2 — Teori Peluang

Istilah percobaan dalam matematika/fisika ialah sebuah usaha yang dilakukan untuk mendapatkan satu dari sekian banyak hasil keluaran yang mungkin. Salah satu contoh dari percobaan tersebut adalah usaha untuk mendapatkan hasil 'muka' dalam pelantunan sebuah koin. Usaha ini termasuk percobaan sebab dalam pelantunan sebuah koin ada dua hasil keluaran yang mungkin yaitu 'muka' dan 'belakang'. Demikian pula usaha untuk mendapatkan 'nilai 1' dalam pelantunan sebuah dadu juga merupakan percobaan, sebab nilai 1 merupakan salah satu dari hasil keluaran yang mungkin yaitu nilai 1, 2, 3, 4, 5 dan 6.

Dalam percobaan pelantunan sebuah koin dan dadu di atas, munculnya 'muka' dan 'nilai 1' disebut sebagai hasil percobaan atau hasil keluaran (*outcome*). Jika semua hasil keluaran yang mungkin dari sebuah percobaan disatukan dalam sebuah himpunan, maka himpunan demikian disebut sebagai ruang sampel (*sample space*). Dalam percobaan di atas, maka ruang sampel bagi percobaan pelantunan sebuah koin adalah himpunan yang beranggotakan muka dan belakang. Ruang sampel dari percobaan pelantunan sebuah dadu beranggotakan nilai-nilai 1, 2, 3, 4, 5 dan 6.

Setiap percobaan selalu hanya memiliki satu ruang sampel. Jika dilakukan percobaan pelantunan dua buah koin, maka ruang sampel yang muncul adalah himpunan pasangan (muka, muka), (muka, belakang), (belakang, muka), dan (belakang, belakang). Ruang sampel ini jelas berbeda dengan ruang sampel percobaan pelantunan sebuah koin. Karena itu, terdapat perkawanan satu-satu antara percobaan dan ruang sampel:

$$\text{satu percobaan} \longleftrightarrow \text{satu ruang sampel.} \tag{2.1}$$

Setiap tepat satu anggota dari ruang sampel disebut titik sampel . Satu atau beberapa titik sampel yang termuat dalam sebuah himpunan ruang sampel disebut peristiwa atau kejadian (*event*). Jadi peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Kaitan ini menyiratkan bahwa ruang sampel sebenarnya juga merupakan peristiwa yaitu sebuah peristiwa yang memuat seluruh titik sampel yang ada. Peristiwa seperti ini disebut peristiwa pasti (*sure event*), sebab setiap keluaran yang muncul selalu merupakan anggota dari peristiwa itu. Sebaliknya, himpunan kosong yang juga merupakan himpunan bagian dari ruang sampel merupakan peristiwa mustahil (*imposible event*), sebab tidak mungkin sebuah percobaan tidak memiliki hasil keluaran apapun. Apabila sebuah peristiwa hanya memuat satu titik sampel saja maka peristiwa demikian disebut peristiwa unsuriah (*elementary event*) atau peristiwa keunsuran.

Setiap peristiwa mempunyai ukuran kecenderungan untuk terjadi yang berbeda-beda nilainya. Ukuran kecenderungan ini dinamakan peluang terjadinya peristiwa atau cukup disebut peluang saja.

2.1 Takrif Peluang

Ada beberapa cara untuk menguraikan takrif (*definition*) peluang sebuah peristiwa. Andaikan peristiwa A merupakan peristiwa yang memenuhi $A \neq$ peristiwa pasti dan $A \neq$ peristiwa mustahil, maka peluang terjadinya A dilambangkan dengan $\mathcal{P}(A)$ dan dapat ditakrifkan menurut beberapa cara.

Yang pertama adalah takrif klasik. Menurut takrif ini, peluang $\mathcal{P}(A)$ peristiwa A ditentukan secara *a priori* tanpa pelaksanaan percobaan yang sebenarnya. Takrif ini mempunyai pengandaian bahwa suatu percobaan selalu menghasilkan N hasil keluaran yang tidak mungkin terjadi bersama-sama dan masing-masing punya peluang yang sama untuk terjadi, maka:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{N_A}{N} \tag{2.2}$$

dengan N_A menyatakan banyaknya hasil keluaran dalam A. Karena peristiwa A bukan peristiwa mustahil dan juga bukan peristiwa pasti atau $0 \leq N_A \leq N$, maka $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$. Meskipun takrif ini mudah dimengerti dan digunakan, tetapi persyaratan 'mempunyai peluang yang sama' dalam praktik mungkin sekali tidak masuk akal, disamping keterbatasan penggunaannya yang hanya untuk percobaan dengan ruang sampel berhingga.

Yang kedua adalah takrif empiris. Peluang A ditakrifkan sebagai kekerapan nisbi (*relative frequency*, frekuensi relatif) terjadinya peristiwa A, jika percobaan tersebut diulang sebanyak mungkin. Artinya

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}. \tag{2.3}$$

Dibandingkan dengan takrif klasik, takrif ini lebih masuk akal sebab tidak diperlukan persyaratan seperti takrif klasik. Hanya saja takrif ini mengharuskan percobaan dapat dilakukan sebanyak mungkin. Takrif ini disebut juga takrif kekerapan nisbi dan biasa digunakan sebagai penjelas dari takrif klasik atau bisa juga sebaliknya.

Yang ketiga adalah takrif subjektif. Nilai sebuah peluang dalam takrif ini lebih berdasar pada pertimbangan-pertimbangan perseorangan atau subjektif dan biasanya dilakukan apabila pengertian-pengertian objektif tidak dapat digunakan, misalnya dalam keadaan dimana percobaan belum atau bahkan tidak pernah dilakukan. Karena itu takrif ini hanya menunjukkan tingkat keyakinan terhadap peristiwa A dalam 2 pilihan: terjadi atau tidak terjadi.

Yang keempat adalah takrif aksiomatis. Sesuai dengan namanya, dalam takrif ini peluang diandaikan memenuhi sejumlah aksioma tertentu. Dalam takrif ini, andaikan Ω adalah ruang sampel suatu percobaan, A adalah himpunan peristiwa maka $\mathcal{P}(A)$ adalah peluang terjadinya peristiwa A jika memenuhi 3 aksioma berikut:

Aksioma 2.1. $\mathcal{P}(A) \geq 0$

Aksioma 2.2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

Aksioma 2.3. Jika $A_1 \cap A_2 = \{\emptyset\}$, maka $\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2)$

Pendekatan secara aksiomatis dalam memberikan takrif terhadap peluang seperti di atas diperkenalkan oleh A. N. Kolmogorov pada tahun 1933. Dalam buku ini, pembahasan tentang teori peluang selanjutnya akan berangkat dari pendekatan aksiomatis ini.

2.2 Ruang Peluang

Syarat-syarat sebagaimana termaktub dalam aksioma (2.1), (2.2), dan (2.3) merupakan aksioma teori peluang atau juga dikenal sebagai aksioma Kolmogorov. Dalam perkembangan teori peluang, seluruh kesimpulan berdasar secara langsung maupun tidak langsung pada aksioma-aksioma di atas dan hanya pada aksioma-aksioma di atas. Berikut adalah akibat-akibat dari aksioma di atas:

1. Peluang peristiwa mustahil adalah nol, dapat ditulis $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$. Karena $A \cap \emptyset = \emptyset$ dan $A \cup \emptyset = A$, maka $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cup \emptyset) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\emptyset)$.
2. Untuk sebarang peristiwa A, berlaku

$$\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(A') \leq 1 \tag{2.4}$$

dengan A' merupakan imbangan atau pelengkap (*complement*) bagi A dalam ruang sampel Ω. Karena $A \cup A' =$

Ω dan $A \cap A' = \emptyset$, maka $1 = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(A \cup A') = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(A')$.

3. Untuk sebarang peristiwa A_1 dan A_2 berlaku

$$\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) \leq \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2). \tag{2.5}$$

Seperti telah disinggung di atas, peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel Ω. Apabila A_1 dan A_2 keduanya merupakan peristiwa, maka $A_1 \cap A_2$ dan $A_1 \cup A_2$ juga merupakan peristiwa. Hal ini menyebabkan bahwa gabungan dan irisan berbagai peristiwa juga mempunyai nilai peluang yang dapat dihitung. Konsep yang membahas tentang hal ini dikenal sebagai **lapangan** (*field*).

Suatu lapangan $\mathcal{L}$ adalah himpunan yang beranggotakan himpunan-himpunan dan $\mathcal{L} \neq \emptyset$ sedemikian rupa sehingga

$$\text{jika } A \in \mathcal{L} \text{ maka } A' \in \mathcal{L} \tag{2.6}$$

dan

$$\text{jika } A_1 \in \mathcal{L} \text{ dan } A_2 \in \mathcal{L} \text{ maka } A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}. \tag{2.7}$$

Kedua sifat tersebut merupakan syarat minimal sebuah lapangan. Sifat-sifat lainnya adalah sebagai berikut:

$$\text{jika } A_1 \in \mathcal{L} \text{ dan } A_2 \in \mathcal{L} \text{ maka } A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L} \tag{2.8}$$

Dari persamaan (2.6) terlihat juga bahwa ${A_1}' \in \mathcal{L}$ dan ${A_2}' \in \mathcal{L}$. Dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.6) pada himpunan $A_1{}'$ dan $A_2{}'$, dapat disimpulkan bahwa

$$A_1{}' \cup A_2{}' \in \mathcal{L},\ (A_1{}' \cup A_2{}')' = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}.$$

Suatu lapangan juga memuat peristiwa pasti dan peristiwa mustahil: $\Omega \in \mathcal{L}$ dan $\emptyset \in \mathcal{L}$. Oleh karena $\mathcal{L}$ tidak kosong, maka $\mathcal{L}$ memuat paling sedikit satu anggota A, akibatnya (dengan menggunakan persamaan (2.6)) $\mathcal{L}$ juga harus memuat A'. Jadi,

$$A \cup A' = \Omega \in \mathcal{L} \quad \text{dan} \quad A \cap A' = \emptyset \in \mathcal{L}.$$

Jika sekarang diandaikan $A_1, A_2, \ldots$ adalah barisan tak hingga himpunan anggota $\mathcal{L}$ dan jika gabungan maupun irisan himpunan-himpunan tersebut juga ada dalam $\mathcal{L}$, maka $\mathcal{L}$ disebut **lapangan Borel** $\mathcal{B}$. Dengan demikian, pengertian peristiwa dapat disempurnakan menjadi sekumpulan himpunan-himpunan bagian dari Ω yang membentuk lapangan Borel. Akibat lanjutan dari pengertian ini adalah dapat ditentukannya peluang yang tidak hanya pada gabungan dan irisan berhingga peristiwa-peristiwa, namun juga pada limitnya. Dengan demikian jika peristiwa $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \emptyset$ maka

$$\mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) \cup \ldots. \tag{2.9}$$

Namun demikian, sebenarnya amat sulit untuk menentukan peluang keunsuran masing-masing peristiwa jika ruang sampel Ω memiliki jumlah anggota tak hingga. Misalkan Ω adalah himpunan seluruh bilangan riil. Himpunan-himpunan bagiannya dapat dipandang sebagai himpunan titik-titik pada garis riil. Untuk membangun ruang peluang pada garis riil, maka seluruh selang (*interval*) $x_1 \leq x \leq x_2$ dengan segenap gabungan dan irisannya dipandang sebagai peristiwa. Lebih rincinya dapat dilihat misalnya dalam pustaka (Rosyid, 2005) bab I. Peristiwa-peristiwa ini membentuk suatu lapangan $\mathcal{L}$ yang merupakan lapangan Borel terkecil yang memuat separuh garis $x \leq x_i$ untuk semua bilangan riil x_i. Untuk melengkapi ciri Ω, akan dicari peluang peristiwa $(x \leq x_i)$. Misalkan bahwa $\alpha(x)$ adalah fungsi sedemikian hingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\ dx = 1, \qquad \text{dan} \qquad \alpha(x) \geq 0. \tag{2.10}$$

Maka peluang peristiwa $(x \leq x_i)$ ditakrifkan dengan integral

$$\mathcal{P}(x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \alpha(x)\ dx. \tag{2.11}$$

Bangun persamaan (2.11) ini dapat digunakan untuk menentukan peluang seluruh peristiwa dalam Ω. Misalnya, sekarang dapat dihitung peluang $(x_1 < x \leq x_2)$ yang terdiri dari titik-titik pada selang $(x_1, x_2]$ dengan

$$\mathcal{P}(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)\ dx. \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) dapat dibuktikan dengan mengingat bahwa irisan antara $(x \leq x_1)$ dan $(x_1 < x \leq x_2)$ merupakan $\emptyset$ dan gabungan keduanya sama dengan $(x \leq x_2)$. Berdasarkan pada aksioma (2.3), didapat

$$\mathcal{P}(x \leq x_1) + \mathcal{P}(x_1 < x \leq x_2) = \mathcal{P}(x \leq x_2) \tag{2.13}$$

dan dengan menggunakan persamaan (2.11) dan (2.12) maka selanjutnya

$$\int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)\ dx = \int_{-\infty}^{x_2} \alpha(x)\ dx. \tag{2.14}$$

Persamaan di atas merupakan bukti yang jelas bagi persamaan (2.12). Dengan demikian, jika Ω terdiri dari anggota tak hingga maka peluang peristiwa di dalamnya dapat ditentukan dengan memakai integral.

2.2.1 Peluang peristiwa bersyarat

Seandainya ada 2 peristiwa dimana peluang peristiwa kedua hanya bisa diketahui setelah ada pengetahuan yang cukup tentang peristiwa pertama, maka peluang peristiwa seperti ini disebut sebagai peluang bersyarat. Peluang bersyarat peristiwa B jika diketahui peristiwa A dilambangkan dengan $\mathcal{P}(B|A)$ dan ditakrifkan sebagai

$$\mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)} \tag{2.15}$$

dengan syarat bahwa nilai $\mathcal{P}(A)$ tidak sama dengan nol. Bilangan $\mathcal{P}(B|A)$ dapat dibaca 'peluang B jika A diketahui'. Persamaan (2.15) yang berbentuk nisbah dapat juga diubah dalam bentuk perkalian menjadi

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A). \tag{2.16}$$

Dengan menggunakan aturan rantai, persamaan (2.16) dapat diperluas untuk peristiwa yang lebih banyak. Seandainya ada 3 peristiwa yaitu A, B, dan C maka persamaan (2.16) akan menjadi

$$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(C|A \cap B). \qquad (2.17)$$

Perampatan (*generalization*) terhadap sebarang peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega$ akan menghasilkan bentuk seperti berikut

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(A_2|A_1)\mathcal{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots \\ &\quad \ldots\mathcal{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \quad (2.18) \end{aligned}$$

2.2.2 Peluang peristiwa saling bebas

Seperti sudah disinggung sebelumnya bahwa peristiwa bersyarat $(B|A)$ didasarkan pada anggapan bahwa peristiwa B hanya dapat diketahui jika peristiwa A sudah diketahui sebelumnya. Dengan demikian terjadinya peristiwa B sangat tergantung pada peristiwa A dalam peristiwa bersyarat $(B|A)$. Artinya, kedua peristiwa tersebut tidak saling bebas sebab kehadiran salah satu peristiwa menjadi kebutuhan bagi peristiwa yang lain. Dua peristiwa A dan B akan disebut saling bebas (*independent*) jika dan hanya jika memenuhi dua persamaan berikut:

$$\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B) \qquad (2.19)$$

dan

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A). \qquad (2.20)$$

Jika tidak memenuhi kaitan dalam 2 persamaan di atas, maka peristiwa A dan B dikatakan tidak saling bebas. Dengan mengaitkan persamaan (2.16) dapat juga ditentukan syarat agar peristiwa A dan B saling bebas, yakni

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B). \tag{2.21}$$

Untuk 3 peristiwa yaitu A, B, dan C yang saling bebas satu dari yang lain, persamaan (2.21) dapat ditulis kembali menjadi

$$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)\mathcal{P}(C) \tag{2.22}$$

sehingga perampatan terhadap kesalingbebasan sejumlah n peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ akan menghasilkan bentuk berikut

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(A_2)\ldots\mathcal{P}(A_n). \tag{2.23}$$

2.3 Peubah Acak

Andaikan Ω merupakan ruang sampel dari sebuah percobaan. Suatu fungsi yang mengaitkan setiap anggota ruang sampel dengan suatu bilangan riil disebut sebagai **peubah acak** (*random variable*). Dalam percobaan pelantunan sebuah koin di atas, seandainya hasil keluaran yang muncul adalah 'muka' kemudian diberi nilai 1 dan 'belakang' diberi nilai -1, maka kemunculan nilai 1 atau -1 sangat bergantung pada hasil keluaran 'muka' atau 'belakang' pada pelantunan yang dilakukan. Munculnya hasil keluaran 'muka' atau 'belakang' dalam percobaan tersebut tidak dapat dipastikan, semuanya serba berkemungkinan. Dengan demikian kemunculan nilai 1 dan -1 sebagai peubah dalam pelantunan tersebut juga berkemungkinan. Oleh karena kemunculan nilai 1 dan -1 tidak dapat dipastikan, kemunculannya dapat disebut terjadi secara acak. Inilah mengapa peubah yang bernilai 1 untuk hasil muka dan -1 untuk hasil belakang dalam percobaan di atas disebut sebagai peubah acak.

Suatu peubah acak dinyatakan dengan suatu huruf kapital dan nilainya dinotasikan dengan suatu huruf kecil. Jika X menyatakan suatu peubah acak, maka nilai dari X dinyatakan dengan x. Sehingga pernyataan $\{X \leq x\}$ menyatakan peristiwa peubah acak X bernilai kurang dari atau sama dengan x.

Dalam sebuah percobaan dengan ruang sampel Ω, lapangan Borel $\mathcal{B}$ yang beranggotakan himpunan-himpunan bagian dari Ω yang disebut peristiwa dan suatu peluang yang ditentukan pada peristiwa-peristiwa tersebut, sebuah peubah acak $X : \Omega \to \mathbb{R}$ merupakan suatu fungsi. Ini mengandung pengertian bahwa X adalah peubah acak dan untuk semua $-\infty < a < b < \infty$ dapat dinyatakan bahwa

$$X^{-1}((a, b)) := \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{B}. \tag{2.24}$$

Lambang $X^{-1}((a, b))$ merupakan bayangan balikan (*inverse image*) dari (a, b).

Dengan demikian, suatu peubah acak riil pada ruang sampel Ω relatif terhadap lapangan Borel $\mathcal{B}$ adalah fungsi bernilai riil pada Ω sedemikian rupa sehingga bayangan balikannya merupakan anggota lapangan Borel $\mathcal{B}$.

Suatu peubah acak X, selain merupakan fungsi bernilai riil dapat juga merupakan himpunan $X(\Omega) = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$, sehingga jika pada Ω terdefinisikan peubah acak $Y : \Omega \to \mathbb{R}$

dan tetapan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ maka kaitan antara peubah acak X, Y dan tetapan α, β dapat disajikan sebagai berikut:

$$(\alpha X + \beta Y)(\omega) := \alpha X(\omega) + \alpha Y(\omega), \tag{2.25}$$

$$(XY)(\omega) := X(\omega)Y(\omega), \tag{2.26}$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)(\omega) := \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}, \quad Y \neq 0. \tag{2.27}$$

Peubah acak X dikatakan peubah acak tercacah jika semua nilai yang mungkin dari X membentuk suatu himpunan tercacah atau terbilang $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Peubah acak X dikatakan kontinyu jika semua nilai (*range*) dari X merupakan himpunan yang kontinyu atau tak tercacah.

2.3.1 Fungsi agihan

Dalam telaah peubah acak, peristiwa $(X \leq x)$ menyajikan himpuan bagian Ω yang beranggotakan semua ω sedemikian rupa sehingga $X(\omega) \leq x$. Jadi, peristiwa $(X \leq x)$ bukan merupakan himpunan bilangan, melainkan himpunan hasil percobaan. Peristiwa $(x_1 \leq X \leq x_2)$ adalah serupa. Peristiwa tersebut menyatakan himpunan bagian Ω yang terdiri dari hasil-hasil ω sedemikian rupa sehingga $x_1 \leq X(\omega) \leq x_2$ dengan x_1 dan x_2 merupakan dua bilangan yang diketahui. Demikian pula untuk peristiwa $(X = x)$ juga menyatakan himpunan bagian Ω yang beranggotakan semua ω sedemikian rupa sehingga $X(\omega) = x$. Jadi, apabila $\mathbb{I}$ himpunan bagian dari garis riil $\mathbb{R}$, maka $(X \in \mathbb{I})$ menyatakan himpunan bagian dari Ω yang beranggotakan semua ω sedemikian rupa sehingga $X(\omega) \in \mathbb{I}$.

Anggota-anggota himpunan Ω yang termuat dalam peristiwa $(X = x)$ akan berubah bila x memiliki berbagai nilai. Akibatnya nilai peluang dari peristiwa $(X = x)$ yaitu $\mathcal{P}(X = x)$, adalah bilangan yang bergantung pada nilai x. Bilangan ini diberikan oleh

$$\mathcal{P}(x) := \mathcal{P}(X^{-1}(x)) := \mathcal{P}(\omega \in \Omega | X(\omega) \in x) \tag{2.28}$$

yang disebut sebagai hukum peubah acak X. Hukum ini dicirikan secara lengkap oleh fungsi agihannya (*distribution function*), yang merupakan fungsi

$$F(x) = \mathcal{P}(\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x) \tag{2.29}$$

untuk setiap x dari $-\infty$ sampai ∞. Jadi, $F(x)$ merupakan peluang munculnya nilai peubah acak X dalam selang $(-\infty, x]$, yakni peluang munculnya nilai X yang kurang atau sama dengan x.

Contoh 2.1. Andaikan pada pelantunan sebuah koin nilai peluang untuk hasil keluaran 'muka' sama dengan m dan peluang untuk 'belakang' sama dengan b, kemudian peubah acak X sedemikian rupa sehingga

$$X(m) = 1 \qquad X(b) = 0.$$

Bila $x \geq 1$, maka $X(m) = 1 \leq x$ dan $X(b) = 0 \leq x$. Karena itu,

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(\{m, b\}) = \mathcal{P}(\Omega) = 1 \qquad x \geq 1. \tag{2.30}$$

Bila $0 \leq x < 1$, maka $X(m) = 1 > x$ dan $X(b) = 0$. Karena itu,

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(\{b\}) \qquad 0 \leq x < 1. \tag{2.31}$$

Bila $x < 0$, maka $X(m) = 1 > x$ dan $X(b) = 0 > x$. Karena itu pula,

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0 \qquad x < 0. \tag{2.32}$$

Fungsi agihan mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. $F(+\infty) = 1$ dan $F(-\infty) = 0$.
2. $F(x)$ adalah fungsi yang tidak menurun: jika $x_1 < x_2$, maka $F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. Jika $F(x_0) = 0$, maka $F(x) = 0$ untuk setiap $x \leq x_0$.
4. $\mathcal{P}(X > x) = 1 - F(x)$.
5. Fungsi agihan $F(x)$ malar (*continue*) dari kanan pada setiap titik $x \in \mathbb{R}$.
6. $\mathcal{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
7. $\mathcal{P}(X = x) = F(x) - \lim_{\epsilon \to 0} F(x - \epsilon)$ dengan $\epsilon > 0$.
8. $\mathcal{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - \lim_{\epsilon \to 0} F(x_1 - \epsilon)$ dengan $\epsilon > 0$.

Dari persamaan (2.29) dan aksioma teori peluang dapat diketahui bahwa peubah acak X mempunyai jenis-jenis tertentu dalam fungsi agihannya. Jenis ini baru bisa diketahui bila dapat dihitung dulu peluang $\mathcal{P}(X \in \Omega)$, yakni bahwa x ada dalam ruang sampel Ω dari sumbu x. Peubah acak X disebut berjenis malar jika fungsi agihannya $F(x)$ juga malar. Untuk keadaan ini, $\lim_{\epsilon \to 0} F(x - \epsilon) = F(x), \epsilon > 0$ sehingga $\mathcal{P}(X = x) = 0$. Peubah acak X disebut berjenis cacah atau diskrit (*discrete*) bila $F(x)$ berbentuk fungsi tangga atau $F(x_i) - \lim_{x_i \to \epsilon}(x_i - \epsilon) = \mathcal{P}(X = x_i) = p_i$.

Jika pada fungsi agihan dilakukan penurunan (*derivation*) yang ditunjukkan oleh persamaan

$$\rho(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{2.33}$$

maka $\rho(x)$ disebut fungsi kerapatan (*probablity-mass function*) peubah acak X. Untuk peubah acak X berjenis cacah yang memiliki nilai-nilai x_i dengan peluang p_i, maka

$$\rho(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \qquad\qquad p_i = \mathcal{P}(X = x_i) \tag{2.34}$$

dengan $\delta(x)$ menyatakan dorongan (*impulsion*). Mengingat bahwa fungsi $F(x)$ yang tidak menurun, maka $\rho(x) \geq 0$. Pengintegralan $\rho(x)$ untuk selang $(-\infty, x]$ dan menggunakan sifat $F(-\infty) = 0$ akan didapat

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(\omega)\ d\omega. \tag{2.35}$$

Karena $F(\infty) = 1$ maka bentuk di atas menghasilkan persamaan $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\ dx = 1$ sehingga diperoleh $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \rho)(x)\ dx$ atau

$$\mathcal{P}(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\ dx. \tag{2.36}$$

Jika peubah acak X berjenis malar maka himpunan pada ruas kiri cukup diganti dengan $(x_1 \leq X \leq x_2)$.

Disamping itu, dalam fungsi agihan juga dijumpai adanya agihan bersyarat seperti saat membicarakan tentang peristiwa bersyarat dalam ruang peluang. Agihan bersyarat $F(x|A)$ dari peubah acak X dengan diketahui A merupakan peluang bersyarat untuk peristiwa $(X \leq x)$, yakni

$$F(x|A) = \mathcal{P}(X \leq x|A) = \frac{\mathcal{P}(X \leq x \ \cap A)}{\mathcal{P}(A)}. \tag{2.37}$$

Pada bentuk di atas, $(X \leq x \cap A)$ merupakan irisan peristiwa $(X \leq x)$ dan A yakni peristiwa yng terdiri dari semua hasil ω sedemikian hingga $X(\omega) \leq x$ dan $\omega \in A$.

Dalam telaah fungsi agihan di atas, fungsi agihan dapat juga dimaknai sebagai pola agihan dari sekelompok peubah acak. Dalam teori peluang, pola agihan yang sudah jamak dikenal secara luas adalah fungsi agihan binomial, Poison, Gauss, dan log-normal. Peubah acak X disebut mempunyai agihan binomial orde n bila X memiliki nilai-nilai $0, 1, \ldots, n$ dengan peluang

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad p + q = 1 \tag{2.38}$$

p menyatakan peluang peristiwa bercirikan tertentu (sukses) dan q menyatakan peluang peristiwa yang tak bercirikan tertentu itu (gagal) atau $q = 1 - p$. Fungsi agihan yang bersesuaian dalam selang $(0, n)$ diberikan oleh

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{2.39}$$

Bila $n \to \infty$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \qquad (2.40)\end{aligned}$$

yang kemudian dikenal sebagai agihan Poisson. Dalam fungsi agihan binomial dan Poison, peubah k hanya boleh bervariasi secara cacah dan positif. Fungsi agihan yang peubahnya bisa bervariasi secara malar dari $-\infty$ sampai ∞ adalah fungsi agihan normal atau Gaussan yang dijabarkan oleh Gauss dalam bentuk

$$N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad (2.41)$$

dengan variansi σ dan rataan μ.

Untuk agihan normal di atas, jika $\mu \gg 1$ pada $x > 0$, maka

$$x = \ln y, \qquad \mu = \ln y_0, \qquad dx = \frac{dy}{y} \qquad (2.42)$$

sehingga bila dimasukkan dalam bentuk (2.41) akan menjadi

$$N(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y/y_0)}{\sigma}\right)^2} \frac{dy}{y} \qquad (2.43)$$

yang merupakan agihan log-normal.

Dalam hubungan pola agihan dan peubah acak di atas, jika peubah acak yang terlibat berjumlah mendekati tak hingga maka pola agihannya akan selalu mengikuti fungsi agihan normal. Hal ini dapat ditunjukkan jika $E(X_1)\,\{= E(X_2) = \cdots\} =$

μ dan $\mathrm{Var}(X_1)\,\{= \mathrm{Var}(X_2) = \cdots\} = \sigma^2 > 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du = N(x) \tag{2.44}$$

Ini dikenal sebagai dalil limit pusat (*the central limit theorem*). Dalil ini memberikan jaminan bahwa agihan peluang akan selalu normal jika sejumlah besar peubah acak yang saling bebas terpenuhi.

2.3.2 Nilai harap dan variansi

Salah satu cara untuk mencakup suatu agihan kemungkinan menjadi satu nilai ialah dengan mengganti agihan tersebut dengan nilai harap (*expectation*) rataan (*mean*) peubah acaknya. Nilai harap adalah suatu ukuran lokasi yang bisa memberi gambaran tentang nilai rerata hasil percobaan jika percobaan dilakukan secara berulang kali. Dengan demikian nilai harap merupakan ukuran kecenderungan peubah acak. Bila X peubah acak yang malar dengan fungsi kerapatan $\rho(x)$ maka nilai harapnya diberikan oleh persamaan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ \rho(x)\ dx. \tag{2.45}$$

Untuk peubah acak berjenis cacah integral pada persamaan di atas dapat ditulis sebagai jumlahan. Misalkan bahwa X menjalani berbagai nilai x_i dengan peluang p_i. Untuk keadaan ini

$$\rho(x) = \sum_i p_i \; \delta(x - x_i). \tag{2.46}$$

Dengan memasukkan bentuk di atas pada (2.45) dan menggunakan identitas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \; \delta(x - x_i) \; dx = x_i \tag{2.47}$$

akan didapat

$$E(X) = \sum_i p_i \; x_i, \qquad p_i = \mathcal{P}(X = x_i). \tag{2.48}$$

Untuk peubah acak yang bersyarat, maka tinggal dilakukan penggantian notasi dalam kedua persamaan (2.45) dan (2.48). Seandainya peubah acak X mensyaratkan diketahuinya A maka kedua persamaan tersebut akan menjadi

$$E(X|A) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; \rho(x|A) \; dx \tag{2.49}$$

untuk peubah acak malar dan

$$E(X|A) = \sum_i x_i \mathcal{P}(x = x_i|A) \tag{2.50}$$

untuk peubah acak cacah.

Jika nilai harap rataan memberi gambaran tentang suatu nilai rerata hasil percobaan, maka ukuran keruncingan dari grafik fungsi agihannya disajikan oleh apa yang disebut variansi. Semakin kecil nilai variansi semakin meyakinkan nilai harap rataannya. Jadi variansi merupakan ukuran simpangan atau penyebaran (*dispersion*) yang baik karena mencerminkan besarnya simpangan tiap-tiap peubah acak. Semakin besar nilai variansi suatu kelompok data semakin bervariasi kelompok data tersebut. Variansi peubah acak X diberikan oleh persamaan berikut

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \; \rho(x) \; dx \tag{2.51}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa σ^2 adalah juga nilai harap dari peubah acak $(X - E(X))^2$. Dengan demikian dapat ditulis

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\right) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

sehingga

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 . \tag{2.53}$$

Variansi mempunyai kelemahan karena sifatnya yang kuadrat, padahal simpangan pada hakikatnya merupakan jarak sehingga linier. Maka untuk mengatasi hal ini, variansi ditarik akarnya yang positif sehingga diperoleh apa yang kemudian disebut dengan simpangan baku (*standard deviation*) dan dilambangkan σ. Simpangan baku lebih sering digunakan daripada variansi. Simpangan baku berguna untuk mengukur rerata jarak masing-masing individu terhadap nilai reratanya.

2.3.3 Kovariansi dan korelasi

Sebagaimana telah dijelaskan di atas, variansi digunakan untuk mengukur tingkat variasi, namun hanya untuk satu peubah acak saja, X saja atau Y saja. Untuk mengukur tingkat variasi dua peubah acak X dan Y secara bersama-sama (simultan) dapa digunakan kovariansi. Kovariansi dua peubah acak X dan Y adalah ukuran keeratan hubungan atau ukuran asosiasi antara kedua peubah acak X dan Y. Takrif kovariansi dua peubah acak X dan Y adalah

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{2.54}$$

Kovariansi yang positif menunjukkan kenaikan X diikuti oleh kenaikan Y dan penurunan X diikuti penurunan Y. Persamaan kovariansi di atas menunjukkan kemiripan bentuk dengan persamaan variansi (2.53). Seandainya peubah acak Y diganti dengan peubah acak X maka kovariansi dua peubah acak X merupakan variansinya sendiri. Dengan menggunakan kaitan ini dan andaikan X dan Y merupakan peubah acak dengan rataan $E(X), E(Y)$ dan variansi σ_X^2, σ_Y^2, maka dari sini dapat dibentuk peubah acak baru yakni

$$X' = \frac{x - E(X)}{\sigma_X} \qquad Y' = \frac{y - E(Y)}{\sigma_Y}$$

yang dengan mudah dapat dicari nilai kovariansinya, yaitu

$$\mathrm{Cov}(X',Y') = E(X'Y') - E(X)E(Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{2.55}$$

Nisbah antara $\mathrm{Cov}(X, Y)$ dan $\sigma_X \sigma_Y$ dalam persamaan di atas disebut koefisien korelasi, diberi lambang r, sehingga

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{2.56}$$

Koefisien korelasi merupakan nilai untuk mengukur kuatnya hubungan (*corelation*) antara peubah acak X dan Y sekaligus arah hubungan itu. Spektrum nilainya membentang antara 0 dan ± 1. Nilai ini sebanding dengan tingkat keeratan hubungan. Tanda $(\pm)$ hanya menunjukkan arah hubungan, yakni $(+)$ menunjukkan hubungan yang searah dimana jika satu peubah naik maka akan diikuti kenaikan peubah yang lain, sedangkan tanda $(-)$ menyatakan hubungan yang berlawanan arah. Saat nilai koefisien korelasi sama dengan nol, kedua peubah acak X dan Y disebut peubah acak yang tidak berkorelasi (tidak ada hubungan). Ini terjadi ketika $\mathrm{Cov}(XY)$ sama dengan nol atau peubah acak X, Y keduanya saling bebas. Namun, bila $r = 0$, hal ini tidak selalu menunjukkan bahwa peubah acak X, Y keduanya saling bebas.

Dengan demikian, untuk dua peubah acak X, Y yang tak berkorelasi berlaku persamaan

$$E(XY) = E(X)E(Y). \tag{2.57}$$

Dua peubah acak X, Y dapat saling tak berkorelasi tanpa keduanya harus bebas, tapi semua peubah acak bebas selalu tidak berkorelasi. Jadi ketiadaan korelasi merupakan sifat yang lebih lemah dari kebebasan.