BAB V
FUNGSI PEMBANGKIT

A. Pendahuluan

Pada awal tahun 1970-an A.A. Kirilov selalu membuka seminar dengan masalah di bawah ini. Seorang penumpang bus akan membeli tiket dari petugas loket. Pada setiap lembar tiket tercantum nomor seri tiket yaitu 6 digit angka. Berdasarkan nomor seri pada tiket, penumpang tertentu akan memperoleh hadiah jika jumlah tiga digit pertama sama dengan jumlah tiga angka terakhir. Jadi nomor seri 123060 adalah tiket yang beruntung, sedangkan nomor seri 123456 tidak beruntung. Ada berapa tiket yang beruntung?

Mahasiswa yang memiliki keterampilan dasar dalam pemrograman komputer tidak akan kesulitan menyusun suatu program yang dapat menghitung banyaknya tiket yang beruntung. Program yang paling sederhana dapat disusun untuk mencari semua bilangan dari 000000 sampai dengan 999999 dan menentukan tiket yang beruntung. Di sini tidak akan dibicarakan cara menyusun program komputer. Tetapi masalah seperti ini akan dijabarkan dengan cara yang lebih detail.

Pertama, semua tiket yang beruntung dikelompokkan jumlah tiga angka pertama dalam nomor seri tiketnya. Jumlah tiga angka pertama adalah 0 (untuk 000) sampai dengan 27 (999). Karena itu, banyaknya angka dalam kelompok ini ada 28. Misalkan a_n menyatakan banyaknya bilangan tiga digit yang berjumlah *n*, maka nilai-nilai a_n adalah:

$a_o = 1$ (hanya satu jumlahan tiga digit yang sama dengan 0)
$a_1 = 3$ (ada tiga jumlahan tiga digit yang sama dengan 1, yaitu 001, 010, 100)
$a_2 = 6$ (002, 020, 200, 011, 101, 110)

Banyaknya tiket beruntung yang jumlah tiga angka pertamanya sama dengan *n* adalah a_n^2. Sebarang tiga digit yang berjumlah *n* dapat disusun untuk tiga angka pertama maupun tiga angka terakhir dari nomor seri tiket. Karena itu menghitung banyaknya tiket keberuntungan dapat dilakukan dengan menghitung a_n kemudian menentukan kuadratnya. Sebelum menghitung a_n, kita akan mencoba menghitung banyaknya bilangan satu dan dua digit dengan jumlah *n*. Untuk setiap *n* = 0, 1, 2, …, 9 terdapat satu bilangan berdigit satu, yang jumlah semua angkanya adalah *n*. Bilangan digit satu akan digambarkan lebih lanjut dengan menggunakan polinomial $A_1(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9$.

Koefisien dari polinomial ini memiliki arti sebagai berikut: *koefisien* x^n *di dalam polinomial* A_1 *menyatakan banyaknya bilangan berdigit satu yang memiliki jumlah digit sama dengan n*. Dengan kata lain, koefisien x^n dari A_1 yaitu 1, menunjukkan bahwa $0 \le n \le 9$ dan 0 untuk $n > 9$.

Selanjutnya polinomial $A_2(x)$ yang menggambarkan bilangan yang terdiri atas dua digit. Koefisien dari x^n di dalam $A_2(x)$ adalah banyaknya bilangan berdigit dua yang jumlahan digitnya *n*, termasuk bilangan yang dimulai dengan angka 0 dan 00. Dengan mudah dapat diketahui bahwa bilangan yang dimaksud adalah 18. Sebenarnya, 18 adalah jumlahan terbesar yang mungkin dari suatu bilangan dua digit. Penjumlahan dari beberapa koeefisien pertama dari polinomial ini masih dapat ditentukan tanpa kesulitan, yaitu:

$$A_2(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

Polinomial A_2 berhubungan erat dengan polinomial A_1 dan dapat dinyatakan bahwa $A_2(x) = (A_1(x))^2$. Hal ini dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa **h**asilkali dari dua polinomial x^k dan x^m berkontribusi terhadap koefisien x^n di dalam polinomial $(A_1(x))^2$ jika dan hanya jika $n = k + m$. Karena itu, koefisien x^n di dalam $(A_1(x))^2$ dengan tepat menyatakan banyaknya cara menyatakan *n* sebagai jumlah dari *n* = *k* + *m*, *k*, *m* = 0, 1, 2, . . ., 9. Polinomial pada ruas kanan dari identitas tersebut sama dengan A_2.

Selanjutnya untuk bentuk polinomial $A_3(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{27}x^{27}$, dapat ditunjukkan bahwa $A_3(x) = (A_1(x))^3$.

Bukti. Pembuktian dari pernyataan ini masih berkaitan dengan pembuktian pernyataan sebelumnya: koefisien x^n di dalam polinomial $(A_1(x))^3$ sama dengan bilangan *n* yang merupakan jumlahan dari tiga digit, yaitu $n = m + k + l$, dengan $m, k, l = 0, 1, 2, 3, \cdots, 9$.

Masalah tiket keberuntungan hampir rampung; tugas terakhir yang akan diselesaikan adalah menghitung polinomial $(A_1(x))^3$ kemudian menentukan jumlah kuadrat dari koefisien-koefisiennya. Perkalian dengan $A_1(x)$ merupakan suatu operasi yang cukup sederhana, dapat dilakukan dalam waktu paling lama 10 menit, sehingga tidak diperlukan program komputer.

Polinomial Laurent dengan variabel *x* yang dirumuskan dalam bentuk

$$A_3\left(\tfrac{1}{x}\right)=a_o+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{27}}{x^{27}} \tag{5.47}$$

adalah polinomial yang menyangkut $A_3(x)$. Perkalian $A_3(x)A_3(\tfrac{1}{x})$ juga merupakan polinomial Laurent yang mengandung x^k baik untuk nilai *k* yang positif maupun negatif, tetapi nilai *k* tersebut dibatasi, dari bawah dan dari atas. Suku-suku bebas dalam perkalian ini (koefisien x^o) berbentuk $a_o^2+a_1^2+\cdots+a_{27}^2$ sehingga disimpulkan bahwa *banyaknya tiket beruntung yang sama dengan banyaknya suku bebas dalam polinomial Laurent* $A_3(x)A_3(\tfrac{1}{x})$. Suku bebas ini dapat dihitung dengan menggunakan fakta dasar dari teori fungsi variabel kompleks tunggal, teorema Cauchy.

Teorema 5.1: Teorema Cauchy. *Untuk sebarang polinomial Laurent* $p(x)$, *suku bebasnya adalah*

$$p_o=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{p(x)dx}{x} \tag{5.48}$$

dimana, operasi integral bekerja pada sebarang lingkaran yang arahnya berlawanan arah jarum jam pada bidang kompleks yang memiliki titik pusat. Dengan kata lain, $\int x^k dx$ pada lingkaran tersebut adalah $2\pi i$ jika *k* = -1, dan sama dengan 0 jika $k\neq -1$. Fakta ini dapat dibuktikan dengan mudah. Lingkaran yang paling sederhana yang dapat digunakan di sini adalah lingkaran satuan yang berpusat pada titik (0, 0). Berdasarkan kenyataan bahwa

$$A_1(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9=\frac{1-x^{10}}{1-x} \tag{5.49}$$

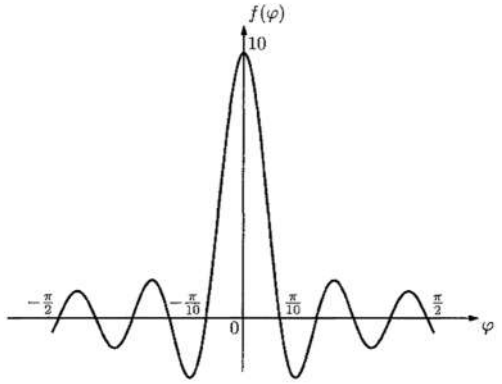
maka polinomial Laurent dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned}P(x)&=A_3(x)A_3\left(\tfrac{1}{x}\right)=A_1^3(x)A_1^3\left(\tfrac{1}{x}\right)\\&=\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3\left(\frac{1-x^{-10}}{1-x^{-1}}\right)^3=\left(\frac{2-x^{10}-x^{-10}}{2-x-x^{-1}}\right)^3.\end{aligned}$$

Misalkan digunakan parameter standar φ pada lingkaran satuan seperti yang disebutkan di atas dan menerapkan polinomial Laurent $P(x)$ pada lingkaran ini, maka akan diperoleh suku bebas dari polinomial:

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2-2\cos(10\varphi)}{2-2\cos\varphi}\right)^3 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2(5\varphi)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^3 d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}\right)^6 d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}\right)^6 d\varphi \qquad (5.50)$$



Gambar 5.1. Bentuk grafik $f(\varphi) = \frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}$

Mahasiswa dapat mencoba memperkirakan nilai dari integral terakhir. Grafik dari fungsi $f(\varphi) = \frac{\sin(10\varphi)}{\sin\varphi}$ pada interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ diperlihatkan pada Gambar 5.1. Fungsi tersebut memiliki nilai maksimum 10 yang terletak di titik pusat lingkaran. Nilai fungsi *f* pada interval $\left[-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right]$ kurang dari $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{10}} \approx 3.$ oleh karena itu kontribusi dari komplemen pada interval $\left[-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right]$ dalam persamaan (5.4) tidak lebih besar dari $\pi.3^6 \approx 2100$. Sebagian besar kontribusi terhadap persamaan (5.4) terjadi pada integral $\left[-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right]$. Untuk menentukan kontribusi ini, maka digunakan *metode fase stasioner*. Melalui metode ini, maka asimtot dari $\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} f^t d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\ln f} d\varphi$ jika $t \to \infty$. Jika nilai *t* cukup besar maka nilai integral ditentukan oleh sifat fungsi $\ln f$ (fase) di sekitar titik stasioner 0, yaitu pada titik dimana $(\ln f)' = 0$, atau pada saat $f' = 0$. di sekitar titik stasioner, $f(\varphi) \approx 10\left(1 - \frac{33}{2}\varphi^2\right)$,

dan $\ln f(\varphi) \approx \ln 10 - \frac{33}{2}\varphi^2$. untuk nilai *i* yang cukup besar,

$$\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{t\left(\ln 10 - \frac{33}{2}\varphi^2\right)} d\varphi = e^{t\ln 10} \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} e^{-\frac{33}{2}t\varphi^2} d\varphi \approx e^{t\ln 10} \frac{\sqrt{2\pi}}{33t}$$

Dengan memilih *t* = 6 dan menerapkan kembali persamaan (5.4) maka diperoleh

$$p_0 \approx \frac{10^6}{11\pi} \approx 56700.$$

Contoh yang digambarkan di atas memungkinkan kita mengambil kesimpulan tentang masalah yang dihadapi dengan memilih metode yang akan digunakan. Pembahasan utama dalam bab ini adalah tentang kombinatorika enumeratif. Ini berarti kita akan mempelajari enumerasi objek-objek dari sekelompok himpunan-himpunan berhingga. Setiap himpunan tersebut terdiri atas anggota-anggota yang jumlahnya berhingga (dalam contoh tiket keberuntungan, jumlah tersebut adalah *jumlah* dari *n* dari tiga angka pertama).

Suatu masalah enumeratif adalah masalah yang pada prinsipnya dapat diselesaikan. Dengan kata lain semua anggota dari suatu himpunan dapat diketahui dan jumlahnya dapat dipastikan. Meskipun demikian, masalah enumeratif di sini adalah mencari solusi yang baik tanpa menjabarkan semua elemen-elemen himpunannya. Sebaliknya, menentukan solusi yang baik merupakan tugas yang sulit karena biasanya kita hanya bisa membandingkan dua solusi kemudian memilih salah satu yang lebih baik.

Polinomial pembangkit (atau secara lebih umum disebut deret pembangkit) sangat berguna di dalam menyelesaikan masalah-masalah enumeratif. Operasi-operasi dengan kombinatorial dapat diubah menjadi operasi-operasi fungsi pembangkit.

Definisi 5.1. Misalkan $a_0, a_1, a_2, \cdots$ adalah sebarang barisan tak hingga bilangan. Fungsi pembangkit (atau deret pembangkit) dari barisan ini merupakan suatu pernyataan pernyataan yang berbentuk

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

atau ringkasnya,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Jadi fungsi pembangkit dari barisan $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots,$ adalah suatu deret pangkat formal, yang berbentuk

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (5.51)$$

Fungsi pembangkit tidak hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah seperti yang disebutkan di atas tetapi juga lebih memudahkan menyelesaikan masalah yang lebih banyak syarat batasnya.

Fungsi pembangkit merupakan suatu alat yang sangat berguna untuk menyelesaikan masalah relasi rekurensi homogen linier dengan koefisien konstan. Fungsi pembangkit ditemukan pada tahun 1718 oleh matematikawan Perancis, Abraham De Moivre, untuk menyelesaikan relasi rekurensi Fibonacci. Selain itu fungsi pembangkit juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kombinatorial. Jika semua elemen di dalam barisan tersebut dimulai dari suatu elemen yang sama dengn nol, maka fungsi pembangkit yang sesuai dengan barisan tersebut dinamakan *pembangkit polinomial.*

B. Fungsi Pembangkit

B.1. Definisi dan Contoh-Contoh.

Fungsi pembangkit biasa (*ordinary generating function*) untuk barisan $g_0, g_1, g_3, \cdots$ adalah deret pangkat $G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$. Ada beberapa bentuk fungsi pembangkit yang sering digunakan, tetapi fungsi pembangkit biasa sudah cukup memadai untuk menggambarkan penerapannya secara umum. Oleh karena itu, sebagian besar penjelasan di sini adalah fungsi pembangkit biasa.

Fungsi pembangkit adalah deret pangkat "formal" dalam arti bahwa kita selalu menggunakan variabel *x* (bukan angka) untuk menyatakan posisi. Dalam kasus yang jarang sekali, fungsi pembangkit dihitung dengan menyatakan *x* sebagai bilangan. Untuk menyatakan hubungan antara barisan dengan fungsi pembangkitnya, digunakan tanda panah dua arah, tetapi tanda ini tidak memiliki makna khusus.

$$g_0, g_1, g_2, \cdots \leftrightarrow g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \cdots$$

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} &0,0,0,0,\cdots \leftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 0 \\ &1,0,0,0,\cdots \leftrightarrow 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = 1 \\ &3,2,1,0,\cdots \leftrightarrow 3 + 2x + 1x^2 + 0x^3 + \cdots = 3 + 2x + x^2 \end{aligned}$$

Pola yang terlihat di sini cukup sederhana: suku ke-*i* di dalam barisan dengan indeks yang dimulai dari 0, adalah koefisien dari x^i dalam fungsi pembangkitnya. Seperti diketahui, jumlah dari suatu deret geometri tak hingga adalah

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x} \tag{5.52}$$

Persamaan (5.8) tidak berlaku untuk $|x|\geq 1$. Tetapi untuk kasus ini tidak akan bertentangan dengan masalah konvergensi. Rumus ini merupakan bentuk fungsi pembangkit dari barisan. Misalnya

$$\begin{aligned}
&1,1,1,1,... &&\leftrightarrow 1+x+x^2+x^3+\cdots &&=\frac{1}{1-x}\\
&1,-1,1,-1,\cdots &&\leftrightarrow 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots &&=\frac{1}{1+x}\\
&1,a,a^2,a^3,\cdots &&\leftrightarrow 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots &&=\frac{1}{1-ax}\\
&1,0,1,0,1,0,\cdots &&\leftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\cdots &&=\frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Salah satu bentuk barisan yang paling sederhana adalah 1, 1, 1, …. Fungsi pembangkit dari barisan ini berbentuk

$$G(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{5.53}$$

yang dengan mudah dinyatakan dalam bentuk fungsi dasar. Jika fungsi *G*(*x*) dikalikan dengan *x*, akan diperoleh

$$\begin{aligned}
xG(x) &= x+x^2+x^3+\cdots\\
&= G(x)-1\\
1 &= G(x)(1-x)
\end{aligned}$$

Karena itu

$$G(x)=\frac{1}{1-x} \tag{5.54}$$

Setelah disesuaikan, maka argumen yang sama berlaku juga untuk sebarang barisan yang berbentuk $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$

$$\begin{aligned}
G_{a,r}(x) &= a+arx+ar^2x^2+ar^3x^3+\cdots\\
&= a(1+(rx)+(rx)^2+(rx)^3+\cdots),
\end{aligned}$$

dimana $rxG_{a,r}(x)=G_{a,r}(x)-a$

dan

$$G_{a,r}(x)=\frac{a}{1-rx} \tag{5.55}$$

Perhitungan di atas adalah diferensiasi rumus jumlah dari suatu deret geometri. Tentu saja, hasilnya konsisten dengan definisi fungsi pembangkit $(1-x)^{-1}$.

Polinomial $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ dalam persamaan (5.5), (5.6), dan (5.7) dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{x^6-1}{x-1}$. Hal ini dapat dibuktikan dengan perkalian silang maupun dengan metode pembagian panjang. Pada masalah ini, $f(x)=\frac{x^6-1}{x-1}$ dinamakan fungsi pembangkit dari barisan koefisien-koefisien 1, 1, 1, 1, 1, 1 dalam polinomial tersebut di atas. Secara umum, fungsi pembangkit didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5.2. Misalkan $a_0, a_1, a_2, \cdots$ adalah barisan bilangan-bilangan real, maka fungsi

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{5.56}$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan $\{a_n\}$.

Fungsi pembangkit dari barisan berhingga $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ dapat juga didefinisikan dengan memisalkan $a_i = 0$ untuk $i > n$; karena itu $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ adalah fungsi pembangkit dari barisan berhingga $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Sebagai contoh,

$$g(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan bilangan bulat positif, dan

$$f(x)=1+3x+6x^2+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}x^2+\cdots$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan bilangan triangular. Karena

$$\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1},$$

maka

$$g(x)=\frac{x^n-1}{x-1} \tag{5.57}$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan *n* satuan.

Contoh 5.1: Seorang ibu membeli 12 buah jeruk untuk dibagikan kepada tiga orang anaknya, Grace, Mery, dan Frans. Ibu akan membagikan kedua belas jerus tersebut sedemikian sehingga Grace mendapat sekurang-kurangnya empat jeruk, Mery dan Frans masing-masing memperoleh sekurang-kurangnya dua buah jeruk, tetapi Frans tidak boleh mendapat lebih dari lima buah jeruk. Tabel 5.1 di bawah ini menunjukkan semua kemungkinan cara membagikan jeruk dengan syarat batas yang disebutkan di atas.

Grace	Mery	Frans
4	3	5
4	4	4
4	5	3
4	6	2
5	2	5
5	3	4
5	4	3
5	5	2

Grace	Mery	Frans
6	2	4
6	3	3
6	4	2
7	2	3
7	3	2
8	2	2

Tabel 5.1. Pembagian 12 jeruk

Dari Tabel 5.1, diperoleh semua selesaian bulat dari persamaan $c_1 + c_2 + c_3 = 12$, dengan $4 \leq c_1; 2 \leq c_2;$ dan $2 \leq c_3 \leq 5.$ Dari kedua kasus cara pembagian jumlah jeruk dalam Tabel 5.1, didapatkan penyelesaian 4 + 3 + 5 = 12 dan 4 + 4 + 4 = 12. Kapankah hal seperti ini terjadi? Pada perkalian polinomial pangkat dari variabel dijumlahkan dengan pangkat dari variabel lainnya. Masalah dalam contoh di atas dapat diselesaikan dengan perkalian tiga polinomial, yaitu:

$$\left(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right)\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$$

Dua cara memperoleh x^{12} adalah sebagai berikut:

1. $x^{12} = x^4x^3x^5$ (tabel sebelah kiri),

   x^4 diperoleh dari $\left(x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right)$,

   x^3 diperoleh dari $\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$, dan

   x^5 diperoleh dari $\left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)$.

2. $x^{12} = x^4x^4x^4$, masing-masing x^4 diperoleh dari masing-masing polinomial yang diperkalikan.

Dari perkalian

$$\left(x^4+x^5+x^6+x^7+x^8\right)\left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x^2+x^3+x^4+x^5\right)$$

dapat diketahui hasilkali $x^i x^j x^k$ untuk setiap (i, j, k) pada Tabel 1. Jadi koefisien x^{12} dalam

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & (x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)x \\ & (x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)x \\ & (x^2+x^3+x^4+x^5) \end{aligned}$$

menyatakan banyaknya cara pendistribusian (pembagian jeruk) kepada ketiga anak, yaitu sebanyak 14 cara. Fungsi $f(x)$ dinamakan *fungsi pembangkit* untuk masalah pendistribusian jeruk tadi. Tetapi dari mana munculnya faktor-faktor dalam perkalian ini? Faktor $(x^2+x^3+x^4+x^5)$ misalnya, menyatakan bahwa ibu dapat memberikan 4 atau 5 atau 6 atau 7 atau 8 buah jeruk kepada Grace. Koefisien masing-masing pangkat x adalah 1 karena diasumsikan bahwa buah jeruk merupakan **benda yang identik**. Artinya, hanya terdapat satu cara untuk memberikan empat jeruk kepada Grace, hanya satu cara untuk memberikannya lima jeruk, hanya satu cara untuk memberikannya enam jeruk, dan seterusnya, demikian pula untuk Mery dan Frans. Karena Mery dan Frans masing-masing harus mendapatkan paling sedikit dua buah jeruk, maka kedua polinomial lainnya $\left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$ dan $\left(x^2+x^3+x^4+x^5\right)$ dimulai dengan suku x^2, sedang untuk Frans berakhir pada x^5 karena Frank hanya boleh mendapatkan paling banyak 5 buah jeruk (mengapa Mery kita akhiri dengan x^6?).

Sekarang kita dapat memastikan bahwa koefisien dalam $f(x)$ merupakan penyelesaian masalah dari pembagian keduabelas buah jeruk. Meskipun demikian mungkin sebagian mahasiswa memandang bahwa menyusun daftar seperti pada Tabel 5.1 lebih mudah dari pada memperkalikan tiga faktor polinomial atau menghitung koefisien x^{12} dari $f(x)$. Untuk masalah yang sederhana seperti di atas, pernyataan tersebut mungkin benar. Tetapi untuk masalah yang mengandung lebih banyak variabel atau lebih banyak objek untuk didistribusikan, fungsi pembangkit akan lebih banyak berguna. Untuk itu kita akan membahas beberapa contoh.

Contoh 5.2. Misalkan terdapat tak hingga banyaknya gula-gula yang berwarna merah, hijau, putih, dan hitam (atau sekurang-kurangnya 24 biji untuk masing-masing jenis warna), berapakah banyaknya cara yang dapat dilakukan Darius untuk memilih 24 biji dari gula-gula ini sedemikian sehingga terpilih gula-gula yang berwarna putih berjumlah genap dan sekurang-kurangnya enam biji gula-gula berwarna hitam?

Jawab. Polinomial yang berkaitan dengan warna gula-gula tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut:

- Merah: $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{24})$, dimana angka 1 pertama menyatakan $1x^0$, karena hanya ada 1 kemungkinan tidak terpilihnya gula-gula berwarna merah.
- Hijau: $(1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{24})$ dimana angka 1 pertama menyatakan $1x^0$, karena hanya ada 1 kemungkinan tidak terpilihnya gula-gula berwarna hijau.
- Putih: $(1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{24})$
- Hitam: $(x^6+x^7+x^8+\cdots+x^{24})$

Jadi jawaban masalah yang dihadapi Darius adalah koefisien x^{12} dalam fungsi pembangkit yang dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x)= \quad (1+x+x^2+\cdots x^{24})^2(1+x^2+x^4+\cdots+x^{24})(x^6+x^7+x^8+\cdots+x^{24})$$

Salah satu cara untuk mengambil gula-gula dengan syarat-syarat di atas adalah dengan memilih lima gula-gula merah, tiga warna hijau, delapan warna putih, dan delapan warna hitam. Dan ini diperoleh dari x^5 pada polinomial pertama, x^3 dari polinomial kedua, dan x^8 dari dua polinomial terakhir.

Contoh 5.3. Berapa banyak solusi bilangan bulat dari persamaan

$$c_1+c_2+c_3+c_4=25$$

jika $0\le c_i$ untuk semua $1\le i\le 4$?

Jawab. Penyelesaian masalah ini sama saja dengan penyelesaian dari pertanyaan “ada berapa cara membagikan 25 butir kelereng kepada empat orang anak?”. Dalam hal ini masing-masing anak akan diberi kelereng tetapi banyaknya kelereng yang diberikan tidak harus sama. Kemungkinan cara membagikan kelereng tersebut dinyatakan dengan polinomial

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{25}.$$

Penyelesaian masalah ini adalah koefisien x^{25} dalam fungsi pembangkit

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{25})^4.$$

Penyelesaian masalah ini juga dapat ditentukan dengan mencari koefisien x^{25} dalam fungsi pembangkit

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{26}+x^{27}+\cdots)^4$$

meskipun koefisien dari $x^{26}, x^{27}, \cdots$ tidak pernah digunakan. Mengapa suku tersebut perlu dimasukkan juga? Karena seringkali lebih mudah menyelesaikan masalah dengan menggunakan deret pangkat dari pada menggunakan polinomial.

Contoh 5.4. Untuk sebarang bilangan $n \in \mathbb{Z}^+$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

sehingga $(1+x)^n$ adalah fungsi pembangkit dari barisan

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n},0,0,0,\cdots.$$

Contoh 5.5:

a) Untuk setiap $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\left(1-x^{n-1}\right)=(1-x)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right)$$

sehingga $\dfrac{1-x^{n-1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$ dan $\dfrac{1-x^{n-1}}{1-x}$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $1,1,1,1,\cdots,1,0,0,0,$ dimana $n+1$ suku pertama adalah 1.

b) Dari bagian (a) di atas,

$$1=(1-x)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\right),$$

sehingga $\dfrac{1}{1-x}$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $1,1,1,1,\cdots$. Perhatikan bahwa

$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$ berlaku untuk semua bilangan real *x* dengan $|x|<1$.

c) Dengan $\dfrac{1}{x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i$ diperoleh turunan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}$$
$$=(-1)(1-x)^{-2}(-1)$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$$
$$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

dengan demikian $1/(1-x)^2$ adalah fungsi pembangkit dari $1,2,3,\cdots$ sedangkan $\frac{x}{(1-x)^2}=0+1x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $0,1,2,3,\cdots$.

d) Jika (c) dilanjutkan lagi,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(0+x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\right),\text{ atau}$$

$\frac{x+1}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$. Oleh karena itu

$\frac{x+1}{(1-x)^3}$ adalah fungsi pembangkit dari $1,2^2,3^2,4^2,\cdots$

dan $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ adalah fungsi pembangkit dari $0,1^2,2^2,3^2,4^2,\cdots$

e) Selanjutnya dengan menggunakan notasi yang berbeda,

$$f_0(x) \quad =\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$
$$f_1(x) \quad =x\frac{d}{dx}f_0(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=0+x+2x^2+3x^3+\cdots$$
$$f_2(x) \quad =x\frac{d}{dx}f_1(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}=0^2+1^2x+2^2x^2+3^2x^3+\cdots$$
$$f_3(x) \quad =x\frac{d}{dx}f_2(x)=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}=0^3+1^3x+2^3x^2+3^3x^3+\cdots$$
$$f_4(x) \quad =x\frac{d}{dx}f_3(x)=\frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}=0^4+1^4x+2^4x^2+\cdots$$

Contoh 5.6.

a) Misalkan suatu fungsi $\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+y^3+\cdots$ dibentuk fungsi lain dengan mensubtitusikan *y* menjadi 2*x*, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2x} &= 1+(2x)+(2x)^2+(2x)^3+\cdots \\ &= 1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots\end{aligned}$$

Jadi $1/(1-2x)$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $1(=2^0),2(=2^1),2^2,2^3,\cdots$.

Faktanya, untuk setiap $a\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-ax} &= 1+(ax)+(ax)^2+(ax)^3+\cdots \\ &= 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots\end{aligned}$$

Jadi $1/(1-ax)$ adalah fungsi pembangkit untuk barisan $1,a,a^2,a^3,\cdots$

b) Telah diketahui dari contoh sebelumnya bahwa fungsi pembangkit dari barisan $1,1,1,1,\cdots$ adalah $f(x)=1/(1-x)$. Oleh karena itu,

$$g(x)=f(x)-x^2=\frac{1}{1-x}-x^2$$

adalah fungsi pembangkit dari barisan $1,1,0,1,1,\cdots$ sedangkan fungsi

$$h(x)=f(x)+2x^3=\frac{1}{1-x}+2x^3$$

adalah fungsi pembangkit untuk barisan $1,1,3,1,1,\cdots$

c) Dapatkah contoh tersebut di atas digunakan untuk menentukan fungsi pembangkit dari barisan 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, ...?.

Dapat diselidiki bahwa

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 = 0^2+0\\ a_1 &= 2 \quad = 1^2+1\\ a_2 &= 6 \quad = 2^2+2\\ a_3 &= 12 \quad = 3^2+3\\ a_4 &= 20 \quad = 4^2+4,\\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ a_n &\qquad\;\; = n^2+n, \text{ untuk setiap } n\geq 0.\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan contoh 5 bagian (c) dan (d), diketahui bahwa

$$\frac{x(x+1)}{(1+x)^3}+\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{x(x+1)+x(1-x)}{(1+x)^3}=\frac{2x}{(1+x)^3}$$

adalah fungsi pembangkit untuk barisan yang disebutkan di atas. Penyelsaian ini tergantung pada kemampuan seseorang untuk menemukan masing-masing a_n sebagai jumlah n^2 dan *n*. Jika pola ini tidak dapat ditemukan maka kemungkinan masalah yang diberikan tidak dapat diselesaikan.

Contoh 5.7: Tentukanlah koefisien x^{15} dari

$$f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$$

Penyelesaian:

Karena $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = \dfrac{x^2}{1-x}$, maka koefisien x^{15} dalam fungsi $f(x)$ tersebut di atas adalah koefisien x^{15} dalam

$$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^4 = \left(\frac{x^8}{(1-x)^4}\right),$$

yaitu koefisien x^7 dalam $(1-x)^{-4}$, yang dinyatakan dengan koefisien binomial yaitu

$$\binom{-4}{7}(-1)^7 = (-1)^7\binom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \binom{10}{7} = 120.$$

Contoh 5.8: Tentukanlah koefisien dari x^{15} dalam

$$f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4.$$

Jawab: Karena $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = x^2/(1-x)$, maka koefisien dari x^{15} dalam $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$ adalah koefisien dari x^{15} di dalam $\left(x^2/(1-x)\right)^4 = x^8/(1-x)^4$. Dengan demikian koefisien yang dicari sama dengan koefisien dari x^7 di dalam $(1-x)^{-4}$ yaitu

$$\binom{-4}{7}(-1)^7 = (-1)^7\binom{4+7-1}{7}(-1)^7 = \binom{10}{7} = 120.$$

Secara umum, untuk $n \in \mathbb{Z}^+$, koefisien dari x^n di dalam fungsi $f(x) = 0$ jika $0 \le n \le 7$. Untuk semua $n \ge 8$, koefisien dari x^n di dalam $f(x)$ adalah koefisien dari x^{n-8} di dalam $(1-x),^{-4}$ yaitu

$$\binom{-4}{n-8}(-1)^{n-8} = \binom{n-5}{n-8}.$$

Contoh 5.9: Sekali lagi akan diperjelas tentang masalah pencacahan komposisi dari suatu bilangan bulat positif *n* dengan menggunakan fungsi pembangkit. Diketahui bahwa

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

dimana koefisien dari x^4 adalah 1 untuk komposisi 1 elemen jumlahan dari 4, yaitu 4. Untuk mengetaui banyaknya komposisi dari *n* yang terdiri ayas dua elemen jumlahan, maka kita harus mengetahui koefisien x^n di dalam

$$\left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^2 = \left[x/(1-x)\right]^2 = x^2/(1-x)^2.$$

Pada contoh ini, didapatkan x^4 di dalam $\left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^2$ dari hasil perkalian $x^1x^3, x^2x^2, \text{dan } x^3x^1$. Jadi koefisien dari x^4 di dalam $x^2/(1-x)^2$ adalah 3 – yaitu banyakanya komposisi jumlahan dua elemen yang menghasilkan 4, yaitu 1+3, 2+2, dan 3+1. Selanjutnya komposisi tiga jumlahan dapat dijumpai dalam bentuk

$$\left(x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^3 = \left[x/(1-x)\right]^3 = x^3/(1-x)^3.$$

Sekali lagi dapat diperhatikan dari mana x^4 berasal – yaitu dari perkalian $x^1x^1x^2, x^1x^2x^1, \text{dan } x^2x^1x^1$. Di sini, koefisien dari x^4 adalah 3, yang merupakan banyaknya komposisi jumlahan 4 yaitu 1+1+2, 1+2+1, dan 2+1+1. Akhirnya koefisien dari x^4 di dalam fungsi

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right)^4 = \left[x/(1-x)\right]^4 = x^4/(1-x)^4$$

ada 1, yaitu komposisi jumlahan 4 elemen yang jumlahnya 4, yaitu 1+1+1+1, masing-masing hanya dapat muncul dari x^1.

Hasil yang diperoleh di atas menunjukkan bahwa koefisien dari x^4 di dalam $\sum_{i=1}^{4}\left[x/(1-x)\right]^i$ adalah 1+3+3+1=8$\left(=2^3\right)$, yaitu komposisi jumlahan 4 elemen. Bilangan ini juga merupakan koefisien dari x^4 di dalam $\sum_{t=1}^{\infty}\left[x/(1-x)\right]^t$. Dengan analogim, dapat diketahui bahwa banyaknya komposisi dari suatu bilangan bulat positif *n* adalah koefisien x^n di dalam fungsi pembangkit

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[x/(1-x)\right]^i.$$

Tetapi jika dimisalkan $y=x/(1-x)$, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned} f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}y^i &= y\sum_{i=0}^{\infty}y^i = y\left(\frac{1}{1-y}\right)=\left(\frac{x}{1-x}\right)\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)}\right]=\left(\frac{x}{1-x}\right)\left[\frac{1}{\frac{1-x-x}{1-x}}\right] \\ &= x/(1-2x)=x\left[1+(2x)+(2x)^2+(2x)^3+\cdots\right] \\ &= 2^0x+2^1x^2+2^2x^3+2^3x^4+\cdots. \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya komposisi bilangan bulat positif *n* merupakan koefisien dari x^n (yaitu 2^{n-1}) di dalam $f(x)$.

Tabel 5.2.

Untuk semua $m,n\in\mathbb{Z}^+, a\in\mathbb{R}$,

1). $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$

2). $(1+ax)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}ax^1+\binom{n}{2}a^2x^2+\cdots+\binom{n}{n}a^nx^n$

3). $(1+x^m)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}+\cdots+\binom{n}{n}x^{nm}$

4). $(1-x^{n+1})/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$

5). $1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i$

6). $$\begin{aligned} 1/(1-ax) &= 1+(ax)+(ax)^2+(ax)^3+\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(ax)^i=\sum_{i=0}^{\infty}a^ix^i \\ &= 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots \end{aligned}$$

7). $$\begin{aligned} 1/(1+x)^n &= \binom{-n}{0}+\binom{-n}{1}x+\binom{-n}{2}x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}x^i \\ &= 1+(-1)\binom{n+1-1}{1}x+(-1)^2\binom{n+2-1}{1}x^2+\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{n+i-1}{i}x^i \end{aligned}$$

$$8).\quad 1/(1-x)^n = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i}(-x)^i$$

$$= 1 + (-1)\binom{n+1-1}{1}(-x) + (-1)^2\binom{n+2-1}{1}(-x)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$$

Jika $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, dan $h(x) = f(x)g(x)$,

maka $h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, dimana untuk semua $k \geq 0$,

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Contoh 5.10: Ada berapa cara seorang kapten polisi membagikan 24 rompi kepada 4 orang anggotanya sedemikian sehingga masing-masing anggota polisi tersebut mendapatkan sekurang-kurangnya 3 rompi, tetapi tidak lebih dari 8?

Jawab: Kemungkinan banyaknya rompi yang akan dibagikan kepada masing-masing anggota polisi adalah $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$. Karena rompi akan dibagikan kepada 4 orang anggota polisi maka fungsi pembangkitnya dapat dirumuskan:

$$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4.$$

Pada contoh ini, akan ditentukan koefisien x^{24} di dalam $f(x)$. Dengan

$$\left(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8\right)^4 = x^{12}\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^5\right)^4$$

$$= x^{12}\left(\left(1-x^6\right)/\left(1-x\right)\right)^4,$$

Berarti koefisien yang dicari adalah koefisien x^{12} dari $(1-x^6)^4$.

$$(1-x)^{-4} = \left[1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}\right]x$$

$$\left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \cdots\right],$$

yaitu

$$\left[\binom{-4}{12}(-1)^{12}-\binom{4}{1}\binom{-4}{6}(-1)^{6}+\binom{4}{2}\binom{-4}{0}\right]=\left[\binom{15}{12}-\binom{4}{1}\binom{9}{6}+\binom{4}{2}\right]=125.$$

Contoh 5.11: Tentukanlah koefisien x^8 dari $\dfrac{1}{(x-3)(x-2)^2}$.

Jawab: Karena untuk sebarang $a \neq 0$,

$$\frac{1}{x-a}=\frac{-1}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)=\frac{-1}{a}\left[1+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\right]$$

maka soal ini dapat diselesaikan dengan mencari koefisien x^8 dari fungsi

$$\frac{1}{\left[(x-3)(x-2)^2\right]}$$

yang dapat dinyatakan dengan

$$\frac{-1}{3}\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\cdots\right]\frac{1}{4}\left[\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}\left(\frac{-x}{2}\right)+\binom{-2}{2}\left(\frac{-x}{2}\right)^2+\cdots\right].$$

Teknik lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan contoh tersebut di atas adalah dengan menggunakan dekomposisi pecahan parsial:

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Dekomposisi ini menunjukkan bahwa:

$$1=A(x-2)^2+B(x-2)(x-3)+C(x-3),$$

atau

$$0\cdot x^2+0\cdot x+1=1$$
$$=(A+B)x^2+(-4A-5B+C)x+(4A+6B-3C)$$

Dengan membandingkan koefisien-koefisien dari $x^2, x, \text{dan } 1$ berturut-turut, diperoleh bentuk aljabar

$$A+B \quad =0$$
$$-4A-5B+c \quad =0$$

dan

$$4A+6B-3C \quad =1$$

Dengan menyelesaikan bentuk ini diketahui bahwa

$$A = 1, B = -1, \text{dan } C = -1.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} \\
&= \left(\frac{-1}{3}\right)\frac{1}{1-(x/3)} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-(x/2)} + \left(\frac{-1}{4}\right)\frac{1}{(1-(x/2))^2} \\
&= \left(\frac{-1}{3}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i \\
&+ \left(\frac{-1}{4}\right)\left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}\left(\frac{-x}{2}\right) + \binom{-2}{2}\left(\frac{-x}{2}\right)^2 + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Koefisien x^8 adalah

$$\begin{aligned}
&(-1/3)(1/3)^8 + (1/2)(1/2)^8 + (-1/4)\binom{-2}{8}(-1/2)^8 \\
&= -\left[(1/3)^9 + 7(1/2)^{10}\right].
\end{aligned}$$

B.2. Barisan Fibonacci

Barisan Fibonacci yang terkenal didefinisikan berdasarkan dua suku pertamanya yaitu $f_0 = f_1 = 1$ dan hubungan

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \tag{5.58}$$

Berdasarkan hubungan-hubungan ini, mahasiswa dapat dengan mudah menemukan beberapa suku pertama dari barisan Fibonacci yaitu

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

yang dimulai dari f_2 dapat dilihat bahwa barisan ini terbentuk sebagai jumlahan dua suku sebelumnya. Untuk menentukan fungsi pembangkit

$$F(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \cdots \tag{5.59}$$

maka kedua sisi dari persamaan (5.9) dikalikan dengan $(x + x^2)$.

$$\begin{aligned}
(x+x^2)F(x) &= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots \\
&\quad\; + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \cdots \\
&= x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

atau

$$(x+x^2)F(x) = F(x) - 1,$$

sehingga diperoleh

$$F(x)(1-x-x^2)=1 \Leftrightarrow F(x)=\frac{1}{1-x-x^2} \tag{5.60}$$

Persamaan (5.10) dapat dipandang sebagai komposisi dua fungsi pembangkit yaitu $(1-x)^{-1}$ dan $x+x^2$, yaitu

$$F(x)=1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+(x+x^2)^3+\cdots$$

Penjabaran ini tidak terlalu tepat, karena faktor penjumlah di ruas kanan mengandung pangkat *x* yang berbeda, sehingga rumusan eksplisit menjadi rumit. Representasi pernyataan (2.6) lebih bermanfaat jika dinyatakan sebagai jumlah dari dua pecahan dasar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1\left(1-\frac{x}{x_1}\right)}-\frac{1}{x_2\left(1-\frac{x}{x_2}\right)}\right),\end{aligned}$$

dimana $x_1=(-1+\sqrt{5})/2$ dan $x_2=(-1-\sqrt{5})/2$ adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $1-x-x^2=0.$ Penjabaran ini menunjukkan bahwa

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}x_1}\left(1+\frac{x}{x_1}+\frac{x^2}{x_1^2}+\cdots\right)-\frac{1}{\sqrt{5}x_2}\left(1+\frac{x}{x_2}+\frac{x^2}{x_2^2}+\cdots\right)$$

Jadi,

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{-1-n}-x_2^{-1-n})\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}(x_1^{n+1}-x_2^{n+1})\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\end{aligned} \tag{5.61}$$

B.3. Mencari Fungsi Pembangkit

Mahasiswa tentu masih mengingat definisi bilangan Fibonacci yang dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}&f_0=0\\ &f_1=1\\ &f_n=f_{n-1}+f_{n-2} \quad \text{untuk } n\geq 2.\end{aligned}$$

Dengan menjabarkan f_n menjadi barisan tak hingga persamaan, maka bilangan Fibonacci terdefinisi menjadi

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= f_1 + f_0 \\ f_3 &= f_2 + f_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tujuan utamanya adalah menetapkan suatu fungsi $F(x)$ yang membangkitkan barisan sebelah kiri dari masing-masing lambang kesamaan, yaitu bilangan-bilangan Fibonacci. Selanjutnya kita menurunkan suatu fungsi yang membangkitkan barisan pada ruas kanan. Akhirnya kita menyamakan kedua ruas tersebut dan menentukan $F(x)$.

$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots.$$

Sekarang akan diturunkan suatu fungsi pembangkit dari barisan:

$$0, 1, f_1 + f_0, f_2 + f_1, f_3 + f_2, \cdots.$$

Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan memecah bentuk ini ke dalam penjumlahan tiga barisan kemudian menerapkan aturan penjumlahan.

$$\begin{array}{cccccccr} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \cdots & \leftrightarrow & x \\ 0, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & \cdots & \leftrightarrow & xF(x) \\ 0, & 0, & f_0, & f_1, & f_2, & \cdots & \leftrightarrow & x^2F(x) \\ \hline 0, & 1+f_0, & f_1+f_0, & f_2+f_1 & f_3+f_2 & \cdots & \leftrightarrow & x + xF(x) + x^2F(x) \end{array}$$

Bentuk ini sudah hampir identik dengan ruas kanan dari persamaan Fibonacci, kecuali suku kedua 1 + f_0. Meskipun demikian, suku ini sama dengan 1 karena $f_0 = 0$. Jika $F(x)$ disetarakan dengan fungsi baru $x + xF(x) + x^2F(x)$, maka semua persamaan yang menyatakan bilangan Fibonacci telah dituliskan secara implisit.

$$\begin{array}{cccccc} F(x) = & f_0 + & f_1x + & f_2x^2 + & f_3x^3 + & \cdots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \\ \hline x + xF(x) + x^2F \to x) = & 0 + & (1+f_0) + & (f_1+f_0)x^2 + & (f_2+f_1)x^3 + & \cdots \end{array}$$

$F(x)$ menyatakan fungsi pembangkit dari barisan Fibonacci:

$$F(x) = x + xF(x) + x^2F(x)$$

Jadi,

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{5.62}$$

Persamaan (5.16) sangat menarik karena tidak dapat dibayangkan bahwa bilangan Fibonacci adalah koefisien-koefisien dari fungsi yang sederhana. Selain itu, fungsi ini merupakan rasio polinomial sehingga metode pecahan parsial dapat digunakan untuk menentukan bilangan Fibonacci ke-*n*.

B.4. Fungsi Pembangkit Biasa

Pada bagian ini akan dijabarkan beberapa contoh yang melibatkan fungsi pembangkit dan hubungannya dengan masalah-masalah kombinatorik.

Contoh 5.12. Masalah Dadu Galileo

Masalah: Berapa peluang kejadian munculnya mata dadu berjumlah 10 dari percobaan melempar 3 buah dadu (dadu 6 sisi) yang berbeda?

Jawab: Kita tahu bahwa terdapat 6 × 6 × 6 = 216 kemungkinan kejadian pada percobaan melempar 3 buah dadu yang berbeda. Banyaknya cara untuk mendapatkan jumlah mata dadu 10 pada percobaan tersebut sama dengan banyaknya solusi bilangan bulat pada persamaan:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10 \text{ dengan } 1 \le X_i \le 6$$

atau dalam bentuk yang lebih umum

$$X_1 + X_2 + X_3 = r \text{ dengan } 1 \le X_i \le 6$$

Selanjutnya, banyaknya solusi bilangan bulat dari persamaan tersebut adalah koefisien dari x^r dari fungsi pembangkit yang berbentuk

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$$

Dengan menggunakan persamaan dari proposisi yang telah disebutkan sebelumnya, maka dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^3 &= \left(x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\right)^3\\ &= x^3\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^3\\ &= x^3\left[\left(1+x+x^2+\cdots\right)-\left(x^6+x^7+\cdots\right)\right]^3\\ &= x^3\left[\left(1+x+x^2+\cdots\right)-x^6\left(1+x+\cdots\right)\right]^3\\ &= x^3\left[\left(1-x^6\right)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\right]^3\\ &= x^3\left(1-x^6\right)^3\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^3\\ &= x^3\left[\binom{3}{0}x^0-\binom{3}{1}x^6+\binom{3}{2}x^{12}-\binom{3}{3}x^{18}\right]x\\ &\quad \left[\binom{3-1+0}{0}+\binom{3-1+1}{1}x+\binom{3-1+2}{2}x^2+\cdots\right]\end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk menentukan koefisien dari x^{10} kita hanya perlu mencari koefisien x^7 dalam

$$\left[\binom{3}{0}x^0-\binom{3}{1}x^6+\binom{3}{2}x^{12}-\binom{3}{3}x^{18}\right]x\left[\binom{3-1+0}{0}+\binom{3-1+1}{1}x+\binom{3-1+2}{2}x^2+\cdots\right]$$

Suku-suku berpangkat 7 dapat dijumpai dalam bentuk

$$\binom{3}{0}x^0\binom{3-1+7}{7}x^7-\binom{3}{1}x^6\binom{3-1+1}{1}x$$

Sehingga koefisien dari x^7 merupakan jumlahan dari kedua kemungkinan suku berpangkat 7 tersebut.

$$\binom{3}{0}\binom{3-1+7}{7}-\binom{3}{1}\binom{3-1+1}{1}=\frac{3!}{0!3!}\frac{9!}{7!2!}-\frac{3!}{1!2!}\frac{3!}{1!2!}=36-9=27 \qquad (5.63)$$

Jadi, peluang munculnya mata dadu berjumlah 10 pada percobaan melempar 3 dadu yang berbeda adalah $\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

Contoh 5.13. Ada berapa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* keranjang berbeda, dengan syarat tiap keranjang paling banyak berisi 3 bola?

Jawab: Masalah tersebut sama dengan mencari banyaknya solusi bilangan bulat dari persamaan

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=r$$

dengan $0 \le X_i \le 3$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan banyaknya solusi bilangan dari persamaan tersebut sama dengan mencari koefisien x^r dari fungsi pembangkit

$$(1 + x + x^2 + x^3)^n$$

Dengan menjabarkan bentuk yang terakhir ini, dapat diketahui bahwa cara mendistribusikan *r* bola identik ke dalam *n* keranjang berbeda, dengan syarat tiap keranjang paling banyak berisi 3 bola, yang ditunjukkan dengan banyaknya koefisien dari x^r. Suku-suku yang mengandung x^r didapatkan dari

$$\binom{n}{0}\binom{n-1+r}{r}x^r, -\binom{n}{1}\binom{n-1+r-4}{r-4}x^{r-4}, \text{dan} \binom{n}{2}\binom{n-1+r-8}{r-8}x^{r-8}$$

dan seterusnya, Sehingga koefisien x^r adalah

$$\binom{n}{0}\binom{n-1+r}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1+r-4}{r-4} + \binom{n}{2}\binom{n-1+r-8}{r-8} \cdots$$

Contoh 5.14. Carilah fungsi pembangkit dari banyaknya penyelesaian bilangan bulat untuk persamaan

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = r$$

dimana

$$1 \le X_1 \le X_2 \le X_3 \le X_4$$

Penyelesaian: Penyelesaian untuk masalah tersebut di atas memiliki syarat yang berpasangan. Untuk itu persamaan di atas diubah menjadi suatu persamaan baru tetapi tetap menggunakan syarat-syarat batas yang sama.

Misalkan:

$$Y_1 = X_1, Y_2 = X_2 - X_1, Y_3 = X_3 - X_2, \text{dan } Y_4 = X_4 - X_3$$

Maka:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 + Y_4$$

dimana

$$Y_1 \ge 1 \text{ dan } Y_i \ge 0 \text{ untuk } 2 \le i \le 4$$

Dengan menganggap

$$Z_1 = 4Y_1, Z_2 = 3Y_2, Z_3 = 2Y_3, \text{dan } Z_4 = Y_4$$

maka persamaan

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = r$ berubah menjadi $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = r$

dimana

$Z_1 = 4, 8, 12, \cdots$
$Z_2 = 0, 3, 6, \cdots$
$Z_3 = 0, 2, 4, \cdots$, dan
$Z_4 = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Selanjutnya, fungsi pembangkit untuk $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = r$ adalah

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right)\left(1 + x^3 + x^6 + \cdots\right)\left(1 + x^4 + x^8 + \cdots\right)$$

Contoh 5.15. Tentukanlah fungsi pembangkit dari banyaknya cara memperoleh kejadian munculnya mata dadu berjumlah *r* dari percobaan melempar sebarang jumlah dadu.

Jawab: Fungsi pembangkit dari *n* dadu adalah

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$$

Analogi dengan bentuk tersebut di atas, maka

Fungsi pembangkit dari 0 dadu adalah $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^0$

Fungsi pembangkit dari 1 dadu adalah $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^1$

Fungsi pembangkit dari 2 dadu adalah $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$

Demikian seterusnya, sehingga fungsi pembangkit yang ditanyakan dalam contoh di atas adalah

$$\begin{aligned} &(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^0 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^1 \\ &+ (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 + \cdots \\ &= 1 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^1 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 + z + z^2 + \cdots\right) - \left(z + z^2 + z^3 + \cdots\right) \\ &= \left(1 + z + z^2 + \cdots\right) - z\left(1 + z + z^2 + \cdots\right) \\ &= (1 - z)\left(1 + z + z^2 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Karena $\dfrac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \cdots$ dan $z = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, maka diperoleh

$$1+(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^1+(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}$$
$$=\frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6}$$

Contoh 5.16. Tuliskan fungsi pembangkit dari barisan-barisan berikut dan sederhanakan jika mungkin!

a). $0,0,0,1,1,1,1,...$ b). $0,0,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\cdots$

c). $\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots$ d). $1,-1,\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots$

e). $0,1,0,1,0,1,\cdots$ f). $2,0,\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\cdots$

Jawab:

a). $\left(0,0,0,1,1,1,1,....\right)$

$$p(x)=0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+1\cdot x^3+1\cdot x^4+1\cdot x^5+1\cdot x^6+\cdots$$
$$=x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots)-(1+x+x^2)$$
$$=1/(1-x)-(1+x+x^2)=(1-1-x-x^2)/(1+x)=(-x-x^2)/(1-x)$$

b). $(0,0,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\cdots)$

$$p(x)\ =0.1+0.x+\frac{1}{2!}.x^2+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{2!}.x^2+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)-(1+x)$$
$$=c^x-(1+x)$$
$$=c^x-x-1$$

$$c).(\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots)$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{3!}.1+\frac{1}{4!}x+\frac{1}{3!}x^2+\cdots \\
&= \frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}x+\frac{1}{5!}x^2+\cdots \\
&= \frac{x^3}{x^3}\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}x+\frac{1}{5!}x^2+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(e^x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(e^x-\frac{1}{2!}x^2-x-1\right)=\frac{1}{x^3}\left(\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2}\right) \\
&= \frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}
\end{aligned}$$

$$d).(1,-1,\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\cdots)$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 1.1+(-1.x)+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5\cdots \\
&= x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots \\
&= 1+(-2x+x)+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots \\
&= -2x+\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right) \\
&= -2x+e^x \\
&= e^x-2x
\end{aligned}$$

e). $(0,1,0,1,0,1,\cdots)$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 0.1+1.x+0.x^2+1.x^3+0x^4+1.x^5+\cdots \\
&= x+x^3+x^5+x^7+\cdots \\
&= \frac{e^x-e^{-x}}{2}
\end{aligned}$$

f). $(2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \cdots)$

$$\begin{aligned}
p(x) &= 2.1 + 0.x + \tfrac{2}{3}x^2 + 0x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \cdots \\
&= 2 + \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + \cdots \\
&= 2 + \tfrac{2}{3}(x^2 + x^4 + \cdots) \\
&= 2 + \frac{2}{3}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right) \\
&= 2 + \frac{2}{3}\left(\frac{e^x + e^{-x-2}}{2}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{3}\left(e^x + e^{-x-2}\right)
\end{aligned}$$

Contoh 5.17.

1. Carilah fungsi pembangkit dari $a_n = 2n + 3$
2. Carilah fungsi pembangkit dari $a_n = n^2$
3. Hitunglah $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

Penyelesaian:

1. Misalkan $g(x)$ adalah fungsi pembangkit dari a_n. Dengan menggunakan definisi 6, fungsi pembangkit dari $a_n = 1$ adalah $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$, maka $g'(x)$ adalah

$$g'(x) = -1 \cdot (-1)(1-x)^{-1-1} = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Berdasarkan Proposisi 5.4.d, diketahui bahwa jika $g'(x)$ dikalikan dengan *x* maka fungsi pembangkit dari na_n adalah $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. Selanjutnya berdasarkan Proposisi 5.4.b, disimpulkan bahwa fungsi pembangkit dari $a_n = 2n + 3$ adalah

$$\frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{3}{(1-x)}.$$

Karena fungsi pembangkit dari $a_n = n$ adalah $\dfrac{x}{(1-x)^2}$,

Maka

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{1.(1-x)^2 - 2.(-1)(1-x).x}{\left((1-x)^2\right)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)\left((1-x)+2x\right)}{(1-x)^4} \\
&= \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan Proposisi 5.4.d, dan jika $g''(x)$ dikalikan dengan *x*, maka diperoleh kesimpulan bahwa fungsi pembangkit dari na_n adalah $\dfrac{(x+x^2)}{(1-x)^3}$.

3. Berdasarkan jawaban nomor 2 dan Proposisi 5.4.a, diketahui bahwa fungsi pembangkit dari $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ adalah

$$
\begin{aligned}
& 1^2 x^0 + \left(1^2 + 2^2\right)x^1 + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)x^2 + \cdots + \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)x^{n-1} + \cdots \\
&= \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\left(1^2 + 2^2 x + \cdots + n^2 x^{n-1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right) = \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = \left(x+x^2\right)\frac{1}{(1-x)^4} \\
&= \left(x+x^2\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)^4 \\
&= \left(x+x^2\right)\left[\binom{4-1+0}{0} + \binom{4-1+1}{1}x + \binom{4-1+2}{2}x^2 + \cdots\right] \\
&= \left(x+x^2\right)\left[1 + \binom{4-1+1}{1}x + \binom{4-1+2}{2}x^2 + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

Karena penjumlahan, maka koefisien dari x^n adalah

$$
\begin{aligned}
& \binom{4-1+n-1}{n-1} + \binom{4-1+n-2}{n-2} \\
&= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} \\
&= \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} + \frac{(n+1)!}{(n-2)!3!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!3!} + \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!3!} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)(n)}{3!} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3!} \\
&= \frac{(n+1)(n)\left((n+2)+(n-1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Contoh 5.18:

Sederhanakan bentuk $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

Jawab:

Dari teorema binomial,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

Turunan pertama terhadap *x* menghasilkan

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

Dengan memilih $x = 1$,

$$n(1+1)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}(1)^{n-1} \Leftrightarrow n(2)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$$

Jadi,

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n(2)^{n-1}$$

Contoh 5.19. Tulis fungsi pembangkit eksponensial dari barisan-barisan berikut dan sederhanakan jika mungkin!

a). $3,3,3,3,\cdots$ b). $0,1,0,1,0,1,\cdots$

c). $3,1,3,1,3,1,\cdots$ d). $\{a_n\} = 3^n$

Jawab.

a). $(3,3,3,3,....)$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 3 + 3x + \frac{3x^2}{2!} + 3\frac{3x^3}{3!} + \cdots = 3\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= 3e^x
\end{aligned}
$$

b). $(0,1,0,1,0,1,0,\ldots)$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 0 + 1.x + 0.\frac{x^2}{2!} + 1.\frac{x^3}{3!} + 0.\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= e^x - \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{2e^x - (e^x + e^{-x})}{2}$$

c). $(3,1,3,1,3,1,\ldots)$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 3 + 1.x + 3.\frac{x^2}{2!} + 1.\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= 3 + x + 3.\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(\frac{3 + 3x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= 3\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= 3\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{3e^x + 3e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{4e^x + 2e^{-x}}{2} = 2e^x + e^{-x}$$

d). $\{a_n\} = 3^n$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!}$$

untuk n $= 0 \Rightarrow a_0 = 3^0 = 1$

n $= 1 \Rightarrow a_1 = 3$

n $= 2 \Rightarrow a_2 = 3^2$

n $= 3 \Rightarrow a_3 = 3^3$

Maka untuk

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = 1 + 3x + 3^2 \frac{x^2}{2!} + 3^3 \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} = e^{3x}
\end{aligned}
$$

Contoh 5.20. Tulis barisan untuk masing-masing fungsi pembangkit eksponensial berikut dan sederhanakan jika mungkin!

a). $p(x) = \dfrac{x^5}{1-8x}$

b). $p(x) = 2x + e^2$

c). $p(x) = e^x + e^{4x}$

d). $p(x) = \dfrac{e^{3x}}{2-3x}$

e). $p(x) = \dfrac{1+2x+x^2}{e^{3x}}$

Jawab:

a). $p(x) = \dfrac{x^5}{1-8x}$

Definisi fungsi pembangkit biasa:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$a_n = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$$

Maka untuk

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{x^5}{1-8x}, \\
&= x^5 - \left(\frac{1}{1-8x}\right) \\
&= x^5 \left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n\right) \\
&= x^5 (1 + 8x + 8^2 x^2 + 8^3 x^3 + \cdots) \\
&= x^5 + 8x^6 + 8^2 x^7 + 8^3 x^8 + \cdots \\
a_n &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 8, 8^2, 8^3, \cdots)
\end{aligned}
$$

b). $p(x) = 2x + e^2$

definisi fungsi pembangkit biasa:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$a_n = a_0, a_1 x, a_2 x^2, a_3 x^3, \cdots$$

Maka untuk $p(x) = 2x + e^2$

$$p(x) \; = 2x + \left(2 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots\right)$$

$$= 2 + 4x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots$$

$$a_n \; = \left(2, 4, \frac{2}{2!}, \frac{2}{3!}, \cdots\right)$$

c). $p(x) = e^x + e^{4x}$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \left(1 + 4x + 4^2\frac{x^2}{2!} + 4^3\frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1\frac{x^n}{n!}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^n\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + 4^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n \; = 1 + 4^n$$

$$= (2, 5, 17, 65, \cdots)$$

$$
\begin{aligned}
\text{d). } p(x) &= \frac{e^{3x}}{2-3x} \\
&= e^{3x}\left(\frac{1}{2-3x}\right) = e^{3x}(2-3x)^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!}(2-3x)^{-1} \\
&= \left(1+3x+3^2\frac{x^2}{2!}+3^3\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)(2-3x)^{-1} \\
&= (2-3x)+(2-3x)3x+(2-3x)\left(\frac{x^2}{2!}\right)+(2-3x)\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots \\
&= (2-3x+6x-9x^2)+\frac{2x^2}{2!}-\frac{3x^3}{3!}+\cdots \\
&= 2+3x-\left(9+\frac{2}{2!}\right)x^2+\cdots \\
a_n &= \left(2,3,9+\frac{2}{2!},\cdots\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{e). } p(x) &= \frac{1+2x+x^2}{e^{3x}} \\
&= e^{-3x}(1+2x+x^2) \\
&= \left(3-3x-\frac{3}{2!}x^2-\frac{3}{3!}x^3-\frac{3}{4!}x^4-\cdots\right)(1+2x+x^2+\cdots) \\
&= 4-x-\frac{3}{2!}+1x^2-\frac{3}{3!}x^3 \\
a_n &= \left(4,-1,-\frac{3}{2!},-\frac{3}{3!},\cdots\right)
\end{aligned}
$$

B.5. Kesamaan Fungsi Pembangkit

Definisi 5.3. Dua fungsi pembangkit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dikatakan sama jika $a_n = b_n$ untuk setiap $n \geq 0$.

Misalkan

$$f(x)=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$$

dan

$$g(x)=1+\frac{2.3}{2}x+\frac{3.4}{2}x^2+\frac{4.5}{2}x^3+\cdots$$

maka

$$f(x)=g(x)$$

Fungsi pembangkit yang akan sering digunakan di dalam buku ini adalah

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+\cdots+a^nx^n+\cdots$$

yang jika dipilih $a=1$ diperoleh bentuk

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

Fungsi pembangkit dapat dijumlahkan dengan cara yang sama dengan penjumlahan polinomial.

B.6. Penjumlahan dan Perkalian Fungsi Pembangkit

Misalkan $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ dan $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ adalah dua fungsi pembangkit, maka:

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

dan

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n$$

Contoh 5.21. Mencari bentuk deret pangkat dari suatu fungsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x}\\ &=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\\ &=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n+\cdots\end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{1-x}.\frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} 1.(n+1-i)\right]x^n \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left[(n+1)+n+\cdots+1\right]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n \\
&= 1+3x+6x^2+10x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

Proposisi 5.4.

Misalkan $g(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk a_n dan misalkan $h(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk b_n.

a. $\frac{g(x)}{(1-x)}$ adalah fungsi pembangkit untuk $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

b. $c_1g(x)+c_2h(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk $c_1a_n+c_2b_n$ dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta.

c. $(1-x)g(x)$ adalah fungsi pembangkit untuk a_n-a_{n-1}

d. $xg'(x)$ adalah fungsi pembangkit dari na_n dimana $g'(x)$ adalah turunan dari fungsi $g(x)$

e. $h(x)g(x)$ adalah fungsi pembangkit dari $a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$

Bukti:

Misalkan

$$
\begin{aligned}
g(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \\
h(x) &= b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots
\end{aligned}
$$

Maka:

b. $$\begin{aligned}\frac{g(x)}{(1-x)} &= g(x).\frac{1}{(1-x)}\\ &= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)\\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + \cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)x^n + \cdots\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}c_1g(x) + c_2h(x) = c_1&\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right) +\\ &c_2\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots\right)\\ &= (c_1a_0 + c_2b_0) + (c_1a_1 + c_2b_1)x + (c_2a_2 + c_2b_2)x^2 + \cdots\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}(1-x)g(x) &= g(x) - xg(x)\\ &= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)\\ &\quad -x\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)\\ &= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)\\ &\quad -\left(a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_{n-1}x^n + \cdots\right)\\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_1 - a_0)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})x^n + \cdots\end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned}&g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots\\ &\Rightarrow g'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots\\ &\Rightarrow xg'(x) = a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n + \cdots\end{aligned}$$

f. $$\begin{aligned}h(x)g(x) &= \left(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots\right)\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)\\ &= b_0a_0 + (b_1a_0 + b_0a_1)x + (b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2)x^2 + \cdots\\ &\quad + (b_na_0 + b_{n-1}a_2 + \cdots b_0a_n)x^n + \cdots\\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots\\ &\quad + (a_0b_n + a_2b_{n-1} + \cdots a_nb_0)x^n + \cdots\end{aligned}$$

C. Operasi pada Fungsi Pembangkit

Keistimewaan fungsi pembangkit adalah bahwa semua manipulasi terhadap barisan dapat dilakukan dengan operasi matematika pada fungsi pembangkit yang bersesuaian dengan barisan tersebut. Pembuktian akan dilakukan dengan berbagai operasi dan melihat pengaruhnya terhadap barisan.

C.1. Penskalaan

Mengalikan suatu fungsi pembangkit dengan suatu bilangan konstan akan menggandakan setiap suku di dalam barisan yang bersesuaian dengan fungsi pembangkit tersebut, sesuai dengan konstan pengalinya. Sebagai contoh,

$$1,0,1,0,1,0,\cdots \leftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

Jika fungsi pembangkitnya dikali dengan dua, maka diperoleh

$$\frac{2}{1-x^2}=2+2x^2+2x^4+2x^6+\cdots$$

yang menghasilkan barisan 2, 0, 2, 0, 2, 0, . . .

Aturan Skala

Jika

$$f_0, f_1, f_2, \cdots \leftrightarrow F(x),$$

maka

$$\begin{aligned} cf_0, cf_1, cf_3, \cdots \leftrightarrow\ & cf_0+cf_1x+cf_2x^2+\cdots \\ &= c(f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots) \qquad (5.64) \\ &= cF(x). \end{aligned}$$

C.2. Penjumlahan

Penjumlahan fungsi pembangkit menyatakan penjumlahan dari barisan yang bersesuaian. Contoh di bawah ini dapat membuktikan pernyataan tersebut.

$$\begin{array}{ll} 1,\ \ 1,1,\ \ 1,1,\ \ 1,\cdots & \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} \\ 1,-1,1,-1,1,-1,\cdots & \leftrightarrow \dfrac{1}{1+x} \\ \hline 2,\ \ 0,2,\ \ 0,2,\ \ 0,\cdots & \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x} \end{array}$$

Hasil penjumlahan diperoleh dari dua pernyataan berbeda yang membangkitkan barisan 2, 0, 2, 0, 2, 0, ….

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2}.$$

Aturan Penjumlahan

Jika

$$f_0, f_1, f_2, \cdots \leftrightarrow F(x) \text{ dan}$$
$$g_0, g_1, g_2, \cdots \leftrightarrow G(x),$$

maka

$$f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots \leftrightarrow F(x) + G(x) \tag{5.65}$$

Karena

$$\begin{aligned} f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots \leftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n x^n) + \sum_{n=0}^{\infty} (g_n x^n) \\ &= F(x) + G(x) \end{aligned}$$

C.3. Penggeseran Kanan

Kita menggunakan contoh barisan sederhana dan fungsi pembangkitnya sekali lagi.

$$1,1,1,1,... \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

barisan 1,1,1,1, … dapat digeser ke kanan dengan menambahkan *k* bilangan 0 di depan barisan:

$$\begin{aligned} \underbrace{0, 0, 0, \cdots, 0}_{\text{0 sebanyak k}}, 1, 1, 1, \cdots & \leftrightarrow x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} + \cdots \\ &= x^k (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= \frac{x^k}{1-x}. \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dengan menambahkan *k* bilangan 0 di depan barisan, maka fungsi pembangkitnya dikali dengan x^k. hal ini berlaku umum.

Aturan Penggeseran Kanan

Jika

$$f_0, f_1, f_2, \cdots \leftrightarrow F(x),$$

maka

$$\underbrace{0,0,0,\cdots,0}_{0 \text{ sebanyak } k},f_0,f_1,f_2,\cdots \leftrightarrow x^k F(x) \tag{5.66}$$

Dapat dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned}\underbrace{0,0,0,\cdots,0}_{k \text{ bilangan } 0},f_0,f_1,f_3,\cdots \leftrightarrow f_0x^k + f_1x^{k+1} + f_2x^{k+2} + \cdots \\ = x^k(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots) \\ = x^k F(x).\end{aligned}$$

C.4. Diferensial

Apa yang terjadi jika suatu fungsi pembangkit didiferensialkan? Misalkan diferensial dari fungsi pembangkit dari barisan tak hingga

$$1,1,1,1,\cdots \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

yaitu

$$\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$1,2,3,4,\cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Dapat dilihat bahwa diferensial (turunan pertama) dari suatu fungsi pembangkit mengubah barisan dari fungsi pembangkit tersebut dalam dua hal, yaitu bahwa setiap suku menjadi kelipatan dari indeksnya, dan keseluruhan barisan akan bergeser ke kiri sejauh satu tempat.

Aturan Diferensial

Jika

$$f_0,f_1,f_2,\cdots \leftrightarrow F(x),$$

maka

$$f_1,2f_2,3f_3,\cdots \leftrightarrow F'(x) \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f_1,2f_2,3f_3,\cdots \leftrightarrow f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2 + \cdots \\ = \frac{d}{dx}(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots) \\ = \frac{d}{dx}F(x).\end{aligned}$$

Aturan diferensial ini sangat berguna. Pada kasus tertentu diperlukan diferensial untuk memperoleh penggandaan suku-suku dengan indeksnya, dan menggeser suku-suku satu posisi ke sebelah kiri. Tetapi pada kasus yang lain hanya dilakukan untuk menggandakan suku-sukunya, tanpa harus menggeser suku-suku tersebut ke sebelah kiri. Misalnya mahasiswa akan menentukan fungsi pembangkit dari barisan kuadrat bilangan-bilangan, $0,1,4,9,19,\cdots$ yang diperoleh dengan mengalikan deret $1,1,1,1,\ldots$ dengan indeksnya sebanyak dua kali,

$$0.0, 1.1, 2.2, 3.3, \cdots = 0,1,4,9,\cdots.$$

Diferensiasi tidak hanya mengalikan setiap suku dengan indeksnya, tetapi juga menggeser keseluruhan barisan sejauh satu posisi ke sebelah kiri. Berdasarkan aturan penggeseran kanan, mahasiswa dapat mengembalikan penggeseran kiri dengan cara mengalikan fungsi pembangkitnya dengan *x*. prosedur yang akan dilakukan adalah menentukan fungsi pembangkit dari $1,1,1,1,\ldots$ kemudian menentukan turunannya, mengalikan dengan *x*, dan menentukan turunannya serta mengalikan dengan *x* sekali lagi.

$$1,1,1,1,\cdots \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$1,2,3,4,\cdots \leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{aturan diferensial}$$

$$0,1,2,3,\cdots \leftrightarrow x.\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{aturan geser kanan}$$

$$1,4,9,16,\cdots \leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \qquad \text{aturan diferensial}$$

$$0,1,4,9,16,\cdots \leftrightarrow x.\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \qquad \text{aturan geser kanan}$$

Jadi fungsi pembangkit untuk barisan bilangan kuadrat adalah

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \tag{5.68}$$

C.5. Perkalian

Jika

$$a_0, a_1, a_2, \cdots \leftrightarrow A(x), \quad \text{dan} \quad b_0, b_1, b_2, \cdots \leftrightarrow B(x),$$

maka

$$c_0, c_1, c_2, \cdots \leftrightarrow A(x).B(x) \tag{5.69}$$

dimana

$$c_n \equiv a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Persamaan (5.17) cukup terkenal di dalam masalah pemrosesan signal. Barisan $c_0, c_1, c_2, \cdots$ disebut konvolusi dari barisan $a_0, a_1, a_2, \cdots$ dan $b_0, b_1, b_2, \cdots$. Untuk memahami aturan ini, dimisalkan:

$$C(x) \equiv A(x).B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Hasil perkalian $A(x).B(x)$ dapat dihitung dengan menggunakan tabel untuk mengidentifikasi perkalian semua suku.

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2	b_3x^3	$\cdots$
a_0x^0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	$\cdots$
a_1x^1	$a_1b_0x^1$	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	$\cdots$	
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	$\cdots$		
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	$\cdots$			
$\vdots$	$\cdots$				

Dapat dilihat pada tabel bahwa semua suku yang mengandung *x* dengan pangkat yang sama terletak pada diagonal. Jika suku-suku ini dikumpulkan, maka akan diketahui bahwa koefisien x^n dalam hasilkali tersebut adalah jumlahan semua suku yang terletak pada diagonal $ke-(n+1)$ yaitu

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-3} + \cdots + a_n b_0 \qquad (5.70)$$

C.6. Perkalian Hadamard untuk Fungsi Pembangkit

Salah satu sifat yang sangat menarik dari fungsi pembangkit rasional adalah bahwa fungsi pembangkit bersifat tertutup terhadap perkalian Hadamard. Perkalian Hadamard dari dua fungsi pembangkit

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

dan

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

adalah fungsi pembangkit yang berbentuk

$$A(x) \cdot B(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \cdots \qquad (5.71)$$

Jadi perkalian Hadamard dari dua barisan adalah barisan yang terbentuk dari hasil perkalian elemen-elemen barisan yang bersesuaian. Penerapan perkalian Hadamard ini dapat diberlakukan pada masalah tiket keberuntungan yang dijelaskan sebelumnya, untuk menghitung kuadrat dari koefisien polinomial pembangkit A_3. Situasi seperti ini akan muncul pada saat kita akan menghitung pasangan objek-objek dengan orde *n* yang sama: jika banyaknya objek jenis pertama adalah a_n, dan banyaknya objek jenis kedua adalah b_n, maka banyaknya pasangan kedua objek adalah $a_n b_n$.

Teorema 5.2. *Perkalian Hadamard antara dua fungsi pembangkit adalah rasional.* Untuk membuktikan teorema ini diperlukan suatu penciri lain dari fungsi pembangkit yang rasional, yang dinyatakan sebagai Lemma 5.1.

Lemma 5.1. *fungsi pembangkit dari barisan* $a_0, a_1, a_2, \cdots$ dikatakan rasional jika dan hanya jika terdapat bilangan-bilangan $q_1, q_2, \cdots, q_l$ dan polinomial-polinomial $p_1(n), p_2(n), \cdots, p_l(n)$ sedemikian sehingga dengan dimulai dari suatu bilangan *n* maka diperoleh

$$a_n = p_1(n)q_1^n + \cdots + p_l(n)q_l^n \tag{5.72}$$

Pernyataan ruas kanan dalam persamaan di atas dinamakan *quasipolinomial* dengan variabel *n*.

Bukti. Perhatikan bahwa fungsi pembangkit $(1-qx)^{-k}$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
(1-qx)^{-k} &= 1 - \binom{-k}{1}qx + \binom{-k}{2}q^2x^2 + \binom{-k}{3}q^3x^3 + \cdots \\
&= 1 + \binom{k}{1}qx + \binom{k+1}{2}q^2x^2 + \binom{k+3}{3}q^3x^3 + \cdots \\
&= 1 + \binom{k}{k-1}qx + \binom{k+1}{k-1}q^2x^2 + \binom{k+2}{k-1}q^3x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Contoh 5.22. Fungsi pembangkit dari barisan

$$\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \cdots, \binom{k}{k}, 0, 0, 0, 0, \cdots$$

adalah

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \cdots + \binom{k}{k}x^k.$$

Fungsi pembangkit ini sama dengan $(1+x)^k$ yang dijabarkan dengan teorema binomial.

Contoh 5.23: Fungsi pembangkit dari barisan $\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,0,0,0,\cdots$ dinyatakan dengan

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{k-1}=\frac{1-x^k}{1-x}$$

Contoh 5.24: Fungsi pembangkit dari 1, 1, 1, 1, . . . dinyatakan dengan

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

Contoh 5.25: Fungsi pembangkit dari barisan 2, 4, 1, 1, 1, 1, … dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}2+4x+x^2+x^3+x^4+\cdots&=(1+3x)+\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\\&=(1+3x)+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+3x+\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

Konsep yang digunakan pada Contoh 5.25 di atas dapat digeneralisasi sebagai berikut:

Proposisi 5.1.

Misalkan bahwa barisan

$$a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots \text{dan } b_0,b_1,b_2,b_3,\cdots$$

berturut-turut memiliki fungsi pembangkit $f(x)$ dan $g(x)$, maka fungsi pembangkit dari barisan

$$a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,\cdots$$

adalah $f(x)+g(x)$.

Contoh 5.26: Fungsi pembangkit dari barisan $3,1,3,1,3,1,\cdots$ dapat ditentukan dengan cara menggabungkan fungsi pembangkit dari barisan $1,1,1,1,1,1,\cdots$ dan $2,0,2,0,2,0,\cdots$. Fungsi pembangkit dari barisan $2,0,2,0,2,0,\cdots$ adalah

$$2+2x^2+2x^4+\cdots=2\left(1+x^2+x^4+\cdots\right)=\frac{2}{1-x^2}.$$

Dengan demikian fungsi pembangkit untuk $3,1,3,1,3,1,\cdots$ adalah

$$\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-x^2}$$

Seringkali diferensiasi dan integrasi deret pangkat formal dapat digunakan untuk menentukan fungsi pembangkit dari berbagai deret.

Contoh 5.27: Fungsi pembangkit dari $1,2,3,4,\cdots$ adalah

$$\begin{aligned} 1+2x+3x^2+\cdots &= \frac{d}{dx}\left(x+x^2+x^3+x^4+\cdots\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right) \qquad = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Proposisi 5.2

Misalkan bahwa barisan $a_0,a_1,a_2,\cdots$ memiliki fungsi pembangkit $f(x)$. Maka untuk setiap $k\in\mathbb{N}$, fungsi pembangkit dari barisan *tertunda*:

$$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k},a_0,a_1,a_2,\cdots \tag{5.73}$$

dinyatakan dengan

$$x^k f(x).$$

Bukti

Perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari barisan (5.22) adalah

$$a_0x^k+a_1x^{k+1}+a_2x^{k+2}+\cdots = x^k\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)$$

seperti yang diharapkan.

Contoh 5.28. Fungsi pembangkit dari barisan 0,1,2,3,4,… dinyatakan dengan

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

dan fungsi pembangkit dari barisan $0,0,0,0,0,1,2,3,4,\cdots$ dinyatakan dengan

$$\frac{x^5}{(1-x)^2}.$$

Sebaliknya, fungsi pembangkit dari barisan 0,0,0,0,0,0,0,3,1,3,1,3,1,… dinyatakan dengan

$$\frac{x^7}{1-x}+\frac{2x^7}{1-x^2}.$$

Contoh 5.29. Perhatikan barisan $a_0,a_1,a_2,\cdots$ dimana $a_n=n^2+n$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Untuk mencari fungsi pembangkit dari barisan ini, misalkanlah $f(x)$ dan

$g(x)$ masing-masing menyatakan fungsi pembangkit dari barisan $0,1^2,2^2,3^2,\cdots$ dan $0,1,2,3,\cdots$

Perhatikan Contoh 5.17 dan 5.18 bahwa

$$g(x)=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Untuk menentukan $f(x)$ perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari barisan $1^2,2^2,3^2,\cdots$ dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots \quad &=\frac{d}{dx}\left(x+2x^2+3x^2+\cdots\right)\\ &=\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{1+x}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Dari proposisi 5.2.,

$$f(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Akhirnya, berdasarkan Proposisi 5.1, dapat diketahui bahwa fungsi pembangkit yang dicari adalah

$$f(x)+g(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

D. Koefisien Fungsi Pembangkit

D.1. Mencari Koefisien Fungsi Pembangkit Biasa

Kita telah mendiskusikan dua langkah untuk memecahkan masalah kombinatorial dengan menggunakan fungsi pembangkit. Langkah pertama kita harus mendapatkan fungsi pembangkit untuk permasalahan tersebut selanjutnya langkah kedua yaitu mencari koefisien-koefisien yang tepat dari fungsi pembangkit tersebut. Di bagian ini kita akan mendiskusikan bagaimana cara mencari koefisian dari fungsi pembangkit tanpa menggunakan aturan perkalian. Kadang kita bisa menggunakan aturan kombinatorial untuk mendapatkan koefisien. Sebagai contoh berikut ini akan dibuktikan Teorema Binomial dan Teorema Multinomial.

Teorema 5.3. Teorema Binomial

Teorema Binomial dituliskan sebagai berikut:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

Bukti:

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{\text{n faktor}}$$

Koefisien dari x^r dengan $0 \le r \le n$ adalah jumlah banyaknya cara berbeda dalam memilih *x* sebanyak *r* dan 1 sebanyak $n-r$ kali dari *n* faktor yang ada. Jumlah banyaknya cara memilih *x* sebanyak *r* kali dari *n* faktor yang ada yaitu $\binom{n}{r}$.

Jadi,

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

Selanjutnya, bentuk

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \underbrace{(1+x)(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{\text{n faktor}} \\ &= (x^0+x^1)(x^0+x^1)(x^0+x^1)\cdots(x^0+x^1) \\ &= (x^0+x^1)^n\end{aligned}$$

merupakan fungsi pembangkit untuk banyaknya penyelesaian bilangan bulat

$$X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n = r, \quad 0 \le X_i \le 1.$$

Teorema 5.4. Teorema Multinomial

Bentuk $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ adalah jumlah dari

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

dengan

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n.$$

Bukti: Faktor-faktor $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ menunjukkan banyaknya cara untuk memilih x_1 sebanyak n_1 kali dari *n*1 faktor, memilih x_2 sebanyak n_2 kali dari *n* – *n*1 faktor, memilih

x_3 sebanyak n_3 kali dari $n-n_1-n_2$ faktor, $\cdots$ memilih x_m sebanyak n_m kali dari $n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}$ faktor. Dengan demikian banyaknya semua cara adalah:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-n_3\cdots n_{m-1}}{n_m}$$
$$=\left(\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\right)\left(\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\right)\left(\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\right)\cdots.$$
$$\left(\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1})!}{n_m!(n-n_1-n_2-n_3-\cdots-n_m)!}\right)$$
$$=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_m!}$$

Di sisi lain, $(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_m)^n$ adalah fungsi pembangkit dari banyaknya penyelesaian bulat

$$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n=r,\ 1\le X_i\le m$$

Proposisi 5.3.

(a). $(1+x+x^2+\cdots)^n=\binom{m-1+0}{0}+\binom{m-1+1}{1}x+\binom{m-1+2}{2}x^2+\cdots+\binom{m-1+r}{r}x^r+\cdots$

(b). $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n=(1-x^m)^n(1+x+x^2+x^3+\cdots)$

(c). $(1-x^m)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}-\binom{n}{3}x^{3m}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$

(d). $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$

Bukti

a) Akan dibuktikan bahwa:

$$(1+x+x^2+\cdots)^n=\binom{n-1+0}{0}+\binom{n-1+1}{1}x+\binom{n-1+2}{2}x^2+\cdots$$

Bentuk $(1+x+x^2+\cdots)^n$ adalah fungsi pembangkit untuk menentukan banyaknya penyelesaian bilangan bulat dari

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=r,\quad X_i\ge 0$$

Karena banyaknya penyelesaian adalah $\binom{n-1+r}{r}$ maka koefisien dari x^r adalah $\binom{n-1+r}{r}$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n = & \binom{n-1+0}{0}+\binom{n-1+1}{1}x+\binom{n-1+2}{2}x^2+\cdots \\ & \binom{n-1+r}{r}x^r+\cdots\end{aligned}$$

b) Akan dibuktikan bahwa

$$\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)^n=\left(1-x^m\right)^n\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$$

Diketahui,

$$\begin{aligned}&\left(1-x^m\right)^n\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n \\ &=\left(1+x+x^2+\cdots\right)-x^m\left(1+x+x^2+\cdots\right) \\ &=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}+x^m+x^{m+1}+\cdots\right)-\left(x^m+x^{m+1}+x^{m+2}+\cdots\right) \\ &=1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)^n &=\left(\left(1-x^m\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)\right)^n \\ &=\left(1-x^m\right)^n\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n\end{aligned}$$

c) Akan dibuktikan:

$$\left(1-x^m\right)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x^m+\binom{n}{2}x^{2m}-\binom{n}{3}x^{3m}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$$

Berdasarkan Teorema 5.3 diketahui bahwa

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

Dengan mensubtitusi x menjadi $-x^m$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\left(1-x^m\right)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(-x^m\right)^1+\binom{n}{2}\left(-x^m\right)^2+\binom{n}{3}\left(-x^m\right)^3+\cdots+\binom{n}{n}\left(-x^m\right)^n \\
&= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}(-1)^1\left(x^m\right)+\binom{n}{2}(-1)^2\left(x^{2m}\right)+\binom{n}{3}(-1)^3\left(x^{3m}\right)+\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n\left(x^{nm}\right) \\
&= \binom{n}{0}-\binom{n}{1}\left(x^m\right)+\binom{n}{2}\left(x^{2m}\right)-\binom{n}{3}\left(x^{3m}\right)+\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n\left(x^{nm}\right)
\end{aligned}$$

d) Akan dibuktikan $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$

Bukti:

Diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots\right) &= \left(1+x+x^2+\cdots\right)-x\left(1+x+x^2+\cdots\right) \\
&= \left(1+x+x^2+\cdots\right)-\left(x+x^2+x^3\cdots\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Oleh karena itu

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

Proses mencari turunan dari persamaan (5.33) bisa jadi sangat melelahkan tetapi metode pecahan parsial, koefisien-koefisiennya mudah diketahui. Karena derajat pembilang persamaan (5.33) lebih kecil dari derajat penyebut, maka langkah pertama adalah memfaktorkan pembilang.

$$1-x-x^2=(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)$$

dimana $\alpha_1=(1+\sqrt{5})/2$ dan $\alpha_2=(1-\sqrt{5})/2.$ Bentuk-bentuk ini serupa dengan akar-akar karakteristik dari rekurensi Fibonacci. Langkah berikutnya adalah menentukan c_1 dan c_2 yang memenuhi

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{c_1}{1-\alpha_1 x}+\frac{c_2}{1-\alpha_2 x} \\
&= \frac{c_1(1-\alpha_2 x)+c_2(1-\alpha_1 x)}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)} \\
&= \frac{c_1+c_2-(c_1\alpha_2+c_2\alpha_1)x}{1-x-x^2}.
\end{aligned}$$

sehingga diketahui bahwa $c_1+c_2=0$ dan $-(c_1\alpha_2+c_2\alpha_1)=1.$

Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan ini, diperoleh

$$c_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_1 = \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Sehingga dengan menggunakan Corollary 5.1 dan aturan penjumlahan, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\alpha_1^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha_2^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Untuk memudahkan dalam menentukan koefisien fungsi pembangkit, di bawah ini diberikan beberapa definisi penting.

1. Koefisien x^r pada $(a_o + a_1x + \cdots)(b_o + b_1x + \cdots)$ adalah

   $a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_rb_0$

2. Teorema Binomial

   $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

3. $\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n = \binom{n-1+0}{0} + \binom{n-1+1}{1}x + \cdots + \binom{n-1+r}{r}x^r$

4. $\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)^n = \left(1-x^{m-1}\right)^n\left(1+x+x^2+\cdots\right)^n$

5. $\left(1-x^m\right)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$

6. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$

Contoh 5.30. Tentukan koefisien x^{20} dari $\left(x^3 + x^4 + \cdots\right)^3$

Jawab:

Pada Proposisi 5.3.a telah dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} \left(x^3 + x^4 + \cdots\right)^3 &= x^9\left(1+x+x^2+\cdots\right)^3 \\ &= x^9\left[\binom{3-1+0}{0} + \binom{3-1+1}{1}x + \cdots\right] \end{aligned}$$

Dengan demikian koefisien x^{20} dari $(x^3+x^4+\cdots)^3$ diperoleh dari koefisien x^{11} pada fungsi pembangkit $(1+x+x^2+\cdots)^3$ adalah $\binom{3-1+11}{11}=\binom{13}{11}=\frac{13!}{2!11!}$.

Contoh 5.31. Tentukan koefisien x^9 dari $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$

Jawab:

Dari Proposisi 5.3.b diperoleh

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4=(1-x^6)^4(1+x+x^2+x^3+\cdots)^4,$$

yang berdasarkan proposisi 5.3.a dan 5.3.c,

$$(1-x^6)^4=\binom{4}{0}-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-\binom{4}{3}x^{18}+\binom{4}{3}x^{24}$$

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^4=\binom{4-1+0}{0}+\binom{4-1+1}{1}x+\binom{4-1+2}{2}x^2\cdots$$

Sehingga koefisien x^9 dari $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$ adalah

$$\binom{4}{0}\binom{4-1+9}{9}-\binom{4}{1}\binom{4-1+3}{3}$$

Contoh 5.32. Ada berapa cara mengambil 100 huruf dari huruf-huruf membentuk kata "KOMBINATORIKA" sedemikian sehingga setiap konsonan terpilih paling banyak 20?

Jawab. Di dalam kata "KOMBINATORIKA" terdapat 6 konsonan dan 3 vokal. Setiap konsonan terpilih paling banyak 20. Oleh karena itu, dapat dibentuk fungsi pembangkit sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{20})^6(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3\\
&= \left(\frac{1-x^{21}}{-x+1}\right)^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = (1-x^{21})^6\left(\frac{1}{1-x}\right)^9\\
&= \left[\binom{6}{0}1^0(-x^{21})^6 + \binom{6}{1}1^1(-x^{21})^5 + \binom{6}{2}1^2(-x^{21})^4 + \binom{6}{3}1^3(-x^{21})^3\right.\\
&\quad \left. + \binom{6}{4}1^4(-x^{21})^2 + \binom{6}{5}1^5(-x^{21}) + \binom{6}{6}1^6(-x^{21})^0\right]\sum_{r=0}^{\infty}\binom{9+r-1}{r}x^r\\
&= \left[x^{126} - 6x^{105} + 15x^{84} - 20x^{63} + 15x^{42} - 6x^{21} + 1\right]\sum_{r=0}^{\infty}\binom{9+r-1}{r}x^r\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+126} - 6\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+105} + 15\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+84}\\
&\quad -20\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+63} + 15\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+42}\\
&\quad -6\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r+21} + \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^{r}\\
&= \sum_{r=126}^{\infty}\binom{r-118}{r-126}x^r - 6\sum_{r=105}^{\infty}\binom{r-97}{r-105}x^r + 15\sum_{r=84}^{\infty}\binom{r-76}{r-84}x^r\\
&\quad -20\sum_{r=63}^{\infty}\binom{r-55}{r-63}x^r + 15\sum_{r=42}^{\infty}\binom{r-34}{r-42}x^r - 6\sum_{r=21}^{\infty}\binom{r-13}{r-21}x^r + \sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+8}{r}x^r
\end{aligned}
$$

Jadi banyaknya cara untuk mengambil 100 huruf dari huruf-huruf membentuk kata "KOMBINATORIKA" dengan huruf konsonan terpilih paling banyak 20 adalah

$$15\binom{r-76}{r-84}x^r - 20\binom{r-55}{r-63}x^r + 15\binom{r-34}{r-42}x^r - 6\binom{r-13}{r-21}x^r$$

Variabel x dihilangkan dan r = 100 sehingga diperoleh:

$$15\binom{24}{16} - 20\binom{45}{37} + 15\binom{66}{58} - 6\binom{87}{79} = 59.664.083.900 \text{ cara.}$$

D.2. Deret Taylor.

Jika diberikan koefisien $f_0, f_1, f_3, \cdots$ maka fungsi pembangkit $F(x)$ dapat ditentukan dengan mudah karena

$$F(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots \tag{5.74}$$

Untuk menentukan barisan koefisien-koefisien dari fungsi pembangkit, terlebih dulu harus dihitung Deret Taylor untuk fungsi pembangkit.

D.3. Aturan Deret Taylor

Misalkan *F*(*x*) adalah fungsi pembangkit dari barisan $f_0, f_1, f_3, \cdots,$ maka $f_0 = F(0)$ dan $f_n = \dfrac{F^{(n)}(0)}{n!}$ untuk $n \geq 1,$ dimana $F^{(n)}(0)$ adalah nilai turunan ke-*n* dari $F(x)$ pada titik $x = 0.$ Hal ini disebabkan karena jika

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots$$

maka

$$F(0) = f_0 + f_1.0 + f_2 0^2 + \cdots = f_0.$$

Juga,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(F(x)) = f_1 + 2f_2 x + 3f_3 x^2 + 4f_4 x^3 + \cdots$$

sehingga

$$F'(0) = f_1.$$

Turunan kedua adalah

$$F''(x) = \frac{d}{dx}(F'(x)) = 2f_2 + 3.2f_3 x + 4f_4 x^2 + \cdots$$

sehingga

$$F''(0) = 2f_2$$

yang menunjukkan bahwa

$$f_2 = \frac{F''(0)}{2}.$$

Secara umum,

$$F^{(n)} = n!f_n + (n+1)!f_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2}f_{n+2}x^2 + \cdots + \frac{(n+k)!}{k!}f_{n+k}x^k + \cdots$$

Sehingga

$$F^{(n)}(0) = n!f_n$$

dan

$$f_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$F(0), F'(0), \frac{F''(0)}{2!}, \frac{F'''(0)}{3!}, \cdots, \frac{F^n(0)}{n!} \cdots \leftrightarrow F(x) \tag{5.75}$$

Barisan pada ruas kiri persamaan (5.24) menghasilkan ekspansi deret Taylor untuk suatu fungsi yang berbentuk

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \frac{F'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{F^n(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Contoh 5.33. Tentukanlah barisan dari fungsi pembangkit $F(x) = \frac{1}{1-x}$.

Jawab: Dengan menentukan turunan-turunannya, diperoleh

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ F''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ F'''(x) &= \frac{2.3}{(1-x)4} \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa koefisien dari di dalam 1/(1-*x*) adalah

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!(1-0)^{n+1}} = 1.$$

Dengan kata lain,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

Dengan pendekatan yang sama maka dapat dibentuk beberapa deret yang sudah umum dikenal yaitu

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ e^{ax} &= 1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a^n}{n!}x^n + \cdots \\ \ln(1-x) &= -ax - \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^3}{3}x^3 - \cdots - \frac{a^n}{n}x^n - \cdots \end{aligned}$$

Bagaimana bentuk deret dari

$$F(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}? \tag{5.76}$$

Sehubungan dengan itu, akan ditentukan koefisien dari x^n dalam $F(x)$ untuk mengetahui

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Secara teoritis turunan ke-*n* dapat diketahui untuk $F(x)$ tetapi hasilnya mungkin tidak seperti yang diharapkan. Menggunakan fungsi pembangkit bukan gagasan yang tepat.

Pada saat otot mengalami stres, sedikit pijatan dapat membantu meregangkan otot tersebut. Demikian juga untuk masalah polinomial yang melibatkan turunan-turunan. Sebagai contoh dari persamaan (5.25), dengan sedikit pijatan maka dapat ditunjukkan bahwa

$$F(x) = \frac{x + x^2}{(1-x)^4} = \frac{x}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^4} \tag{5.77}$$

Tujuannya adalah mencari koefisien x^n di dalam $F(x)$. Jika kita memperhatikan persamaan (5.26) atau jika kita mengkombinasikan aturan geser kanan dengan aturan penjumlahan, akan dapat dilihat bahwa koefisien x^n di dalam $F(x)$ adalah hasil penjumlahan dari

$$\text{koefisien } x^{n-1} \text{ dari } \frac{1}{(1-x)^4} \text{ dan}$$

$$\text{koefisien } x^{n-2} \text{ dari } \frac{1}{(1-x)^4}$$

Mungkin ada cara yang lebih sederhana untuk mencari koefisien-koefisien dari $1/(1-x)^4$. Telah diketahui turunan-turuan $F(x)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{4}{(1-x)^5} \\
F''(x) &= \frac{4.5}{(1-x)^6} \\
F'''(x) &= \frac{4.5.6}{(1-x)^7} \\
&\vdots \\
F^n(x) &= \frac{(n+3)!}{6(1-x)^{n+4}}
\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa koefisien ke-*n* dari $1/(1-x)^4$ adalah

$$\frac{F^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(n+3)!}{6n!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \tag{5.78}$$

Persamaan (5.27) menunjukkan bahwa koefisien dari x^{n-1} dalam $1/(1-x)^4$ adalah

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{6} \tag{5.79}$$

dan koefisien dari x^2 adalah

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6} \tag{5.80}$$

Jika persamaan (5.28) dijumlahkan dengan persamaan (5.29) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\end{aligned}$$

D.4. Pecahan Parsial

Pecahan parsial adalah suatu rasio polinomial yang dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu polinomial dengan koefisien-koefisien yang berbentuk

$$\frac{cx^a}{(1-\alpha x)^b} \tag{5.81}$$

dimana *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan bulat dan $b > a \geq 0$. Hal ini dimungkinkan karena turunan $1/(1-\alpha x)^b$ dapat dihitung dengan mudah, sehingga dengan demikian koefisien-koefisien dari persamaan (5.30) juga dapat ditentukan dengan mudah.

Lemma 5.1. Jika $b \in \mathbb{Z}^+$ maka turunan ke-*n* dari $1/(1-\alpha x)^b$ adalah

$$\frac{(n+b-1)!\alpha^n}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+n}}$$

Bukti.

Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika. Hipotesis induksi $P(n)$ adalah pernyataan dalam Lemma 5.1.

Langkah basis (untuk *n* = 1): turunan pertama adalah

$$\frac{b\alpha}{(1-\alpha x)^{b+1}}$$

karena

$$\frac{(1+b-1)!\alpha^1}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+1}} = \frac{b\alpha}{(1-\alpha x)^{b+1}}$$

maka $P(1)$ merupakan pernyataan yang benar.

Langkah induksi: Selanjutnya diasumsikan bahwa $P(n=k)$ benar, untuk membuktikan $P(n=k+1)$ untuk $n\geq 1$. $P(n=k)$ menunjukkan bahwa turunan ke-*k* dari $1/(1-\alpha x)^b$ adalah

$$\frac{(k+b-1)!\alpha^k}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+k}}$$

dan turunan ke-(k +1) adalah

$$\frac{(k+b-1)!(b+k)\alpha^{k+1}}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+k+1}}=\frac{(k+b)!\alpha^{k+1}}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+k+1}}$$

Artinya $P(k+1)$ benar. Jadi tebukti bahwa jika $b\in\mathbb{Z}^+$ maka turunan ke-*n* dari $1/(1-\alpha x)^b$ adalah

$$\frac{(n+b-1)!\alpha^n}{(b-1)!(1-\alpha x)^{b+n}}$$

Corollary 5.1. *Jika* $a,b\in\mathbb{Z}$ dan $b>a\geq 0$, maka untuk sebarang $n\geq a$, koefisien dari x^n dalam

$$\frac{cx^a}{(1-\alpha x)^b}$$

adalah

$$\frac{c(n-a+b-1)!\alpha^{n-a}}{(n-a)!(b-1)!}.$$

Bukti.

Menurut deret Taylor, koefisien ke-*n* dari

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^b}$$

adalah turunan ke-*n* dari pernyataan tersebut yang dihitung pada titik x = 0, kemudian dibagi dengan *n*!. berdasarkan Lemma 5.1,

$$\frac{(n+b-1)!\alpha^n}{n!(b-1)!(1-0)^{b+n}}=\frac{(n+b-1)!\alpha}{n!(b-1)!}.$$

Dengan aturan penggandaan dan aturan geser kanan, diketahui bahwa koefisien dari x^n dalam

$$\frac{cx^\alpha}{(1-\alpha x)^b}$$

adalah

$$\frac{c(n-a+b-1)!\alpha^{n-a}}{(n-a)!(b-1)!}.$$

Mengubah rasio polinomial menjadi jumlahan polinomial dengan suku-suku yang berbentuk seperti dalam persamaan 5.30 memerlukan penjabaran yang cukup panjang tetapi pada umumnya langsung memberikan hasil yang diinginkan. Prosesnya akan ditunjukkan melalui contoh berikut ini.

Misalkan suatu fungsi pembangkit yang berbentuk rasio

$$F(x)=\frac{4x^3+2x^2+3x+6}{2x^3-3x^2+1} \tag{5.82}$$

Langkah pertama untuk mengubah *F*(*x*) adalah mengupayakan sedemikian sehingga derajat pembilang lebih rendah dari derajat penyebut. Ini dapat dilakukan dengan cara membagi pembilang terhadap penyebut kemudian mengambil sisanya, sebagaimana dilakukan di dalam teorema dasar aritmetika. Jadi,

$$\frac{4x^3+2x^2+3x+6}{2x^3-3x^2+1}=2+\frac{8x^2+3x+4}{2x^3-3x^2+1}.$$

Selanjutnya pembilang difaktorkan sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}2x^3-3x^2+1&=(2x+1)(x^2-2x+1)\\&=(2x+1)(x-1)^2\\&=(1-x)^2(1+2x)\end{aligned}$$

Nilai-nilai c_1, c_2, c_3 ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{8x^2+3x+4}{2x^3-3x^2+1}=\frac{c_1}{1+2x}+\frac{c_2}{(1-x)^2}+\frac{c_3x}{(1-x)^2} \tag{5.83}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{c_1}{1+2x}+\frac{c_2}{(1-x)^2}+\frac{c_3x}{(1-x)^2}&=\frac{c_1(1-x)^2+c_2(1+2x)+c_3x(1-x)^2}{(1+2x)(1-2x)^2}\\&=\frac{c_1-2c_1x+c_1x^2+c_2+2c_2x+c_3x+2c_3x^2}{2x^3-3x^2+1}\\&=\frac{c_1+c_2+(-2c_1+2c_2+c_3)x+(c_1+2c_3)x^2}{2x^3-3x^2+1}\end{aligned}$$

Supaya persamaan (5.32) berlaku maka haruslah $8=c_1+2c_3$, $3=-2c_1+2c_2+c_3$, dan $4=c_1+c_2$. Setelah persamaan-persamaan ini diselesaikan maka $c_1=2$, $c_2=2$, dan $c_3=3$. Oleh karena itu,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{4x^3+2x^2+3x+6}{2x^3-3x^2+1} \\
&= 2+\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{3x}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

Akhirnya koefisien dari $F(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan Corollary 5.1 dan aturan penjumlahan sehingga didapatkan

$$f_0 = 2+2+2=6$$

dan

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{2(n-0+1-1)!(-2)^{n-0}}{(n-0)!(1-1)!}+\frac{2(n-0+2-1)!(1)^{n-0}}{(n-0)!(2-1)!}+\frac{3(n-1+2-1)!(1)^{n-1}}{(n-1)!(2-1)!} \\
&= (-1)^n 2^{n+1}+2(n+1)+3n \\
&= (-1)^n 2^{n+1}+5n+2
\end{aligned}
$$

untuk $n \geq 1$. Metode ini akan sangat berguna dalam menyelesaikan masalah-masalah relasi rekurensi yang akan dipelajari pada bab berikutnya.

F. Soal-Soal Latihan

1. Carilah koefisien x^7 dari $\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^{15}$
2. Carilah koefisien x^7 dari $\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)^n$ untuk $n \in \mathbb{Z}^+$.
3. Carilah koefisien x^{50} dari $\left(x^7+x^8+x^9\cdots\right)^6$
4. Carilah koefisien x^{20} dari $\left(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^5$
5. Carilah fungsi pembangkit dari distribusi peluang diskrit berikut:
   a. Distribusi yang menggambarkan peluang kejadian untuk satu koin yang dilemparkan
   b. Distribusi yang menggambarkan peluang kejadian dari suatu dadu yang dilemparkan.
   c. Distribusi yang menggambarkan peluang kejadian dari satu dadu yang dilemparkan dan selalu muncul sisi 3.
   d. Distribusi homogen dari himpunan $\{n, n+1, n+2, \cdots, n+k\}$
   e. Distribusi binomial dari himpunan $\{n, n+1, n+2, \cdots, n+k\}$
6. Carilah fungsi pembangkit untuk barisan-barisan berikut ini:
   a. $1, 2, 3, 4, \cdots$
   b. $1.2, 2.3, 3.4, \cdots$
   c. $1^2, 2^2, 3^2, \cdots$

7. Carilah fungsi pembangkit dari barisan $1,1,2,3,5,8,13,21,34,\cdots$

8. Misalkan $p=1+x+x^2+x^3$, $q=1+x+x^2+x^3+x^4$, dan $r=\frac{1}{1-x}$.

   Carilah:

   a. Koefisien x^3 di dalam p^2, p^3, dan p^4.

   b. Koefisien x^3 di dalam q^2, q^3, dan q^4.

   c. Koefisien x^3 di dalam r^2, r^3, dan r^4.

9. Carilah koefisien x^2 di dalam:

   a. $(2+x+x^2)(1+2x+x^2)(1+x+2x^2)$

   b. $(2+x+x^2)(1+2x+x^2)^2(1+x+2x^2)^3$

   c. $x(1+x)^{43}(2-x)^5$

10. Carilah koefisien x^{21} di dalam $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^8$

11. Tentukanlah koefisien-koefisien:

    a. x^{12} di dalam $(x^3+x^4+x^5+\cdots)^3$

    b. x^5 di dalam $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^{10}$

    c. x^{24} di dalam $(x^3+x^4+x^5+\cdots+x^{12})^4$

    d. x^r di dalam $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^r(1-x)^r$

12. Carilah fungsi pembangkit dari a_n berikut:

    a. $a_n = 12$

    b. $a_n = 3n-4$

    c. $a_n = n^2 3^n$

13. Carilah bentuk fungsi pembangkit yang paling sesuai dengan masing-masing barisan berikut ini.

    a. $0,2,2,2,2,2,2,0,0,0,0,0,\cdots$

    b. $0,0,0,1,1,1,1,1,1,\cdots$

    c. $1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,\cdots$

    d. $0,0,0,1,2,3,4,\cdots$

    e. $2,4,8,18,32,64,128,256,\cdots$

    f. $2,-2,2,-2,2,-2,2,-2,\cdots$