3 — Proses Stokastik

Kata stokastik (*stochastic*) merupakan jargon untuk keacakan (Kim, 2005, hlm. 50). *Oxford dictionary* (1993) menakrifkan **proses stokastik** sebagai suatu barisan kejadian yang memenuhi hukum-hukum peluang. Hull (1989, hlm. 62) menyatakan bahwa setiap nilai yang berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak tertentu (dalam ketidakpastian) dikatakan mengikuti proses stokastik. Dengan demikian, jika dari pengalaman yang lalu keadaan yang akan datang suatu barisan kejadian dapat diramalkan secara pasti, maka barisan kejadian itu dinamakan deterministik. Sebaliknya jika pengalaman yang lalu hanya dapat menyajikan struktur peluang keadaan yang akan datang, maka barisan kejadian yang demikian disebut stokastik.

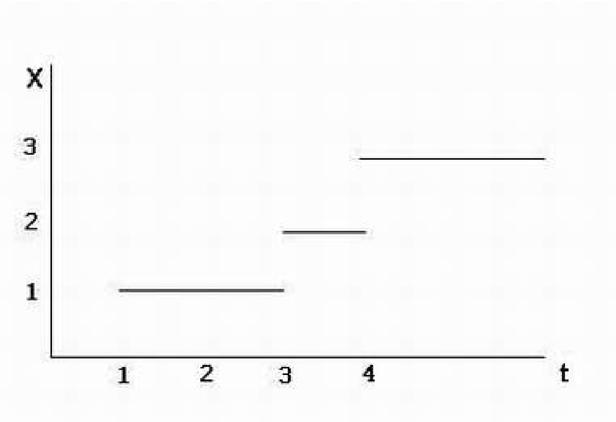
Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan evolusi suatu sistem yang mengandung suatu ketidakpastian atau sistem yang dijalankan pada suatu lingkungan yang tak dapat diduga, dimana model deterministik tidak lagi cocok dipakai untuk menelisik (menganalisis) sistem.

Secara baku (formal), proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$[1] ditakrifkan sebagai sebuah barisan peubah acak, yaitu untuk setiap $t \in T$ mempunyai peubah acak $X(t)$. Seringkali penjurus (*index*, indeks) t ditafsirkan sebagai waktu, karena banyak sekali proses stokastik yang terjadi pada suatu selang waktu. Nilai peubah acak $X(t)$ atau X_t disebut sebagai keadaan pada saat t. Himpunan T disebut ruang parameter atau ruang penjurus dari proses stokastik X dan himpunan semua nilai $X(t)$ yang mungkin disebut ruang keadaan dari X. Nilai himpunan penjurus T dapat berupa himpunan yang anggotanya tercacah ataupun malar. Jika T merupakan himpunan tercacah, misalnya N, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses waktu tercacah *(discrete time process)* atau juga dikenal sebagai rantai *(chain)*. Jika T merupakan sub himpunan pada garis bilangan riil, baik dengan selang terbuka atau tertutup, maka proses stokastik yang demikian merupakan proses waktu kontinu *(continuous time process)*.

Setiap realisasi dari X dinamakan lintasan sampel (*sample path*) dari X. Sebagai contoh, jika peristiwa terjadi secara acak dalam waktu dan $X(t)$ mewakili jumlah peristiwa yang terjadi dalam $[0, t]$, maka gambar 3.1 menyajikan *sample path*

[1]Dalam buku ini, lambang peubah acak $X(t)$ seringkali ditulis juga sebagai X_t. Sedangkan lambang penjurus t, acapkali ditulis dengan huruf yang lain. Penggunaan lambang yang berbeda ini tidak akan mengakibatkan kesalahan yang serius dalam memahami proses stokastik dan keseluruhan buku ini.

X yang berhubungan terhadap peristiwa awal yang terjadi pada saat $t = 1$, peristiwa berikutnya pada saat $t = 3$ dan peristiwa ketiga pada saat $t = 4$.



Gambar 3.1: Sebuah lintasan dari $X(t) =$ jumlah peristiwa dalam $[0, t]$

Yang menjadi perhatian dari proses ini adalah kelakukan proses setelah proses tersebut berjalan lama. Mengingat proses tersebut memuat suatu ketidakpastian, maka secara matematis kelakuan dari proses tersebut dapat digambarkan oleh agihan peluang dari $X(t)$ atau fungsi dari $X(t)$, untuk $t \to \infty$. Dari agihan peluang ini akan didapat beberapa nilai harap dari beberapa besaran yang mungkin menjadi perhatian.

Proses-proses stokastik dapat dikelompokkan berdasarkan jenis ruang parameternya, ruang keadaannya, dan kaitan antara peubah-peubah acak yang membentuk proses stokastik tersebut.

Berdasarkan jenis ruang parameter dan ruang keadaannya, proses-proses stokastik dapat dibedakan menjadi:

1. Proses stokastik dengan ruang parameter tercacah dan ruang keadaan tercacah
   Contoh: stasiun televisi yang paling banyak ditonton di Indonesia atas survey bulanan, banyaknya sepatu yang dibeli dari sebuah toko per hari.
2. Proses stokastik dengan ruang parameter malar dan ruang keadaan tercacah
   Contoh: banyaknya kertas fotokopi yang dibutuhkan sebuah kantor dalam selang waktu tertentu, banyaknya tikus yang sudah terperangkap di suatu perangkap pada selang waktu t sebarang.
3. Proses stokastik dengan ruang parameter tercacah dan ruang keadaan malar
   Contoh: volume air di suatu bendungan yang diteliti tiap pukul 7 pagi, waktu untuk melayani mahasiswa ke-n yang datang untuk meminta pelayanan administrasi akademik.
4. Proses stokastik dengan ruang parameter malar dan ruang keadaan malar
   Contoh: volume air di suatu bendungan yang diteliti pada waktu t sebarang.

Berdasarkan kaitan antara peubah-peubah acak yang membentuknya, proses stokastik dapat dibedakan menjadi beberapa kelas seperti proses Levy, proses Bernoulli, proses Markov, proses martinggil, dan proses titik (*point process*). Dalam buku ini kelas proses stokastik yang hendak disajikan hanyalah proses martinggil dan proses Markov.

3.1 Proses Martinggil

Pada awalnya, martinggil (*martingale*) merujuk pada suatu siasat bertaruh yang masyhur di abad ke-18 di Perancis (Wikipedia, 2005). Dalam bahasa Perancis, kata *martingale* berarti sebuah desain siasat taruhan untuk mendapatkan uang secara pasti (kemenangan). Sebenarnya *martingale* berasal dari kata *martigues* yang merupakan nama sebuah kota di Provence Perancis (saat itu). Warga kota ini dikenal sangat suka untuk menggandakan taruhan sehabis setiap kali kalah dengan maksud untuk menutup kekalahannya yang lalu dengan harapan kemenangan berikutnya (LeRoy, 1989, hlm. 1588). Dalam kamus *Oxford dictionary* (1993), proses martinggil mengacu pada sistem perjudian dimana harapan kemenangan akhir merupakan keuntungan yang bersih (jujur). Konsep martinggil diperkenalkan dalam teori peluang oleh Paul Pierre Lévy dan kemudian dikembangkan secara serius oleh Joseph Leo Doob (Weisstein, 2005; Wikipedia, 2005).

Proses martinggil merupakan proses stokastik $\{X_n, n \geq 1\}$ yang memenuhi identitas

$$E\left(X_{n+1}|X_1,\ldots,X_n\right) = X_n, \tag{3.1}$$

yakni nilai harap bersyarat untuk pengamatan mendatang jika seluruh pengamatan yang lampau diketahui adalah pengamatan terakhir saja. Jika dilakukan perampatan terhadap identitas ini, maka sebuah barisan peubah acak $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ dikatakan merupakan sebuah martinggil yang mematuhi sebuah barisan peubah acak yang lain $X_1, X_2, X_3, \ldots$ apabila memenuhi identitas

$$E\left(Y_{n+1}|X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = Y_n, \qquad \forall\ n. \tag{3.2}$$

Sebagaimana telah diterangkan di muka, konsep martinggil berasal dari meja judi. Dengan demikian, jika peubah X_n ditafsirkan sebagai keberuntungan penjudi setelah permainan ke$-n$ maka identitas martinggil menyatakan bahwa harapan keberuntungan setelah permainan ke$-(n+1)$ adalah sama dengan keberuntungan ke$-n$, tidak gayut dengan keberuntungan-keberuntungan sebelumnya. Atau, andaikan X_n merupakan keberuntungan penjudi setelah pelemparan ke$-n$ dari sebuah koin yang 'adil' —maksudnya jika koin itu dilempar, kedua belah sisi koin punya peluang yang seimbang untuk tampak—, dimana penjudi menang Rp 1 juta jika koin tampak muka dan kalah Rp 1 juta jika koin tampak belakang. Harapan keberuntungan bersyarat bagi penjudi untuk pelemparan mendatang adalah sama dengan keberuntungannya sekarang. Peristiwa yang demikian merupakan contoh sebuah martinggil. Peristiwa ini juga disebut sebagai sistem D'Alembert.

Konsep martinggil di atas sejalan dengan konsep permainan yang adil atau *fair game*. Dalam sebuah permainan, nilai adil ditentukan oleh apakah harapan keberuntungan setelah permainan ke$-n$ terpengaruh oleh keberuntungan permainan-permainan sebelumnya. Permainan akan disebut adil jika keberuntungan seluruh permainan sebelumnya tidak mempunyai pengaruh sama sekali terhadap harapan keberuntungan saat ini. Andaikan keberuntungan itu dilambangkan sebagai peubah acak X, maka sebuah barisan peubah acak

$\{X_n, n \geq 1\}$ disebut adil jika

$$E(X_1) = 0$$

dan

$$E(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) = 0. \tag{3.3}$$

Serupa dengan permainan adil ini, jika diandaikan sebuah barisan peubah acak $X_1, X_2, \ldots$ merupakan peubah acak yang saling bebas dengan nilai harap 0, dan $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, maka peristiwa $\{S_n, n \geq 1\}$ merupakan sebuah martinggil sebab

$$\begin{aligned} E\left(S_{n+1}|S_1, S_2, \ldots, S_n\right) &= E\left(S_n + X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n\right) \\ &= E\left(S_n|S_1, \ldots, S_n\right) \\ &\quad + E\left(X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n\right) \\ &= S_n + E\left(X_{n+1}\right) \\ &= S_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Submartinggil dan supermartinggil

Sebuah submartinggil adalah juga seperti martinggil, hanya saja nilai sekarang dari peubah acak adalah selalu 'lebih kecil atau sama dengan' nilai mendatang yang diharapkan. Secara baku, ini berarti

$$X_n \leq E\left(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n\right). \tag{3.5}$$

Mirip dengan submartinggil, dalam sebuah supermartinggil, nilai sekarang adalah selalu 'lebih besar atau sama dengan' nilai mendatang yang diharapkan. Pernyataan ini dapat ditulis sebagai

$$X_n \geq E\left(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n\right). \tag{3.6}$$

Oleh karena itu, setiap martinggil adalah juga submartinggil atau supermartinggil. Jika pengertian ini dibalik, maka setiap proses stokastik yang memenuhi keduanya secara serempak (submartinggil dan juga supermartinggil) adalah sebuah martinggil. Dengan menggunakan contoh permainan di atas lagi —dimana penjudi akan menang Rp 1 juta jika koin tampak muka dan kalah Rp 1 juta jika koin tampak belakang—, jika sekarang diandaikan koin yang digunakan tidak seimbang (tidak adil) dan peluang koin tampak muka adalah p maka

- jika $p = \frac{1}{2}$, secara seimbang penjudi bisa kalah atau menang dan harapan keberuntungan penjudi terhadap waktu adalah sebuah martinggil.
- jika $p < \frac{1}{2}$, kemungkinan besar penjudi akan menangguk kekalahan sehingga harapan keberuntungannya merupakan supermartinggil.
- jika $p > \frac{1}{2}$, kemungkinan besar penjudi akan menuai kemenangan sehingga harapan keuntungannya merupakan sebuah submartinggil.

3.2 Proses Markov

Proses Markov merupakan suatu proses stokastik yang menyatakan bahwa peluang keadaan dari proses pada waktu mendatang tidak dipengaruhi oleh keadaan pada waktu-waktu yang lampau, tetapi hanya kejadian yang langsung mendahuluinya saja. Atau dengan kata lain, proses Markov merupakan proses dimana masa depan tidak tergantung pada sejarah masa lalu tetapi hanya tergantung pada keadaan sekarang.

Dengan demikian, proses $\{X_t, t \geq 0\}$ merupakan suatu proses Markov jika untuk semua n dan untuk setiap $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ berlaku kaitan berikut:

$$\mathcal{P}\left(X_{n+1} \left| X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1\right.\right) = \mathcal{P}\left(X_{n+1} \left| X_n\right.\right). \tag{3.7}$$

Karenanya, untuk dapat menghitung nilai peluang peristiwa (X_{n+1}, t_{n+}), harus diketahui terlebih dahulu keadaan sistem yang sekarang yakni (X_n, t_n). Dalam pengertian seperti ini, proses Markov juga bisa dikatakan sebagai proses yang tidak mempunyai ingatan atau rekaman *(memoryless)*. Pada aras ini, secara jelas proses Markov menegaskan bahwa sejarah tidak mempunyai pengaruh terhadap kelakuan masa depan.

Pada persamaan (3.7) di atas, andaikan $\{X_n, n \geq 0\}$ mempunyai ruang keadaan yang berupa himpunan berhingga atau tercacah, maka proses Markov di atas disebut sebagai rantai Markov. Contoh sederhana untuk rantai Markov ini adalah barisan bilangan bulat. Barisan peubah-peubah acak yang bernilai bilangan bulat yang saling bebas dan mempunyai distribusi peluang yang sama juga merupakan sebuah rantai Markov. Andaikan peubah-peubah acak itu adalah X_i dengan $i \geq 1$ adalah suatu barisan peubah acak bernilai bilangan bulat tak negatif yang saling bebas dan berdistribusi sama, maka suatu proses stokastik $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\}$ adalah juga rantai Markov. Nama lain untuk proses stokastik ini adalah jalan acak (*random walk*). Untuk kasus ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(S_{n+1}|S_1,\ldots,S_n\right) &= \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \,\middle|\, X_1,\ldots,\sum_{i=1}^{n-1} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i = S_{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} X_i = S_n\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

Masalah jalan acak di atas dapat diragamkan (variasi) menjadi sebuah kasus dimana zarah dapat berjalan ke kanan atau ke kiri dengan peluang yang sama. Andaikan waktu antar perpindahan dan panjang langkah dari proses ini relatif kecil. Andaikan pula $X(t)$ menyatakan posisi zarah pada waktu t. Jika waktu antar perpindahan dilambangkan dengan Δt dengan panjang langkah Δx, maka

$$X(t) = \Delta x\left(X_1 + \cdots + X_{[t/\Delta t]}\right), \tag{3.9}$$

dengan

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{jika zarah bergerak ke kanan pada langkah ke-}i, \\ -1 & \text{jika zarah bergerak ke kiri pada langkah ke-}i, \end{cases} \tag{3.10}$$

dan $\{X_i\}$ saling bebas dengan

$$\mathcal{P}(X_i = 1) = \mathcal{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Karena $E(X_i) = 0$ dan $\text{Var}(X_i) = 1$, maka

$$E\left(X(t)\right) = 0, \tag{3.12}$$

$$\text{Var}(X(t)) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right]. \tag{3.13}$$

Sekarang akan diandaikan Δx dan Δt menuju 0. Andaikan dipilih $\Delta x = \Delta t$ dan kemudian $\Delta t \to 0$ maka dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa nilai harap dan variansinya akan menuju 0 dan sehingga $X(t)$ akan sama dengan 0. Andaikan $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ untuk suatu tetapan positif c maka dari persamaan di atas pula dapat dilihiat ketika $\Delta t \to 0$, nilai harap dan variansinya menjadi

$$E[X(t)] = 0, \tag{3.14}$$

$$\text{Var}[X(t)] \to c^2 t. \tag{3.15}$$

Dengan demikian didapat bahwa $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ adalah Δx yang sesuai. Proses jalan acak ini juga dinamakan proses gerak Brown (*Brownian motion*), sehingga sifat Markov dapat ditemukan pula pada gerak Brown.