미적분학2 11장 6절 #9

김상범

October 7, 2019

문제

9. 점 $(1, 2, 0)$에서 원뿔면 $z^2 = x^2 + y^2$까지의 거리를 구하라.

문제

9. 점 $(1, 2, 0)$에서 원뿔면 $z^2 = x^2 + y^2$까지의 거리를 구하라.

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$$
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

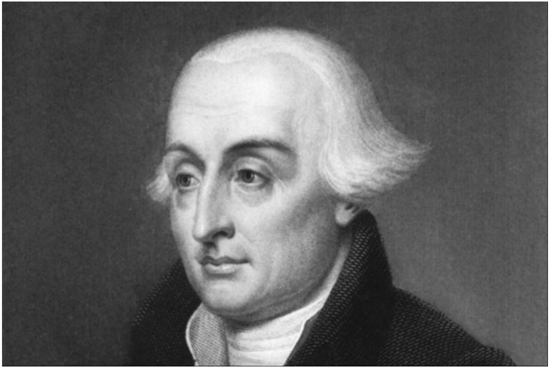
문제

9. 점 $(1,2,0)$에서 원뿔면 $z^2 = x^2 + y^2$까지의 거리를 구하라.

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$$
$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$g(x,y,z) = 0$의 조건에서 $\min f(x,y,z)$를 구하라.

도와줘요 라그랑주!



잠깐!

주어진 점을 중심으로 하는 적당히 큰 닫힌 구를 잡으면 곡면과 만난다.
정의역을 구 내부로 제한하자.
f는 연속이므로 최대/최소 정리에 의해 최대/최소값을 가진다.
구 바깥의 모든 점은 내부의 어떤 점보다도 f가 크다.
따라서 구 안에서의 최소값이 전체에서 최소값!
그러므로 f의 최소값이 존재한다.

풀이

$$\nabla f(x,y,z) = \langle 2(x-1), 2(y-2), 2z \rangle$$
$$\nabla g(x,y,z) = \langle 2x, 2y, -2z \rangle$$
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \vee \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$$

풀이

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y,z) &= \langle 2(x-1), 2(y-2), 2z \rangle \\
\nabla g(x,y,z) &= \langle 2x, 2y, -2z \rangle \\
\nabla f(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) \lor \nabla g(x,y,z) = \vec{0}
\end{aligned}
$$

$$2z = \lambda \cdot (-2z) \implies z = 0 \lor \lambda = -1$$

풀이

$$\nabla f(x,y,z) = \langle 2(x-1), 2(y-2), 2z\rangle$$
$$\nabla g(x,y,z) = \langle 2x, 2y, -2z\rangle$$
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \vee \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$$

$$2z = \lambda \cdot (-2z) \implies z = 0 \vee \lambda = -1$$

If $\lambda = -1$: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$, $z = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad f(\dfrac{1}{2}, 1, \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}) = \dfrac{5}{2}$

풀이

$$\nabla f(x,y,z) = \langle 2(x-1), 2(y-2), 2z\rangle$$
$$\nabla g(x,y,z) = \langle 2x, 2y, -2z\rangle$$
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \vee \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$$

$$2z = \lambda \cdot (-2z) \implies z = 0 \vee \lambda = -1$$

If $\lambda = -1$: $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

If $z = 0$: $x = y = 0$

$$f(\frac{1}{2}, 1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}) = \frac{5}{2}$$
$$f(0,0,0) = 5$$

풀이

$$\nabla f(x,y,z) = \langle 2(x-1), 2(y-2), 2z \rangle$$
$$\nabla g(x,y,z) = \langle 2x, 2y, -2z \rangle$$
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \vee \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$$

$$2z = \lambda \cdot (-2z) \implies z = 0 \vee \lambda = -1$$

If $\lambda = -1$: $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad f(\frac{1}{2}, 1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}) = \frac{5}{2}$

If $z = 0$: $x = y = 0$ $\qquad f(0,0,0) = 5$

$\nabla g(x,y,z) = \vec{0}$인 경우는 고맙게도 이미 등장했으므로 패스

풀이

$$\nabla f(x,y,z) = \langle 2(x-1), 2(y-2), 2z \rangle$$
$$\nabla g(x,y,z) = \langle 2x, 2y, -2z \rangle$$
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \vee \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$$

$$2z = \lambda \cdot (-2z) \implies z = 0 \vee \lambda = -1$$

If $\lambda = -1$: $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$, $z = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad f(\frac{1}{2}, 1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}) = \frac{5}{2}$

If $z = 0$: $x = y = 0$ $\qquad f(0,0,0) = 5$

$\nabla g(x,y,z) = \vec{0}$인 경우는 고맙게도 이미 등장했으므로 패스

따라서, 거리는 $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

쉬운 방법