BAB IV
PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Apabila dua tugas dapat dikerjakan secara serempak, maka aturan penjumlahan tidak dapat digunakan untuk menghitung banyaknya cara mengerjakan salah satu dari kedua tugas tersebut. Menjumlahkan banyaknya cara mengerjakan masing-masing tugas akan mengakibatkan perhitungan yang berlebihan karena adanya elemen yang terhitung dua kali. Agar tidak terjadi kesalahan perhitungan seperti ini, maka kita harus memperkurangkan banyaknya cara mengerjakan kedua tugas tersebut. Teknik ini dinamakan **prinsip inklusi-eksklusi**.

Contoh 4.1. Ada berapa banyak bit string yang panjangnya delapan, yang dimulai dengan bit 1 atau berakhir dengan bit 00?

Jawab. *Tugas pertama* yang harus dikerjakan adalah menyusun suatu bit string yang panjangnya 8 yang dimulai dengan bit 1. Tugas ini dapat dikerjakan dalam 2^7 cara. Hal ini diketahui berdasarkan aturan perkalian, karena bit pertama hanya dapat dipilih dalam 1 cara, sedangkan masing-masing tujuh bit berikutnya dapat dipilih dua cara, yaitu 0 atau 1. *Tugas kedua* adalah menyusun bit string yang diakhiri dengan bit 00, yang dapat dipilih dalam $2^6 = 64$ cara. Ini juga diperoleh berdasarkan prinsip perkalian karena masing-masing dari enam bit sebelumnya dapat diplih dalam dua cara dan dua bit terakhir hanya dapat dipilih dalam satu cara. *Kedua tugas* tersebut, yaitu menyusun bit string yang panjangnya 8, yang diawali dengan bit 1 dan diakhiri dengan bit 00 dapat dilakukan dalam $2^5 = 32$ cara. Hal ini dilakukan berdasarkan aturan perkalian, karena bit pertama hanya dapat dilakukan dalam satu cara, dan dua bit terakhir yaitu 00 dapat dilakukan dalam satu cara. Akibatnya, banyaknya bit string yang panjangnya 8 yang diawali dengan bit 1 atau diakhiri dengan bit 00, sama dengan banyaknya cara mengerjakan tugas pertama *atau* banyaknya cara mengerjakan tugas kedua, adalah $128 + 64 - 32 = 160$.

A. Kardinalitas Anggota Himpunan Gabungan

Misalkan suatu himpunan *A* yang terdiri atas *n* subset-subset yaitu $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Jika banyaknya anggota himpunan dari masing-masing himpunan tersebut adalah

$|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n|$, maka banyaknya anggota dari himpunan gabungan $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ adalah $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ yaitu $S_n = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$. Dari penjumlahan ini harus diperhatikan bahwa untuk setiap dua himpunan yang dijumlahkan, ada kemungkinan bahwa himpunan irisannya bukan himpunan kosong. Jika terdapat dua himpunan beririsan yang irisannya bukan himpunan kosong, maka kardinalitas himpunan gabungannya akan lebih kecil dari pada gabungan kardinalitas himpunannya. Di sinilah letak pentingnya peranan prinsip inklusi-eksklusi.

Jika suatu himpunan *A* yang terdiri atas *n* subset-subset yaitu $A_1, A_2, \cdots, A_n$ memiliki jumlah anggota himpunan irisan yang dapat diketahui maka

$$\begin{aligned} S_n &= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n| \end{aligned} \tag{4.38}$$

Misalkan suatu himpunan *A* terdiri atas empat subset yaitu $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{1,3,5\}, \text{dan } A_4 = \{2,3\}$. Maka untuk menentukan kardinalitas jumlahan anggota himpunan dari semua subset di atas, misalkanlah bahwa $A_{i,j}$ adalah himpunan irisan antara himpunan A_i dengan A_j, $A_{i,j,k}$ adalah himpunan irisan antara himpunan-himpunan A_i, A_j, A_k, dan $A_{i,j,k,l}$ adalah himpunan irisan antara himpunan A_i, A_j, A_k, A_l. Maka persamaan (4.1) akan berbentuk:

$$\begin{aligned} &|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_{1,2}| - |A_{1.3}| - |A_{1,4}| - |A_{2.3}| - |A_{2,4}| - |A_{3,4}| \\ &+ |A_{1,2,3}| + |A_{1,2,4}| + |A_{2,3,4}| + |A_{1,2,3}| - |A_{1,2,3,4}| \end{aligned} \tag{4.39}$$

Karena kardinalitas masing-masing himpunan irisan diketahui secara pasti, maka persamaan (4.2) dapat dituliskan menjadi

$$3 + 3 + 3 + 2 - 2 - 2 - 2 - 1 - 2 - 1 + 1 + 2 + 1 + 1 - 1 = 5$$

Contoh 4.2. Misalkan peserta mata kuliah matematika diskrit terdiri atas 21 orang perempuan dan 16 mahasiswa semester 3. Berapa orang peserta mata kuliah tersebut yang merupakan mahasiswa semester 3 atau mahasiswa yang berjenis kelamin perempuan? Pertanyaan ini sulit dijawab karena informasi yang tersedia tidak memadai. Menjumlahkan semua mahasiswa semester 3 dengan mahasiswa yang berjenis kelamin perempuan mungkin menghasilkan jawaban yang salah, karena mahasiswa semester 3 yang berjenis kelamin perempuan akan terhitung dua kali. Masalah ini menunjukkan bahwa banyaknya mahasiswa di kelas yang merupakan mahasiswa semester 3 atau mahasiswa yang berjenis kelamin perempuan adalah jumlah dari banyaknya mahasiswa perempuan dan banyaknya mahasiswa semester 3 dikurangi mahasiswa semester 3 yang berjenis kelamin perempuan.

Gabungan himpunan A dan B menghasilkan himpunan baru yang elemen-elemennya berasal dari himpunan A dan himpunan B. Jika $n(A)$ adalah banyaknya elemen himpunan A dan $n(B)$ adalah banyaknya elemen himpunan B, maka banyaknya elemen dari gabungan himpunan A dan B adalah $n(A)+n(B)$. Misalkan beberapa elemen himpunan A juga merupakan elemen himpunan B maka elemen himpunan tersebut akan terhitung dua kali dalam $n(A)+n(B)$. Karena itu, jumlah elemen himpunan gabungan harus dinyatakan sebagai jumlah elemen pada masing-masing himpunan dikurangi dengan jumlah elemen yang sama dari kedua himpunan.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \tag{4.40}$$

atau

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \tag{4.41}$$

Prinsip inilah yang dinamakan ***prinsip inklusi-eksklusi***. Prinsip inklusi eksklusi berbeda dengan prinsip penjumlahan meskipun keduanya bekerja pada himpunan gabungan. Prinsip penjumlahan menyatakan banyaknya elemen himpunan gabungan dari himpunan-himpunan yang disjoint (saling lepas), sedangkan prinsip inklusi eksklusi menyatakan banyaknya elemen himpunan gabungan dari himpunan-himpunan yang beririsan.

Teorema 4.1. Prinsip Inklusi-Eksklusi Dua dan Tiga Himpunan. Jika A, B, dan C adalah sebarang himpunan berhingga, maka

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

dan

$$n(A\cup B\cup C) \;=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap B\cap C)$$

Mahasiswa dapat membuktikan Teorema 4.1 sebagai tugas.

Secara umum, prinsip inklusi-eksklusi dapat dituliskan sebagai berikut:

Misalkan *n* himpunan yang masing-masing adalah

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$$

kemudian

$$S_1 = N(A_1) + \cdots N(A_n),$$

$$S_2 = N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_4) + \cdots + N(A_{n-1} \cap A_n),$$

dan seterusnya, dimana S_k adalah jumlahan dari semua $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ untuk semua *k* himpunan A_i. Dalam hal ini, S_k terdiri atas $C(n, k)$ suku. Dengan notasi ini, maka dapat dituliskan

$$N(A_1 \cup A_2) = S_1 - S_2,$$
$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = S_1 - S_2 + S_3.$$
$$\vdots$$
$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{i+1} S_i + \cdots + (-1)^{n+1} S_n$$

yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika sebagai berikut:

Langkah Basis. Jika *n* = 1, maka pernyataan tersebut benar karena $N(A_1) = N(A_1)$

Hipotesis Induksi. Prinsip inklusi-eksklusi berlaku untuk $1 \le m \le k$ himpunan.

Langkah Induksi. Akan dibuktikan bahwa prinsip inklusi-eksklusi berlaku untuk $k+1$ himpunan. Sesuai dengan prinsip inklusi-eksklusi pada kasus dua himpunan,

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) &= N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cup A_{k+1}) \\ &= N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) + N(A_{k+1}) - N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cap A_{k+1}) \end{aligned}$$

Dengan menerapkan hipotesis induksi pada $N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$, diperoleh

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = {} & N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + \cdots + N(A_k) \\ & - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - \cdots - N(A_{k-1} \cap A_k) \\ & + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots \\ & + N(A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k) + \cdots \\ & + (-1)^{k+1} N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) \end{aligned}$$

Dengan hipotesis induksi dan sifat distributif untuk irisan dan gabungan himpunan terhadap $N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cap A_{k+1})$, diperoleh

$$\begin{aligned} N([A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cap A_{k+1}) &= N((A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})) \\ &= N(A_1 \cap A_{k+1}) + \cdots + N(A_k \cap A_{k+1}) - N(A_1 \cap A_2 \cap A_{k+1}) - \cdots \\ &\quad - N(A_{k-1} \cap A_k \cap A_{k+1}) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{k+1} N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1}) \end{aligned}$$

Karena itu,

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}) = {} & N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) + \cdots + N(A_{k+1}) \\ & - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - \cdots - N(A_k \cap A_{k+1}) \\ & + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots \\ & + N(A_{k-2} \cap A_k \cap A_{k+1}) + \cdots \\ & + (-1)^{k+2} N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k+1}) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Contoh 4.3. Menentukan jumlah elemen himpunan gabungan

a. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 atau kelipatan 5?
b. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang bukan merupakan kelipatan 3 dan juga bukan kelipatan 5?

Jawab.

a. Banyaknya bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 atau kelipatan 5.

Misalkan A = himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3.
Misalkan B = himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 5.

Maka
$A \cup B =$ himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 atau kelipatan 5.
dan
$A \cap B =$ himpunan semua bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang merupakan kelipatan 3 dan juga kelipatan 5 (yaitu bilangan kelipatan 15). Selanjutnya ditentukan $n(A), n(B), \text{dan}\ n(A \cap B)$ kemudian menerapkan prinsip inklusi-eksklusi untuk menghitung $n(A \cup B)$. Karena setiap bilangan bulat ketiga antara 1 sampai dengan 1000 adalah kelipatan 3, maka masing-masing bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $3k$ untuk beberapa bilangan bulat k antara 1

sampai dengan 333. Jadi ada 333 bilangan kelipatan 3 yang terletak di antara 1 sampai dengan 1000, artinya $n(A) = 333$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 996 & 997 & 998 & 999 & 1000 \\
 & & \updownarrow & & & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & & & \updownarrow & \\
 & & \boxed{3}.1 & & & \boxed{3}.2 & \cdots & \boxed{3}.332 & & & \boxed{3}.333 &
\end{array}
$$

Demikian pula, setiap bilangan bulat kelima antara 1 sampai dengan 1000 adalah kelipatan 5, maka masing-masing bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan 5*k* untuk beberapa bilangan bulat *k* antara 1 sampai dengan 200. Jadi ada 200 bilangan kelipatan 5 yang terletak di antara 1 sampai dengan 1000, artinya $n(B) = 200$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 995 & 997 & 998 & 999 & 1000 \\
 & & & & \updownarrow & & \cdots & \updownarrow & & & & \updownarrow \\
 & & & & \boxed{5}.1 & & \cdots & \boxed{5}.199 & & & & \boxed{5}.200
\end{array}
$$

Yang terakhir, setiap bilangan bulat ke-15 antara 1 sampai dengan 1000 adalah kelipatan 15, maka masing-masing bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan 15*k* untuk beberapa bilangan bulat *k* antara 1 sampai dengan 66. Jadi ada 66 bilangan kelipatan 15 yang terletak di antara 1 sampai dengan 1000, artinya $n(A \cap B) = 66$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & \cdots & 15 & \cdots & 30 & \cdots & 975 & \cdots & 990 & \cdots & 1000 \\
 & & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots & \\
 & & \cdots & \boxed{15}.1 & \cdots & \boxed{15}.2 & \cdots & \boxed{15}.65 & \cdots & \boxed{15}.66 & \cdots &
\end{array}
$$

Berdasarkan prinsip inklusi eksklusi, banyaknya bilangan bulat kelipatan 3 atau kelipatan 5 antara 1 sampai dengan 1000 adalah

$$
\begin{aligned}
n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\
&= 333 + 200 - 66 \\
&= 467
\end{aligned}
$$

b. Banyaknya bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000 yang bukan merupakan kelipatan 3 dan juga bukan kelipatan 5.

Diketahui ada 1000 bilangan bulat antara 1 sampai dengan 1000. Dari penyelesaian a) di atas, 467 di antaranya adalah kelipatan 3 atau kelipatan 5. Jadi berdasarkan prinsip selisih himpunan, terdapat 1000 – 467 = 533 bilangan yang bukan kelipatan 3 dan juga bukan kelipatan 5.

Perhatikan bahwa penyelesaian bagian (b) di atas pada dasarnya menggunakan hukum De Morgan. Banyaknya elemen yang bukan anggota himpunan A maupun anggota B adalah $\mathrm{n}\left(\mathrm{A}^{\mathrm{c}} \cap \mathrm{B}^{\mathrm{c}}\right)$, dan menurut hukum De Morgan $\mathrm{A}^{\mathrm{c}} \cap \mathrm{B}^{\mathrm{c}} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\mathrm{c}}$. Jadi $\mathrm{n}\left((\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\mathrm{c}}\right)$ dihitung dengan menggunakan aturan selisih himpunan yaitu $\mathrm{n}\left((\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\mathrm{c}}\right) = \mathrm{n}(\mathrm{U}) - \mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$, dimana *U* adalah himpunan semua bilangan bulat dari 1 sampai dengan 1000.

Contoh 4.4. Menentukan Banyaknya Elemen dalam Irisan Himpunan

Seorang dosen mata kuliah Matematika Diskrit memberikan angket untuk mengetahui jumlah mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar, Kalkulus Lanjut, dan Pemrograman Java. Dari 50 orang mahasiswa, diperoleh data sebagai berikut.

30 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar
18 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Lanjut
26 orang telah lulus mata kuliah Pemrograman Java
9 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar dan Kalkulus Lanjut
16 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar dan Pemrograman Java
8 orang telah lulus mata kuliah Kalkulus Lanjut dan Pemrograman Java
47 orang telah lulus sekurang-kurangnya satu mata kuliah tersebut.

Perhatikan bahwa pernyataan “30 orang mahasiswa telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar”, artinya jumlah mahasiswa yang telah melulusi mata kuliah Kalkulus dasar ada 30 orang, tetapi ada kemungkinan bahwa ke-30 mahasiswa tersebut juga telah melulusi salah satu atau kedua mata kuliah lainnya. Mahasiswa yang hanya melulusi salah satu mata kuliah saja akan disebutkan secara seksplisit.

a. Berapa mahasiswa yang belum melulusi ketiga mata kuliah tersebut?
b. Berapa mahasiswa yang telah melulusi ketiga mata kuliah tersebut?
c. Berapa mahasiswa yang telah melulusi Kalkulus Dasar dan Kalkulus Lanjut tetapi belum lulus Pemrograman Java?

d. Berapa mahasiswa yang telah melulusi Kalkulus Dasar tetapi belum lulus Kalkulus Lanjut dan Pemrograman Java?

Jawab.

a. Berdasarkan aturan selisih himpunan, banyaknya mahasiswa yang belum melulusi ketiga mata kuliah tersebut adalah banyaknya mahasiswa di dalam kelas dikurangi banyaknya mahasiswa yang telah lulus sekurang-kurangnya salah satu mata kuliah. Jadi banyaknya mahasiswa yang belum melulusi ketiga mata kulah tersebut ada 50 – 47 = 3 orang.

b. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus Dasar, B adalah himpunn mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus Lanjut, dan C adalah himpunan mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Pemrograman Java. Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

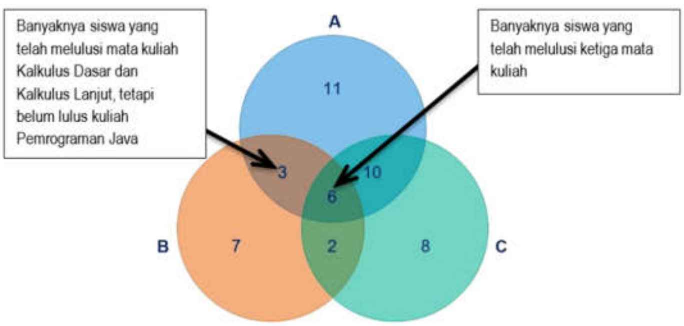
$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C) \\ -n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

Dengan mensubtitusikan nilai-nilai yang telah diketahui, diperoleh

$47 = 30 + 26 + 18 – 9 – 16 – 8 + n(A\cap B\cap C)$.

Sehingga diketahui bahwa $n(A\cap B\cap C)=6$. Dengan demikian banyaknya mahasiswa yang telah melulusi ketiga mata kuliah tersebut ada 6 orang. Secara umum, jika tujuh dari delapan variabel di dalam rumus inklusi-eksklusi yang melibatkan tiga himpunan, maka variabel kedelapan dapat ditentukan.

c. Untuk menjawab bagian (c), perhatikan Gambar 4.1 di bawah ini.



Gambar 4.1. Himpunan $A\cup B\cup C$

Ada berapa anggota himpunan yang terdapat di dalam gabungan dua himpunan? Banyaknya anggota himpunan gabungan dari himpunan A dan himpunan B adalah banyaknya anggota himpunan tersebut dikurangi banyaknya anggota irisan dari kedua himpunan tersebut.

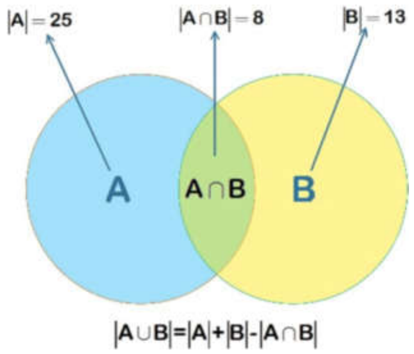
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Contoh 4.5: Semua mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit sudah lulus mata kuliah Metode Komputasi I atau Kalkulus I, atau keduanya. Jumlah mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Metode Komputasi I adalah 25; jumlah mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus I adalah 13; dan banyaknya mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Metode Komputasi I maupun mata kuliah Kalkulus I adalah 8 orang. Berapakah jumlah total mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit?

Jawab. Misalkan A adalah himpunan mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit yang telah lulus Metode Komputasi I, dan B adalah himpunan mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit yang telah lulus Kalkulus I. Dari hal ini diketahui bahwa $A \cap B$ adalah himpunan mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit yang telah lulus mata kuliah Metode Komputasi I dan Kalkulus I. Karena semua mahasiswa peserta mata kuliah Matematiak Diskrit telah lulus Metode Komputasi I atau Kalkulus I atau keduanya, maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit adalah $|A \cup B|$.

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 25 + 13 - 8 = 30. \end{aligned}$$

Jadi jumlah mahasiswa peserta mata kuliah Matematika Diskrit ada sebanyak 30 orang.



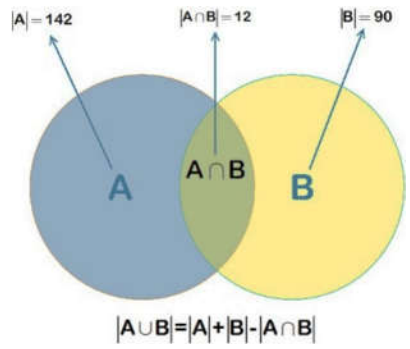
Gambar 4.2. Himpunan $A \cup B$

Contoh 4.6: Ada berapa bilangan bulat positif kurang dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 atau 11?

Jawab. Misalkan A adalah himpunan bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7, dan B adalah himpunan bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 11. Dengan demikian $A \cup B$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 atau kelipatasn 11, dan $A \cap B$ adalah bilangan bulat positif tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 dan 11. Mahasiswa dapat menunjukkan bahwa di antara bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 1000 terdapat [1000/7] bilangan yang merupakan kelipatan 7, dan [1000/11] merupakan kelipatan 11. Karena 7 dan 11 merupakan prima relatif, maka bilangan yang merupakan keipatan 7 dan 11 adalah bilangan yang merupakan kelipatan 7 x 11. Akibatnya terdapat [1000/(11 x 7)] bilangan bult positif yang tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 dan juga kelipatan 11.

$$\begin{aligned} \left|A \cup B\right| &= \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right| \\ &= \left|\frac{1000}{7}\right| + \left|\frac{1000}{11}\right| - \left|\frac{1000}{7\text{x}11}\right| \\ &= 142 + 90 - 12 = 220 \end{aligned}$$

Jadi ada 220 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 1000 yang merupakan kelipatan 7 sekaligus sebagai kelipatan 11.



Gambar 4.3. Himpunan $A \cup B$

Contoh 4.7. Tentukanlah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 (inklusif) yang bukan kelipatan 6.

Jawab. Banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang merupakan kelipatan 6 adalah 600/6 = 100 karena setiap bilangan bulat keenam merupakan kelipatan 6. Karena itu banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang bukan kelipatan 6 ada 600 – 100 = 500 bilangan.

Contoh 4.8. Suatu stasion televisi melakukan survei respon 100 orang pemirsa mengenai tiga tayangan acara A, B, dan C. Hasil survey menunjukkan bahwa 20 orang menonton tayangan A, 16 orang menonton acara B, 14 orang menonton acara C, 8 orang menonton A dan B, 5 orang menonton A dan C, 4 orang menonton B dan C, dan 2 orang menonton ketiga acara tersebut. Ada berapa orang yang tidak menonton ketiga acara tersebut?

Jawab. Akan ditentukan banyaknya N (yaitu banyaknya pemirsa yang tidak menonton acara A, B, maupun C) yaitu N – N(A atau B atau C), dengan N adalah jumlah pemirsa yang disurvei. Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

$$\begin{aligned}
N(A^c \cap B^c \cap C^c) &= N - N(A \cup B \cup C) \\
&= N - N(A) - N(B) - N(C) + N(A \cap B) + N(A \cap C) \\
&\quad + N(B \cap C) - (A \cap B \cap C) \\
&= 100 - 20 - 16 - 14 + 8 + 5 + 4 - 2 = 65
\end{aligned}$$

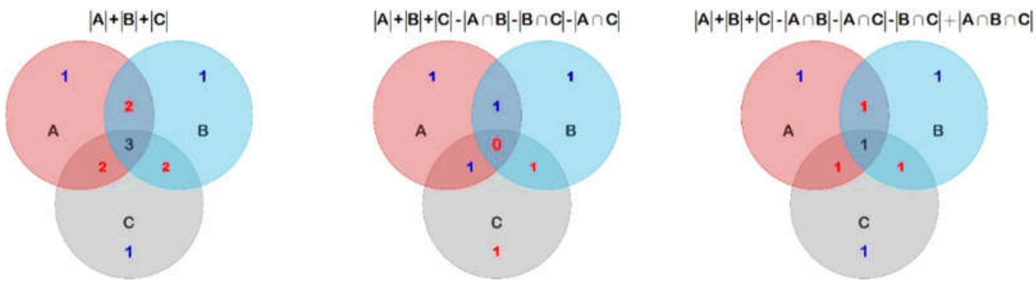
Contoh 4.9. Misalkan 1807 mahasiswa terdaftar aktif di suatu universitas. Sebanyak 453 di antaranya memprogramkan mata kuliah Komputer, 567 memprogramkan mata kuliah Metode Numerik, dan 299 memprogramkan kedua mata kuliah tersebut. Berapa orang yang tidak memprogramkan kedua mata kuliah tersebut?

Jawab. Untuk menentukan jumlah mahasiswa yang tidak memprogramkan mata kuliah Komputer maupun Metode Numerik, maka jumlah mahasiswa harus dikurangkan dengan jumlah mahasiswa yang memprogramkan mata kuliah Komputer dan mata kuliah Metode Numerik. Misalkan A adalah jumlah mahasiswa yang memprogramkan mata kuliah Komputer dan B adalah jumlah mahasiswa yang memprogrmkan mata kuliah Metode Numerik. Jadi diketahui bahwa $|A| = 453, |B| = 567, \text{dan} \, |A \cap B| = 299.$ Jumlah mahasiswa yang memprogramkan mata kuliah Komputer atau mata kuliah Metode Numerik adalah

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721.$$

Dengan demikian jumlah mahasiswa yang tidak memprogramkan mata kuliah Komputer maupun Metode Numerik adalah 1807 – 721 = 1086.

Selanjutnya akan dirumuskan cara menentukan banyaknya elemen-elemen di dalam gabungan himpunan-himpunan yang berhingga. Rumusan tersebut dinamakan prinsip inklusi-eksklusi. Untuk jelasnya, sebelum membicarakan gabungan dari n himpunan, dengan n adalah sebarang bilangan bulat positif, perlu dipahami suatu rumusan untuk menentukan banyaknya elemen di dalam gabungan dari tiga himpunan yaitu himpunan A, B, dan C. Gambar 3 di bawah ini memperlihatkan elemen-elemen tertentu dapat terhitung berulang, bahkan ada yang tidak terhitung. Oleh karena itu mahasiswa harus teliti menggunakan operasi yang benar untuk mengetahui banyaknya elemen di dalam daerah tertentu.



Gambar 4.4. Himpunan $A \cup B \cup C$

Contoh 4.10. Ada berapa banyak solusi dari $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ jika $x_1, x_2, \text{dan } x_3$ merupakan bilangan-bilangan bulat nonnegatif dengan

$$x_1 \le 3,\ x_2 \le 4, \text{dan } x_3 \le 6?$$

Jawab. Untuk menyelesaikan masalah tersebut di atas dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, maka dimisalkan suatu solusi memiliki sifat P_1 jika $x_1 > 3,$ memiliki sifat P_2 jika $x_2 > 4,$ dan memiliki sifat P_3 jika $x_3 > 6.$ Banyaknya solusi yang memenuhi ketidaksamaan $x_1 \le 3, x_2 \le 4, \text{dan } x_3 \le 6$ adalah

$$\begin{aligned} N(P_1'P_2'P_3') &= N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) \\ &+ N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3) \\ &- N(P_1P_2P_3) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

N = banyaknya solusi keseluruhan yaitu $C(3+11-1,11)=78,$

$N(P_1)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4 = C(3+7-1,7)=C(9,7)=36,$

$N(P_2)$ = banyaknya solusi jika $x_2 \geq 5 = C(3+6-1,6)=C(8,6)=28,$

$N(P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_3 \geq 7 = C(3+4-1,4)=C(6,4)=15,$

$N(P_1P_2)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4$ dan $x_2 \geq 5,$ yaitu $C(3+2-1,2)=6,$

$N(P_1P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4$ dan $x_3 \geq 7,$ yaitu $C(3+0-1,0)=1,$

$N(P_2P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_2 \geq 5$ dan $x_3 \geq 7,$ yaitu 0,

$N(P_1P_2P_3)$ = banyaknya solusi jika $x_1 \geq 4, x_2 \geq 5,$ dan $x_3 \geq 7$ yaitu 0.

Dengan mensubtitusi kuantitas-kuanitas ini ke dalam $N(P_1'P_2'P_3')$ dapat ditunjukkan bahwa banyaknya solusi dengan $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4,$ dan $x_3 \leq 6$ sama dengan

$$N(P_1'P_2'P_3') \quad = 78-36-28-15+6+1+0-0=6$$

Contoh 4.11. Ada berapa string biner 7-digit yang memuat angka 1 berjumlah ganjil?

Jawab. Misalkan A adalah himpunan semua string biner 7-digit yang memuat angka 1 berjumlah ganjil, maka jawaban yang dicari adalah $|A|.$ untuk menghitung $|A|,$ maka himpunan A dipartisi atas beberapa bagian yang lebih kecil. Angka 1 yang berjumlah ganjil di dalam string biner 7-digit kemungkinan terdiri dari satu, tiga, lima, atau tujuh angka 1. Misalkan A_1 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat hanya satu angka 1, A_3 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat tiga angka 1, A_5 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat lima angka 1, dan A_7 adalah himpunan string biner 7-digit yang memuat tujuah angka 1. Karena itu dapat dituliskan $A = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7.$ Dapat dilihat bahwa sebarang dua himpunan A_i tidak memiliki irisan sehingga $|A|=|A_1|+|A_3|+|A_5|+|A_7|.$

Selanjutnya, akan ditentukan nilai-nilai dari masing-masing suku. Misalkan untuk $A_3,$ himpunan string biner 7-digit yang memuat tiga angka 1. String seperti ini dapat dibentuk dengan memilih tiga posisi untuk angka 1 dan menempatkan angka 0 untuk keempat posisi lainnya. Dengan kata lain $|A_3|=C(7,3).$ Demikian juga,

$\left|A_1\right| = C(7,1), \left|A_5\right| = C(7,5), \text{dan} \left|A_7\right| = C(7,7).$ Akhirnya dapat diketahui bahwa jawaban yang dicari adalah

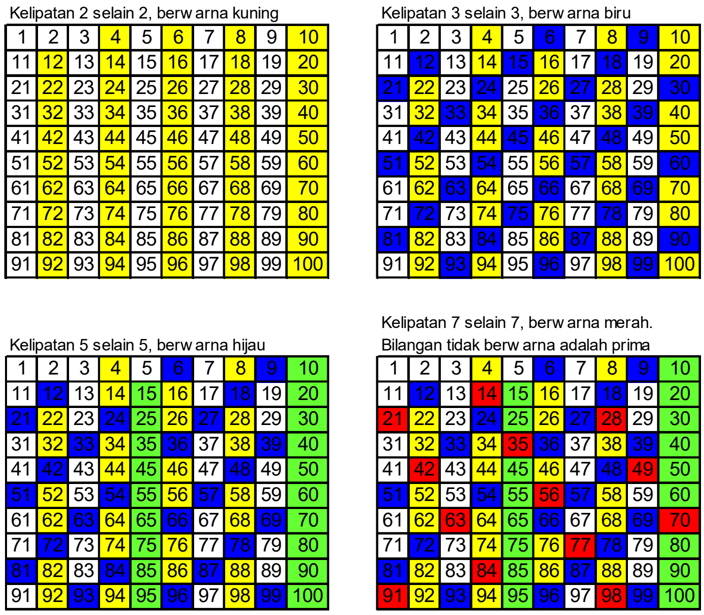
$$\begin{aligned}\left|A\right| &= \left|A_1\right| + \left|A_3\right| + \left|A_5\right| + \left|A_7\right| \\ &= C(7,1) + C(7,3) + C(7,5) + C(7,7) \\ &= 7 + 35 + 21 + 1 \\ &= 64.\end{aligned}$$

Jadi banyaknya string biner 7-digit yang memuat angka 1 berjumlah ganjil ada 64.

B. Saringan Eratosthenes

Bilangan bulat komposit (bilangan asli yang lebih besar dari 1 dan bukan bilangan prima) yang kurang dari 100 mempunyai suatu faktor prima yang tidak lebih besar dari 10. Karena bilangan prima yang kurang dari 10 hanya terdiri atas 2, 3, 5, dan 7, maka bilangan prima yang tidak lebih besar dari 100 adalah keempat bilangan ini, serta bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan tidak lebih dari 100, yang dapat dibagi oleh bilangan selain 2, 3, 5, dan 7.

Saringan Eratosthenes digunakan untuk mencari semua bilangan prima yang tidak lebih dari suatu bilangan bulat tertentu. Sebagai contoh, prosedur di bawah ini digunakan untuk mencari bilangan prima yang tidak lebih dari 100. Langkah pertama yang akan dilakukan adalah dengan mendaftar semua bilangan bulat antara 1 dan 100. Proses penyaringan dimulai dengan menghapus semua bilangan bulat kelipatan 2, kecuali 2. Selanjutnya karena 3 adalah bilangan bulat pertama yang lebih dari 2 yang tidak dihapus, maka semua bilangan bulat kelipatan 3 dihapus, kecuali 3. Demikian juga, karena 5 adalah bilangan berikutnya yang tidak dihapuskan, maka semua bilangan bulat kelipatan 5 kecuali 5, dihapus. Kemudian, bilangan berikutnya adalah 7. Semua bilangan bulat kelipatan 7 dihapus, kecuali 7. Karena semua bilangan bulat komposit yang tidak lebih dari 100 merupakan kelipatan 2, 3, 5, atau 7, maka semua bilangan lainnya kecuali 1 adalah bilangan prima. Jadi bilangan prima yang kurang dari 100 adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, dan 97.



Gambar 4.5. Saringan Eratosthenes

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi dapat diketahui banyaknya bilangan prima yang tidak lebih besar dari suatu bilangan bulat positif tertentu, dengan cara yang sama dengan yang dilakukan dalam saringan Eratosthenes. Perlu diingat kembali bahwa suatu bilangan bulat komposit adalah bilangan yang merupakan kelipatan dari suatu bilangan prima yang tidak lebih besar dari akar kuadratnya. Jadi untuk mengetahui banyaknya bilangan priam yang tidak lebih besar dari 100 maka harus terlebih dulu diingat bahwa bilangan bulat komposit yang tidak lebih besar dari 100 pasti memiliki faktor prima yang tidak lebih besar dari 10. Karena bilangan-bilangan prima yang tidak lebih besar dari 10 adalah 2, 3, 5, dan 7, maka bilangan prima yang tidak lebih dari 100 adalah bilangan-bilangan prima tersebut di atas serta bilangan yang bukan kelipatan dari keempat bilangan tersebut. Untuk menerapkan prinsip inklusi-eksklusi, misalkan:

P_1 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 2,

P_2 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 3,

P_3 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 5, dan

P_4 adalah sifat bilangan bulat kelipatan 7.

Dengan demikian, banyaknya bilangan prima yang tidak melebihi 100 adalah

$$4 + N\left(P_1'P_2'P_3'P_4'\right).$$

Karena ada 99 bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan tidak melebihi 100, maka berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

$$
\begin{aligned}
N\left(P_1'P_2'P_3'P_4'\right) = 99 &- N\left(P_1\right) - N\left(P_2\right) - N\left(P_3\right) - N\left(P_4\right) \\
&+ N\left(P_1P_2\right) + N\left(P_1P_3\right) + N\left(P_1P_4\right) + N\left(P_2P_3\right) + N\left(P_2P_4\right) + N\left(P_3P_4\right) \\
&- N\left(P_1P_2P_3\right) - N\left(P_1P_2P_4\right) - N\left(P_1P_3P_4\right) - N\left(P_2P_3P_4\right) \\
&+ N\left(P_1P_2P_3P_4\right)
\end{aligned}
$$

Banyaknya bilangan bulat yang tidak lebih besar dari 100 (tetapi lebih besar dari 1) yang merupakan kelipatan dari semua bilangan prima di dalam suatu subset {2, 3, 5, 7} adalah [100/*N*], dimana *N* adalah hasil perkalian dari bilangan-bilangan prima di dalam subset ini. Hal ini disebabkan karena sebarang dua bilangan prima tersebut tidak memiliki faktor persekutuan. Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
N\left(P_1'P_2'P_3'P_4'\right) &= 99 - \left[\frac{100}{2}\right] - \left[\frac{100}{3}\right] - \left[\frac{100}{5}\right] - \left[\frac{100}{7}\right] \\
&\quad + \left[\frac{100}{2.3}\right] + \left[\frac{100}{2.5}\right] + \left[\frac{100}{2.7}\right] + \left[\frac{100}{3.5}\right] + \left[\frac{100}{3.7}\right] + \left[\frac{100}{5.7}\right] \\
&\quad - \left[\frac{100}{2.3.5}\right] - \left[\frac{100}{2.3.7}\right] - \left[\frac{100}{2.5.7}\right] - \left[\frac{100}{3.5.7}\right] + \left[\frac{100}{2.3.5.7}\right] \\
&= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\
&\quad + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\
&\quad - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 \\
&= 21
\end{aligned}
$$

Dalam hal ini, ada 4 + 21 = 25 bilangan prima yang tidak lebih besar dari 100.

Misalkan *S* menyatakan himpunan 100 orang mahasiswa yang mengikuti program matrikulasi pada suatu universitas. Jadi, $|S| = 100.$ Selanjutnya, misalkan c_1, c_2 menyatakan sifat-sifat atau syarat-syarat yang terpenuhi oleh beberapa anggota dari *S*, yaitu:

- c_1 adalah 35 orang mahasiswa (di antara 100 orang peserta matrikulasi) yang memprogramkan program matrikulasi mata kuliah A, dinyatakan dengan $N\left(c_1\right) = 35.$
- c_2 adalah 30 orang mahasiswa (di antara 100 orang peserta matrikulasi) yang memprogramkan program matrikulasi mata kuliah B, dinyatakan dengan $N\left(c_2\right) = 30.$

Jika 9 orang mahasiswa mengikuti kedua mata kuliah program matrikulasi, maka $N\left(c_1c_2\right) = 9.$

Penjelasan:

Dari 100 orang mahasiswa ini, terdapat 100 - 35 = 65 orang yang tidak mengikuti matrikulasi A. Jika banyaknya anggota $|S|$ dinyatakan dengan *N*, maka dituliskan $N(\overline{c}_1) = N - N(c_1)$. Dengan cara yang sama, dapat ditentukan bahwa $N(\overline{c}_2) = N - N(c_2) = 100 - 30 = 70$ yang tidak mengikuti matrikulasi B. Banyaknya peserta matrikulasi yang tidak mengikuti program matrikulasi B adalah $N(c_1\overline{c}_2) = N(c_1) - N(c_1c_2) = 35 - 9 = 26$. Demikian pula, banyak nya peserta matrikulasi yang mengikuti program matrikulasi B tetapi tidak memprogramkan matrikulasi A adalah

$$N(\overline{c}_1c_2) = N(c_2) - N(c_1c_2) = 30 - 9 = 21.$$

100 orang mahasiswa baru yang tidak mengikuti program matrikulasi A maupun B adalah $N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$. Karena $N(\overline{c}_1) = N(\overline{c}_1c_2) + N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$, maka dapat disimpulkan bahwa $N(\overline{c}_1\overline{c}_2) = N(\overline{c}_1) - N(\overline{c}_1c_2) = 65 - 21 = 44.$

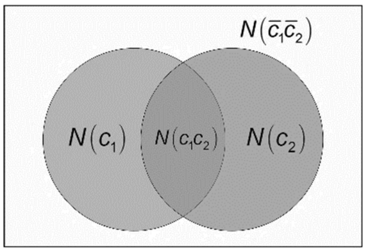
Dari penjelasan tersebut di atas, dapat juga dilihat bahwa

$$\begin{aligned} N(\overline{c}_1\overline{c}_2) &= N(\overline{c}_1) - N(\overline{c}_1c_2) = [N - N(c_1)] - [N(c_2) - N(c_1c_2)] \\ &= N - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2) \\ &= N - [N(c_1) + N(c_2)] + N(c_1c_2) \\ &= 100 - [35 + 30] + 9 = 44 \end{aligned}$$

Berdasarkan diagram Venn di bawah ini, dapat diketahui bahwa jika $N(c_1)$ menyatakan banyaknya elemen di *S* dalam lingkaran sebelah kiri, dan $N(c_2)$ adalah banyaknya elemen di *S* dalam lingkaran sebelah kanan, maka $N(c_1c_2)$ menyatakan elemen-elemen di *S* yang berada daerah irisan, sedangkan $N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$ menyatakan elemen-elemen di *S* yang berada di luar daerah gabungan kedua lingkaran tersebut. Akibatnya, dari gambar diagram Venn dapat diketahui bahwa

$$N(\overline{c}_1\overline{c}_2) = N - [N(c_1) + N(c_2)] + N(c_1c_2)$$

Suku terakhir, $N(c_1c_2)$, ditambahkan untuk mengeliminasi penjumlahan ganda pada suku $[N(c_1) + N(c_2)]$



Perhatikan bahwa $N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$ tidak sama dengan $N(\overline{c_1c_2})$ karena $N(\overline{c_1c_2}) = N - N(c_1c_2) = 100 - 9 = 91$ sedangkan $N(\overline{c}_1\overline{c}_2) = 44$. Meskipun demikian, dapat dibuktikan bahwa $N(\overline{c}_1 \text{ atau } \overline{c}_2) = N(\overline{c_1c_2}) = N(\overline{c}_1) + N(\overline{c}_2) - N(\overline{c}_1\overline{c}_2)$ $= 65 + 70 - 44 = 91$.

C. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Pada bagian ini akan dijelaskan cara penghitungan yang disebut prinsip inklusi-eksklusi. Seperti telah diketahui, aturan penjumlahan merupakan cara yang sederhana untuk menghitung banyaknya objek di dalam suatu himpunan gabungan tanpa adanya objek yang terhitung lebih dari satu kali (yaitu dengan menyatakan himpunan sebagai partisi). Prinsip inklusi-eksklusi memberikan suatu rumus untuk masalah yang sangat umum di mana himpunan-himpunan tidak beririsan. Rumus tersebut lebih kompleks tetapi dapat digunakan dalam masalah yang lebih luas.

Pada bagian sebelumnya, telah ditunjukkan bahwa menghitung secara tidak langsung objek-objek di dalam suatu himpunan seringkali lebih mudah dari pada menghitung objek tersebut secara langsung.

Contoh 4.12. Hitunglah permutasi $i_1i_2\cdots i_n$ dari $\{1, 2, \cdots, n\}$ dimana 1 tidak ditempatkan pada urutan pertama ($i_1 \neq 1$).

Jawab. Permutasi tersebut dapat dihitung secara langsung dengan memperhatikan bahwa angka 1 tidak menempati posisi pertama dapat dibagi menjadi *n* – 1 bagian berdasarkan *k* banyaknya bilangan bulat dari $\{2, 3, \cdots, n\}$ yang akan menempati psisi angka pertama. Permutasi dengan *k* pada posisi angka pertama terdiri atas *k* diikuti oleh permutasi dari himpunan yang memiliki (*n* – 1) elemen, yaitu $\{1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n\}$. Dengan demikian, ada $(n-1)!$ permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dengan *k* berada di posisi bilangan pertama. Berdasarkan prinsip penjumlahan, ada $(n-1)!(n-1)$ permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dimana angka 1 tidak menempati posisi bilangan pertama.

Selain itu, dapat juga dilakukan penghitungan langsung dengan memperhatikan bahwa banyaknya permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dimana angka 1 berada pada posisi bilangan pertama sama dengan banyaknya $(n-1)!$ dari permutasi $\{2,3,\cdots,n\}$. Karena total banyaknya permutasi $\{1,2,\cdots,n\}$ adalah *n*!, maka banyaknya permutasi dari $\{1,2,\cdots,n\}$ dimana angka 1 tidak menempati posisi pertama adalah $n!-(n-1)!=(n-1)!(n-1)$.

Contoh 4.13. Hitunglah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600, inklusif, yang bukan kelipatan 6.

Jawab. Banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang merupakan kelipatan 6 ada 600/6 = 100 karena setiap bilangan bulat keenam adalah kelipatan 6. Jadi banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 600 yang bukan kelipatan 6 ada sebanyak 600 – 100 = 500.

Aturan yang dapat digunakan untuk menghitung secara tidak langsung adalah sebagai berikut: Jika *A* adalah salah satu subset dari himpunan *S*, maka banyaknya objek di *A* sama dengan banyaknya objek di *S* dikurangi banyaknya objek yang tidak berada di *A*.

$$\overline{A}=S-A=\{x \mid x\in S, x\notin A\}$$

Himpunan tersebut merupakan komplemen *A* di *S*, yaitu himpunan yang meliputi objek-objek di *S* yang bukan merupakan anggota himpunan *A*.

$$|A|=|S|-|\overline{A}| \text{ atau } |\overline{A}|=|S|-|A|$$

Pernyataan tersebut di atas merupakan contoh yang paling sederhana dari prinsip inklusi-eksklusi.

Selanjutnya akan dirumuskan prinsip inklusi-eksklusi dalam konteks yang lebih mudah untuk dipahami. Sebagai langkah pertama dari aturan yang telah diketahui sebelumnya, misalkan *S* adalah suatu himpunan berhingga, yang masing-masing objek di dalamnya mungkin memiliki sifat P_1 atau P_2 atau keduanya. Kita akan menentukan banyaknya objek di *S* yang tidak bersifat P_1 atau P_2 atau tidak keduanya. Hal ini dapat dilakukan dengan menghitung semua objek di S kemudian dikurangi dengan semua objek yang bersifat P_1 dan semua objek yang bersifat P_2. Tetapi dengan langkah ini, objek-objek yang memiliki sifat P_1 yang juga bersifat P_2 telah dikurangkan sebanyak dua kali. Operasi ini dapat digambarkan secara simbolis sebagai berikut: Misalkan A_1 adalah subset dari S yang memiliki sifat P_1, dan A_2 adalah subset dari S yang memiliki sifat P_2. Dengan demikian dapat diketahui bahwa $\overline{A}_1$ merupakan objek-objek di S yang tidak bersifat P_1 dan $\overline{A}_2$ merupakan objek-objek di S yang tidak memiliki sifat P_2. Objek-objek yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2 adalah objek yang merupakan anggota himpunan $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$. Banyaknya objek dalam himpunan tersebut adalah

$$\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|. \tag{4.43}$$

Karena $\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2\right|$ menyatakan banyaknya objek di S yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2, maka kebenaran persamaan di atas dapat ditunjukkan bahwa objek yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2 akan memberikan kontribusi 1 terhadap ruas kanan, sedangkan objek-objek lainnya memberi kontribusi 0. Jika x adalah suatu objek yang tidak memiliki sifat P_1 dan P_2 maka objek tersebut termasuk objek-objek di S, tetapi tidak termasuk sebagai objek A_1 maupun A_2 dan juga tidak termasuk sebagai objek $A_1 \cap A_2$. Oleh karena itu, kontribusinya terhadap ruas kanan dari persamaan di atas adalah

$$1 - 0 - 0 + 0 = 1.$$

Jika x hanya memiliki sifat P_1 maka kontribusinya adalah

$$1 - 1 - 0 + 0 = 0$$

dan jika x hanya memiliki sifat P_2 maka kontribusinya adalah

$$1 - 0 - 1 + 0 = 0$$

Jika x memiliki sifat P_1 dan sekalgus memiliki sifat P_2 maka kontribusinya adalah

$$1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Jadi, sisi kanan dari persamaan di atas juga meliputi objek-objek di S yang tidak memiliki sifat P_1 maupun P_2.

Secara umum, jika $P_1, P_2, \cdots, P_m$ adalah m sifat-sifat yang dimiliki oleh objek-objek yag ada di S, dan

$$A_i = \{x : x \in S, x \in P_i\}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

adalah objek-objek di *S* yang memiliki sifat P_i (dan mungkin memiliki sifat lainnya juga), maka $A_i \cap A_j$ adalah subset-subset dari objek-objek yang memiliki sifat-sifat P_i dan P_j (atau sifat yang lainnya), $A_i \cap A_j \cap A_k$ adalah subset dari objek-objek yang memiliki sifat-sifat $P_i, P_j,$ dan P_k, dan seterusnya. Subset dari objek-objek yang tidak memiliki salah satu sifat-sifat tersebut adalah $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m$. Prinsip inklusi-eksklusi menggambarkan cara menghitung banyaknya objek di dalam subset tersebut dengan cara menghitung objek berdasarkan sifat-sifat yang dimilikinya. Dengan kata lain, prinsip inklusi-eksklusi adalah proses menghitung dengan cara "mundur".

Teorema 4.2. Banyaknya objek di dalam himpunan S yang tidak memenuhi sifat $P_1, P_2, \cdots, P_m$ dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m\right| &= |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\end{aligned} \tag{4.44}$$

Dimana:

$\sum |A_i|$ adalah jumlah semua kombinasi-1 $\{i\}$ dari $\{1, 2, \cdots, m\}$,

$\sum |A_i \cap A_j|$ adalah jumlah semua kombinasi-2 $\{i,j\}$ dari $\{1, 2, \cdots, m\}$,

$\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$ adalah jumlah semua kombinasi-3 $\{i,j,k\}$ dari $\{1, 2, \cdots, m\}$, dan seterusnya.

Jika *m* = 3, maka dari persamaan (4.7) diperoleh

$$\begin{aligned}\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa ada 1 + 3 + 3 + 1 = 8 suku di sebelah kanan.

Jika *m* = 4, maka persamaan (4.7) akan berbentuk:

$$\begin{aligned}\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4\right| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4|) \\ &\quad + (|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.\end{aligned}$$

Untuk kasus m = 4, dapat dilihat bahwa ada 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 suku di sebelah kanan.

Secara umum, banyaknya suku di sebelah kanan dari persamaan (4.7) adalah:

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m}=2^m.$$

Bukti Teorema 4.2. Ruas kiri dari persamaan (4.7) menyatakan banyaknya objek di S yang tidak dibatasi oleh sifat-sifat tertentu. Kebenaran dari persamaan tersebut dapat dibuktikan dengan menyatakan bahwa suatu objek yang tidak dibatasi oleh sifat $P_1, P_2, \cdots, P_m$ memberikan kontribuasi 1 terhadap ruas kiri, sedangkan objek yang terikat pada setidak-tidaknya satu sifat tersebut akan memberikan kontribusi 0. Pertama, perhatikan suatu objek x yang tidak dibatasi oleh sifat tertentu. Kontribusinya terhadap ruas kanan dari persamaan (4.7) adalah

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m 0 = 1,$$

karena objek tersebut merupakan anggota S tetapi bukan merupakan anggota dari himpunan yang lainnya. Selanjutnya misalkan suatu objek y yang memiliki tepat $n \geq 1$ dari sifat-sifat di atas. Kontribusi y terhadap $|S|$ adalah $1=\binom{n}{0}$ Kontribusinya terhadap $\sum|A_i|$ adalah $n=\binom{n}{1}$ karena y memiliki tepat n sifat sehingga y merupakan anggota dari n himpunan-himpunan $A_1, A_2, \cdots, A_m$. Kontribusi y terhadap $\sum|A_i \cap A_j|$ adalah $\binom{n}{2}$ karena dapat dipilih sepasang sifat y dengan $\binom{n}{2}$ cara, oleh karena itu y merupakan anggota dari $\binom{n}{2}$ dari himpunan $A_i \cap A_j$. Kontribusi y terhadap $\sum|A_i \cap A_j \cap A_k|$ adalah $\binom{n}{3}$, dan seterusnya. Jadi total kontribusi y terhadap ruas kanan persamaan (4.7) adalah

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m},$$

yang sama dengan

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n},$$

karena kontribusi y terhadap ruas kiri persamaan (4.7) sama dengan 0 jika y memiliki setidak-tidaknya 1 sifat.

Contoh 4.14. Carilah banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 1000 yang tidak dapat dibagi oleh 5, 6, dan 8.

Jawab. Untuk menyelesaikan soal ini, akan digunakan beberapa notasi. Untuk bilangan real *r,* notasi $\lfloor r \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari *r*. Faktor persekutuan terkecil antara dua bilangan bulat *a*, *b*, atau tiga bilangan bulat *a, b, c,* dengan notasi $\mathrm{kpk}\{a,b\}$ dan $\mathrm{kpk}\{a,b,c\}$. Misalkan P_1 adalah sifat yang menunjukkan bahwa suatu bilangan bulat yang dapat dibagi 5, P_2 adalah sifat yang menunjukkan bahwa suatu bilangan bulat yang dapat dibagi 6, dan P_3 adalah sifat yang menunjukkan bahwa suatu bilangan bulat yang dapat dibagi 8. Misalkan *S* adalah himpunan yang anggotanya terdiri atas 1000 bilangan bulat pertama. Untuk $i = 1,2,3,$ ambil A_i adalah himpuna yang terdiri atas bilangan-bilangan bulat di *S* dengan sifat-sifat P_i. Akan ditentukan banyaknya bilangan bulat di dalam $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$. Pertama-tama dapat diketahui bahwa

$$\lfloor A_1 \rfloor = \lfloor \tfrac{1000}{5} \rfloor = 200,$$
$$\lfloor A_2 \rfloor = \lfloor \tfrac{1000}{6} \rfloor = 166,$$
$$\lfloor A_3 \rfloor = \lfloor \tfrac{1000}{8} \rfloor = 125.$$

Bilangan-bilangan bulat di dalam himpunan $A_1 \cap A_2$ dapat dibagi oleh 5 dan 6. Tetapi suatu bilangan bulat dikatakan dapat dibagi oleh 5 dan 6 jika dan hanya jika bilang bulat tersebut dapat dibagi oleh $\mathrm{kpk}(5,6)$. Karena $\mathrm{kpk}(5,6) = 30$, $\mathrm{kpk}(5,8) = 40$, dan $\mathrm{kpk}(6,8) = 24$, maka

$$|A_1 \cap A_2| = \lfloor \tfrac{1000}{30} \rfloor = 33,$$
$$|A_1 \cap A_3| = \lfloor \tfrac{1000}{40} \rfloor = 25,$$
$$|A_2 \cap A_3| = \lfloor \tfrac{1000}{24} \rfloor = 41$$

Karena $\mathrm{kpk}(5,6,8) = 120$, maka dapat disimpulkan bahwa

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \tfrac{1000}{128} \rfloor = 8.$$

Jadi berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi, banaknya bilangan bulat antara 1 dan 1000 yang tidak dapat dibagi dengan 5,6, dan 8 ada sebanyak

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

Pada contoh-contoh berikut ini ditunjukkan penerapan prinsip inklusi-eksklusi dalam masalah-masalah yang lebih umum. Misalkan bahwa ukuran dari himpunan $A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}$ yang dijumpai di dalam prinsip inklusi-eksklusi ditentukan oleh *k* saja, bukan oleh himpunan *k* yang digunakan di dalam irisan. Jadi, terdapat konstanta-konstanta $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = |S| \\
&\alpha_1 = |A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| \\
&\alpha_2 = |A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = \cdots = |A_{m-1} \cap A_m| \\
&\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \cdots = |A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m| \\
&\vdots \\
&\alpha_m = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

Dalam kasus ini, prinsip inklusi-eksklusi dapat disederhanakan menjadi

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = \alpha_0 - \binom{m}{1}\alpha_1 + \binom{m}{2}\alpha_2 - \binom{m}{3}\alpha_3 + \cdots + \\
(-1)^k \binom{m}{k}\alpha_k + \cdots + (-1)^m \alpha_m.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Hal ini disebabkan karena jumlahan ke-*k* di dalam prinsip inklusi-eksklusi mengandung $\binom{m}{k}$ suku penjumlahan, yang masing-masing sama dengan α_k.

Contoh 4.15: Ada berapa banyak bilangan bulat antara 0 dan 99.999 yang mengandung angka-angka 2, 5, dan 8?

Jawab. Misalkan *S* adalah himpunan bilangan bulat antara 0 dan 99.999. Setiap bilangan bulat tersebut terdiri atas angka 5 digit, termasuk angka-angka 0 di depannya. Jadi bilangan bulat di *S* dapat dipandang sebagai permutasi-5 dari multiset dimana masing-masing angka 0, 1, 2, 3, . . ., 9 memiliki perulangan angka 5 atau lebih. Misalkan P_1 adalah sifat dimana suatu bilangan bulat (antara 0 dan 99.999) tidak mengandung angka 2, P_2 adalah sifat dimana suatu bilangan bulat tidak mengandung angka 5, dan P_3 adalah sifat dimana suatu bilangan bulat tidak mengandung angka 8. Untuk $i = 1, 2, 3,$ misalkan A_i adalah himpunan yang terdiri atas bilangan-bilangan bulat di *S* yang memiliki sifat P_i. Dalam contoh ini akan ditentukan banyaknya bilangan bulat yang terdapat di $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$. dengan menggunakan notasi dari contoh sebelumnya, diperoleh

$$\alpha_0 = 10^5, \alpha_1 = 9^5, \alpha_2 = 8^5, \alpha_3 = 7^5.$$

Sebagai contoh untuk mengetahui banyaknya bilangan bulat antara 0 dan 99.999 yang tidak mengandung angka 2 dan angka 5, maka $|A_1 \cap A_2|$ sama dengan banyaknya permutasi-5 dari multiset

$$\{5.0,\ 5.1, 5.3, 5.4, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9\},$$

yang banyaknya sama dengan 8^5. Jadi bilangan bulat antara 0 dan 99.999 yang mengandung angka-angka 2, 5, dan 8 ada sebanyak

$$10^5 - 3x9^5 + 3x8^5 - 7^5.$$

Contoh 4.16: Hitunglah ada berapa banyak permutasi dari huruf-huruf

M-A-T-H-I-S-F-U-N

sedemikian sehingga huruf-huruf dalam kata MATH, IS, dan FUN tidak berurutan (misalnya, permutasi MATHISFUN tidak diperbolehkan, demikian juga INUMATHSF dan ISMATHFUN).

Jawab. Untuk menghitung permutasi tersebut di atas, digunakan prinsip inklusi-eksklusi. Pertama-tama, ditetapkan suatu himpunan *S* sebagai himpunan semua permutasi dari 9 huruf yang diberikan. Selanjutnya dimisalkan P_1 adalah sifat permutasi di *S* yang mengandung kata MATH, P_2 adalah sifat permutasi di *S* yang mengandung kata IS, dan P_3 adalah sifat permutasi di *S* yang mengandung kata FUN, masing-masing dengan huruf-huruf yang berurutan. Untuk $i = 1, 2, 3,$ A_i adalah himpunan permutasi-permutasi di *S* yang memenuhi sifat P_1. Akan ditentukan banyaknya permutasi di $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$.

Dengan demikian $|S| = 9! = 362.880.$ Permutasi di A_1 dapat dipandang sebagai permutasi dari 6 simbol MATH-I-S-F-U-N. Jadi, $|A_1| = 6! = 720.$ Dengan cara yang sama, permutasi A_2 adalah permutasi dari 8 simbol M-A-T-H-IS-F-U-N, yaitu $|A_2| = 8! = 40.320,$ dan permutasi A_3 adalah permutasi dari 7 simbol M-A-T-H-I-S-FUN, yaitu $|A_3| = 7! = 5040.$

Permutasi di dalam $A_1 \cap A_2$ adalah permutasi dari 5 simbol MATH-IS-F-U-N, Permutasi di dalam $A_1 \cap A_3$ adalah permutasi dari 4 simbol MATH-I-S-FUN, dan permutasi di dalam $A_2 \cap A_3$ adalah permutasi dari 6 simbol M-A-T-H-IS-FUN. Dengan demikian, $|A_1 \cap A_2| = 5! = 120, |A_1 \cap A_3| = 4! = 24,$ dan $|A_2 \cap A_3| = 6! = 720.$ Akhirnya, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ terdiri atas permutasi dari 3 simbol MATH-IS-FUN, yaitu $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6.$ Dengan mensubtitusikan semua nilai-nilai yang telah diperoleh sebelumnya,

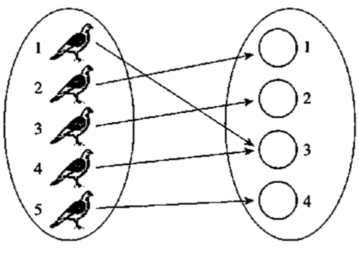
$$
\begin{aligned}
|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 362.880 - 720 - 40.320 - 5040 \\
&\quad + 120 + 24 + 720 - 6 = 317.658.
\end{aligned}
$$

D. Prinsip Sarang Merpati

Tahukah anda bahwa setidak-tidaknya dua orang penduduk Kota Makassar memiliki jumlah helai rambut yang tepat sama di kepala mereka? Mungkin anda akan bertanya, bagaimana mengetahui hal tersebut? Untuk menjawab pertanyaan ini maka kita harus menghitung jumlah helai rambut di kepala dari setiap penduduk Kota Makassar. Bagaimana? Sangat sederhana: sedikit pengetahuan biologi, statistik, dan matematika:

- Menurut ilmu biologi, jumlah helai rambut di kepala seorang manusia kurang dari 200.000.
- Jumlah penduduk Kota Makassar lebih dari 9.000.000 jiwa.
- Misalkan dikumpulkan 200.000 penduduk Kota Makassar yang mempunyai jumlah helai rambut berbeda di kepalanya masing-masing. Karena jumlah helai rambut tidak lebih dari 200.000, maka orang yang ke-200.001 memiliki jumlah rambut yang sama dengan salah satu dari 200.000 orang tadi.

Prinsip sarang merpati menyatakan bahwa jika n merpati menempati m sarang dan $n > m$ sarang, maka setidak-tidaknya satu sarang akan ditempati lebih dari dua merpati. Prinsip ini diilustrasikan pada Gambar 4.6 dengan $n = 5$ dan $m = 4$. Gambar (a) menujukkan merpati yang menempati sarang, dan (b) menunjukkan korespondensi setiap merpati dengan sarang. Prinsip sarang merpati sering dinamakan prinsip kotak Dirichlet karena prinsip tersebut pertama kali dikemukakan oleh J.P.G.L. Dirichlet (1805-1859).



Gambar 4.6. Sarang merpati dengan $n = 5$ dan $m = 4$

Fungsi dari suatu himpunan berhingga dengan himpunan berhingga lainnya yang lebih kecil, tidak dapat berelasi satu-satu, karena pasti ada setidak-tidaknya dua elemen di dalam domain yang memiliki peta yang sama di kodomain.

Gambar 4.7. Sarang Merpati

Foto: http://camp.bardmathcircle.org/2015/08/day-3.html

D.1. Prinsip Sarang Merpati Bentuk Pertama

Prinsip sarang merpati bentuk pertama atau sering dinamakan bentuk sederhana adalah sebagai berikut:

Jika $(n+1)$ *atau lebih obyek ditempatkan ke dalam n kotak, maka terdapat paling sedikit satu kotak yang memuat dua atau lebih obyek tersebut.*

Bukti: Misalkan jika *n* merpati ditempatkan ke dalam *m* sarang, dimana $n > m$, maka akan terdapat sarang yang memuat paling sedikit dua merpati. Pernyataan Prinsip Pigeonhole ini dapat dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan bahwa setiap sarang memuat paling banyak satu merpati. Karena ada *m* sarang, maka paling banyak *m* merpati yang bisa termuat. Padahal diketahui ada *n* merpati yang tersedia dan $n > m$, sehingga kita dapatkan sebuah kontradiksi. Oleh karena itu, jika $(n+1)$ atau lebih merpati ditempatkan ke dalam *n* sarang, maka haruslah terdapat paling sedikit satu sarang yang memuat dua atau lebih burung merpati.

Bentuk sederhana dari prinsip sarang merpati dinyatakan pada Teorema 4.3 sebagai berikut:

Teorema 4.3. Jika $n+1$ objek dimasukkan ke dalam n kotak, maka setidak-tidaknya satu kotak memuat dua atau lebih objek.

Bukti. Jika masing-masing ke-n kotak memuat paling banyak satu objek, maka total objek yang dapat dimasukkan ke dalam kotak paling banyak satu objek. Karena ada $n+1$ objek yang harus dimasukkan ke dalam kotak, maka haruslah terdapat setidak-tidaknya satu kotak yang memuat dua atau beberapa objek.

Penerapan 1. Dari 13 orang mahasiswa yang tergabung di dalam satu kelompok, setidak-tidaknya dua orang di antaranya lahir pada bulan yang sama.

Penerapan 2. Suatu pesta dihadiri oleh n pasangan suami-istri. Berapa orang yang harus dipilih dari $2n$ orang untuk memastikan bahwa sepasang suami-istri terdapat di dalamnya?

Jika dipilih n orang, maka ada kemungkinan bahwa yang terpilih adalah suaminya saja, atau istrinya saja. Artinya belum dapat dipastikan bahwa terdapat sepasang suami istri yang terpilih dari n orang tersebut. Tetapi jika dipilih $n + 1$ orang, maka dapat dipastikan bahwa meskipun istrinya saja atau suaminya saja yang terpilih dari n orang pertama, pastilah terdapat setidak-tidaknya satu pasang suami istri yang terpilih dari $n + 1$ orang.

Beberapa prinsip yang berhubungan dengan prinsip sarang merpati perlu untuk disebutkan, antara lain:

- Jika n objek dimasukkan ke dalam n kotak dan tidak ada kotak yang kosong, maka setiap kotak berisi dengan tepat satu objek.
- Jika n objek dimasukkan ke dalam n kotak dan tidak ada kotak yang berisi lebih dari satu objek, maka masing-masing kotak berisi satu objek.

Merujuk pada Penerapan 2, jika dipilih n orang sedemikian sehingga terpilih setidak-tidaknya satu orang dari setiap pasangan suami-istri, maka dapat dipastikan telah terpilih dengan tepat satu orang dari setiap pasangan. Demikian juga, jika dipilih n orang sedemikian sehingga terpilih paling banyak satu orang dari setiap pasangan, maka dapat dipastikan telah terpilih setidak-tidaknya satu orang dari setiap pasangan tersebut.

Formulasi yang lebih abstrak dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi pemetaan sebagai berikut: Misalkan X dan Y adalah himpunan berhingga dan $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi dari X ke Y.

- Jika banyaknya elemen di X lebih banyak dari banyaknya elemen di Y, maka f bukan fungsi satu-satu.
- Jika banyaknya elemen di X sama dengan banyaknya elemen di Y, dan f adalah fungsi yang *onto,* maka f adalah fungsi satu-satu.
- Jika banyaknya elemen di X sama dengan banyaknya elemen di Y, dan f bersifat satu-satu, maka f adalah fungsi yang *onto.*

Penerapan 3. Jika diberikan *m* bilangan bulat $a_1, a_2, \cdots, a_m$, maka terdapat bilangan bulat *m* dan *l* dengan $0 \leq k \leq l \leq m$ sedemikian sehingga $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ dapat dibagi oleh *m*.

Untuk membuktikan hal ini, perhatikan jumlahan *m* suku-suku sebagai berikut:

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m.$$

Jika salah satu suku tersebut dapat dibagi *m*, maka pernyataan di atas berlaku. Jadi dapat diandaikan bahwa setiap jumlahan tersebut di atas memiliki sisa hasil bagi bukan nol jika dibagi dengan *m*, sehingga salah satu sisa hasil baginya sama dengan salah satu dari $1, 2, 3, \cdots, m-1$. Karena ada *m* suku dan hanya *m* – 1 sisa, maka dua dari suku jumlahan tersebut memiliki sisa hasil bagi yang sama jika dibagi dengan *m*. Oleh karena itu, terdapat bilangan-bilangan bulat *k* dan *l* dengan *k* < *l* sedemikian sehingga $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$ dan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_l$ memiliki sisa hasil bagi yang sama jika dibagi dengan *m*:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = bm + r,$$

dan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_l = cm + r.$$

Dengan memperkurangkan persamaan kedua terhadap persamaan pertama, dapat dilihat bahwa $a_{k+1} + \cdots + a_l = (c-b)m$; sehingga $a_{k+1} + \cdots + a_l$ dapat dibagi *m*.

Misalkan *m* = 7 dan bilangan-bilangan bulat $2, 4, 6, 3, 5, 5, \text{dan } 6$. Dengan perhitungan seperti di atas, diperoleh $2, 6, 12, 15, 20, 25, \text{dan } 31$ yang jika dibagi 7 masing-masing memiliki hasil bagi $2, 6, 5, 1, 6, 4, \text{dan } 3$. Terlihat bahwa ada dua sisa pembagian yang sama dengan 6. Hal ini membuktikan bahwa 6 + 3 + 5 = 14 dapat dibagi 7.

Penerapan 4. Seorang master catur melakukan latihan persiapan selama 11 minggu untuk mngikuti suatu pertandingan. Dia memutuskan untuk berlatih setidak-tidaknya satu game per hari. Untuk menghindari kelelahan fisik sebelum bertanding, dia membatasi agar tidak berlatih lebih dari 12 game dalam waktu satu minggu. Tunjukkan bahwa terdapat rentangan waktu yang berturut-turut sedemikian sehingga master catur tersebut berlatih tepat 21 kali game.

Penyelesaian. Misalkan a_1 adalah banyaknya game yang dimainkan pada hari pertama, a_2 adalah banyaknya game yang dimainkan pada hari pertama dan kedua, a_3 adalah banyaknya game yang dimainkan pada hari pertama, kedua, dan ketiga, dan seterusnya. Barisan bilangan $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ menunjukkan bilangan yang semakin besar, karena game yang dilatih setidak-tidaknya satu game per hari. Kemudian, $a_1 \geq 1$ karena dalam satu minggu paling banyak berlatih 12 game, dan $a_{77} \leq 12 \text{x} 11 = 132.$ Dengan demikian,

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{77} \leq 132.$$

Barisan $a_1 + 21, a_2 + 21, a_3 + 21, \cdots, a_{77} + 21$ juga merupakan barisan yang semakin bertambah besar yaitu

$$22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 132 + 21 = 153.$$

Jadi masing-masing ke-154 bilangan

$$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$$

merupakan bilangan-bilangan bulat yang terletak antara 1 dan 153. Dua di antaranya adalah bilangan yang sama. Tetapi karena tidak terdapat dua dari bilangan $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ yang sama, demikian juga $a_1 + 21, a_2 + 21, \cdots, a_{77} + 21$ maka haruslah ada i dan *j* sedemikian sehingga $a_i = a_j + 21.$ Dengan demikian, pada hari $j + 1, j + 2, j + 3, \cdots, i,$ master catur tersebut berlatih sebanyak 21 game tepat.

Penerapan 5a. Dari bilangan-bilangan bulat 1,2,3,…,200, dipilih 101 bilangan bulat. Tunjukkan bahwa di antara bilangan-bilangan bulat yang dipilih tersebut, setidak-tidaknya satu bilangan yang merupakan kelipatan 2.

Penyelesaian: Bilangan bulat 1,2,3,…,200, terdiri atas 200 bilangan. Jika dipilih 100 bilangan bulat dari ke-200 bilangan tersebut, maka salah satu kemungkinan yang terpilih adalah bilangan ganjil semua, yaitu 1,3,5, … ,199, dan tidak satupun bilangan ganjil tersebut yang merupakan kelipatan 2. Tetapi jika dipilih 101 bilangan bulat, maka dipastikan setidak-tidaknya salah satunya adalah bilangan genap (kelipatan 2) bahkan jika 100 bilangan lainnya adalah bilangan ganjil.

Penerapan 5b. Dari bilangan-bilangan bulat 1,2,3,…,200, dipilih 101 bilangan bulat. Tunjukkan bahwa di antara bilangan-bilangan bulat yang dipilih tersebut, terdapat dua bilangan di antaranya sedemikian sehingga bilangan yang satu dapat dibagi oleh bilangan yang lainnya.

Penyelesaian: Dengan memfaktorkan bilangan 2 sebanyak mungkin dari semua bilangan 1,2,3,…,200, dapat diketahui bahwa sebarang bilangan bulat dapat dinyatakan dalam bentuk $2^k xa$ dengan $k \geq 0$ dan a adalah bilangan ganjil. Untuk bilangan bulat antara 1 dan 200, *a* merupakan salah satu dari 100 bilangan 1,3,5,…,199. Jadi dengan memilih 101 bilangan, maka dapat dipastika terdapat dua bilangan yang memiliki nilai *a* yang sama. Misalkanlah kedua bilangan tersebut adalah $2^r xa$ dan $2^s xa$. Jika $r > s$ maka $2^r xa$ dapat dibagi oleh $2^s xa$. Jika $s > r$ maka $2^s xa$ dapat dibagi oleh $2^r xa$.

Dari teori bilangan, telah diketahui bahwa dua bilangan bulat positif *m* dan *n* dikatakan prima relatif jika faktor persekutuan terbesar dari kedua bilangan tersebut adalah 1. Dengan demikian, diketahui bahwa 12 dan 35 merupakan prima relatif satu sama lain, tetapi 12 dan 15 bukan prima relatif karena $3 \neq 1$ merupakan faktor persekutuan terbesar dari kedua bilangan itu.

Penerapan 6. Teorema Sisa Cina. Misalkan *m* dan *n* adalah dua bilangan prima relatif dengan lainnya. Misalkan juga *a* dan *b* adalah bilangan-bilangan bulat dimana $0 \leq a \leq m-1$ dan Dengan batasan-batasan tersebut, terdapat suatu bilangan bulat positif *x* sedemikian sehingga sisa hasil bagi dari *x*/*m* adalah *a*, dan sisa jika *x*/*n* adalah *b*. Dengan kata lain, *x* dapat dinyatakan dalam bentuk $x = pm + a$ dan juga dalam bentuk untuk suatu bilangan bulat *p* dan *q*.

Pembuktian teorema ini dapat ditujukkan dengan *n* bilangan bulat sebagai berikut:

$$a, m+a, 2m+a, \cdots, (n-1)m+a.$$

Masing-masing bilangan bulat ini menghasilkan *a* jika dibagi dengan *m*. Anggap ada dua di antaranya yang memiliki sisa hasil yang sama, *r*, jika dibagi dengan *n*. Misalkan kedua bilangan tersebut adalah *im* + *a* dan *jm* + *a,* dengan $0 \le i \le j \le n-1$. Jadi terdapat bilangan-bilangan bulat q_i dan q_j sedemikian sehingga

$$im + a = q_i n + r$$

dan

$$jm + a = q_j n + r.$$

Dengan memperkurangkan persamaan pertama dari persamaan kedua, diperoleh

$$(j-i)m = (q_j - q_i)n.$$

Hal ini menunjukkan bahwa *n* adalah faktor dari bilangan $(j-i)m$. Karena *n* tidak memiliki faktor persekutuan lain dengan *m* selain faktor 1, maka dengan sendirinya *n* adalah faktor dari *j* – *i*. Meskipun demikian, $0 \le i \le j \le n-1$ menunjukkan bahwa $0 < j - i \le n-1$ dan oleh karena itu *n* tidak mungkin merupakan faktor dari *j* – *i*. Terdapat kontradiksi dalam pernyataan di atas, karena diandaikan bahwa dua dari bilangan-bilangan

$$a, m+a, 2m+a, \cdots, (n-1)m+a$$

akan memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan *n*. Kesimpulannya adalah bahwa setiap bilangan tersebut di atas memiliki sisa hasil bagi yang berbeda jika dibagi dengan *n*. Berdasarkan prinsip sarang merpati, masing-masing bilangan $0, 1, 2, \ldots, n-1$ akan muncul sebagai sisa pembagian. Jika *p* adalah bilangan bulat dengan $0 \le p \le n-1$ sehingga bilangan $x = pm + a$ memiliki sisa *b* jika dibagi dengan *n* maka untuk beberapa *q*,

$$x = qn + b. \tag{4.46}$$

Jadi, $x = pm + a$ dan $x = qn + b$, dan *x* memiliki sifat seperti yang telah disebutkan di atas.

Sebagai latihan, mahasiswa dapat membuktikan bahwa suatu bilangan rasional a/b memiliki ekspansi desimal yang berulang sebagai konsekuensi dari prinsip sarang merpati.

Contoh 4.17: Penerapan prinsip sarang merpati.

a. Apakah dalam kelompok yang terdiri atas 6 orang, dapat dipastikan terdapat setidak-tidaknya dua orang yang lahir pada bulan yang sama? Dalam kelompok yang terdiri atas 13 orang, apakah pasti terdapat setidak-tidaknya dua orang yang lahir pada bulan yang sama? Mengapa?

b. Apakah di antara semua penduduk Indonesia, dapat dipastikan terdapat setidak-tidaknya dua orang yang jumlah helai rambut di kepalanya tepat sama? Mengapa?

Jawab. Tidak dapat dipastikan bahwa dalam kelompok yang terdiri atas 6 orang terdapat setidak-tidaknya dua orang di antaranya yang lahir pada bulan yang sama. Misalkan saja, bahwa keenam orang tersebut lahir pada bulan yang berbeda, yaitu bulan Januari sampai Juni.

Tetapi jika dalam kelompok yang terdiri atas 13 orang, maka dapat dipastikan bahwa setidak-tidaknya terdapat dua orang di antaranya yang lahir pada bulan yang sama. Hal ini disebabkan karena hanya ada 12 kemungkinan bulan kelahiran seseorang, sedangkan dalam kelompok tersebut terdapat 13 orang. Karena 13 > 12 maka dipastikan terdapat setidak-tidaknya dua orang yang lahir pada bulan yang sama.

b. Mahasiswa dapat menjelaskan masalah tersebut sesuai dengan contoh yang telah diberikan sebelumnya.

Contoh 4.18. Jumlah yang harus diambil untuk memastikan hasil. Di dalam lemari tersimpan 2 pasang kaos kaki hitam dan 2 pasang kaos kaki putih. Jika seseorang mengambil beberapa kaos tersebut tanpa melihatnya lebih dulu, berapakah jumlah minimal kaos kaki yang harus diambil agar dapat dipastikan bahwa setidak-tidaknya satu pasang kaos kaki terambil dari lemari?

Jawab. Diketahui bahwa di dalam lemari terdapat 4 kaos kaki yang berwarna hitam dan 4 yang berwarna putih. Jika diambil empat kaos kaki, terdapat salah satu kemungkinan bahwa yang terambil adalah dua kaos kaki hitam sebelah kiri dan dua kaos kaki putih sebelah kiri. Jika diambil lima kaos kaki, maka dipastikan bahwa warna kaos tersebut pasti berpasangan dengan salah satu dari kaos kaki yang telah diambil sebelumnya. Jadi jumlah minimal yang harus diambil adalah sekurang-kurangnya lima kaos kaki.

D.2. Prinsip Sarang Merpati Bentuk Kedua

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan berhingga X ke suatu himpunan berhingga Y dan $|X| > |Y|$ *maka* $f(x_1) = f(x_2)$ *untuk beberapa* $x_1, x_2 \in X$ *dimana* $x_1 \neq x_2$.

Bukti: Asumsikan *X* sebagai himpunan merpati dan *Y* sebagai himpunan sarang merpati. Selanjutkan merpati *x* akan dipasangkan dengan sarang merpati $f(x)$. Karena jumlah merpati lebih banyak dari pada sarangnya, maka terdapat paling sedikit dua merpati, $x_1, x_2 \in X$ yang dipasangkan dengan sarang yang sama, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dengan $x_1 \neq x_2$. Kasus khusus dari prinsip sarang merpati dinyatakan dalam Teorema 4.4.

Teorema 4.4. Misalkan $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ adalah bilangan-bilangan bulat positif. Jika $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n - 1$ objek dimasukkan ke dalam *n* kotak, maka kemungkinan kotak pertama berisi setidak-tidaknya q_1 objek, atau kotak kedua berisi setidak-tidaknya q_2 objek, $\cdots$, atau kotak ke-*n* berisi setidak-tidaknya q_n objek.

Bukti. Misalkan akan didistribusikan $q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$ objek ke dalam *n* kotak. Jika untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ kotak $ke - i$ berisi kurang dari q_i objek, maka total banyaknya objek di dalam semua kotak tidak akan lebih dari

$$(q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \cdots + (q_n - 1) = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n.$$

Karena jumlah ini kurang satu dari pada jumlah objek yang didistribusikan, maka dapat disimpulkan bahwa untuk beberapa $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ kotak $ke - i$ berisi setidak-tidaknya q_i objek.

Perhatikan bahwa $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n$ objek dapat didistribusikan ke dalam *n* kotak dengan cara tertentu sehingga tidak terdapat $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ yang memungkinkan kotak $ke - i$ berisi q_i atau lebih objek. Hal ini dilakukan dengan memasukkan $q_1 - 1$ objek ke dalam kotak pertama, $q_2 - 1$ objek ke dalam kotak kedua, dan seterusnya.

Bentuk sederhana prinsip sarang merpati diperoleh dari bentuk kuat dengan memilih $q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_n = 2$ sehingga

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n - n + 1 = 2n - n + 1 = n + 1.$$

Bentuk kuat dari prinsip sarang merpati pada umumnya dapat diterapkan dalam kasus khusus apabila semua $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ memiliki nilai yang sama dengan suatu bilangan bulat tertentu, misalnya *r*. Pada kasus ini, prinsip sarang merpati dijabarkan sebagai berikut:

- Jika $n(r-1)+1$ objek dimasukkan ke dalam *n* kotak, maka setidak-tidaknya ada satu kotak yang berisi *r* atau lebih objek. Atau,
- Jika rata-rata dari *n* bilangan bulat non-negatif $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ lebih besar dari $r-1$, yaitu

$$\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n} > r-1,$$

maka setidak-tidaknya satu dari bilangan tersebut lebih besar atau sama dengan *r*.

Hubungan antara kedua rumusan tersebut di atas diperoleh dengan memilih $n(r-1)+1$ objek kemudian memasukkannya ke dalam *n* kotak. Misalkan m_i adalah banyaknya objek yang ada di dalam kotak $ke-i$ untuk $i=1,2,3,\cdots,n,$ maka rata-rata dari bilangan $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ adalah

$$\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n} = \frac{n(r-1)+1}{n} = (r-1)+\frac{1}{n}.$$

Karena nilai rata-rata ini lebih besar dari $r-1$ maka salah satu dari bilangan bulat m_i bernilai setidak-tidaknya sama dengan *r*. Dengan kata lain, salah satu dari kotak berisi setidak-tidaknya *r* objek.

Prinsip nilai rata-rata dapat juga dinyataka dalam bnetuk lain sebagai berikut:

- Jika nilai rata-rata dari *n* bilangan bulat non-negatif $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ kurang dari $r+1$, yaitu

$$\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n} < r+1,$$

maka setidak-tidaknya ada salah satu bilangan bulat tersebut yang bernilai kurang dari $r+1$.
- Jika nilai rata-rata dari *n* bilangan bulat non-negatif $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ setidak-tidaknya bernilai sama dengan *r*, maka setidak-tidaknya salah satu dari bilangan bulat tersebut bernilai sekurang-kurangnya sama dengan *r*.

Penerapan 7. Suatu keranjang akan diisi dengan buah apel, pisang, dan jeruk. Berapakah jumlah paling sedikit buah yang harus dimasukkan ke dalam keranjang agar dapat dipastikan bahwa keranjang tersebut berisi setidak-tidaknya 8 apel atau setidak-tidaknya 6 pisang, atau setidak-tidaknya 9 jeruk?

Berdasarkan pemahaman kita tentang bentuk kuat prinsip sarang merpati, maka dapat diketahui bahwa $8+6+9-3+1=21$ buah yang dimasukkan ke dalam keranjang, buah manapun yang dipilih, akan menjamin bahwa keranjang tersebut akan berisi buah sesuai dengan syarat yang diberikan. Jika dimasukkan 7 apel, 5 pisang, dan 8 jeruk maka syarat tersebut di atas tidak dapat terpenuhi.

Penerapan 8. Dua piringan yang ukurannya berbeda, masing-masing dibagi menjadi 200 sektor yang kongruen. Pada piringan yang lebih besar, 100 sektor di antaranya dipilih secara bebas kemudian diwarnai dengan warna merah; 100 sektor lainnya diberi warna biru. Pada piringan yang lebih kecil, masing-masing sektor diberi warna merah dan biru tetapi belum diketahui berapa sektor yang berwarna merah dan biru. Piringan kecil diletakkan di atas piringan besar sedemikian sehingga titik pusatnya berimpit. Tunjukkan bahwa kedua piringan dapat disusun sedemikian sehingga setidak-tidaknya terdapat 100 sektor yang berimpit pada piringan kecil memiliki warna yang sama dengan piringan besar.

Untuk membuktikan hal ini, andaikan bahwa jika piringan besar tidak berubah posisinya, maka ada 200 kemungkinan posisi dari piringan kecil sedemikian sehingga masing-masing sektornya berimpit dengan salah satu sektor pada piringan besar. Karena piringan besar memiliki 100 sektor yang berwarna merah dan biru, maka masing-masing sektor pada piringan kecil akan memiliki warna yang sama dengan piringan besar sebanyak 100 dari 200 kemungkinan posisi. Jadi banyaknya posisi sektor piringan kecil dengan warna yang bersesuaian piringan besar adalah jumlah sektor piringan kecil dikali 100, yaitu sebanyak 20.000. Oleh karena itu rata-rata banyaknya kecocokan warna untuk setiap posisi piringan kecil adalah 20.000/200 = 100. Dengan kata lain ada salah satu dari 20.000 posisi tersebut sehingga 100 sektor yang berimpit dari kedua piringan memiliki warna yang sama (merah maupun biru).

Contoh 4.19. Sebanyak 370 mahasiswa memprogramkan mata kuliah tertentu. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya dua di antara mahasiswa tersebut lahir pada hari, tanggal, bulan, dan tahun yang sama.

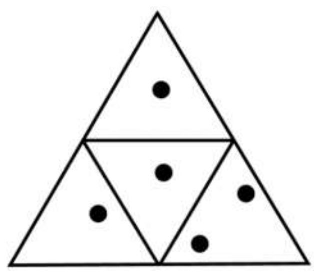
Jawab. Misalkan *M* adalah himpunan mahasiswa dan *T* adalah banyaknya hari dalam satu tahun. Karena diketahui bahwa $|\mathrm{M}|=370>366=|\mathrm{T}|$, maka menurut prinsip sarang merpati, suatu fungsi dari M ke T akan menunjukkan adanya setidak-tidaknya dua elemen M yang merupakan elemen dari T yang sama.

Contoh 4.20. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat setidak-tidaknya dua dari n + 1 bilangan $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \cdots, \mathrm{m}_{n+1}$ yang selisihnya merupakan kelipatan n.

Bukti: Misalkan $P = \{\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \cdots, \mathrm{m}_{n+1}\}$ dan H adalah n sisa modulo yang mungkin, yaitu $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Prinsip sarang merpati menyatakan bahwa setidak-tidaknya dua bilangan memiliki sisa pembagian modulo n dan oleh karena itu n dapat membagi selisih kedua bilangan tersebut.

Contoh 4.21. Lima butir kelereng diletakkan di dalam suatu segitiga sama sisi yang panjang sisinya adalah 1 satuan. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya dua kelereng di antaranya berjarak tidak lebih dari 0,5 satuan.

Jawab. Jika segitiga tersebut dibagi menjadi empat segitiga sama sisi yang sama besar, maka panjang setiap sisi segitiga tersebut adalah 0,5 satuan. Selanjutnya karena ada lima kelereng dan akan ditempatkan ke dalam empat segitiga yang lebih kecil, maka setidak-tidaknya dua kelereng pasti berada di dalam segitiga yang sama. Karena diketahui bahwa jarak maksimum antara titik-titik dalam satu segitiga kecil adalah 0,5, maka setidak-tidaknya dua kelereng berjarak paling jauh 0,5 satu dengan yang lainnya.



Contoh 4.22. Tunjukkan bahwa dalam satu kelas yang terdiri dari 61 orang mahasiswa, setidak-tidaknya terdapat 6 orang yang lahir pada bulan yang sama.

Jawab. Misalkan *M* adalah himpunan mahasiswa dan *B* adalah himpunan bulan kelahiran mahasiswa tersebut. Karena $|M| = 61 \geq 12x5 = 60 = 5x|B|$, maka dapat dipastikan setidak-tidaknya 6 orang lahir pada bulan yang sama.

Contoh 4.23. Diketahui 145 biji-bijian disebarkan ke dalam suatu kotak berbentuk persegi panjang berukuran 6 x 16 cm. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya 7 butir biji-bijian tersebut terletak pada jarak kurang dari 3 cm satu dengan yang lainnya.

Jawab. Dengan membagi persegi panjang menjadi 3 x 8 = 24 bujursangkar yang panjang sisinya 2 cm, maka salah satu kotak tersebut memuat 7 biji-bijian (buktikan). Dengan demikian jarak antara sebarang dua biji-bijian di dalam bujursangkar yang sama, paling jauh berjarak $2\sqrt{2} < 3$ cm.

Contoh 4.24. Membuat kode matakuliah untuk kurikulum program studi pendidikan matematika dilakukan dengan cara menambahkan tiga angka pada huruf MAT. Terdapat 51 matakuliah yang harus diberi kode dan tiga angka yang harus ditambahkan pada huruf MAT harus berkisar antara 101 sampai dengan 200. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit dua matakuliah yang diberi kode dengan angka berurutan.

Jawab. Misalkan angka-angka yang dipilih adalah $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$. Jika angka-angka tersebut digunakan secara bersamaan dengan angka-angka $a_{1+1}, a_{2+1}, \ldots, a_{51+1}$ maka terdapat 102 nomor urut antara 101 sampai dengan 201. Karena ada 100 nomor yang disediakan (yaitu 101 sampai dengan 200) dan ada 102 nomor yang akan digunakan, maka terdapat paling sedikit dua nomor yang sama. Nomor urut $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$ dan $a_{1+1}, a_{2+1}, \ldots, a_{51+1}$ semuanya berbeda, sehingga didapatkan $a_i = a_{j+1}$ yang menunjukkan bahwa kode a_i berurutan dengan kode a_j.

D.3. Penerapan Teori Bilangan

Prinsip sarang merpati dapat diterapkan untuk menyelesaikan beberapa masalah di dalam teori bilangan. Salah satunya adalah untuk menyelesaikan masalah tentang keterbagian bilangan. Jika suatu bilangan asli dibagi dengan bilangan asli lainnya, misalkanlah *m* maka akan terdapat *m* sisa pembagian yang mungkin, yaitu $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Menurut prinsip sarang merpati, dapat dibuktikan bahwa di antara $m+1$ bilangan asli yang berbeda, paling sedikit terdapat dua bilangan berbeda yang menghasilkan sisa yang sama apabila dibagi dengan *m*.

Misalnya dari 5 bilangan asli berbeda, terdapat dua bilangan yang menghasilkan sisa yang sama apabila dibagi 4. Contoh lainnya, misalkan terdapat *a*, yaitu bilangan relatif prima dari 2 dan 5. Dapat ditunjukkan bahwa untuk suatu *n*, terdapat bilangan *a* berpangkat yang berakhir dengan $000\ldots1$ dimana terdapat $n-1$ digit 0.

Pernyataan tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut. Misalkan terdapat 10^n bilangan, yaitu $a^1, a^2, \cdots, a^{10n}$. Bagi semua bilangan dengan 10^n. Karena *a* relatif prima terhadap 10 maka sisa pembagian 0 tidak akan muncul sehingga terdapat 10^n-1 kemungkinan sisa, yaitu $1,2,3,\ldots,10^n-1$. dan akan terdapat dua bilangan dengan sisa yang sama. Anggaplah bahwa kedua bilangan tersebut adalah a^p dan a^q dengan $p>q$. Karena kedua bilangan memberikan sisa yang sama bila dibagi dengan 10^n, maka a^p-a^q habis dibagi 10^n. Karenanya, $10^n \mid a^q(a^{p-q}-1)$ dan haruslah $10^n \mid a^{p-q}-1$ karena 10 dan *a* relatif prima satu dengan yang lainnya. Dengan demikian, $a^{p-q}=m.10^n+1$ untuk suatu bilangan bulat *m*. Bilangan tersebut berakhir dengan $\underbrace{000\ldots1}_{n}$.

Sifat yang telah dibuktikan di atas juga dapat digunakan untuk membuktikan bentuk lain dari Teorema Sisa China yang menyatakan bahwa untuk sebarang dua bilangan relatif prima *m* dan *n*, terdapat *a* dan *b* dengan $0\le a<m$ dan $0\le b<n$ sehingga terdapat *x* yang dapat dinyatakan sebagai $x=pm+a=qn+b$ untuk sebarang $p,q\in\mathbb{Z}$.

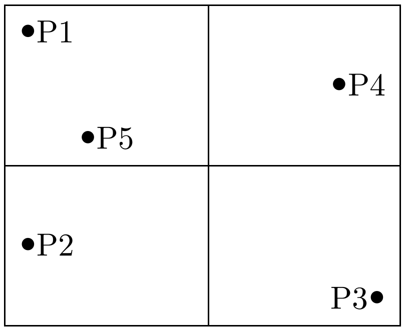
Bukti: Misalkan diketahui bilangan-bilangan $a, m+a, 2m+a, \ldots, (n-1)m+a$ yang semuanya bersisa *a* jika dibagi *m*. Asumsikan bahwa dua di antaranya, yaitu $im+a$ dan $jm+a$ memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan *n* dimana $0\le i<j\le n-1$. Selisih kedua bilangan habis dibagi *n* atau $n \mid (j-i)m$. Karena *m* dan *n* relatif prima maka $n \mid (j-i)$. Hal ini tidak dimungkinkan karena *i* dan *j* tidak lebih besar dari *n* sementara *n* harus lebih kecil atau sama dengan $j-i$. Oleh karena itu, asumsi bahwa kedua bilangan tersebut memiliki sisa yang sama jika dibagi dengan *n* merupakan asumsi yang salah dan ke-*n* bilangan itu memiliki sisa yang berbeda-beda jika dibagi *n*, yaitu $0\le r<n$, termasuk *b*. Misalkan bilangan yang bersisa *b* jika dibagi *n* adalah $pm+a$, maka diperoleh suatu nilai *x* sehingga $x=pm+a=qn+b$.

D.4. Penerapan Geometri

Prinsip sarang merpati juga dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah geometri, misalnya jarak antar titik di bidang. Pada bidang dua dimensi, dari 5 titik dengan komponen absis dan ordinatnya bilangan bulat yang dipilih secara acak, dapat ditunjukkan adanya sepasang titik yang memiliki titik tengah dengan komponen absis dan ordinat berupa bilangan bulat.

Pernyataan ini dapat dibuktikan dengan menggunakan prinsip sarang merpati. Setiap bilangan bulat memiliki dua kemungkinan paritas, yaitu paritas genap atau ganjil. Nilai rata-rata dari dua bilangan bulat akan bulat jika paritasnya sama genap atau sama-sama ganjil. Dengan demikian pasangan titik yang dimaskudkan di atas akan memiliki salah satu dari pasangan paritas (genap, genap), (ganjil, ganjil), (genap, ganjil), atau (ganjil, genap). Menurut prinsip sarang merpati, jika dipilih 5 titik latis (titik tengah pada garis yang menghubungkan dua titik, yang memiliki absis dan ordinat berupa bilangan bulat), maka akan didapatkan dua titik dengan pasangan paritas yang sama. Kesamaan pasangan paritas mengakibatkan nilai rata-rata merupakan bilangan bulat sehingga titik tengahnya merupakan titik dengan absis dan ordinat bernilai bulat.

Hal yang sama berlaku juga untuk bidang tiga dimensi. Jika diketahui dua titik dengan titik tengah yang bernilai bulat dari sembilan titik yang dipilih sebelumnya. Prinsip sarang merpati dapat digunakan untuk mengetahui jarak antar titik di dalam bidang datar. Misalkan dipilih 5 titik yang terletak secara acak di dalam suatu daerah persegi dengan panjang sisi 2 satuan, maka terdapat setidak-tidaknya dua titik yang berjarak kurang dari atau sama dengan jarak titik diagonal daerah tersebut yaitu $\sqrt{2}$ satuan. Untuk membuktikan hal itu, maka persegi tersebut dibagi menjadi empat wilayah persegi kecil yang panjang sisinya 1 cm. Empat titik pertama haruslah diletakkan pada persegi kecil yang berbeda karena jarak terjauh adalah $\sqrt{2}$ cm. Bagaimanapun juga titik kelima harus diletakkan pada salah satu persegi kecil yang sudah ditempati setidak-tidaknya satu titik. Dengan demikian, jarak titik kelima dengan titik lainnya dalam satu persegi kecil yang sama dengan titik kelima tersebut haruslah lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{2}$ cm.



Gambar 4.8. Jarak maksimum antar titik

D.5. Penerapan Prinsip Sarang Merpati Pada Ekspansi Desimal Bilangan Pecahan

Salah satu konsekuensi penting dari prinsip sarang merpati ialah fakta bahwa ekspansi desimal dari sebarang bilangan rasional dapat berbentuk desimal berulang atau desimal berhingga. Desimal berhingga misalnya 3,625 dan desimal berulang misalnya $2,38\overline{246}$. Garis di atas angka-angka 246 menunjukkan bahwa angka-angka tersebut berulang terus-menerus.

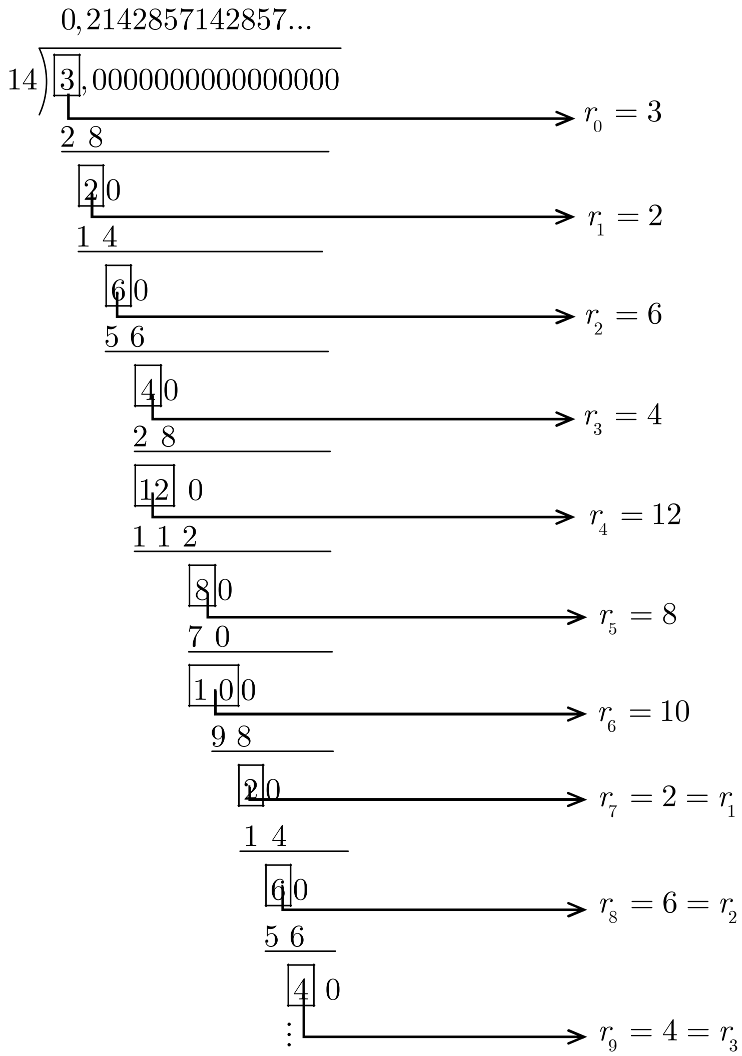
Seperti diketahui, bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dituliskan sebagai rasio bilangan-bilangan bulat, atau dengan kata lain dapat dituliskan dalam bentu bilangan pecahan. Telah diketahui juga bahwa ekspansi desimal dari suatu pecahan diperoleh dengan cara membagi pembilang terhadap penyebutnya melalui pembagian panjang. Sebagai contoh, ekspansi desimal dari 4/33 diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{array}{r}
0,12121212 \\
33\overline{)4,00000000} \\
\underline{3\,3} \\
7\,0 \\
\underline{6\,6} \\
4\,0 \\
\underline{3\,3} \\
7\,0 \\
\underline{6\,6} \\
4\,0 \\
\underline{3\,3} \\
\vdots
\end{array}
$$

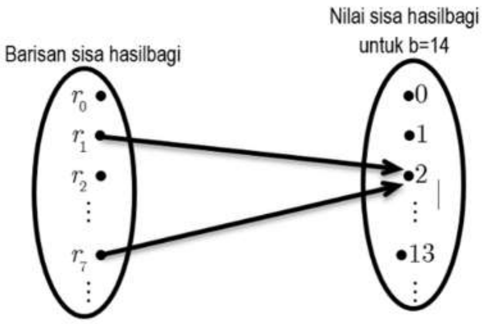
Karena 4 muncul secara berulang sebagai sisa dari proses pembagian panjang, maka barisan hasil bagi dan sisa pembagian akan berulang terus menerus. Secara umum jika suatu bilangan bulat dibagi oleh bilangan bulat lainnya, maka prinsip sarang merpati menjamin bahwa perulangan sisa hasil bagi dan dengan sendirinya angka-angka desimal akan selalu muncul.

Contoh 4.25. Ekspansi desimal suatu pecahan

Misalkan suatu pecahan *a/b*, dimana *a* dan *b* positif. Ekspansi desimal dari *a/b* diperoleh dengan membagi *a* terhadap *b* seperti pada contoh dibawah ini, dengan *a* = 3 dan *b* = 14.



Misalkan $r_0 = a$ dan $r_1, r_2, r_3, \cdots$ adalah sisa pembagian berturut-turut yang diperoleh dari pembagian panjang a/b. berdasarkan teorema pembagian sisa, masing-masing sisa hasil bagi bernilai antara 0 dengan $b-1$. Dalam contoh ini, $a = 3$ dan $b = 14$ maka sisa hasil baginya bernilai antara 0 sampai dengan 13. Jika terdapat sisa hasil bagi $r_i = 0$, maka pembagian tersebut berhingga dan a/b memiliki nilai ekspansi desimal yang berhingga. Jika tidak terdapat $r_i = 0$ maka proses pembagian panjang dan juga ekspansi desimalnya berulang terus-menerus, atau tidak berhingga. Berdasarkan prinsip sarang merpati, karena sisa hasil bagi lebih banyak dari pada nilai sisa pembagian, maka terdapat nilai tertentu yang akan berulang, $r_j = r_k$ untuk suatu indeks *j* dan *k* dengan $j < k$. Hal ini digambarkan dibawah ini untuk $a = 3$ dan $b = 14$. Hal ini menunjukkan bahwa digit desimal yang diperoleh dari pembagian antara r_j dan r_{k-1} berulang terus-menerus. Pada kasus 3/14, perulangan terjadi pada $r_7 = 2 = r_1$ dan ekspansi desimalnya berulang mulai dari pembagian r_1 sampai dengan r_6. Ekspansi desimal yang diperoleh adalah $3/14 = 0,2\overline{142857}$.



Karena ekspansi desimal dari sebarang bilangan rasional dapat berulang atau berhingga, maka jika suatu bilangan memiliki ekspansi desimal yang tidak berulang ataupun tidak berhingga, maka bilangan tersebut bukan bilangan rasional. Bilangan berikut ini bukan bilangan rasional: $0,01011011101111011111\ldots$ dimana setiap angka 1 yang muncul tidak lebih banyak dari digit semua bilangan yang mendahuluinya.

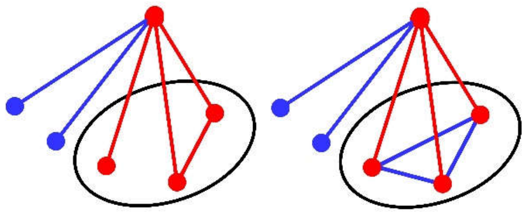
E. Teorema Ramsey

Teorema Ramsey merupakan generalisasi dari prinsip sarang merpati. Teori *Ramsey* diperkenalkan oleh Paul Erdos dan George Skenerez pada tahun 1935 sebagai bagian dari teori graf untuk melakukan pewarnaan garis-garis pada graf. Graf yang diwarnai dengan teori Ramsey adalah graf lengkap. Graf lengkap adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda dihubungkan dengan tepat satu garis. Pada graf lengkap biasanya digunakan banyak warna untuk mewarnai garis-garisnya, tetapi dengan teori Ramsey garis-garis pada graf lengkap akan diwarnai dengan dua warna saja. Penerapan teori Ramsey pada pewarnaan graf dapat ditunjukkan jika terdapat bilangan positif *m* dan *n*, maka dapat ditentukan bilangan bulat terkecil $s = r(m, n)$ sedemikian sehingga bila sisi-sisi graf lengkap K_s dengan *s* titik diwarnai dengan merah dan biru, maka akan terbentuk subgraf K_m merah atau K_n biru.

Prinsip sarang merpati dapat diterapkan dalam pewarnaan sisi graf. Prinsip ini dapat menentukan eksistensi suatu graf komplet dengan satu warna, yang dijabarkan dalam Teorema Ramsey. Prinsip umum dari Teorema Ramsey secara sederhana dirumuskan bahwa *jika terdapat enam orang berbeda, dapat ditemukan setidak-tidaknya tiga pasang orang yang saling mengenal atau saling tidak mengenal.*

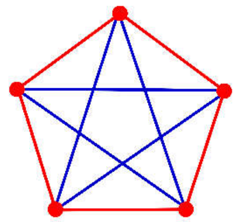
Bukti dari pernyataan tersebut dapat dilakukan dengan memisalkan keenam orang sebagai enam titik pada suatu graf. Jika orang pertama mengenal orang kedua, atau orang ketiga, atau orang keempat, dan seterusnya, maka hubungannya digambarkan sebagai sisi berwarna merah. Jika orang pertama tidak mengenal orang kedua, atau orang ketiga, atau orang keempat, dan seterusnya, maka hubungannya digambarkan sebagai sisi berwarna biru. Hubungan semua orang tersebut diperlihatkan dalam suatu K_6.

Pandang salah satu titik sebagai titik P1 yang memiliki 5 sisi yang menyatakan hubungannya dengan kelima titik lainnya. Dalam hal ini, menurut prinsip sarang merpati, paling sedikit terdapat tiga sisi berwarna warna sama, misalkan merah. Selanjutnya, perhatikan tiga sisi yang berwarna sama tersebut. Andaikan titik-titik yang dihubungkan dengan p_1 adalah $p_2, p_3, \text{dan } p_4,$ dan semua sisi $(p_2,p_3),(p_2,p_4),(p_3,p_4)$ tidak berwarna merah, maka ketiga sisi tersebut membentuk segitiga dengan warna biru. Jika salah satu sisinya berwarna merah, maka akan diperoleh sebuah segitiga semua sisinya berwarna merah.



Gambar 4.9. Segitiga monokromatik pada K_6

Penjelasan berikut ini tentang bilangan Ramsey yang dilambangkan dengan $R(m,n)$ yaitu jumlah titik minimum pada suatu graf sedemikian sehingga dapat ditentukan salah satu dari K_m dan K_n yang berwarna sama. Pada contoh 6 orang yang saling kenal atau tidak saling kenal, bilangan Ramsey dinyatakan dengan $r(3,3)=6.$ Dapat ditunjukkan bahwa $r(3,3) \neq 5$ karena pewarnaan K_5 dengan warna merah dan biru tidak menghasilkan segitiga yang sisi-sisinya berwarna sama.



Gambar 4.10. Segilima monokromatik pada K_5

Gambar 4.10. di atas adalah salah satu kemungkinan pewarnaan K_5 sedemikian sehingga tidak terdapat satu segitiga yang semua sisinya berwarna sama. Gambar tersebut dapat digunakan untuk menentukan nilai dari $r(2,n)$ dengan $r(2,n) \leq n$ karena untuk K_n dengan dua warna, dapat ditunjukkan bahwa salah satu sisinya memiliki warna berbeda dari sisi lainnya (K_2), atau semua sisi K_n berwarna sama. Kita juga dapat menentukan dari $r(2,n)$ dengan $r(2,n) > n-1$ karena jika semua sisi K_{n-1} berwarna sama, maka tidak akan terdapat K_2 atau K_n yang semua sisinya berwarna sama. Dengan cara yang tersebut, dapat dibuktikan bahwa $r(m,n) = r(n,m)$. Hingga saat ini belum dapat ditentukan rumus baku untuk menentukan nilai dari $r(m,n)$ untuk nilai *m* dan *n* yang sangat besar. Meskipun demikian, dapat ditentukan batasan nilai tersebut dengan menggunakan induksi matematika.

Batasan tersebut adalah $r(m,n) \leq r(m,n-1) + r(m-1,n)$. Ada atau tidak adanya nilai $r(m,n)$ dapat diketahui dengan menentukan batas atasnya. Dari induksi matematika, diketahui bahwa $r(m,n-1)$ dan $r(m-1,n)$ ada. Selanjutnya, perhatikan suatu graf lengkap dengan jumlah titik $r(m,n-1) + r(m-1,n)$. Misalkan dipilih titik *v* dan membagi sisanya ke dalam himpunan *M* dan *N* dengan ketentuan titik *w* ditetapkan sebagai anggota *M* jika (v,w) berwarna merah dan sebagai anggota *N* jika (v,w) berwarna biru. Karena graf tersebut memiliki $|M| + |N| + 1$ titik, maka salah satu dari pernyataan berikut benar: $|M| \geq r(m-1,n)$ atau $|N| \geq r(m,n-1)$. Jika graf pada himpunan *M* memuat K_n sisi yang berwarna merah, maka graf awal juga memuat K_n sisi yang berwarna merah. Jika graf pada himpunan *M* memuat K_{m-1} sisi yang berwarna biru, maka graf awal juga memuat

K_{m-1} sisi yang berwarna biru. Prinsip sarang merpati menjadi dasar dalam penentuan nilai dari bilangan Ramsey.

Bayangkan ada 6 orang di suatu pesta. Diasumsikan bahwa untuk setiap tiga orang di antaranya, maka ORANG PERTAMA MENGENAL KEDUA ORANG LAINNYA, atau TIDAK MENGENAL KEDUA ORANG LAINNYA. Jadi dapat diasumsikan bahwa jika p_1 mengenal p_2, maka p_2 mengenal p_1.

Klaim: Setidak-tidaknya ada 3 orang yang mengenal 3 orang yang lainnya, atau setidak-tidaknya ada 3 orang yang tidak mengenal 3 orang lainnya.

Bukti: Misalkan keenam orang tersebut adalah $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \text{dan } p_6$. Perhatikan p_6. Di antara 5 orang lainnya, terdapat setidak-tidaknya 3 orang yang dikenal oleh p_6, atau terdapat setidak-tidaknya 3 orang yang tidak dikenal oleh p_6.

Mengapa begitu? Misalkan bahwa di antara 5 orang lainnya, terdapat paling banyak 2 orang yang dikenal oleh p_6 dan paling banyak 2 orang yang tidak dikenal oleh p_6. Dengan demikian diketahui bahwa hanya ada 4 orang lain, selain p_6. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa ada 5 orang lain selain p_6. Misalkan p_6 mengenal setidak-tidaknya 3 orang lainnya, misalnya $p_1, p_2, \text{dan } p_3$. Ketiga orang tersebut juga mengenal tiga orang yang lainnya.

- Jika p_1 mengenal p_2, maka $p_1, p_2, \text{dan } p_6$ semuanya saling mengenal.
- Jika p_1 mengenal p_3, maka $p_1, p_3, \text{dan } p_6$ semuanya saling mengenal.
- Jika p_2 mengenal p_3, maka $p_2, p_3, \text{dan } p_6$ semuanya saling mengenal.

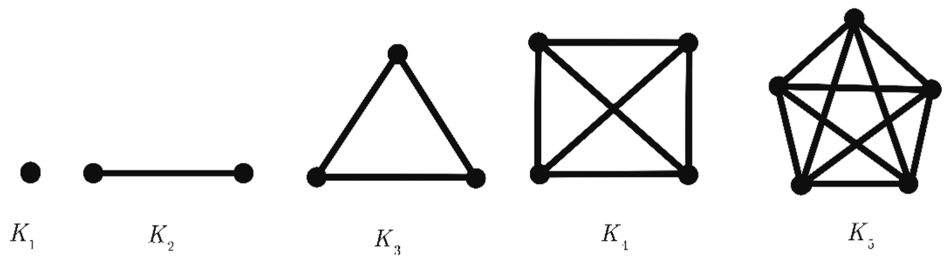
Bagaimana jika tidak satupun dari skenario di atas yang berlaku? Jika tdak ada pernyataan di atas yang dipenuhi, maka tidak ada dari ketiga orang ini (p_1, p_2, p_3) yang mengenal 2 orang lainnya. Dengan demikian klaim di atas telah terbukti. Proposisi 4.1 di bawah ini merupakan contoh Teorema Ramsey yang paling terkenal dan mudah dipahami:

Proposisi 4.1. Di antara 6 (atau lebih) orang, terdapat tiga orang yang saling kenal, atau terdapat tiga orang yang tidak saling kenal.

Salah satu cara untuk membuktikan pernyataan ini adalah dengan menunjukkan semua kemungkinan dari keenam orang untuk mengenal atau tidak mengenal kelima orang lainnya. Cara ini tidak praktis karena tidak mudah dilakukan untuk menguji jumlah yang lebih banyak. Ada cara yang lebih sederhana untuk membuktikan teorema tersebut. Sebelum memberikan bukti tersebut, akan dijelaskan rumusan yang lebih abstrak sebagai berikut:

$$K_6 \to K_3, K_3 \quad \text{dibaca} \quad K_6 \text{ panah } K_3, K_3 \ (2.1)$$

K_6 menyatakan suatu himpunan yang terdiri atas 6 objek dan semua 15 pasangan (tanpa memperhatikan urutan) objek-objek ini. Kita dapat membayangkan K_6 dengan memilih 6 titik yang terletak pada suatu bidang datar, tidak ada 3 titik yang terletak pada garis lurus yang sama, kemudian menggambarkan sisi atau segmen garis yang menghubungkan setiap pasang titik. Secara umum, K_n adalah himpunan *n* objek dan semua pasangan dari objek-objek tersebut (di dalam teori graf, K_n disebut *graf lengkap berorde n*). Ilustrasi K_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ diperlihatkan pada Gambar 4.11. Perhatikan bahwa gambar dari K_3 berbentuk segitiga, karena itu K_3 sering disebut sebagai *segitiga.*



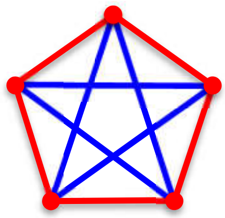
Gambar 4.11. Graf berorde 1, 2, 3, 4, 5.

Untuk membedakan pasangan yang saling kenal dengan yang tidak saling kenal di dalam diagram seperti pada gambar di atas, maka digunakan dua warna yang berbeda. Sisi yang menyatakan dua orang saling kenal digambarkan dengan warna merah, dan sisi yang menggambarkan dua orang tidak saling kenal digambarkan dengan warna biru. “Tiga orang yang saling kenal”, digambarkan sebagai K_3 yang masing-masing sisinya berwarna merah, ringkasnya K_3 merah.” Dengan demikian, tiga orang yang tidak saling kenal digambarkan sebagai K_3 biru. Berdasarkan gambaran ini, Proposisi 4.1 dapat dijelaskan sebagai berikut:

$K_6 \rightarrow K_3, K_3$ menyatakan bahwa warna apapun yang digunakan pada sisi K_6, merah maupun biru, sisi K_3 selalu berwarna merah (3 dari 6 titik awal dihubungkan dengan 3 garis yang selalu berwarna merah) atau sisi K_3 selalu berwarna biru (3 dari 6 titik awal dihubungkan dengan 3 garis yang selalu berwarna biru), singkatnya, selalu terdapat satu segitiga yang semua sisinya berwarna sama.

Untuk membuktikan $K_6 \rightarrow K_3, K_3$, dapat dijelaskan sebagai berikut: Misalkan sisi-sisi K_6 diberi warna merah atau biru dengan sebarang cara. Jika terdapat titik *p* pada sisi K_6 maka titik *p* tersebut dapat dihubungkan dengan titik-titik lainnya melalui 5 sisi. Karena setiap sisi ini berwarna merah atau biru, maka menurut prinsip sarang merpati bentuk kuat, setidak-tidaknya 3 sisi tersebut berwarna merah atau setidak-tidaknya 3 sisi tersebut berwarna biru. Misalkan 3 sisi yang dihubungkan dengan titik *p* berwarna biru. Sisi berwarna biru tersebut misalkan menghubungkan titik *p* dengan titik-titik *a, b,* dan *c.* Perhatikan bahwa sisi-sisi yang menghubungkan ketiga titik tersebut berpasangan. Jika semua sisi tersebut berwarna merah maka *a, b, c,* akibatnya terdapat satu K_3 merah. Jika salah di antara sisi tersebut berwarna biru, maka *p, a, b,* membentuk satu K_3 biru. Dengan demikian dapat dipastikan bahwa selalu terdapat K_3 yang berwarna merah atau biru.

$K_5 \rightarrow K_3, K_3$, adalah pernyataan yang salah. Hal ini disebabkan karena pada saat tertentu, sisi-sisi K_5 dapat diwarnai tanpa membentuk satu K_3 merah atau biru. Gambar di bawah ini memperlihatkan sisi-sisi yang berwarna merah dan biru pada suatu pentagon. Pada gambar tersebut tidak dapat dibentuk satu segi tiga yang semua sisinya berwarna merah atau semua berwarna biru.



Gambar 4.12. Sisi-sisi pada segilima

Jika $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ adalah bilangan-bilangan bulat, maka terdapat suatu bilangan bulat positif *p* sedemikian sehingga $K_p \rightarrow K_m, K_n$. Dengan kata lain, jika ditentukan *m* dan *n* maka terdapat bilangan bulat positif *p* sedemikian sehingga jika sisi-

sisi K_p berwarna merah atau biru, maka ada kemungkinan didapatkan K_m berwarna merah atau sisi-sisi K_n berwarna biru. Adanya K_m berwarna merah atau K_n berwarna biru dapat dipastikan, bagaimanapun cara memberi warna terhadap sisi-sisi K_p.

Jika $K_p \to K_m, K_n$, maka $K_q \to K_m, K_n$, untuk sebarang bilangan bulat $q \geq p$. Bilangan Ramsey $r(m,n)$ adalah bilangan bulat terkecil *p* sedemikian sehingga $K_p \to K_m, K_n$. Bilangan Ramsey menyatakan adanya bilangan $r(m,n)$. salah satunya telah dibuktikan bahwa $r(3,3) = 6$. Bilangan Ramsey $r(2,n)$ dan $r(m,2)$ dapat ditentukan. Bilangan $r(2,n) = n$ dapat dijelaskan sebagai berikut:

- $(r(2,n) \leq n)$: Jika sisi-sisi dari K_n diberi warna biru atau merah, maka akan terdapat beberapa sisi yang berwarna merah (sehingga diperoleh K_2 merah), atau semua sisi berwarna biru (sehingga diperoleh K_n biru).
- $(r(2,n) > n-1)$: Jika semua sisi K_{n-1} diberi awrna biru, maka tidak dapat diperoleh K_2 merah maupun K_n biru.

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa $r(m,2) = m$. Bentuk ini merupakan *Bilangan Ramsey trivial*. Secara umum, dengan mempertukarkan warna merah dan biru, dapat ditunjukkan bahwa $r(m,n) = r(n,m)$. Bilangan Ramsey non-trivial dapat dibaca dalam artikel “Small Ramsey Numbers”, oleh S.P. Radziszowski, *Electronic Journal of Combinatoric,* Dynamic Survey #1.

$$
\begin{aligned}
&r(3,3) = 6 \\
&r(3,4) = r(4,3) = 9 \\
&r(3,5) = r(5,3) = 14 \\
&r(3,6) = r(6,3) = 18 \\
&r(3,7) = r(7,3) = 23 \\
&r(3,8) = r(8,3) = 28 \\
&r(3,9) = r(9,3) = 36 \\
&40 \leq r(3,10) = r(10,3) \leq 43 \\
&r(4,4) = 18 \\
&r(4,5) = r(5,4) = 25 \\
&43 \leq r(5,5) \leq 49.
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $r(3,10)$ yang terletak di antara 40 dan 43 menunjukkan bahwa $K_{43} \to K_3, K_{10}$ dan $K_{39} \not\to K_3, K_{10}$. Jadi tidak ada cara untuk mewarnai sisi-sisi K_{43} tanpa membentuk K_3 merah atau K_{10} biru. Sebaliknya, terdapat suatu cara mewarnai sisi-sisi K_{39} tanpa membentuk K_3 merah atau K_{10} biru, tetapi tidak ada kesimpulan ini yang dapat dipastikan berlaku pada K_{40}, K_{41}, dan K_{42}. Pernyataan bahwa $43 \le r(5,5) \le 55$ menunjukkan bahwa $K_{55} \to K_5, K_5$ artinya terdapat suatu cara mewarnai sisi-sisi K_{42} tanpa membentuk K_5 yang berwarna sama.

Teorema Ramsey dapat diberlakukan untuk sebarang banyaknya warna. Jika n_1, n_2, dan n_3 adalah bilangan-bilangan bulat yang lebih atau sama dengan 2, maka akan terdapat suatu bilangan bulat *p* sedemikian sehingga

$$K_p \to K_{n1}, K_{n2}, K_{n3}.$$

Dengan kata lain, jika masing-masing sisi K_p diberi warna merah, biru, atau hijau, maka dimungkinkan adanya K_{n1} merah, atau K_{n2} biru, atau K_{n3} hijau. Bilangan bulat *p* terkecil yang memenuhi pernyataan ini adalah bilangan Ramsey $r(n_1, n_2, n_3)$. Satu-satunya bilangan Ramsey non-trivial yang diketahui dari jenis ini adalah

$$r(3,3,3) = 17.$$

Bilangan Ramsey $r(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k)$ didefinisikan dengan cara yang sama, dan teorema Ramsey memastikan bahwa bilangan-bilangan tersebut ada, yaitu bahwa ada suatu bilangan bulat *p* sedemikian sehingga

$$K_p \to K_{n1}, K_{n2}, \cdots, K_{nk}.$$

F. Soal-Soal Latihan

1. Ada berapa elemen yang terdapat dalam himpunan $A_1 \cup A_2$ jika terdapat 12 elemen di A_1, 18 elemen di A_2, dan

   a. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$? b. $|A_1 \cap A_2| = 1$?

   b. $|A_1 \cap A_2| = 6$? d. $A_1 \subseteq A_2$?

2. Sebanyak 345 mahasiswa semester IV pada program studi matematika telah lulus mata kuliah Kalkulus, 212 orang telah lulus mata kuliah Matematika Diskrit, dan 188 orang

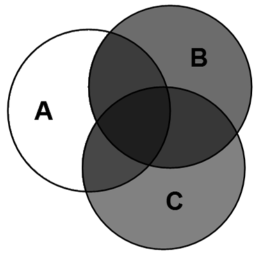
telah lulus mata kuliah Matematika Diskrit dan Kalkulus. Berapa orang mahasiswa yang telah lulus mata kuliah Kalkulus atau Matematika Diskrit?

3. Suatu survey yang dilakukan di kota X menungkapkan bahwa 96% keluarga memiliki sekurang-kurangnya satu televisi, 98% memiliki pesawat telepon, dan 95% memiliki pesawat telepon dan sekurang-kurangnya satu televisi. Ada berapa persen keluarga di kota tersebut yang tidak memiliki televisi maupun telepon?
4. Carilah banyaknya elemen di dalam $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ jika terdapat 100 elemen di dalam setiap himpunan dan jika:
   a. Pasangan himpuan yang digabungkan tersebut disjoint satu dengan yang lain.
   b. Terdapat 50 elemen irisan antara dua himpunan yang digabung, tetapi tidak ada himpunan irisan dari ketiga himpunan.
5. Carilah banyaknya elemen di $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ jika terdapat 100 elemen di A_1, 1000 elemen di A_2, dan 10000 elemen di A_3 jika:
   a. $A_1 \subseteq A_2$ dan $A_2 \subseteq A_3$.
   b. A_1 disjoint dengan A_2, dan A_2 disjoint dengan A_3.
   c. $|A_1 \cap A_2| = 2$, $|A_2 \cap A_3| = 2$, dan $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.
6. Ada berapa *string* yang dapat disusun dari satu sampai empat digit? String yang berbeda jumlah digitnya menyatakan string yang berbeda, sehingga digit 10 berbeda dengan digit 0010.
7. Ada berapa string yang dapat dibentuk dengan digit hexadesimal satu sampai tiga? (Digit hexadesimal terdiri atas 16 digit yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).
8. Ada berapa string yang dapat dibentuk dengan digit hexadesimal dari digit dua sampai dengan digit lima?
9. Ada berapa bilangan bulat yang dapat disusun dengan menggunakan angka 1 sampai dengan 999 yang angka-angkanya tidak berulang?
10. Ada berapa bilangan bulat yang dapat disusun dengan menggunakan angka 1 sampai dengan 999 yang memiliki angka berulang setidak-tidaknya satu kali?
11. Berapa peluangnya jika satu bilangan bulat dipilih secara acak dari 1 sampai 999 yang memiliki angka berulang setidak-tidaknya satu kali?
12. Berapa susunan yang dapat dibentuk dari kata NEGATIF dengan menggunakan sebanyak-banyaknya tiga huruf dan tidak ada huruf berulang?

13. Ada berapa banyaknya bilangan bulat 5 angka dari 10000 sampai dengan 99999 yang merupakan kelipatan 5?
14. Berapa peluang terpilihnya bilangan bulat 5 angka yang merupakan kelipatan 5 jika dipilih secara acak dari 10000 sampai dengan 99999?
15. Tanda nomor kendaraan di negara tertentu terdiri atas nol sampai tiga huruf kapital diikuti dengan nol sampai empat angka. Tidak dimugkinkan tanda nomor yang semuanya kosong.
    a. Berapa pelat nomor kendaraan yang dipat dibuat di kota tersebut?
    b. Misalkan sebanyak 85 tanda nomor tidak boleh digunakan karena membentuk susunan yang berkonotasi sensitif (misalnya PKI1965), berapa pelat nomor yang dapat dibuat?
16. Semua tanda nomor kendaraan di suatu negara terdiri atas empat sampai enam simbol yang dipilih dari kombinasi 26 (A-Z) huruf abjad dan 10 angka (0-9).
    a. Ada berapa banyak pelat nomor kendaraan yang dapat dibuat jika diperbolehkan menggunakan karakter berulang?
    b. Ada berapa pelat nomor kendaraan yang tidak mengandung karakter berulang?
    c. Ada berapa pelat nomor kendaraan yang mengandung setidak-tidaknya satu karakter berulang?
    d. Berapa peluang terpilihnya secara acak satu pelat nomor kendaraan yang mengandung karakter berulang?
17. Password untuk mengakses komputer dalam sutau jaringan terdiri atas 3-5 karakter yang terdiri atas 26 huruf abjad, 10 angka, dan 14 simbol khusus (seperti ?!@#$%()&^[{] }).
    a. Ada berapa kombinasi password yang mungkin disusun, jika karakter boleh berulang?
    b. Ada berapa banyak password yang tidak mengandung karakter berulang?
18. Suatu universitas melakukan survey untuk mengetahui daya tarik dan prestasi akademik mahasiswanya. Angket survey yang diberikan terdiri atas 3 pilihan dalam bentuk pernyataan sebagai berikut:
    a. Pernyataan #1: Saya mencapai prestasi terbaik dalam semester yang lalu.
    b. Pernyataan #2: Saya menjadi anggota kelompok akademik tertentu
    c. Pernyataan #3: saya menguasai sekurang-kurangnya dua mata kuliah

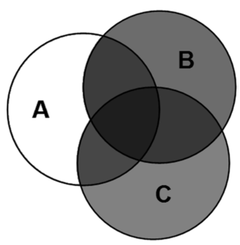
    Dari 100 mahasiswa yang menjadi reponden, 28 orang memilih Pernyataan #1, 26 orang memilih Pernyataan #2, dan 14 orang memilih Pernyataan #3. Selanjutnya, 8 orang memilih Pernyataan #1 dan #2, 4 orang memilih Pernyataan #1 dan #3, 3 orang memilih Pernyataan #2 dan #3, dan 2 orang memilih Pernyataan #1, #2, dan #3.

a. Ada berapa orang mahasiswa yang memilih sekurang-kurangnya satu pernyataan?
b. Ada berapa mahasiswa yang tidak memilih semua pernyataan?
c. Misalkan A adalah himpunan semua mahasiswa yang memilih Pernyatan #1, B adalah himpunan semua mahasiswa yang memilih Pernyataan #2, dan C adalah himpunan semua mahasiswa yang memilih Pernyataan #3. Isiliah kedelapan daerah himpunan di bawah ini berdasarkan banyaknya anggota himpunan yang ada di wilayah tersebut.



a. Berapa orang mahasiswa yang memilih Pernyataan #1 dan #2 tetapi tidak memilih #3?
b. Berapa orang mahasiswa yang memilih Pernyataan #2 dan #3 tetapi tidak memilih Pernyataan #1?
c. Berapa orang yang memilih Pernyataan #2 tetapi tidak memilih Pernyataan #1 dan #3?

19. Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui efektifitas tiga jenis komposisi obat untuk menghilangkan sakit kepala. Pada diagram di bawah ini, A, B, dan C masing-masing menyatakan himpunan objek penelitian yang dapat sembuh dengan menggunakan obat komposisi A, B, dan C. Isilah dengan data hasil penelitian.



Selama jangka waktu tertentu, 50 orang subjek penelitian dibebaskan memilih salah satu dari tiga komposisi obat. Hasil penelitian adalah sebagai berikut:

21 orang sembuh dengan komposisi A

21 orang sembuh dengan komposisi B

31 orang sembuh dengan komposisi C

9 orang sembuh dengan komposisi obat A dan B

14 orang sembuh dengan komposisi A dan C

15 orang sembuh dengan komposisi B dan C

41 orang sembuh dengan menggunakan salah satu dari ketiga jenis komposisi

Penelitian tersebut juga menunjukkan bahwa terdapat 21 orang yang sembuh dengan komposisi A ternyata juga dapat sembuh dengan komposisi B maupun C. Hasil yang sama juga berlaku untuk komposisi B dan C.

a. Ada berapa orang yang sembuh tanpa mengkonsumsi ketiga obat tersebut?
b. Ada berapa orang yang dapat sembuh dengan menggunakan salah satu dari komposisi obat tersebut?
c. Berapa orang yang sembuh dengan menggunakan obat komposisi A saja?

20. Prinsip inklusi-eksklusi dapat diaplikasikan untuk memeriksa konsistensi suatu hasil survey. Misalnya suatu survey dilakukan untuk mengetahui opini masyarakat yang diambil dari 1200 orang dewasa, 675 orang yang sudah menikah, 682 berusia antara 20 sampai 30 tahun, 684 berjenis kelamin wanita, 195 di antara sudah menikah dan berusia antara 20 sampai 30 tahun. Apakah data tersebut bersifat konsisten? Apakah data seperti itu dapat digunakan sebagai sampel survey?

21. Sebutkanlah alasan dari masing-masing operasi di bawah ini. Jika A dan B adalah himpunan-himpunan yang berada di dalam himpunan semesta U, maka:

$$\begin{aligned} N(A\cap B) &= N(U)-N\left((A\cap B)^C\right) && \underline{\qquad\qquad} \\ &= N(U)-N\left(A^C\cup B^C\right) && \underline{\qquad\qquad} \\ &= N(U)-\left(N\left(A^C\right)+N\left(B^C\right)-N\left(A^C\cap B^C\right)\right) && \underline{\qquad\qquad} \end{aligned}$$

22. Ada berapa banyaknya kaos kaki yang harus diambil dari 19 pasang kaos kaki yang berbeda untuk memastikan bahwa setidak-tidaknya ada satu pasang kaos kaki dapat diambil?

23. Ada berapa bilangan bulat positif yang kurang dari 100 yang harus dipilih secara acak agar dapat dipastikan bahwa setidak-tidaknya salah satu di antara bilangan tersebut merupakan kelipatan 7?

24. Ada berapa banyak bilangan dari $\{1,2,\cdots,99\}$ yang harus dipilih untuk memastikan bahwa jumlah dua bilangan di antara bilangan yang dipilih tersebut adalah 100?

25. Misalkan diketahui jumlah penduduk suatu kota adalah 4 juta jiwa, dapatkah dipastikan bahwa setidak-tidaknya terdapat 21 orang di antaranya yang jumlah rambut

di kepalanya tepat sama? (jumlah helai rambut di kepala manusia tidak lebih dari 200.000 helai)

26. Ada berapa banyak kata yang harus dibentuk dari ke-26 huruf latin sedemikian sehingga setidak-tidaknya 3 di antara kata tersebut diawali dengan huruf yang sama dan diakhiri dengan huruf yang sama?
27. Ada 606 kelereng disebar di dalam suatu bidang bujursangkar yang panjang sisinya 1 satuan. Tunjukkan bahwa setidak-tidaknya 6 dari kelereng tersebut berada dalam satu lingkaran yang berjari-jari 1/15 satuan. (Bujursangkar tersebut dapat dibagi menjadi bujursangkar yang lebih kecil yang dapat termuat di dalam suatu lingkaran berjari-jari 1/15 satuan)
28. Di dalam suatu kotak, terdapat 13 bola biru, 10 bola merah, 8 bola hijau, dan 6 bola kuning. Berapa bola yang harus diambil sedemikian sehingga:
    a. Setidak-tidaknya 5 di antaranya berwarna sama
    b. Setidak-tidaknya 3 bola berwarna hijau
    c. Setidak-tidaknya ada satu bola dari setiap warna.
29. Tunjukkan bahwa jika $n+1$ bilangan bulat dipilih dari himpunan $\{1,2,3,\cdots,2n\}$, maka selalu terdapat setidak-tidaknya dua bilangan yang selisihnya satu.
30. Tunjukkan bahwa jika $n+1$ bilangan bulat dipilih dari himpunan $\{1,2,3,\cdots,3n\}$, maka selalu terdapat setidak-tidaknya dua bilangan yang selisihnya setidak-tidaknya dua.
31. Gunakan prinsip sarang merpati untuk membuktikan bahwa ekspansi desimal dari suatu bilangan rasional m/n adalah desimal berulang. Sebagai contoh, $34.478/99.900 = 0,345251251251\cdots$.
32. Seorang anak menonton televisi sekurang-kurangnya 1 jam dalam sehari selama 7 minggu tetapi tidak pernah lebih dari 11 jam dalam satu minggu. Buktikan bahwa terdapat rentang waktu hari tertentu secara berturut-turut anak tersebut menonton televisi selama 20 jam tepat. Asumsikan bahwa anak tersebut menonton televisi sepanjang hari berturut-turut.
33. Seorang mahasiswa memiliki kesempatan untuk mempersiapkan diri menjelang ujian semester. Berdasarkan pengalamannya, mahasiswa tersebut mengetahui bahwa dia tidak mungkin memiliki waktu lebih dari 60 jam untuk mempersiapkan diri. Dia ingin belajar setidak-tidaknya 1 jam per hari. Tunjukkan bahwa bagaimanapun cara

menyusun jadwal belajarnya, terdapat rentangan hari berturut-turut di mana mahasiswa tersebut harus belajar selama 13 jam tanpa henti.

34. Misalkan *S* adalah suatu himpunan titik di dalam suatu bidang datar. Tidak terdapat 3 titik yang terletak dalam satu garis lurus. Titik-titik tersebut dihubungkan dengan 15 garis yang berwarna merah dan biru. Tunjukkan bahwa jika terdapat setidak-tidaknya dua segitiga yang berwarna merah atau berwarna biru. (Kedua segitiga berwarna biru, atau keduanya berwarna merah, atau salah satunya berwarna merah, dan yang lainnya berwarna biru).
35. Suatu keranjang berisi 100 apel, 100 pisang, dan 100 jeruk. Jika seseorang mengambil satu buah setiap menit, berapa lamanya waktu yang dibutuhkan sehingga salah satu jenis buah terambil sebanyak setidak-tidaknya 1 lusin?
36. Butkikan bahwa untuk sebarang $n+1$ bilangan bulat $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$, terdapat setidak-tidaknya dua bilangan bulat a_i dan a_i dengan $i \neq j$ sedemikian sehingga $a_i - a_j$ merupakan kelipatan *n*.
37. Buktikan bahwa di dalam suatu kelompok yang jumlah anggotanya *n* > 1 orang, terdapat setidak-tidaknya dua orang yang memiliki jumlah kenalan yang sama di dalam kelompok tersebut.
38. Ada 100 orang yang menghadiri suatu pesta. Masing-masing orang memiliki kenalan yang berjumlah genap (bisa 0). Buktikan bahwa terdapat setidak-tidaknya 3 orang yang memiliki jumlah kenalan yang sama.
39. Buktikan bahwa jika sebarang lima titik dipilih di dalam suatu bidang bujursangkar yang panjang sisinya 2 satuan, maka terdapat setidak-tidaknya dua titik di antaranya berjarak paling jauh $\sqrt{2}$ satuan.
40. Buktikan bahwa sebarang 5 titik yang dipilih di dalam suatu segitiga samasisi dengan panjang sisi 1 satuan, maka terdapat setidak-tidaknya dua titik yang berjarak paling jauh ½ satuan.
41. Tunjukkan bahwa $r(3,3,3) \leq 17$.
42. Buktikan bahwa $r(3,3,3) \geq 17$ dengan memisalkan pewarnaan merah, biru, dan hijau, terhadap garis-garis yang menghubungkan 16 titik dengan ketentuan bahwa tidak terdapat 3 titik sedemikian sehingga 3 garis yang menghubungkan ketiga titik tersebut berwarna yang sama.

43. Buktikan bahwa $r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{k+1} \leq (k+1)\left(\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{k+1}\right)+2$

44. Gunakan bukti pada soal nomor 45 untuk menentukan batas atas dari $r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{n}$.

45. Ruas-ruas garis berwarna merah atau biru, menghubungkan 10 titik. Buktikanlah bahwa terdapat 3 titik sedemikian sehingga ketiga garis yang menghubungkannya berwarna merah semua, atau 4 titik sedemikian sehingga 6 garis yang menghubungkannya berwarna biru semua (yaitu $r(3,4) \leq 10$).

46. Misalkan q_3 dan *t* adalah bilangan-bilangan bulat dengan $q_3 \geq t$. Tentukan bilangan Ramsey $r_t(t,t,q_3)$.

47. Kumpulan subset-subset dari $\{1,2,3,\cdots,n\}$ memiliki sifat bahwa masing-masing pasangan subset memiliki sekurang-kurangnya satu elemen yang sama. Buktikanlah bahwa dalam kumpulan tersebut sebanyak-banyaknya terdiri atas 2^{n-1} subset.