Mecánica Vectorial (2022-2)

Actividad 5

Sebastián González Juárez **Grupo 8110: Mirna Villavicencio Torres**

1. En este problema espero que te diviertas jugando con la fuerza de fricción, pues harás uso de tu gran curiosidad y las grandes dotes experimentales que seguramente tienes.

   Coloca un libro sobre la mesa y sitúa algo (tu calculadora, una goma, otro libro, etc.) sobre él. Levanta lentamente un extremo del libro hasta que el objeto que colocaste encima comience a deslizarse. Mide el ángulo que forma el libro con la mesa en ese preciso instante. Este ángulo, como lo vimos en nuestra sesión virtual, nos permite determinar el coeficiente de fricción estática para un par de superficies. A partir de esta idea determina el coeficiente de fricción estático de diversos materiales.

Recordemos que el coeficiente de fricción a partir de un ángulo esta dado por: $\mu_s = \tan\theta_c$

Para medir el ángulo utilice mi celular que lo puede medir con solo inclinarlo.

Calculadora. $\mu_s = \tan 17° \approx 0.3057$

Mouse. $\mu_s = \tan 11° \approx 0.1944$

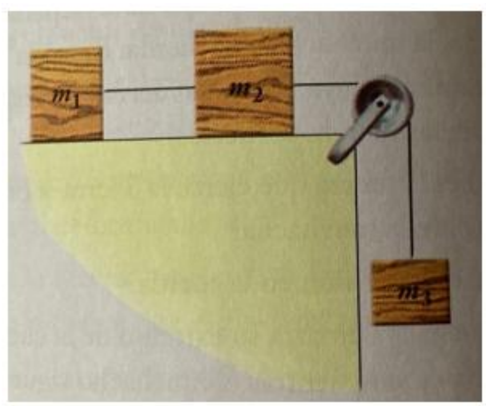
Lápiz. $\mu_s = \tan 14° \approx 0.2493$

Cuaderno. $\mu_s = \tan 23° \approx 0.4245$

2. Dos masas m_1 y m_2 están en una mesa horizontal sin fricción conectadas por un cordón ligero. Otro cordón ligero conecta a la masa m_2 con una tercera masa m_3, colgante, como se muestra en la figura

   (a) Encuentra la aceleración del sistema.

   (b) Encuentra la tensión en cada una de las dos cuerdas

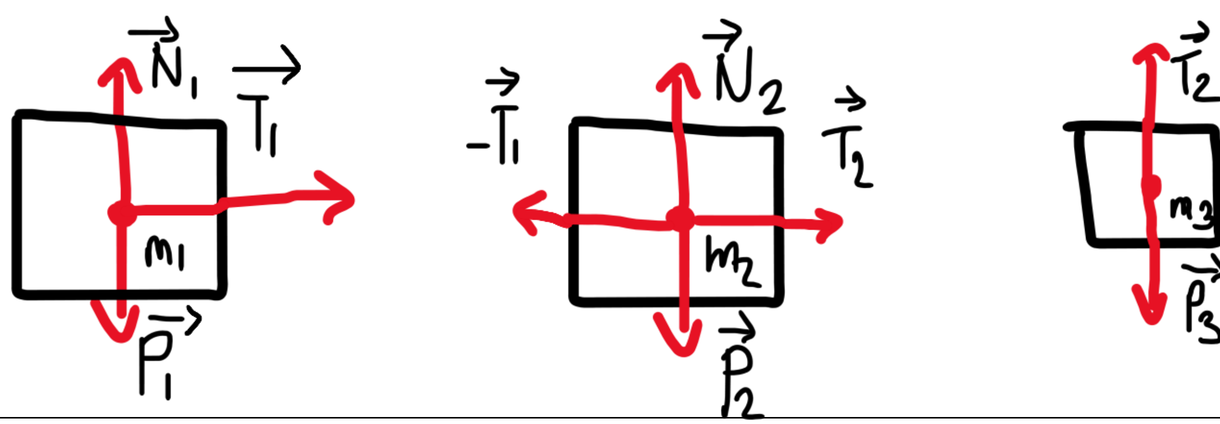


Corrector. $\mu_s = \tan 19° \approx 03443$

a)

Hagamos un diagrama de cada masa, para analizar las fuerzas que influyen en ellas.

Definamos $\vec{P_1} = m_1\vec{g}, \vec{P_2} = m_2\vec{g}, \vec{P_3} = m_3\vec{g}$.



$$m_1 \begin{cases} \sum \overrightarrow{F_x} = \overrightarrow{T_1} = m_1\vec{a} \\ \sum \overrightarrow{F_y} = \overrightarrow{N_1} - m_1\vec{g} = 0 \end{cases} \qquad m_2 \begin{cases} \sum \overrightarrow{F_x} = \overrightarrow{T_2} - \overrightarrow{T_1} = m_2\vec{a} \\ \sum \overrightarrow{F_y} = \overrightarrow{N_2} - m_2\vec{g} = 0 \end{cases} \qquad m_3 \begin{cases} \sum \overrightarrow{F_x} = 0 \\ \sum \overrightarrow{F_y} = \overrightarrow{T_2} - m_3\vec{g} = -m_3\vec{a} \end{cases}$$

Tomemos la igualdad $\overrightarrow{T_2} - m_3\vec{g} = -m_3\vec{a}$ y despejemos $\overrightarrow{T_2}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{T_2} = m_3\vec{g} - m_3\vec{a}$$

Por otro lado, sabemos que $\overrightarrow{T_1} = m_1\vec{a}$. Y, como $\overrightarrow{T_2} - \overrightarrow{T_1} = m_2\vec{a}$. $\Rightarrow m_3\vec{g} - m_3\vec{a} - m_1\vec{a} = m_2\vec{a}$

Despejemos $\vec{a}$.

$$\Rightarrow m_3\vec{g} = m_2\vec{a} + m_3\vec{a} + m_1\vec{a}$$

$$\Rightarrow m_3\vec{g} = \vec{a}(m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Hemos encontrado la aceleración del sistema.

b)

Busquemos T_1:

$$\overrightarrow{T_1} = m_1\vec{a}$$

$$= m_1\left(\frac{m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{T_1} = \frac{m_1 m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Ahora T_2:

$$\overrightarrow{T_2} - \overrightarrow{T_1} = m_2\vec{a}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{T_2} = m_2\vec{a} + \overrightarrow{T_1}$$

$$= m_2\left(\frac{m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3}\right) + \frac{m_1 m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

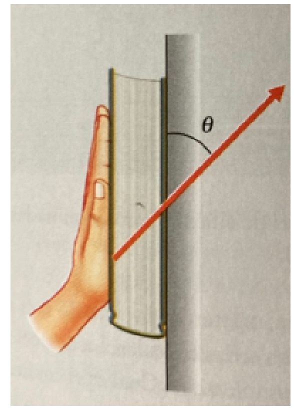
$$= \frac{m_2 m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_1 m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_2 m_3\vec{g} + m_1 m_3\vec{g}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\therefore \overrightarrow{T_2} = \frac{m_3\vec{g}(m_2 + m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Hemos encontrado la tensión de las 2 cuerdas.

3. Sostienes un libro contra la pared apretándolo con la mano como se muestra en la imagen. La fuerza forma un ángulo θ con la pared. La masa del libro es m y el coeficiente de fricción estática entre el libro y la pared es μ_s .



(a) Dibuja el diagrama de cuerpo libre del libro.

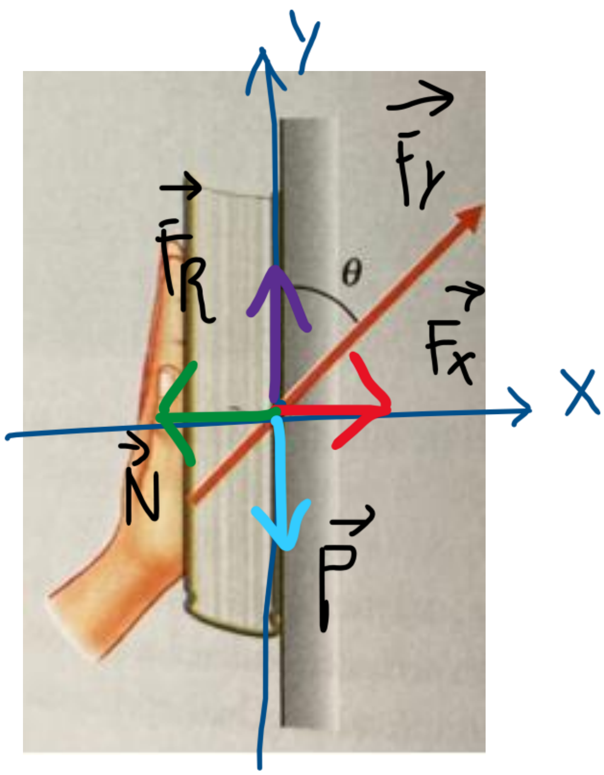
(b) Calcula la magnitud de la fuerza que debes ejercer para apenas mantener el libro estacionario.

(c) ¿Para qué valor de θ la magnitud de la fuerza requerida es la más pequeña posible? ¿Cuál es la magnitud de la menor fuerza posible?

(d) Si empujas a un ángulo mayor de 90º , debes hacerlo muy fuerte para sostener el libro en su lugar. ¿Para qué valor del ángulo se hará imposible sostener en su lugar el libro?

a)

Dibujemos el sistema de fuerzas. En este caso también dibujare los ejes, para tener más contemplado el ángulo formado.



b)

Analicemos las fuerzas en cada eje.

En el eje x, tenemos: $\vec{F_x} - \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{F_x} = \vec{N}$

En el eje y, tenemos: $\vec{F_y} + \vec{F_R} - \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{F_y} = \vec{P} - \vec{F_R}$

Y, como la fuerza de rozamiento es el producto del coeficiente de fricción por la Normal.

$$t.q.\quad \overrightarrow{F_R} = \mu_s \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{F_y} = \vec{P} - \mu_s \vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{F_y} = \vec{P} - \mu_s \overrightarrow{F_x}$$

Donde $\vec{P} = mg$

$$\Rightarrow \vec{F}\cos\theta = \vec{P} - mg\vec{F}\sin\theta \Rightarrow \vec{F}\cos\theta + \mu_s \vec{F}\sin\theta = mg \Rightarrow \vec{F}(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) = mg$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

Esa es la fuerza que debemos ejercer.

c)

Busquemos un mínimo, que será donde la derivada de la fuerza valga 0.

$$\frac{d\vec{F}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}\right) = \frac{0(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) - mg\frac{d}{d\theta}(\cos\theta + \mu_s \sin\theta)}{(\cos\theta + \mu_s \sin\theta)^2}$$

Llegamos a la conclusión que $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}\right) = 0$, cuando $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) = 0$.

$$\Rightarrow -\sin\theta + \mu_s \cos\theta = 0$$

Despejamos μ_s,

$$\mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \mu_s = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan\mu_s$$

Ahora falta saber si es un mínimo o máximo, hay que obtener la segunda derivada y evaluar el signo.

$$\frac{d}{d\theta}(-\sin\theta + \mu_s \cos\theta) = -\cos\theta - \mu_s \sin\theta \Rightarrow -\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta = \frac{-\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}$$

Como el ángulo que se considera es menor a un ángulo recto, entonces el signo de la segunda derivada será negativo y se trata de un máximo. Como era el denominador de la ecuación de fuerza, la fuerza será mínima.

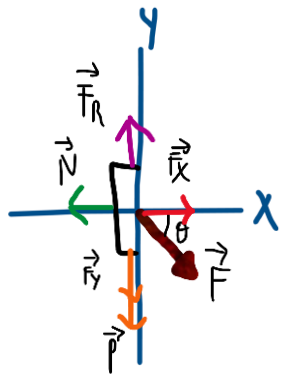
La fuerza queda como,

$$F_{min} = \frac{mg}{\cos\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta} = \frac{mg}{\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta}} = \frac{mg}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

$\therefore F_{min} = mg\cos\theta$

d)

Dibujemos el nuevo diagrama de fuerza.



$$\overrightarrow{F_x} = \vec{F}\cos\theta$$

$$\overrightarrow{F_y} = \vec{F}\sin\theta$$

Analizando nuevamente las fuerzas,

En el eje x tenemos: $\overrightarrow{F_x} - \vec{N} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F_x} = \vec{N}$

En el eje y, tenemos: $\overrightarrow{F_R} - \overrightarrow{F_y} - \vec{P} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{F_y} = \overrightarrow{F_R} - \vec{P}$

Y, como la fuerza de rozamiento es el producto del coeficiente de fricción por la Normal.

$$t.q.\ \ \overrightarrow{F_R} = \mu_s\vec{N} \Rightarrow \overrightarrow{F_y} = \mu_s\vec{N} - \vec{P} \Rightarrow \overrightarrow{F_y} = \mu_s\overrightarrow{F_x} - \vec{P} \Rightarrow \vec{F}\sin\theta = \mu_s\vec{F}\cos\theta - \vec{P}$$

Donde $\vec{P} = mg$

$$\Rightarrow \vec{F}\sin\theta = \mu_s\vec{F}\cos\theta - mg \Rightarrow mg = \mu_s\vec{F}\cos\theta - \vec{F}\sin\theta \Rightarrow \vec{F}(\mu_s\cos\theta - \sin\theta) = mg$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{mg}{\mu_s\cos\theta - \sin\theta}$$

Notemos que cuando el denominar tienda a 0, la fuerza será cada vez mayor, tal que si el denominador es 0 la fuerza que tendremos que aplicar será infinita, por lo que el libro caerá.

$$\mu_s\cos\theta - \sin\theta = 0$$

$$\mu_s\cos\theta = \sin\theta$$

$$\mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\mu_s = \tan\theta$$

$$\therefore \theta = \arctan\mu_s$$

4. Un cohete, de 10^3 kg de masa, la cual permanece constante durante todo el proceso, se coloca verticalmente en su base de lanzamiento. El gas de propulsión se expele a una velocidad de *2 kg/s.* Encuentra la velocidad mínima de los gases de escape de modo que el cohete comience a elevarse. Encuentra también la velocidad del cohete *10* segundos después de la ignición, suponiendo que la velocidad de escape es la mínima.

Consideremos:

Masa inicial, $m_0 = 1000\ kg$

Velocidad en que se expele el gas, $q = 2\ {}^{kg}/_{s}$

La aceleración gravitatoria, $g = 9.8\ {}^{kg}/_{s^2}$

La masa del cohete por la derivada de la velocidad por el tiempo es igual a $u =$ la velocidad mínima de escape por q, menos el peso.

$$m\frac{dv}{dt} = uq - mg$$

Ene le monto donde empieza a moverse es cuando el empuje sea igual a el peso.

$$uq = m_0 g$$

$$\Rightarrow u = \frac{m_0 g}{q}$$

$$= \frac{(1000\ kg)\left(9.8\ {}^{kg}/_{s^2}\right)}{2\ {}^{kg}/_{s}} = 4900\frac{m}{s}$$

La velocidad mínima de los gases de escape para que el cohete comienza a elevarse es de $\mathbf{4900\frac{m}{s}}$.

Usaremos la velocidad dependiente del tiempo.

$$v = v_0 - gt + u\ln\frac{m_0}{m_0 - qt}$$

En $t = 10\ s$,

$$v = 0 - \left(9.8\ {}^{kg}/_{s^2}\right)(10\ s) + 4900\frac{m}{s}\ln\frac{(1000\ kg)}{(1000\ kg) - 2\ {}^{kg}/_{s}\,(10\ s)}$$

$$\therefore v \cong 0.993\ \frac{m}{s}$$

La velocidad del cohete 10 s después de la ignición, donde la velocidad de escape es la mínima, es de aproximadamente $\mathbf{0.993\ \frac{m}{s}}$.