa bentuk graf dalam konteks ini ditunjukkan pada gambar di bawah ini. graf dapat ditelusuri dari satu simpul ke simpul lainya.



Gambar 1. Bentuk-bentuk graf

Suatu **Cycle (siklus)** di dalam graf adalah sederetan sisi yang berbeda membentuk suatu rute (lintasan) yang berhenti pada titik awal lintasan tersebut. Sebagai contoh, graf pada Gambar 1 memiliki siklus dengan titik asal v_1 menuju titik simpul v_2 kemudian ke v_3 dan ke v_4 dan akhirnya kembali ke v_1. Dua graf paling kiri dalam Gambar 1 memiliki Cycle, tetapi dua graf paling kanan tidak memiliki cycle. Graf yang tidak memiliki *cycle* dinamakan **Tree**. Tree pada Gambar 1 memiliki sisi yang lebih kurang (satu sisi) dari pada jumlah simpulnya. Gambar paling kanan memiliki 5 simpul dan 4 sisi. Sedangkan gambar kedua dari kanan memiliki 6 simpul dan 5 sisi. Jika kita menggambar sebarang *tree* yang memiliki *n* simpul maka jumlah sisinya selalu sama dengan $n - 1$. Pernyataan ini dapat dibuktikan akan selalu benar.



Gambar 1. Tree

Proposisi 1.3. Jika suatu *tree* memiliki *n* simpul, maka jumlah sisinya ada $n - 1$. Proposisi ini akan dijelaskan pada Contoh 1.36.

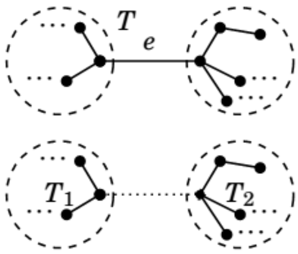
Contoh 1.36. Buktikan bahwa Jika suatu *tree* memiliki *n* simpul, maka jumlah sisinya ada $n - 1$.

Bukti.

Proposisi ini menyatakan bahwa untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$, pernyataan di bawah ini adalah pernyataan yang benar: $S(n):$ Suatu *tree* yang memiliki *n* simpul memiliki *n* – 1 sisi. Pembuktian dilakukan dengan induksi kuat. Perhatikan bahwa jika suatu tree memiliki *n* = 1 simpul, maka tree tersebut memiliki *n* – 1 = 1 – 1 = 0 sisi. Sekarang ambil sebarang bilangan bulat $k \geq 1$. Akan ditunjukkan bahwa

$$(S(1) \wedge S(2) \wedge S(3) \wedge \cdots \wedge S(k) \Rightarrow S(k+1)).$$

Dengan kata lain harus ditunjukkan bahwa jika benar sebarang tree yang memiliki *m* simpul pasti memiliki *m* – 1 sisi dengan $1 \leq m \leq k$ maka sebarang tree yang memiliki $k+1$ simpul, pasti memiliki $(k+1)-1=k$ sisi. Selanjutnya akan dibuktikan dengan bukti langsung. Andaikan bahwa untuk setiap bilangan bulat *m* dengan $1 \leq m \leq k$ maka sebarang tree yang memiliki *m* simpul, pasti memiliki *m* – 1 sisi. Misalkan *T* adalah suatu tree yang memiliki *k* + 1 simpul. Tarik sebarang sisi dari *T* dan tandai dengan label *e,* seperti pada Gambar 3.



Gambar 2. Tree yang memiliki *m* simpul, memiliki *m* – 1 sisi.

Selanjutnya hapuskan sisi *e* dari *T,* tetapi titik-titik pada kedua ujungnya tidak dihilangkan. Hal ini akan membentuk dua tree yang lebih kecil, misalkan T_1 dan T_2. Selanjutnya misalkan T_1 memiliki *x* simpul dan T_2 memiliki *y* simpul. Karena T_1 dan T_2 masing-masing memiliki simpul kurang dari $k+1$ maka hipotesis induksi menjamin bahwa T_1 memiliki $x-1$ sisi dan T_2 memiliki $y-1$ sisi. Tree yang asli yaitu *T,* memiliki $x+y$ simpul, yang terdiri atas $x-1$ sisi untuk T_1 dan $y-1$ sisi untuk T_2, ditambah sisi *e* yang bukan sisi T_1 maupun T_2.

Jadi jumlah sisi *T* adalah $(x-1)+(y-1)+1=(x+1)-1$. Dengan kata lain, *T* memiliki sisi yang kurang satu dari pada jumlah simpulnya. Oleh karena itu, *T* memiliki $(k+1)-1=k$ sisi. Dengan demikian disimpulkan bahwa suatu tree yang memiliki *n* simpul akan memiliki *n* – 1 sisi.

Contoh 1.37. Buktikan bilangan Fibonacci ke-*n* bahwa

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Bilangan Fibonacci adalah barisan bilangan $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$ yang dinyatakan dengan

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ untuk } n = 1 \text{ dan } 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1} \text{ untuk } n > 2 \end{cases}$$

Bukti.

Untuk $n = 1$,

$$1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

Untuk $n = 2$,

$$1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

Selanjutnya diasumsikan bahwa

$$a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

dan

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \\ &= \cdots \text{dst} \end{aligned}$$

Contoh 1.38. Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

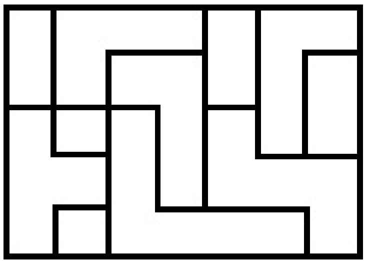
Langkah basis. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan $2, 3, \ldots, n$ dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n+1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Pada kasus ini terdapat dua kemungkinan nilai dari $n+1$:

(a) Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

(b) Jika $n+1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n+1$ tanpa sisa. Dengan kata lain, $(n + 1)/a = b$ atau $n+1 = ab$ yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$. Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$. Dengan demikian terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif $n(n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

Contoh 1.39. Teka-teki potongan gambar (*jigsaw*) terdiri dari sejumlah potongan gambar (lihat Gambar 4). Dua atau lebih potongan dapat disatukan untuk membentuk potongan yang lebih besar. Lebih tepatnya, kita gunakan istilah blok bagi satu potongan gambar. Blok-blok dengan batas yang cocok dapat disatukan membentuk blok yang lain yang lebih besar. Akhirnya, jika semua potongan telah disatukan menjadi satu buah blok, teka-teki susun gambar itu dikatakan telah dipecahkan. Menggabungkan dua buah blok dengan batas yang cocok dihitung sebagai satu langkah. Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk suatu teka-teki susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan n - 1 langkah untuk memecahkan teka-teki itu.



Gambar 4. Jigsaw

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk teka-teki susun gambar dengan satu potongan, tidak diperlukan langkah apa-apa untuk memecahkan teka-teki itu.

(ii) *Langkah induksi*. Misalkan pernyataan bahwa untuk teka-teki dengan n potongan $(n = 1, 2, \ldots, k)$ diperlukan sejumlah $n - 1$ langkah untuk memecahkan teka-teki itu adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus membuktikan bahwa untuk $n + 1$ potongan diperlukan n langkah.

Bagilah $n + 1$ potongan menjadi dua buah blok –satu dengan n_1 potongan dan satu lagi dengan n_2 potongan, dan $n_1 + n_2 = n + 1$. Untuk langkah terakhir yang menyempurnakan susunan jigsaw, dua buah blok disatukan sehingga membentuk satu blok besar. Menurut hipotesis induksi, diperlukan $n_1 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang satu dan $n_2 - 1$ langkah untuk menyatukan blok yang lain. Digabungkan dengan langkah terakhir yang menyatukan kedua blok tersebut, maka banyaknya langkah adalah $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n + 1 - 1 = n$. Karena langkah (i) dan (ii) benar maka terbukti bahwa suatu gambar jigsaw susun gambar dengan n potongan, selalu diperlukan $n - 1$ langkah untuk menyusun kembali potongan gambar jigsaw tersebut.

Contoh 1.40. Tunjukkan apa yang salah dari pembuktian di bawah ini yang menyimpulkan bahwa semua kuda berwarna sama?

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa semua kuda di dalam sebuah himpunan berwarna sama

(i) *Langkah basis*: jika kuda di dalam himpunan hanya seekor, jelaslah $P(1)$ benar.

(ii) *Langkah induksi*: andaikan bahwa semua kuda di dalam himpunan n ekor kuda berwarna sama adalah benar. Tinjau untuk himpunan dengan $n + 1$ kuda; nomori kuda-kuda tersebut dengan 1, 2, 3, …, n, n+1. Tinjau dua himpunan, yaitu n ekor kuda yang pertama

(1, 2, …n) harus berwarna sama, dan n ekor kuda yang terakhir (2, 3, …, n, n+1) juga harus berwarna sama. Karena himpunan n kuda pertama dan himpunan n kuda terakhir beririsan, maka semua n+1 kuda harus berwarna sama. Ini membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar.

Penyelesaian: langkah induksi tidak benar jika $n + 1 = 2$, sebab dua himpunan (yang masing-masing beranggotakan $n = 1$ elemen) tidak beririsan.

Contoh 1.41. Temukan kesalahan dalam pembuktian berikut. Kita ingin membuktikan bahwa $a^n = 1$ untuk semua bilangan bulat tak-negatif n bilamana a adalah bilangan riil tidak-nol. Kita akan membuktikan ini dengan prinsip induksi kuat.

(i) *Basis induksi.* Untuk $n = 0$, jelas $a^0 = 1$ adalah benar sesuai definisi a^0.

(ii) *Langkah induksi. Misalkan* pernyataan tersebut benar untuk 0, 1, 2, …, n, yaitu $a^0 = 1$, $a^1 = 1$, $a^2 = 1$, …, $a^n = 1$. Akan ditunjukkan bahwa $a^{(n+1)} = 1$. Untuk menunjukkan hal ini, maka $a^{n+1} = \frac{a^n \ . \ a^n}{a^{n-1}} = \frac{1.1}{1} = 1$

Penyelesaian:

Kesalahan terjadi pada langkah induksi, karena untuk $n = 0$ kita tidak dapat menghitung $a^{0+1} = \frac{a^0 \ . \ a^0}{a^{-1}} = \frac{1 \times 1}{?}$ sebab nilai a^{-1} tidak terdapat dalam hipotesis induksi.

Contoh 1.42. Misalkan $x > -1$ adalah bilangan real. Buktikan bahwa $(1+x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua n bilangan asli ℕ.

Bukti.

Langkah basis: untuk $n = 1$, $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot (x)$

Langkah induksi: asumsikan untuk $n = k, (1+x)^k \geq 1 + kx$ untuk suatu bilangan bulat k. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k+1$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k (1+x) \\
&\geq (1+kx)(1+x) = (1+x) + kx(1+x) \\
&= (1+x) + kx + kx^2 = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2 \\
&\geq 1 + (k+1)x
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(1+x)^n \geq 1+nx$ untuk semua bilangan asli *n*.

Contoh 1.43. Buktikan bahwa $2^n > n^2$ untuk semua bilangan asli $n \geq 5$.

Bukti.

Langkah basis: untuk *n* = 5, $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Langkah induksi: anggap untuk *n* = *k,* $2^k > k^2$. untuk suatu bilangan bulat $k \geq 5$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa untuk *n* = *k* + 1,

$$2^{k+1} = 2^k 2 > 2k^2 \text{(hipotesis induksi)} > (k+1)^2$$

$$\begin{aligned} 2k^2 > (k+1)^2 \text{ karena } 2k^2-(k+1)^2 &= 2k^2-k^2-2k-1 \\ &= k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0; \quad k \geq 5. \end{aligned}$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa $2^n > n^2$ untuk semua bilangan asli $n \geq 5$.

Contoh 1.44. Misalkan $\{a_n\}$ adalah suatu barisan bilangan asli, sedemikian sehingga $a_1 = 5, a_2 = 13$ dan $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ untuk semua bilangan asli *n*. Buktikan bahwa $a_n = 2^n + 3^n$ untuk semua bilangan asli *n*.

Bukti.

Langkah basis: $a_1 = 5 = 2^1 + 3^1$ dan $a_2 = 13 = 2^2 + 3^2$.

Langkah induksi: andaikan untuk *n* = *k*, $a_k = 2^k + 3^k$ dan $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$ untuk semua bilangan asli *k*. Akan dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 5a_{k+1} - 6a_k \\ &= 5(2^{k+1} + 3^{k+1}) - 6(2^k + 3^k) \\ &= 5(2^k 2 + 3^k 3) - 6(2^k + 3^k) \quad = 10(2^k) + 15(3^k) - 6(2^k) - 6(3^k) \\ &\qquad = 4(2^k) + 9(3^k) \\ &\qquad = 2^2(2^k) + 3^2(3^k) \\ &\qquad = 2^{k+2} + 3^{k+2} \end{aligned}$$

Jika $a_n = 2^n + 3^n$ berlaku untuk *n* = *k* dan untuk *n* = *k* +1, maka pernyataan tersebut juga berlaku untuk *n* = *k* + 2. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $a_n = 2^n + 3^n$ berlaku untuk semua bilangan asli *n*

Contoh 1.45. Perhatikan barisan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh,

$S_{0,0} = 0$ $\quad$ $S_{1,0} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1$

$S_{0,1} = S_{0,0} + 1 = 1$ $\quad$ $S_{1,1} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2$

$S_{2,0} = S_{1,0} + 1 = 2$ $\quad$ $S_{2,1} = S_{2,0} + 1 = 3, \ldots$

Buktikanlah dengan induksi matematik bahwa untuk pasangan tidak negatif m dan n, $S_{m,n} = m + n$.

Bukti.

Basis induksi. Karena (0, 0) adalah elemen terkecil di dalam X, maka $S_{0,0} = 0 + 0 = 0$. Ini benar dari definisi $S_{0,0}$.

Langkah induksi. Buktikan untuk semua $(m, n) > (0, 0)$ di dalam X bahwa jika $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$ maka $S_{m,n} = m + n$ juga benar. Andaikan bahwa $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$. Ini adalah hipotesis induksi. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $S_{m,n} = m + n$ untuk $n = 0$ maupun $n \neq 0$.

Kasus 1: Jika $n = 0$, maka berdasarkan definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$. Karena $(m-1, n) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi

$$S_{m-1,n} = (m-1) + n$$

sehingga

$$S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m-1) + n + 1 = m + n.$$

Kasus 2: Jika $n \neq 0$, maka berdasarkan definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$.

Karena $(m, n-1) < (m, n)$, maka dari hipotesis induksi,

$$S_{m,n-1} = m + (n-1) + 1$$

sehingga

$$S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n-1) + 1 = m + n.$$

Contoh 1.46. Buktikan bahwa $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ adalah suatu bilangan genap untuk semua bilangan asli *n*.

Bukti.Untuk penyederhanaan penulisan, dituliskan $f(n)=\alpha^n+\beta^n$, dimana $\alpha=3+\sqrt{5}$ dan $\beta=3-\sqrt{5}$. Dapat ditunjukkan bahwa $f(1)=6$ dan $f(2)=28$, merupakan bilangan genap. Selanjutnya, andaikan bahwa $f(k)$ dan $f(k+1)$ adalah bilangan-bilangan genap untuk sebarang bilangan bulat *k*.

Perhatikan untuk $n=k+2$. Perhatikan juga bahwa $\alpha=3+\sqrt{5}$ dan $\beta=3-\sqrt{5}$ adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2-6x+4=0$. Oleh karena itu, $\alpha^2=6\alpha-4$ dan $\beta^2=6\beta-4$. Jadi,

$$\begin{aligned}
f(k+2) &= \alpha^{k+2}+\beta^{k+2}\\
&= \alpha^k\alpha^2+\beta^k\beta^2\\
&= \alpha^k(6\alpha-4)+\beta^k(6\beta-4)=6\alpha^{k+1}-4\alpha^k+6\beta^{k+1}-4\beta^k\\
&= 6(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-4(\alpha^k+\beta^k)\\
&= 6f(k+1)-4f(k)
\end{aligned}$$

Karena $f(k)$ dan $f(k+1)$ adalah bilangan genap (menurut hipotesis), maka $f(k+2)$ juga adalah bilangan genap. Dengan demikian berdasarkan induksi matematika dapat disimpulkan bahwa $f(n)$ adalah suatu bilangan genap untuk semua *n* bilangan asli.

Teorema 1.5. Induksi 2-Dimensi, Versi 1

Misalkan $S(m,n)$ adalah suatu pernyataan yang melibatkan variabel-variabel 2 dimensi, *m* dan *n*. Andaikan:

1) $S(1,1)$ benar,
2) Jika $S(k,1)$ benar untuk suatu bilangan bulat *k* maka $S(k+1,1)$ juga benar;
3) Jika $S(h,k)$ berlaku untuk suatu bilangan bulat positif *h* dan *k*, maka $S(h,k+1)$ juga benar.

Maka dapat disimpulkan berdasarkan induksi matematika bahwa $S(m,n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif *m* dan *n*.

Contoh 1.47. Misalkan *f* adalah fungsi dari dua variabel dengan $f(1,1)=2$ dan

$$\begin{cases} f(m+1,n)=f(m,n)+2(m+n)\\ f(m,n+1)=f(m,n)+2(m+n-1)\end{cases}$$

untuk semua bilangan asli *m* dan *n*. Buktikan bahwa:

$$f(m,n)=(m+n)^2-(m+n)-2n+2$$

untuk semua bilangan bulat positif *m* dan *n*.

Bukti.

Langkah basis: pertama ditunjukkan bahwa

$$f(1,1)=2=(1+1)^2-2(1)+2$$

Langkah induksi:

Hipotesis: anggap bahwa

$$f(k+1)=(k+1)^2-(k+1)-2(1)+2=k^2+k$$

untuk suatu bilangan bulat positif *k*. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} f(k+1,1) &= f(k,1)+2(k+1) \\ &= (k^2+k)+(2k+2) \\ &= [(k+1)+1]^2-[(k+1)+1]-2(1)+2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa syarat (1) dan (2) dalam Teorema 1.5 terpenuhi.

Anggap bahwa

$$f(h,k)=(h+k)^2-(h+k)-2k+2$$

untuk suatu bilangan bulat positif *h* dan *k*.

Maka,

$$\begin{aligned} f(h,k+1) &= f(h,k)+2(h+k-1) \\ &= (h+k)^2-(h+k)-2k+2+2(h+k)-2 \\ &= (h+k+1)^2-(h+k+1)-2(k+1)+2 \end{aligned}$$

Jadi syarat (3) dalam Teorema 1.5 terpenuhi. Karena syarat (1), (2), dan (3) dalam Teorema tersebut terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa

$$f(m,n)=(m+n)^2-(m+n)-2n+2$$

berlaku untuk semua bilangan bulat *m* dan *n*.

Teorema 1.6. Induksi 2-Dimensi, Versi 2.

Misalkan $S(m,n)$ adalah suatu pernyataan yang melibatkan 2 variabel *m* dan *n*. Andaikan:

(1) $S(1,1)$ benar;

(2) Jika untuk suatu bilangan bulat positif *k* > 1, $S(m,n)$ benar jika $m+n=k$ maka $S(m,n)$ benar jika $m+n=k+1$

Dengan demikian $S(m, n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif *m*, *n*.

Teorema 1.7

Misalkan $S(n)$ adalah pernyataan yang memuat suatu bilangan bulat *n*. Jika

(i) $S(k)$ benar, dan

(ii) Untuk setiap $n \geq k$, $[S(k) \wedge S(k+1) \wedge \cdots \wedge S(m)] \Rightarrow S(m+1)$ maka untuk setiap $n \geq k$, pernyataan $S(n)$ benar.

E.4. Pembuktian Prinsip Induksi Kuat Dengan Induksi Lemah

Asumsikan bahwa untuk suatu *k*, pernyataan $S(k)$ berlaku untuk setiap $m \geq k$,

$$[S(k) \wedge S(k+1) \wedge \ldots \wedge S(m)] \Rightarrow S(m+1).$$

Selanjutnya misalkan juga *B* adalah himpunan semua $n > m$, dimana $S(n)$ tidak berlaku. Jika $B \neq \varnothing$ dan $B \subset C$ maka menurut prinsip urutan rapi, *B* memiliki elemen terkecil, misalkan *l*. Berdasarkan definisi *B*, untuk setiap $k \leq t < l, S(t)$ berlaku. Pernyataan hipotesis induksi adalah benar, sehingga $S(l)$ juga benar. Hal ini kontradiksi dengan $l \in B.$ Karena itu $B = \varnothing.$

E.5. Induksi Kuat Mencakup Induksi Lemah

Induksi lemah dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi kuat. Asumsikan bahwa induksi kuat berlaku (untuk *k* = 1). Dalam hal ini, asumsikan bahwa jika $S(1)$ benar dan untuk semua $m \geq 1$,

$$[S(1) \wedge S(2) \wedge \cdots \wedge S(m)] \Rightarrow S(m+1),$$

maka untuk setiap $n \geq 1$, $S(n)$ benar.

Teorema 1.8. Sebarang bilangan bulat positif $n \geq 2$ merupakan hasilkali bilangan-bilangan prima.

Bukti. Misalkan $S(n)$ adalah pernyataan "*n* adalah hasil kali bilangan-bilangan prima".

Langkah basis. (*n* = 2). Karena *n* = 2 secara trivial adalah *hasilkali* bilangan prima (terdiri dari satu bilangan prima) maka $S(2)$ benar.

Langkah induksi. Ambil sebarang $m \geq 2$ dan asumsikan bahwa untuk sebarang *t* yang memenuhi $2 \leq t \leq m$, pernyataan $S(t)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $S(m+1)$ yang menyatakan $m+1$ adalah hasilkali bilangan-bilangan prima, adalah pernyataan yang benar. Jika $m+1$ adalah bilangan prima, maka $S(m+1)$ benar. Jika $m+1$ bukan prima maka terdapat *r* dan *s* dengan $2 \le r \le m$ dan $2 \le s \le m$ sehingga $m+1 = rs$. Karena $S(r)$ diasumsikan benar bahwa *r* adalah hasilkali bilangan-bilangan prima, demikian pula $S(r)$, *s* adalah hasilkali bilangan-bbilangan prima. Oleh karena itu $m+1 = rs$ adalah hasilkali bilangan-bilangan prima jadi $S(m+1)$ adalah hasilkali bilangan-bilangan prima. Dengan demikian dalam kasus lainnya $S(m+1)$ juga adalah hasilkali bilangan-bilangan prima. Jadi berdasarkan induksi matematika, untuk setiap $n \ge 2$ pernyataan $S(n)$ benar.

Contoh 1.48. Untuk sebarang bilangan real *w, x, y,* dan *z,* jika $w+x=y+z$ maka bilangan tersbesar dari hasilkali *wx* dan *yz* dibentuk oleh pasangan bilangan yang memiliki selisih terkecil.

Bukti.

Misalkan $w+x=y+z$

$$(w+x)^2-(w-x)^2=4wx$$
$$(y+z)^2-(y-z)^2=4yz$$

Karena $w+x=y+z$ dan juga $(w+x)^2=(y+z)^2$ maka ruas kiri kedua persamaan di atas memiliki nilai paling besar jika ruas kanannya paling kecil.

Proposisi 1.4. Jika *n* adalah sebarang bilangan bulat non-negatif, maka $5 \mid (n^5-n)$

Bukti.

Bilangan bulat non-negatif yang pertama adalah 0, karena itu langkah basis mencakup juga *n* = 0.

(1) Jika *n* = 0, pernyataan di atas menjadi $5 \mid (0^5-0)$ dan merupakan pernyataan yang benar.

(2) Misalkan $k \ge 0$. Akan dibuktikan jika $5 \mid (k^5-k)$ maka $5 \mid ((k+1)^5-(k+1))$

Dengan pembuktian langsung, andaikan $5 \mid (k^5-k)$ berarti $k^5-k=5a$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^5-(k+1) &= k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k-1\\ &= (k^5-k)+5k^4+10k^3+10k^2+5k\\ &= 5a++5k^4+10k^3+10k^2+5k\\ &= 5(a+k^4+2k^3+2k^2+k)\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(k+1)^5-(k+1)$ adalah bilangan bulat kelipatan 5, jadi $5\left|((k+1)^5-(k+1))\right.$. Karena $5\left|(k^5-k)\Rightarrow 5\right|((k+1)^5-(k+1))$ maka menurut induksi matematika, $5\left|(n^5-n)\right.$ untuk setiap *n* bilangan bulat non-negatif.

F. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan nilai logika dari pernyataan-pernyataan di bawah ini.
   a. $\forall x \in \mathbb{R} \ni x^2 \geq x$
   b. $\exists y \in \mathbb{Z} \ni 3y = 4$
   c. $\forall y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \ni \tan y > 0$
2. Selidikilah sah atau tidaknya penarikan kesimpulan yang dinyatakan dengan lambang berikut ini
   a. Premis 1 : $p \Leftrightarrow q$
      Premis 2 : $\sim p$
      Konklusi : $\sim q$

   b. Premis 1 : $p \Rightarrow q$
      Premis 2 : $r \Rightarrow \sim q$
      Konklusi : $p \Rightarrow \sim q$

   c. Premis 1 : $p \vee q$
      Premis 2 : $\sim q$
      Konklusi : p
3. Tentukanlah bentuk argumen untuk argumen di bawah ini dan tentukan apakah pernyataan tersebut valid atau tidak. Dapatkan diketahui bahwa kesimpulan benar jika premis-premisnya benar?
   a. Jika Socrates seorang manusia, maka Socrates akan meninggal.
      Socrates adalah seorang manusia
      $\therefore$ Socrates akan meninggal.

b. Jika George tidak berkaki delapan, maka George bukan laba-laba

   George adalah seekor laba-laba

   $\therefore$ George berkaki delapan.

4. Tentukan aturan inferensial apa yang digunakan di dalam setiap agrumen di bawah ini.

   a. Jika dosen berhalangan hadir, kuliah tidak dijalankan

      Kuliah dijalankan

      $\therefore$ Dosen tidak berhalangan hadir

   b. Kanguru hidup di Australia, dan Kanguru menyusui anak. Oleh karena itu kanguru menyusui anak.

   c. Hari ini panas sekali atau polusi berbahaya

      Hari ini tidak panas karena itu polusi berbahaya

5. Tentukan, apakah pernyataan berikut ini merupakan argumen-argumen yang valid.

   a. Jika x adalah bilangan real positif, maka x^2 adalah juga bilangan real positif.

   b. Jika $x^2 \neq 0$, dimana x adalah bilangan real, maka $x \neq 0$. Misalkan a adalah bilangan real dengan $a^2 \neq 0$; maka $a = 0$.

6. Selidikilah kebenaran dari aturan transitivitas universal yang menyatakan bahwa jika $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x))$ dan $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$ adalah pernyataan-pernyataan yang benar, maka $\forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ adalah pernyataan yang benar, dengan domain dari semua kuantor tersebut adalah domain yang sama.

7. Gunakan aturan inferensial untuk menunjukkan bahwa jika $\forall x(P(x) \Rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ dan $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ adalah pernyataan yang benar, maka $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ adalah pernyataan yang benar.

8. Gunakan aturan inferensial untuk menunjukkan bahwa jika $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ dan $\forall x((\sim P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow R(x))$ adalah pernyataan yang benar, maka pernyataan $\forall x(\sim R(x) \Rightarrow P(x))$ juga merupakan pernyataan yang benar.

9. Gunakan aturan inferensial untuk menunjukkan bahwa jika

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(\sim Q(x) \vee S(x), \forall x(R(x) \Rightarrow \sim S(x)),$$

   dan

$$\exists x \sim P(x)$$

   adalah pernyataan-pernyataan yang benar, maka

$$\exists x \sim R(x)$$

   juga benar.

10. Gunakan resolusi untuk menunjukkan bahwa hipotesis "Alfius adalah siswa yang nakal, atau Hilda adalah siswi yang baik", dan "Alfius adalah siswa yang baik atau David bahagia" mengimplikasikan kesimpulan "Hilda adalah siswi yang baik atau David bahagia"
11. Gunakan resolusi untuk menunjukkan bahwa hipotesis "hari tidak hujan atau Ivon membawa payung", "Ivon tidak membawa payung atau dia tidak kehujanan", dan "hari hujan atau Ivon tidak kehujanan", mungimplikasikan bahwa "Ivon tidak kehujanan."
12. Gunakan resolusi untuk menunjukkan bahwa proposisi majemuk

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

tidak pernah dapat terpenuhi.

Untuk soal nomor 13 – 20, tuliskan masing-masing pernyataan dengan menggunakan notasi kuantor.

13. Setiap pangkat bilangan bulat dari 2 adalah bilangan real.
14. Untuk setiap bilangan real x, $x^2 + 1$ adalah bilangan positif.
15. Ada suatu bilangan bulat n sedemikian sehingga $2^n = 1024$.
16. Ada suatu bilangan asli n sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x, xn merupakan bilangan non-negatif.
17. Untuk sebarang bilangan real x, terdapat bilangan real y sehingga $x + y = 0$.
18. Terdapat suatu bilangan real x sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real y dalam domain $2 \le y \le 3$, diperoleh $1 \le xy \le 2$.
19. Terdapat bilangan real x dan y sedemikian sehingga $x + y \in \mathbb{Z}$ tetapi $xy \notin \mathbb{Z}$.
20. Hasilkali dari sebarang dua bilangan asli adalah bilangan asli.

Untuk soal nomor 21 – 28, tuliskan negasi dari masing-masing pernyataan dengan menggunakan notasi kuantor.

21. $\forall x \in [-2,2], x^3 \in [0,8]$
22. $\exists n \in \mathbb{Z}^-$ sedemikian sehingga $5n + 2 > 1$
23. $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.
24. $\forall x \in (-\infty,-4), \sqrt[3]{x} > 0 \Rightarrow x = -5$
25. $\exists n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $\forall m \in \mathbb{Z}, nm < 1$

26. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x^y \in \mathbb{Z}$

27. $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m + n \in \mathbb{Z}$.

28. $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $9m - 7n = 1$.

Untuk soal nomor 29, tentukan himpunan semestanya sehingga masing-masing pernyataan bernilai benar

29. Misalkan T = {17}, U = {6}, V = {24} dan W = {2, 3, 7, 26}

    a. $(\exists x)(x \text{ ganjil} \Rightarrow x > 8)$
    b. $(\forall x)(x \text{ ganjil} \wedge x > 8)$
    d. $(\exists x)(x \text{ ganjil} \wedge x > 8)$
    e. $(\exists x)(x \text{ ganjil} \vee x > 8)$

30. Tentukan pernyataan mana yang bernilai benar. Himpunan semesta dari pernyataan diberikan dalam tanda kurung.

    a. $(\forall x)(x + x \geq x).(\mathbb{R})$
    b. $(\forall x)(x + x \geq x).(\mathbb{N})$
    c. $(\exists x)(3^x = x^2).(\mathbb{R})$
    d. $(\exists x)(3^x = x).(\mathbb{R})$
    e. $(\exists x)(3(2 - x) = 5 + 8(1 - x)).(\mathbb{R})$

31. Himpunan semesta untuk pernyataan di bawah ini adalah himpunan semua bilangan real. Tentukan pernyataan mana yang benar.

    a. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$
    b. $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = -1)$
    c. $(\exists ! y)(y < 0 \wedge y + 3 > 0)$
    d. $(\exists ! x)(\forall y)(x = y^2)$
    e. $(\forall y)(\exists ! x)(x = y^2)$

32. Suatu kalimat terbuka *p(x,y)*: $y - x = y + x^2$, dengan *x* dan *y* adalah bilangan-bilangan bulat. Berdasarkan kalimat tersebut di atas, tentukanlah nilai kebenaran untuk masing-masing pernyataan-pernyataan di bawah ini.

    a. $p(0,0)$
    b. $p(1,1)$
    c. $p(0,1)$
    d. $\forall y, p(0,y)$

33. Kuantor $\exists_n$ menyatakan "*terdapat tepat n*", sehingga $\exists_n x P(x)$ berarti terdapat tepat *n* dalam domain sedemikian sehingga *P*(*x*) bernilai benar. Dengan menggunakan prinsip tersebut, tentukanlah nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan di bawah ini. Domain setiap pernyataan adalah semua bilangan real.

a. $\exists_0 x\left(x^2=-1\right)$

b. $\exists_2 x\left(x^2=2\right)$

c. $\exists_1 x\left(|x|=0\right)$

d. $\exists_3 x\left(x=|x|\right)$

34. Nyatakan masing-masing pernyataan di bawah ini dengan kuantor eksistensial dan kuantor universal. Proposisi $\exists_n$ sama dengan nomor 33.

a. $\exists_0 xP(x)$

b. $\exists_1 xP(x)$

c. $\exists_2 xP(x)$

d. $\exists_3 xP(x)$

35. Misalkan $P(x,y)$ adalah suatu fungsi proposisional. Tunjukkan bahwa $\exists x \forall y\, P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\, P(x,y)$ merupakan tautologi.

36. Tentukan pernyataan manakah berikut ini yang merupakan tautologi, kontradiksi, atau yang lainnya.

a). $\left[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p\right] \Rightarrow p$

b). $p \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$

c). $p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

d). $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

e). $\left[p \Rightarrow (q \wedge r)\right] \Rightarrow \left[r \Rightarrow (p \Rightarrow q)\right]$

f). $\left[p \Rightarrow (q \wedge r)\right] \Rightarrow r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Buktikan pernyataan-pernyataan di bawah ini dengan induksi matematika

37. $1+3+9+\cdots+3^{n-1}=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$

38. $4+8+12+\cdots+4n=2\left(n^2+n\right)$

39. $2+4+8+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$

40. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

41. $2+2^2+2^3+\cdots+2^2=2\left(2^n-1\right)$

42. $1^2+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

43. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$

44. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

45. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

46. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

47. $a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots(a+(n-1)d)=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

48. $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r};r\neq 1$

Buktikanlah setiap pernyataan di bawah ini dengan menggunakan induksi matematika.

49. Untuk sebarang bilangan bulat $n\geq 0, 24|(5^{2n}-1)$

50. Untuk sebarang bilangan bulat $n\geq 0, 3|(n^3+5n+6)$

51. Untuk sebarang bilangan bulat $n\geq 0, 9|(4^{3n}+8)$

52. Untuk sebarang bilangan bulat $n>0,\ 2003|(4007^n-1)$

53. Untuk sebarang bilangan bulat $n>0,\ 4005|(2002^{n+2}+2003^{2n+1})$

Untuk soal nomor 54-59, misalkan *x* dan *y* adalah bilangan-bilangan bulat, dan *m* dan *n* adalah bilangan bulat positif. Gunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan-pernyataan di bawah ini.

54. $(xy)^n=x^ny^n$.

55. $(x^m)^n=x^{mn}$.

56. $(m+n)x=mx+nx$.

57. $x^mx^n=x^{m+n}$.

58. $n(x+y)=nx+ny$.

59. $m(nx)=(mn)x$.