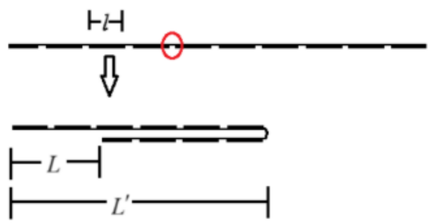
Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1 - 29

Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

29. Tienes una cadena de n eslabones. En cada unión de eslabones la cadena se puede doblar como en la figura 1. Si l es la longitud de cada eslabón ¿Cuántas configuraciones hay donde la distancia entre los dos extremos de la cadena es L? (por supuesto, con L ∈ [0, l, 2l, . . .]).



Sol.

Para plantearlo consideremos que nos n eslabones de la misma longitud l se doblaran a la izquierda y derecha en un ángulo de 180°. De este modo lo podemos ver de forma más sencillo pues es un planteamiento en 1D.

La distancia entre los extremos debe ser L, donde $L \in \{0, l, 2l, \dots, nl\}$, múltiplos de l.

Como hay 2 opciones y tenemos n eslabones, tenemos 2^n configuraciones totales.

Llamémosle x a la cantidad de eslabones que están a la derecha y y a la cantidad de eslabones que están a la izquierda. De modo que $x + y = n$.

De acá podemos ver que $y = n - x$.

Para el desplazamiento hay que asignarle signos, de modo que:

$$d = l(x - y) = l\big(x - (n - x)\big) = l(2x - n)$$

Por lo que la distancia es $|d|$. Como se pide una distancia L y sabemos que L son múltiplos de l:

$$|d| = |l(2x - n)| = l|2x - n| = ml, \qquad m \in \{0,1,2, \dots, nl\}$$

Entonces, $|2x - n| = m \Rightarrow x = \frac{n \pm m}{2}$, con $0 \leq \frac{n \pm m}{2} \leq n$.

Necesitamos que x sea entero, lo que nos lleva a pensar que $n \pm m$ debe ser par, i. e. n y m pares o n y m impares.

$$x_1 = \frac{n + m}{2}, \qquad x_2 = \frac{n - m}{2}$$

Para elegir el número de configuraciones de los x de eslabones que apuntan a la derecha en n eslabones tenemos:

$$\binom{n}{x}$$

Tenemos 2 desplazamientos que le corresponden a x, los de x_1 y los de x_2. Por lo que para cada uno hay las siguientes configuraciones:

$$\binom{n}{x_1}, \qquad \binom{n}{x_2}$$

Para $m > 0$:

$$\#C = \binom{n}{x_1} + \binom{n}{x_2} = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} + \binom{n}{\frac{n-m}{2}}$$

Donde $C = \{\text{Configuraciones que hay donde la distancia entre los 2 extremos de la cadena es L}\}$

Para $m = 0$:

$$\#C = \binom{n}{x} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

Pues no hay que considerar x_1 y x_2 como diferentes.

En conclusión:

$$\#C = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} & si\ m = 0, \qquad n\ par \\ \binom{n}{\frac{n+m}{2}} + \binom{n}{\frac{n-m}{2}} & si\ 0 < m \leq n, \qquad n \pm m\ par \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$