VIO第六章作业思路讲解

主讲人 张兵兵

题目

作业

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基础题

1. 证明式(15)中，取 $\mathbf{y}=\mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解。提示：设 $\mathbf{y}\prime=\mathbf{u}_4+\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 正交于 $\mathbf{u}_4$，证明

$$\mathbf{y}\prime^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D}\mathbf{y}\prime \geq \mathbf{y}^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D}\mathbf{y}$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

2. 请依据本节课公式，完成特征点三角化代码，并通过仿真测试

提升题

1. 请对测量值加上不同噪声（增大测量噪声方差），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。
2. 固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧（如 3，4，5 帧等），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。

纲要

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 基础题1：证明题：奇异值构造零空间
- 基础题2：特征点三角化代码
- 提升题1：改变噪声
- 提升题2：改变帧数

基础题1：证明题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 方法1：奇异值分解

$$D^\top D = U\Sigma U^\top = [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix}$$

$$y'^\top D^\top D y' - y^\top D^\top D y = (u_4 + v)^\top D^\top D(u_4 + v) - u_4^\top D^\top D u_4$$

$$= u_4^\top D^\top D v + v^\top D^\top D u_4 + v^\top D^\top D v$$

$$= u_4^\top [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix} v + v^\top [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix} u_4 + v^\top [u_1, u_2, u_3, u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top\\ u_2^\top\\ u_3^\top\\ u_4^\top\end{bmatrix} v$$

$$= [0\ 0\ 0\ \mathrm{u}_4^\top \mathrm{u}_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix} + [0,0,0, v^\top u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ u_4^\top u_4\end{bmatrix} + [v^\top u_1, v^\top u_2, v^\top u_3, 0]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix}$$

基础题1：证明题

- 方法1：奇异值分解

$$= [0\ 0\ 0\ \mathrm{u}_4^\top\mathrm{u}_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix} + [0,0,0,v^\top u_4]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ u_4^\top u_4\end{bmatrix} + [v^\top u_1, v^\top u_2, v^\top u_3, 0]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= [v^\top u_1, v^\top u_2, v^\top u_3, 0]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^\top v\\ u_2^\top v\\ u_3^\top v\\ 0\end{bmatrix}$$

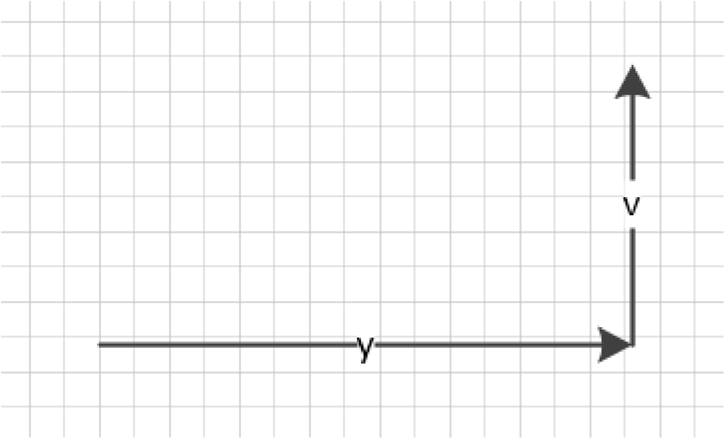
$$= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i (v^\top u_i u_i^\top v) \geq 0$$

因此

$$y'^\top D^\top D y' \geq y^\top D^\top D y$$

基础题1：证明题

- 方法1：奇异值分解
  - 一个问题：y′能否保证模长为1？不能



  - 用别的特征向量也能得到相同的结果

基础题1：证明题

- 方法2：线性组合（更加general的方法）

令

$$y=\sum_{i=1}^{4}a_iu_i$$

$$y^\top D^\top Dy=\sum_{i=1}^{4}a_iu_i^\top\sum_{i=1}^{4}\sigma_iu_iu_i^\top\sum_{i=1}^{4}a_iu_i$$

$$=\sum_{i=1}^{4}(a_iu_i^\top)(\sigma_iu_iu_i^\top)(a_iu_i)=\sum_{i=1}^{4}a_i^2\sigma_i$$

原问题化为

基础题1：证明题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 方法2：线性组合

$$\min \sum_{i=1}^{4} a_i^2 \sigma_i$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{4} a_i^2 = 1$$

当

$$a_i = 0(i = 1,2,3); a_4 = 1$$

时，取到最小值。此时

$$y = u_4$$

基础题1：证明题

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 方法3：拉格朗日乘子

$$\min f(y) = y^\top D^\top Dy \quad s.t. ||y|| = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min y^\top D^\top Dy \ s.t. ||y|| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\min_y \max_\lambda y^\top D^\top Dy + \lambda(1 - y^\top y), s.t. \lambda \geq 0$$

$$\min_y \max_\lambda y^\top D^\top Dy + \lambda(1 - y^\top y) = \max_\lambda \min_y y^\top D^\top Dy + \lambda(1 - y^\top y)$$

基础题1：证明题

- 方法3：拉格朗日乘子

分类讨论：

（1）若$\lambda > \sigma_4$

$y^\top D^\top Dy + \lambda(1 - y^\top y)$的极小值为$-\infty$，不满足拉格朗日乘子的对偶条件$p^* > -\infty$

（2）若$\lambda \le \sigma_4$

$$\min_y y^\top D^\top Dy + \lambda(1 - y^\top y) \Rightarrow D^\top Dy = \lambda y$$

$$\max_\lambda \min_y y^\top D^\top Dy + \lambda(1 - y^\top y), \mathrm{s.t.}\ \mathrm{D}^\top Dy = \lambda y, \lambda \in [0, \sigma_4]$$

$$\Leftrightarrow \max_\lambda \lambda = \sigma_4$$

基础题2：特征点三角化代码

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

◆ 根据公式拼接矩阵

```
/// TODO::homework; 请完成三角化估计深度的代码
// 遍历所有的观测数据，并三角化
Eigen::Vector3d P_est;           // 结果保存到这个变量
P_est.setZero();
/* your code begin */
Eigen::MatrixXd D(2*(poseNums-start_frame_id) , 4);
int j = 0;
for (int i=start_frame_id; i < end_frame_id; ++i){
    Eigen::MatrixXd P(3,4);
    P.leftCols(3)=camera_pose[i].Rwc.transpose();
    P.rightCols(1)=-camera_pose[i].Rwc.transpose()*camera_pose[i].twc;
    D.block<2,4>(j*2,0)=camera_pose[i].uv*P.row(2)-P.topRows(2);
    ++j;
}
Eigen::SelfAdjointEigenSolver<Eigen::Matrix4d> eigen_solver ( D.transpose()*D );     /* your code end */
```

提升题：改变噪声、改变帧数

◆ 加入噪声：一个像素坐标在归一化平面代表多少距离？

相机大小一般10^{-2}m 级别，大约10^3个像素，一个像素的物理长度$d = 10^{-5}$m。
焦距长度10^{-2}m 级别

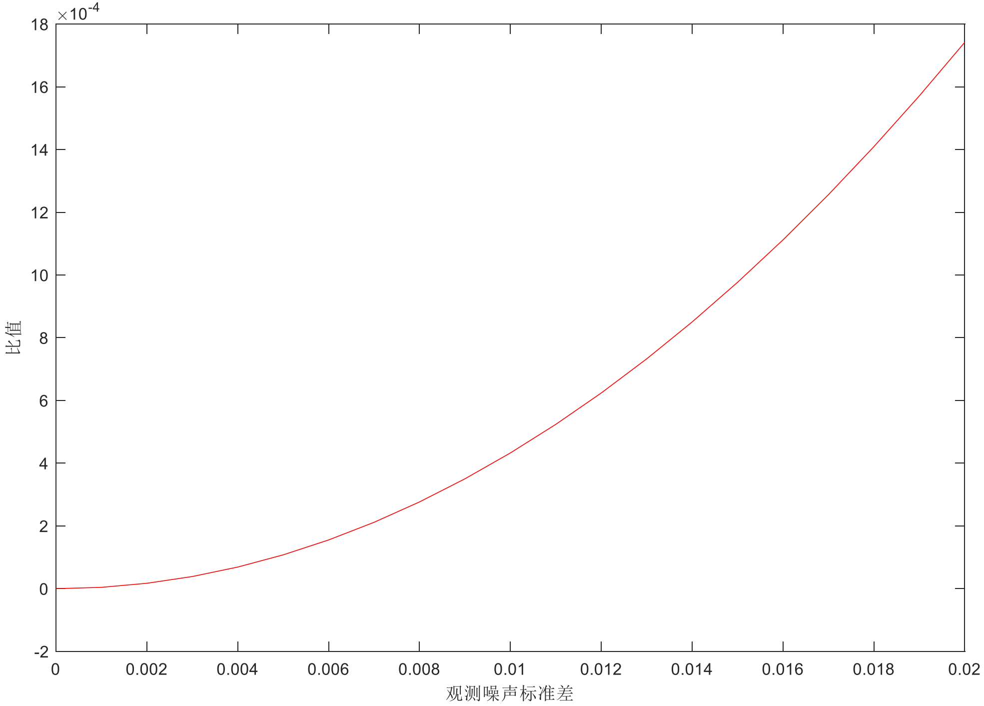
$$u = f_x \frac{X}{Z} + c_x$$

因此，上式中$f_x = \frac{10^{-2}}{d} = 10^3$

像素坐标 u 的 1 个像素，代表归一化平面的$10^{-3}m$

提升题：改变噪声、改变帧数

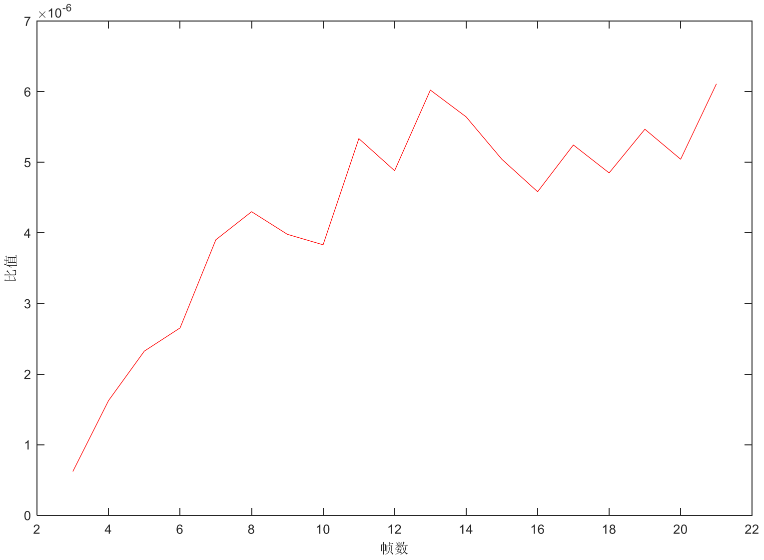
◆ 改变噪声



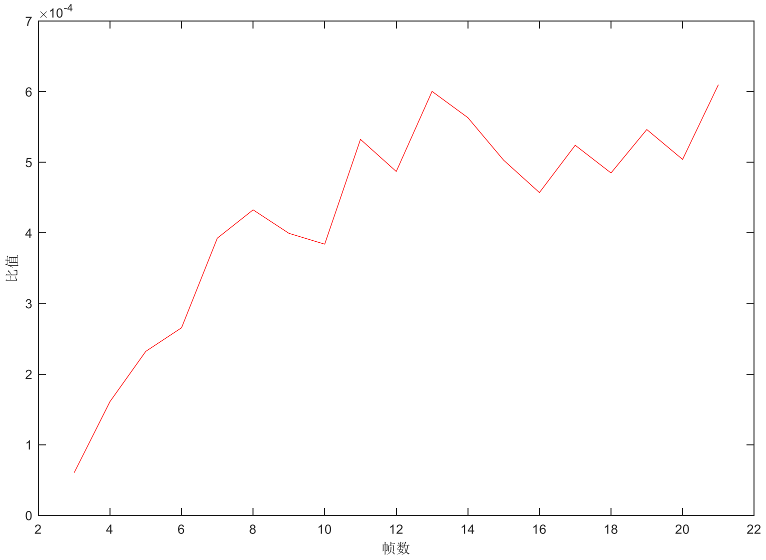
提升题：改变噪声、改变帧数

◆ 改变帧数

➢ 噪声标准差0.001



➢ 噪声标准差0.01



深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening