Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Mecánica Analítica

Tarea 3

Profesores:
Dra. Rosa María Méndez Vargas

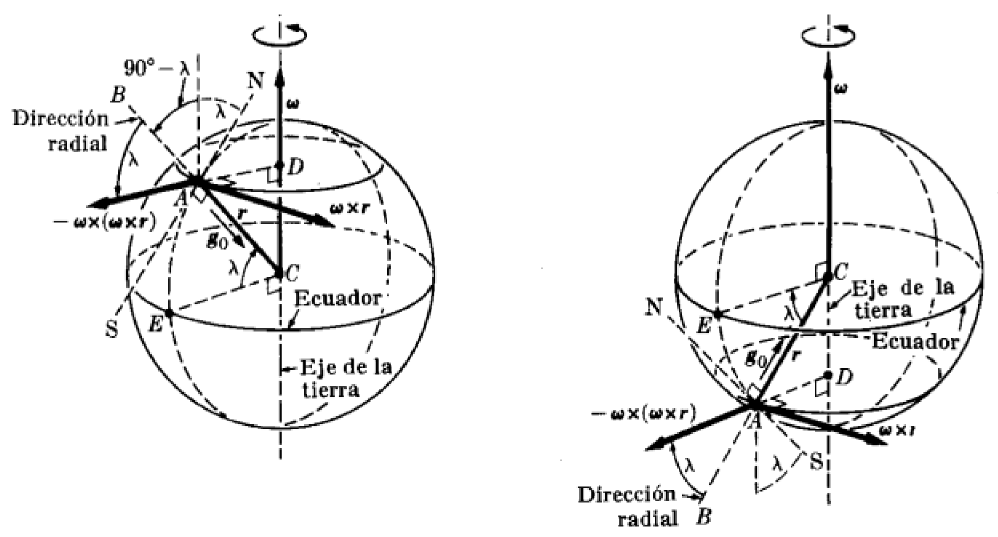
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- Encuentre cuanto se desvía la plomada hacia el sur en **a)** CDMX, **b)** Madrid y **c)** Estocolmo.

(70 %) Escriba la argumentación vista en clase para calcular la desviación de la plomada en el hemisferio norte. ¿Qué aproximaciones se deben realizar? ¿cuáles son los valores reales para la Tierra? ¿Estos valores permiten justificar la aproximación que hizo anteriormente? (30 %) Busque los datos reales de la latitud para las tres ciudades que se mencionan. Verifique que las unidades sean las correctas.

Planteemos 2 sistemas, el primer sistema de referencia O, el cual estará situado en el origen, en la tierra, este no rota respecto a la tierra. El segundo sistema de referencia O' será el que rote respecto a la tierra y se ubica en la superficie de la tierra. Como se muestra en la siguiente imagen del Alonso Fin:



(a) Hemisferio Norte (b) Hemisferio Sur

Fig. 6-6. Aceleración centrífuga debida a la rotación de la tierra.

También en otra imagen del libro encontramos mas detallados los vectores buscados:

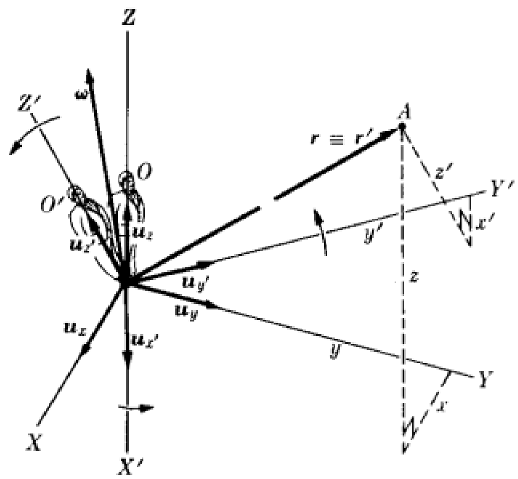


Fig. 6-5. Sistemas de referencia en movimiento relativo de rotación uniforme.

Para esta parte aprovechare a reescribir un poco de teoría del mismo libro.

Donde vector de posición del para el sistema O,

$$\bar{r} = \hat{u}_x x + \hat{u}_y y + \hat{u}_z z$$

Y, por consiguiente, la velocidad para el punto A respecto a su sistema correspondiente, es:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \hat{u}_x \frac{dx}{dt} + \hat{u}_y \frac{dy}{dt} + \hat{u}_z \frac{dz}{dt}$$

De forma similar, para el otro sistema de referencia, se tiene que,

$$\bar{r} = \hat{u}_{x'} x' + \hat{u}_{y'} y' + \hat{u}_{z'} z'$$

Debido a que los orígenes coinciden, el vector $\bar{r}$ es el mismo, esa es la razón de no haber escrito $\bar{r}'$. La velocidad para este sistema será:

$$\bar{v}' = \hat{u}_{x'} \frac{dx'}{dt} + \hat{u}_{y'} \frac{dy'}{dt} + \hat{u}_{z'} \frac{dz'}{dt}$$

Para el segundo sistema de referencia se supuso que no está rotando, por lo que se consideró los vectores unitarios como constantes en dirección. A diferencia, el primer sistema lo ve rotado, lo que implicaría es que sus vectores unitarios no tengan dirección constante, así podemos rescribir la derivada respecto al tiempo tal que:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \hat{u}_{x'} \frac{dx'}{dt} + \hat{u}_{y'} \frac{dy'}{dt} + \hat{u}_z \frac{dz}{dt} + \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} x' + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} y' + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} z'$$

Como los vectores unitarios $\hat{u}_{i'}$ se hallan en rotación uniforme:

$$\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} = \bar{w} \times \hat{u}_{x'}, \qquad \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} = \bar{w} \times \hat{u}_{y'}, \qquad \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \bar{w} \times \hat{u}_{z'}$$

De modo que,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}x' + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}y' + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}z' &= \overline{w} \times \hat{u}_{x'}x' + \overline{w} \times \hat{u}_{y'}y' + \overline{w} \times \hat{u}_{z'}z' \\ &= \overline{w} \times \left(\hat{u}_{x'}x' + \hat{u}_{y'}y' + \hat{u}_{z'}z'\right) \\ &= \overline{w} \times \bar{r}\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \left(\hat{u}_{x'}\frac{dx'}{dt} + \hat{u}_{y'}\frac{dy'}{dt} + \hat{u}_{z}\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}x' + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}y' + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}z'\right) \\ &= \bar{v}' + \overline{w} \times \bar{r}\end{aligned}$$

Repitiendo de forma similar los pasos anteriores podemos hallar la aceleración medida para el sistema O:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \hat{u}_x\frac{dv_x}{dt} + \hat{u}_y\frac{dv_y}{dt} + \hat{u}_z\frac{dv_z}{dt}$$

Para el otro sistema de referencia, se tiene que,

$$\bar{a}' = \hat{u}_{x'}\frac{dv'_{x'}}{dt} + \hat{u}_{y'}\frac{dv'_{y'}}{dt} + \hat{u}_{z'}\frac{dv'_{z'}}{dt}$$

Y notar que al derivar la ecuación encontrada para $\bar{v}$, se obtiene:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}'}{dt} + \overline{w} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Como,

$$\bar{v}' = \hat{u}_{x'}v'_{x'} + \hat{u}_{y'}v'_{y'} + \hat{u}_{z'}v'_{z'}$$

Implica,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}'}{dt} &= \left(\hat{u}_{x'}\frac{dv'_{x'}}{dt} + \hat{u}_{y'}\frac{dv'_{y'}}{dt} + \hat{u}_{z'}\frac{dv'_{z'}}{dt}\right) + \left(\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}v'_{x'} + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}v'_{y'} + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}v'_{z'}\right) \\ &= \bar{a}' + \overline{w} \times \bar{v}'\end{aligned}$$

Y retomando,

$$\bar{v} = \bar{v}' + \overline{w} \times \bar{r}$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}'}{dt} &= \bar{a}' + \overline{w} \times (\bar{v}' + \overline{w} \times \bar{r}) \\ &= \bar{a}' + \left(\overline{w} \times \bar{v}' + \overline{w} \times (\overline{w} \times \bar{r})\right)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\bar{a} = \bar{a}' + 2\overline{w} \times \bar{v}' + \overline{w} \times (\overline{w} \times \bar{r})$$

Ahora siguiendo esto mismo, pero para el movimiento relativo a la tierra, se tiene:

$$\bar{g}_0 = \bar{a}' + 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Despejando $\bar{a}'$,

$$\bar{a}' = \bar{g}_0 - 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Regresando a ver la figura 6-6. El termino $-2\bar{w} \times \bar{v}'$, hace referencia al término de Coriolis. Consideremos lo despreciable para el caso de un cuerpo inicialmente en reposo o moviéndose muy lento, de modo que:

$$\bar{a}' = \bar{g}_0 - \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Donde $\bar{a}' = \bar{g}$, la aceleración efectiva de la gravedad:

$$\bar{g} = \bar{g}_0 - \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Esta es la aceleración medida por un péndulo y al suponer que la tierra es esférica y que no hay anomalías locales, podemos considerar $\bar{g}_0$ esta señalando hacia el centro de la tierra en la dirección radial. Debido al segundo término de la ecuación anterior, la dirección $\bar{g}$, llamada la vertical, se desvía ligeramente de la dirección radial y está determinada por la línea de la plomada. A continuación, se muestra el diagrama de representación del mismo libro Alonso Fin del cual se obtuvo toda esta información:

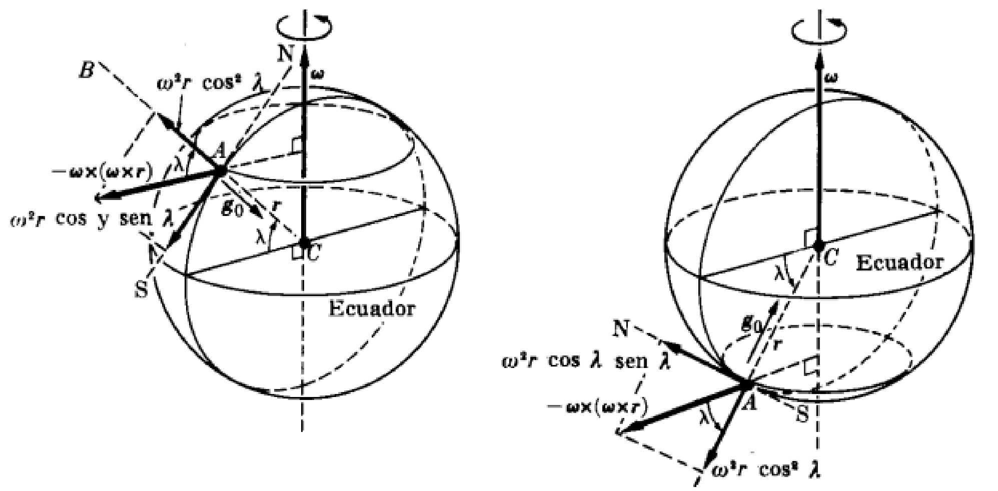


Fig. 6-7. Componentes horizontal y radial de la aceleración centrífuga.

La parte de $-\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$, se denomina la aceleración centrifuga debido a que por su signo negativo señala la dirección. El ángulo λ se hace con el ecuador e indica la latitud. Por consiguiente, el vector $\bar{w}$ hace un ángulo $90° - \lambda$ en el hemisferio norte y para el sur un ángulo $90° + \lambda$. La magnitud de $\bar{w} \times \bar{r}$ es entonces

$$w \sin(\, 90° \pm \lambda) = wr \cos \lambda$$

Y su dirección es perpendicular a $\bar{w}$ y paralela al ecuador.

Se tiene que la magnitud de la aceleración centrifuga es:

$$|-\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})| = w^2 r \;\cos \lambda \sin \lambda$$

Sus componentes son:

$$g - |-\overline{w} \times (\overline{w} \times \bar{r})| \cos\lambda = g - w^2 r\ \cos^2\lambda$$

$$|-\overline{w} \times (\overline{w} \times \bar{r})| \sin\lambda = w^2 r\ \cos\lambda \sin\lambda$$

Así con un poco más de geometría podemos hallar el ángulo de desviación:

$$\tan\delta_0 = \frac{w^2 r \sin\lambda \cos\lambda}{w^2 r \cos^2\lambda - g}$$

Así

$$\delta_0 = \tan^{-1}\frac{w^2 r \sin\lambda \cos\lambda}{w^2 r \cos^2\lambda - g}$$

Donde,

$$w = 7.292 \times 10^{-5}\ s^{-1}, \qquad r = 6.37 \times 10^6\ m, \qquad g = 9.81\ ms^{-2}$$

Las latitudes de las ciudades son aproximadamente las siguientes:

1. Ciudad de México (CDMX): Alrededor de 19.4326 grados norte.
2. Madrid: Aproximadamente 40.4168 grados norte.
3. Estocolmo: Cerca de 59.3293 grados norte.

a) CDMX

Para la CDMX se tiene una latitud aproximada de $\lambda \approx 19.43°$

$$\tan^{-1}\frac{(7.292 \times 10^{-5}\ s^{-1})^2(6.37 \times 10^6\ m)\ \cos(19.43°)\sin(19.43°)}{(7.292 \times 10^{-5}\ s^{-1})^2(6.37 \times 10^6\ m)\cos^2(19.43°) - 9.81\ ms^{-2}} \approx -0.06225°$$

b) Madrid

Para la Madrid se tiene una latitud aproximada de $\lambda \approx 40.42°$

$$\tan^{-1}\frac{(7.292 \times 10^{-5}\ s^{-1})^2(6.37 \times 10^6\ m)\ \cos(40.42°)\sin(40.42°)}{(7.292 \times 10^{-5}\ s^{-1})^2(6.37 \times 10^6\ m)\cos^2(40.42°) - 9.81\ ms^{-2}} \approx -0.09784°$$

c) Estocolmo

Para la Estocolmo se tiene una latitud aproximada de $\lambda \approx 59.33°$

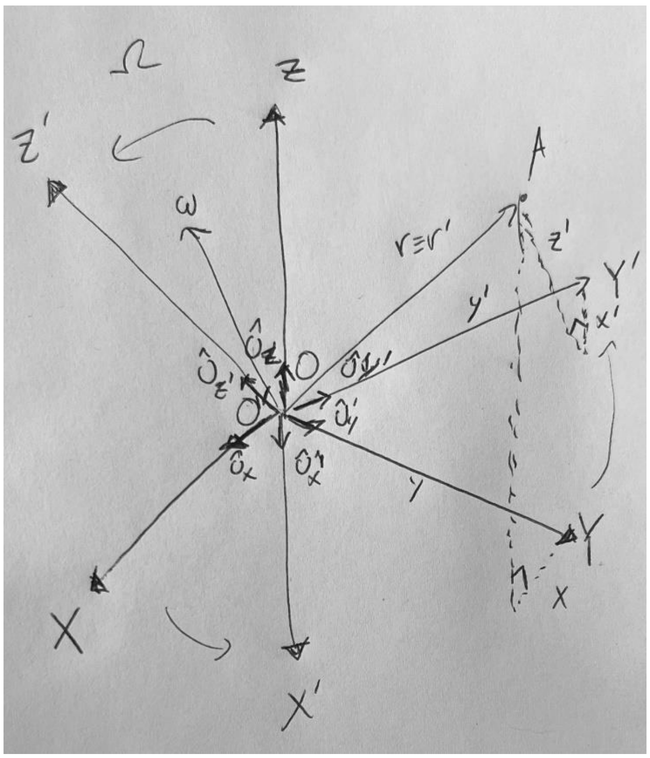
$$\tan^{-1}\frac{(7.292 \times 10^{-5}\ s^{-1})^2(6.37 \times 10^6\ m)\ \cos(59.33°)\sin(59.33°)}{(7.292 \times 10^{-5}\ s^{-1})^2(6.37 \times 10^6\ m)\cos^2(59.33°) - 9.81\ ms^{-2}} \approx -0.08687°$$

2.- Estudie la desviación de la plomada, debida a la rotación de la Tierra en el hemisferio sur. Magnitud y dirección.

En este ejercicio se calificará lo siguiente:

- ☐ (50 %) Diagrama en donde muestres la descomposición vectorial del vector $\vec{\Omega}$ en términos de la orientación que elijas para la base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ de vectores en el hemisferior sur. Se aconseja elegir la orientación del sistema para que sea un **Sistema Coordenado Derecho**.
- ☐ (50 %) Calculo **explícito** del vector de gravedad efectiva e interpretación de resultados. En caso de no realizar el diagrama correspondiente, con los vectores unitarios señalados, pueden poner las ecuaciones vectoriales de los tres vectores unitarios.

Al parecer para este ejercicio se debe repetir nuevamente los cálculos realizados para el primer ejercicio. Así que se hará un breve resumen de la primera parte.



Nuevamente se parte de un diagrama donde se muestre una rotación respecto a los sistemas O y O', como en la figura 6-5 o en el diagrama adjunto que trata de imitar dicha descomposición de vectores. Podemos llegar a que el vector de posición del para el sistema O,

$$\bar{r} = \hat{u}_x x + \hat{u}_y y + \hat{u}_z z$$

Y al derivar

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \hat{u}_x \frac{dx}{dt} + \hat{u}_y \frac{dy}{dt} + \hat{u}_z \frac{dz}{dt}$$

También vimos que,

$$\bar{r} = \hat{u}_{x'} x' + \hat{u}_{y'} y' + \hat{u}_{z'} z'$$

Con una velocidad de:

$$\bar{v}' = \hat{u}_{x'} \frac{dx'}{dt} + \hat{u}_{y'} \frac{dy'}{dt} + \hat{u}_{z'} \frac{dz'}{dt}$$

Se realizo una observación respecto a las rotaciones y sus direcciones, en la cual se concluyó que la velocidad la podíamos rescribir talque:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \hat{u}_{x'} \frac{dx'}{dt} + \hat{u}_{y'} \frac{dy'}{dt} + \hat{u}_z \frac{dz}{dt} + \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} x' + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} y' + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} z'$$

Como los vectores unitarios $\hat{u}_{i'}$ se hallan en rotación uniforme:

$$\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} = \bar{w} \times \hat{u}_{x'}, \qquad \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} = \bar{w} \times \hat{u}_{y'}, \qquad \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} = \bar{w} \times \hat{u}_{z'}$$

Donde: $\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} x' + \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} y' + \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} z' = \bar{w} \times \bar{r}$

Lo que nos llevó a: $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{w} \times \bar{r}$ y al derivar, $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}'}{dt} + \bar{w} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$.

De forma análoga se halló la aceleración del sistema O: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \hat{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \hat{u}_y \frac{dv_y}{dt} + \hat{u}_z \frac{dv_z}{dt}$

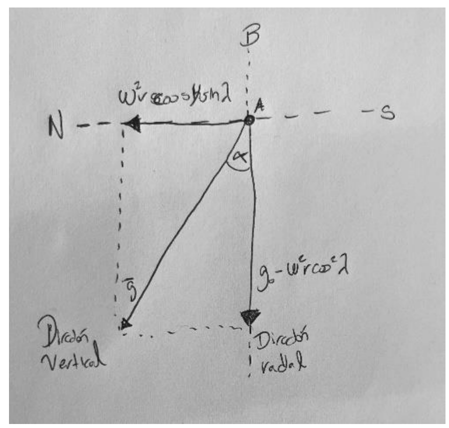
Para el sistema O': $\bar{a}' = \hat{u}_{x'} \frac{dv'_{x'}}{dt} + \hat{u}_{y'} \frac{dv'_{y'}}{dt} + \hat{u}_{z'} \frac{dv'_{z'}}{dt}$.

Como: $\bar{v}' = \hat{u}_{x'} v'_{x'} + \hat{u}_{y'} v'_{y'} + \hat{u}_{z'} v'_{z'}$. Implica: $\frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{a}' + \bar{w} \times \bar{v}'$. Y retomando: $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{w} \times \bar{r}$

Se tiene que: $\frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{a}' + \left(\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})\right)$. Finalmente, $\bar{a} = \bar{a}' + 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$

En donde el $-2\bar{w} \times \bar{v}'$, hace referencia al término de Coriolis y $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$ la aceleración centrifuga. Para el movimiento relativo a la tierra, se tiene: $\bar{g}_0 = \bar{a}' + 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$

Despejando $\bar{a}'$: $\bar{a}' = \bar{g}_0 - 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$. Al considerar despreciable Coriolis se llega: $\bar{a}' = \bar{g}_0 - \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$. Donde $\bar{a}' = \bar{g}$, la aceleración efectiva de la gravedad: $\bar{g} = \bar{g}_0 - \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$



Pasando a analizar la aceleración centrifuga, nombramos a λ, el ángulo formado a partir del ecuador, el cual indica la altitud. Por lo tanto, como nos interesa estudiar el hemisferio sur el ángulo será $90° + \lambda$. La magnitud de $\bar{w} \times \bar{r}$ es entonces $w \sin(\ 90° + \lambda) = wr \cos \lambda$

Sus componentes son:

$$g - |-\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})| \cos \lambda = g - w^2 r \ \cos^2 \lambda$$

$$|-\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})| \sin \lambda = w^2 r \ \cos \lambda \sin \lambda$$

Como se muestra en el anterior diagrama, o si se prefiere los diagramas del alonso Fin.

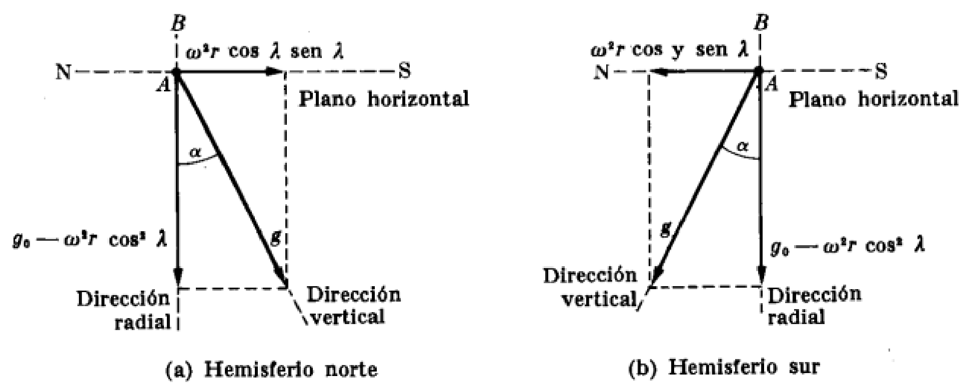


Fig. 6-8. Definición de la dirección vertical y la aceleración efectiva de caída.

Siguiendo las componentes y dado que el ángulo α tiende a una pequeñes debido al termino centrifugo, la magnitud de $\bar{g}$ no tendrá cambio apreciable a lo largo de la dirección radial, de modo que una buena aproximación es: $g = g_0 - w^2 r \ \cos^2 \lambda$.

3.- Considere un tiro vertical en el hemisferio norte. Hacia dónde y cuánto se desvía el objeto de la vertical cuando regresa al lugar desde el cual se lanzó.

En este ejercicio se calificará lo siguiente:

- ☐ (30 %) Diagrama del sistema de referencia elejido con la identificación del ángulo de ascenso λ. Puede ser a mano o a computadora.
- ☐ (10 %) Descomposición vectorial del **vector** de velocidad angular $\vec{\Omega}$ en el sistema de coordenadas elegido (Considera que debes usar la misma orientación que en el ejercicio 1).
- ☐ (10 %) Calculo explícito del **vector** de gravedad efectiva, $\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (\vec{R} + \vec{r}))$. Para simplificar el Calculo debes de hacer la aproximación $||\vec{r}|| \ll ||\vec{R}||$, ¿qué significa físicamente?.
- ☐ (20 %) Calculo **explícito** del vector de desviación, $\vec{d} = -(t - t_0)^2 \vec{\Omega} \times \vec{v}_0' - ((t - t_0)^3/3)\vec{\Omega} \times \vec{g}_{ef}$. Para que el resultado esté completamente determinado no debe depender del tiempo.
- ☐ (20 %) Calculo del tiempo que tarda la partícula en llegar a la superficie de la Tierra después de ser lanzado
- ☐ (10 %) Calculo de la magnitud del vector $\vec{d}$ e interpretación de resultados. Hasta este punto podrás reducir la expresión final cuando consideres la magnitud de las cantidades que se mencionan. Debes buscar sus valores reales.

Para no repetir desde el inicio todos los cálculos otra vez, se llego a que la aceleración estaba dada por:

$$\bar{a} = \bar{a}' + 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Ahora siguiendo esto mismo, pero para el movimiento relativo a la tierra, se tiene:

$$\bar{g}_0 = \bar{a}' + 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Despejando $\bar{a}' = \bar{g}$,

$$\bar{g} = \bar{g}_0 - 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Hagamos el estudio del movimiento angular uniforme relativo. A continuación, veremos la descripción de la cinemática de una partícula hecha por un observador fijo a la superficie de la Tierra con respecto a aquélla que haría un observador que tuviese su sistema de ejes fijo con respecto a las estrellas y su origen en el centro de la Tierra. Entre los dos observadores se cumple la relación

$$\bar{r} = \bar{r}' + \bar{R}_0$$

Donde $\bar{r}$ representa la posición de la partícula desde el centro de la Tierra, $\bar{R}_0$ es la posición del observador en la superficie terrestre con respecto a su centro, y $\bar{r}'$ es la posición de la partícula en relación con la superficie. Por consiguiente, los dos sistemas de referencia están desplazados uno respecto al otro. Se observa que, en relación con el sistema de referencia fijo en la Tierra, el punto en la superficie terrestre permanece inmóvil, lo que implica que las velocidades y aceleraciones relativas entre estos dos orígenes son nulas, como se demostrará a continuación. Dado que la posición del centro de la Tierra no varía en el tiempo en el sistema de referencia del observador en la superficie, podemos concluir que

$$\left(\frac{d\bar{R}_0'}{dt}\right)' = 0$$

Dado que la Tierra gira con una velocidad angular $\bar{\Omega}$ respecto a las estrellas, la relación entre las velocidades en ambos sistemas de referencia estará determinada por

$$\bar{v}_0 = \frac{d\bar{R}_0'}{dt} = \bar{\Omega} \times \bar{R}_0'$$

Y

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{v}' + \bar{\Omega} \times \bar{r}' + \bar{v}_0 \\ &= \bar{v}' + \bar{\Omega} \times \bar{r}' \end{aligned}$$

Con lo que respecta para las aceleraciones se tiene que

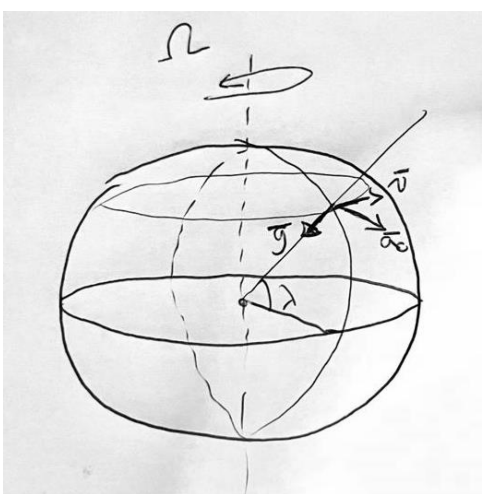
$$\bar{a} = \bar{a}' + 2\bar{\Omega} \times \bar{v}' + \bar{\Omega} \times \left(\bar{\Omega} \times (\bar{r}' + \bar{R}_0)\right)$$

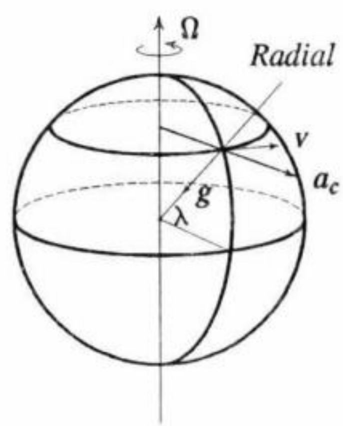
Los dos términos finales en esta expresión representan la aceleración de Coriolis y la aceleración centrífuga. Pero, para el caso de la tierra $\bar{\Omega}$ la podemos tomar como aproximación a una constante,

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = 0$$

por lo que la aceleración de Euler se anula.

También observamos que la aceleración centrífuga puede descomponerse naturalmente en un término principal, $\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}_0')$, junto con una corrección $\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}')$, la cual será insignificante en comparación al orden de $\bar{r}'/\bar{R}_0$. En la siguiente imagen se ilustra la aceleración centrífuga en un punto del hemisferio Norte.





Donde, $\bar{a}_c$ es la aceración centrifuga, $\bar{v}$ la velocidad tangencial y $\bar{\Omega}$ la velocidad de rotación de la tierra. Esto para una latitud λ y la aceleración de la gravedad. La aceleración efectiva en términos de la rotación estará dada por:

$$\bar{g}_{ef} = \bar{g} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}_0')$$

Dado que tanto la dirección de $\bar{g}$ como la de $\bar{R}_0'$ son constantes en el sistema fijo a la superficie terrestre, se sigue que $\bar{g}_{ef}$ también será constante en este sistema. Como el término de Coriolis se anula cuando $\bar{v}' = 0$, podemos concluir que las direcciones vertical y horizontal están localmente definidas por la dirección de $\bar{g}_{ef}$. Si deseamos realizar la aproximación adicional de un planeta esférico con densidad uniforme, tendremos $\bar{g} = -g\hat{r}$, donde $\hat{r}$ es el vector unitario radial usual en coordenadas esféricas. En esta aproximación esférica, es fácil demostrar que la dirección de $\bar{g}_{ef}$, y por lo tanto la dirección de la plomada, difiere de la radial (la cual apunta hacia fuera mientras que la dirección de la plomada va hacia el centro de la Tierra) en un ángulo δ tal que

$$\tan\delta = \frac{\Omega^2 R_0 \sin\lambda \cos\lambda}{g - \Omega^2 R_0 \cos^2\lambda}$$

Que como vimos en el primer inciso es la plomada.

Una vez con todo esto en mente, procedamos a analizar la desviación vertical causada por el termino centrifugo. Que siguiendo todo lo anterior y algo de teoría del primer inciso se tenia que la magnitud de la aceleración efectiva d la gravedad será:

$$g_{ef} = g - \Omega^2 R_0 \cos^2\lambda$$

La cual dará una pequeña desviación, pero medible para la aceleración en caída libre y esta disminuirá al ir de los polos al ecuador. Analizando Coriolis vimos que de:

$$\bar{a}' = \bar{g}_{ef} - 2\bar{\Omega} \times \bar{v}' - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}')$$

Donde también se comentó que Coriolis dominaría al del término centrifugo, el cual serpia despreciado. Al considerar el caso donde $\bar{g}_{ef} = \bar{c}$ una constante, tenemos:

$$\left(\frac{d\bar{v}'}{dt}\right)' = \bar{c} - 2\bar{\Omega} \times \bar{v}'$$

Como $\bar{c}$ y $\bar{\Omega}$ son constantes, integremos:

$$\bar{v}'(t) = \bar{v}_0' + \bar{c}(t - t_0) - 2\bar{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \bar{v}'(\tau)\, d\tau$$

Donde $\bar{v}_0' = \bar{v}'(t_0)$ y $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$ son la velocidad y la posición iniciales. Así,

$$\int_{t_0}^{t} \bar{v}'(\tau)\, d\tau = \bar{r}(t) - \bar{r}_0$$

Es el desplazamiento del objeto considerado. Pero véase que no contamos con $\bar{v}'$ explícitamente, de modo que

$$\bar{v}'(t) = \bar{v}_0' + \bar{c}(t - t_0) - 2\bar{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} d\tau \left[\bar{v}_0' + \bar{c}(\tau - \tau_0) - 2\bar{\Omega} \times \int_{t_0}^{\tau} \bar{v}'(\tau')\, d\tau'\right]$$

Realizando las integrales a excepción de la última,

$$\begin{aligned}\bar{v}'(t) &= \bar{v}_0' + \bar{c}(t - t_0) - 2\bar{\Omega} \times \left[\bar{v}_0'(t - t_0) + \frac{1}{2}\bar{c}(t - t_0)^2 - 2\bar{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} d\tau \left(\int_{t_0}^{\tau} \bar{v}'(\tau')\, d\tau'\right)\right] \\ &= [1 - 2(t - t_0)\bar{\Omega}\, \times]\bar{v}_0' + [(t - t_0) - ((t - t_0)^2)\bar{\Omega}\, \times]\bar{c} + 4\bar{\Omega} \times \left(\bar{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} \bar{v}'(\tau')\, d\tau d\tau'\right)\end{aligned}$$

En resumen, podemos despreciar el término de la doble integral si es mucho menor que el término de la integral simple con el que comenzamos la iteración. Si no es así, podemos continuar con la iteración esperando que la serie converja, aunque si no lo hace, el procedimiento carece de sentido. En muchos casos especiales, la serie converge rápidamente debido a que la velocidad angular de la Tierra proporciona un parámetro numéricamente pequeño en comparación con las escalas de longitud y tiempo del problema (del orden de metros y segundos).

La expresión recién encontrada se puede integrar fácilmente si podemos despreciar el término de la integral. Es evidente que:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + [(t - t_0) - (t - t_0)^2\bar{\Omega}\, \times]\bar{v}_0' + \left[\frac{1}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{3}(t - t_0)^3\bar{\Omega}\, \times\right]\bar{c} + O(\Omega^2)$$

Regresando a que tratamos con tiros verticales en caída libre, calculemos ahora la aceleración de Coriolis cuando un cuerpo se deja caer desde una altura h. En este caso la velocidad inicial es 0 y la aceleración efectiva es simplemente la aceleración efectiva de la gravedad, $\bar{g}_{ef}$, por lo que:

$$\bar{r}(t) - \bar{r}_0 = \left[\frac{1}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{3}(t - t_0)^3\bar{\Omega}\, \times\right]\bar{g}_{ef}$$

$$\bar{d} = -(t - t_0)^2\bar{\Omega} \times \bar{v}_0' - \frac{1}{3}(t - t_0)^3\bar{\Omega} \times \bar{g}_{ef}$$

Sólo necesitamos calcular el tiempo de caída en función de la altura desde la que cae el objeto. Descomponiendo el desplazamiento en la dirección vertical, paralela a $\bar{g}_{ef}$ y la horizontal, tendremos que este tiempo es el mismo que en la caída libre usual,

$$(t - t_0) = \left(\frac{2h}{\bar{g}_{ef}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tratando a que la tierra es aproximadamente una esfera,

$$\bar{\Omega} = \Omega(\hat{r}\sin\lambda + \hat{n}\cos\lambda)$$

Donde, $\hat{n}$ es vector perpendicular a $\bar{r}$ que apunta hacia el norte. Si despreciamos la corrección en dirección de la vertical respecto a la radial por ser de segundo orden en Ω, se concluye que el objeto tendrá una desviación hacia el Este de magnitud:

$$\frac{2h}{3}\Omega\sqrt{\left(\frac{2h}{g_{ef}}\right)}\cos\lambda$$

Donde, la cantidad adimensional $\Omega\sqrt{\left(\frac{2h}{g_{ef}}\right)}$, que hasta un factor 2π el cociente del tiempo de caída al periodo de revolución de la tierra es el parámetro relevante del problema, pues nos proporciona de inmediato el tiempo relativo de la desviación respecto a la altura desde la que cae el cuerpo. Con este análisis cualitativo restringido, confirmamos la magnitud del resultado.

Finamente veremos la desviación de la vertical al lanzar un cuerpo hacia arriba,

Cuando se sube a una altura h, lo que sucede es que el tiempo es el doble que el anterior, de modo que:

$$(t-t_0)=2\left(\frac{2h}{g_{ef}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por otra parte, la velocidad de salida es $v_0=\left(2g_{ef}h\right)^{\frac{1}{2}}$. De modo que la desviación de la vertical queda como:

$$\bar{d}=-(t-t_0)^2\bar{\Omega}\times\bar{v}_0'-\frac{1}{3}(t-t_0)^3\bar{\Omega}\times\bar{c}$$

$$=-(t-t_0)^2\bar{\Omega}\times\left[\bar{v}_0'+\frac{1}{3}(t-t_0)^3\bar{c}\right]$$

La dirección del desplazamiento horizontal depende de la dirección y sentido del vector $\bar{v}_0'+\frac{1}{3}(t-t_0)^3\bar{c}$. Ahora $\bar{v}_0'$ y $\bar{c}$ son antiparalelos, el primero apunta hacia arriba, mientras que el otro para abajo. Sustituyendo el tiempo de vuelo obtenemos

$$v_0-\frac{2}{3}g_{ef}\sqrt{\frac{2h}{g_{ef}}}=\frac{1}{3}v_0$$

Por lo que el desplazamiento se dará hacia el Oeste. La magnitud del desplazamiento es 4 veces la del problema anterior.

Si se busca calcular $\bar{d}$, sería solo cuestión de sustituir los valores reales aproximados.

4.- Estudie el problema de caída libre en el hemisferio sur. Tomando en cuenta la rotación de la Tierra, ¿hacia dónde se desvía el punto de impacto (magnitud y dirección) ?

En este ejercicio se calificará lo siguiente:

- ☐ (30 %) Diagrama del sistema de referencia elejido con la identificación del ángulo de descenso λ. Puede ser a mano o a computadora.
- ☐ (10 %) Descomposición vectorial del **vector** de velocidad angular $\vec{\Omega}$ en el sistema de coordenadas elegido (Considera que debes usar la misma orientación que en el ejercicio previo).
- ☐ (10 %) Calculo explícito del **vector** de gravedad efectiva, $\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (\vec{R} + \vec{r}))$. Para simplificar el Calculo debes de hacer la aproximación $||\vec{r}|| \ll ||\vec{R}||$, ¿qué significa físicamente?.
- ☐ (20 %) Calculo **explícito** del vector de desviación, $\vec{d} = -(t - t_0)^2 \vec{\Omega} \times \vec{v}_0 - ((t - t_0)^3/3)\vec{\Omega} \times \vec{g}_{ef}$. Para que el resultado esté completamente determinado no debe depender del tiempo.
- ☐ (20 %) Calculo del tiempo que tarda la partícula en llegar a la superficie de la Tierra. Demostrar que el tiempo es $t - t_0 = (2h/(g - R\omega^2 \cos^2 \lambda))^{1/2}$.
- ☐ (10 %) Calculo de la magnitud del vector $\vec{d}$ e interpretación de resultados. Hasta este punto podrás reducir la expresión final cuando consideres la magnitud de las cantidades que se te proporcionan en el enunciado.

De igual forma como se repitió el procedimiento para los problemas 1 y 2, pasa algo similar para este caso. Lo resumiremos lo más posible, pero como tal el inciso anterior resuelve este problema. Se tratará ahora desde el sur.

Se obtuvo que la aceleración es:

$$\bar{g} = \bar{g}_0 - 2\bar{w} \times \bar{v}' + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

Analizaremos el movimiento angular relativo y compararemos la percepción de un observador en la superficie terrestre con respecto a uno fijo en las estrellas y con origen en el centro de la Tierra, $\bar{r} = \bar{r}' + \bar{R}_0$, $\bar{r}$ representa la posición de la partícula desde el centro, $\bar{R}_0$ la del observador en la superficie y $\bar{r}'$ es la partícula en relación con la superficie. La posición invariable del centro de la Tierra en el sistema de referencia del observador en la superficie permite concluir que: $\left(\frac{d\bar{R}_0'}{dt}\right)' = 0$

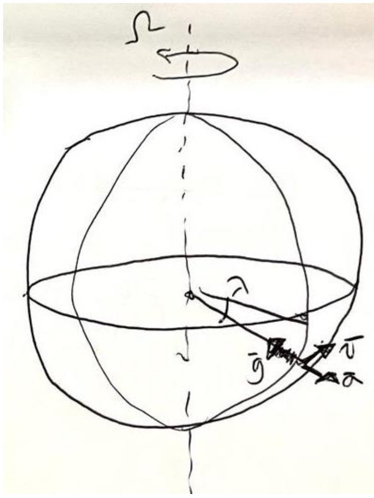
Dado que la Tierra gira con una velocidad angular $\bar{\Omega}$: $\bar{v}_0 = \frac{d\bar{R}_0'}{dt} = \bar{\Omega} \times \bar{R}_0'$, con $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{\Omega} \times \bar{r}'$.

Con lo que respecta para las aceleraciones se tiene que

$$\bar{a} = \bar{a}' + 2\bar{\Omega} \times \bar{v}' + \bar{\Omega} \times \left(\bar{\Omega} \times (\bar{r}' + \bar{R}_0)\right)$$

Podemos tomar como aproximación a una constante, $\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = 0$. Vemos que $\bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}')$ será insignificante en comparación al orden de $\bar{r}'/\bar{R}_0$.

En la siguiente imagen se ilustra la aceleración centrífuga en un punto del hemisferio Norte.



Donde, $\bar{a}_c$ es la aceración centrifuga, $\bar{v}$ la velocidad tangencial y $\bar{\Omega}$ la velocidad de rotación de la tierra. Esto para una latitud λ y la aceleración de la gravedad. La aceleración efectiva en términos de la rotación estará dada por:

$$\bar{g}_{ef} = \bar{g} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}_0')$$

Analicemos la desviación vertical causada por el termino centrifugo, la magnitud de la aceleración efectiva d la gravedad será:

$$g_{ef} = g - \Omega^2 R_0 \cos^2 \lambda$$

La cual dará una pequeña desviación, de:

$$\bar{a}' = \bar{g}_{ef} - 2\bar{\Omega} \times \bar{v}' - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r}')$$

Donde también se comentó que Coriolis dominaría al del término centrifugo, el cual serpia despreciado. Al considerar el caso donde $\bar{g}_{ef} = \bar{c}$ una constante, tenemos:

$$\left(\frac{d\bar{v}'}{dt}\right)' = \bar{c} - 2\bar{\Omega} \times \bar{v}'$$

Como $\bar{c}$ y $\bar{\Omega}$ son constantes, integremos:

$$\bar{v}'(t) = \bar{v}_0' + \bar{c}(t - t_0) - 2\bar{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \bar{v}'(\tau)\, d\tau$$

Tras resolverlo se llegó a que,

$$\bar{v}'(t) = [1 - 2(t - t_0)\bar{\Omega}\, \times]\bar{v}_0' + [(t - t_0) - ((t - t_0)^2)\bar{\Omega}\, \times]\bar{c} + 4\bar{\Omega} \times \left(\bar{\Omega} \times \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} \bar{v}'(\tau')\, d\tau d\tau'\right)$$

Al integrar obtuvimos que:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + [(t - t_0) - (t - t_0)^2\bar{\Omega}\, \times]\bar{v}_0' + \left[\frac{1}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{3}(t - t_0)^3\bar{\Omega}\, \times\right]\bar{c} + O(\Omega^2)$$

Regresando a que tratamos con tiros verticales en caída libre, calculemos ahora la aceleración de Coriolis cuando un cuerpo se deja caer desde una altura h. En este caso la velocidad inicial es 0 y la aceleración efectiva es simplemente la aceleración efectiva de la gravedad, $\bar{g}_{ef}$, por lo que:

$$\bar{r}(t) - \bar{r}_0 = \left[\frac{1}{2}(t - t_0)^2 - \frac{1}{3}(t - t_0)^3\bar{\Omega}\, \times\right]\bar{g}_{ef}$$

$$\bar{d} = -(t - t_0)^2\bar{\Omega} \times \bar{v}_0' - \frac{1}{3}(t - t_0)^3\bar{\Omega} \times \bar{g}_{ef}$$

Sólo necesitamos calcular el tiempo de caída en función de la altura desde la que cae el objeto. Descomponiendo el desplazamiento en la dirección vertical, paralela a $\bar{g}_{ef}$ y la horizontal, tendremos que este tiempo es el mismo que en la caída libre usual,

$$(t - t_0) = \left(\frac{2h}{\bar{g}_{ef}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tratando a que la tierra es aproximadamente una esfera,

$$\bar{\Omega} = \Omega(\hat{r}\sin\lambda + \hat{n}\cos\lambda)$$

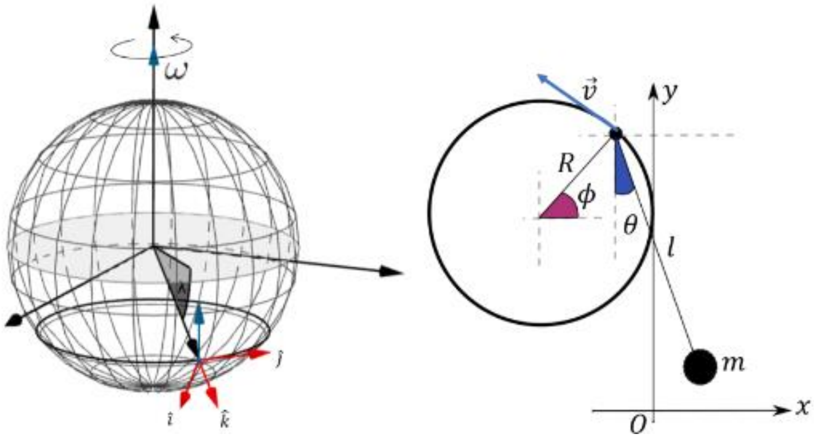
Donde, $\hat{n}$ es vector perpendicular a $\bar{r}$ que apunta hacia el norte. Si despreciamos la corrección en dirección de la vertical respecto a la radial por ser de segundo orden en Ω, se concluye que el objeto tendrá una desviación hacia el Este de magnitud:

$$\frac{2h}{3}\Omega\sqrt{\left(\frac{2h}{g_{ef}}\right)}\cos\lambda$$

Donde, la cantidad adimensional $\Omega\sqrt{\left(\frac{2h}{g_{ef}}\right)}$, que hasta un factor 2π el cociente del tiempo de caída al periodo de revolución de la tierra es el parámetro relevante del problema, pues nos proporciona de inmediato el tiempo relativo de la desviación respecto a la altura desde la que cae el cuerpo. La diferencia es que para este caso se tendrá desviación al Este por Coriolis. Si se busca calcular $\bar{d}$, sería solo cuestión de sustituir los valores reales aproximados.

5.- (3.10) El punto de soporte de un péndulo simple se mueve en una circunferencia vertical de radio a con una velocidad angular constante ω, como se muestra en la figura . (50 %) a) Hallar la expresión para las componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración de la masa m. (20 %)b) Obtener la aceleración generalizada para el ángulo variable θ.

(30 %)Realiza un diagrama, a mano o a computadora, en donde pongas **explícitamente** la orientación de **los** sistemas de referencia que estás considerando. Establece la trasnformación entre los sistemas de referencia. Emplea el método de descomposición del vector de posición, pero considera que el soporte del péndulo se mueve en una circunferencia a velocidad **constante**.



a)

Considerémoslo con coordenadas cartesianas, con eje x horizontal y eje y vertical. También se tomará en cuenta un sistema de coordenadas polar con origen en el centro de la circunferencia y el ángulo θ medido. Hallemos las componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración de la masa m. Dado que el punto de soporte del péndulo se mueve en una circunferencia con velocidad angular constante ω, la posición del punto de soporte en coordenadas polares es:

$$x_s = a\cos(\omega t)\,, \qquad y_s = a\sin(\omega t)$$

La posición de la masa m en coordenadas polares es:

$$x = a\cos(\omega t) + l\sin(\theta)\,, \qquad y = a\sin(\omega t) - l\cos(\theta)$$

Donde l es la longitud del péndulo. La velocidad de la masa m en coordenadas cartesianas se puede obtener derivando estas ecuaciones con respecto al tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin(\omega t) + l\dot{\theta}\cos(\theta)\,, \qquad \frac{dy}{dt} = a\omega\cos(\omega t) + l\dot{\theta}\sin(\theta)$$

Y la aceleración de la masa m en coordenadas cartesianas se puede obtener derivando nuevamente estas ecuaciones con respecto al tiempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos(\omega t) + l\ddot{\theta}\cos(\theta) - l\dot{\theta}^2\sin(\theta)$$

$$\frac{dy}{dt} = -a\omega^2\sin(\omega t) + l\ddot{\theta}\sin(\theta) + l\dot{\theta}^2\cos(\theta)$$

Por lo tanto,

La posición queda como:

$$\bar{s} = (a\cos(\omega t) + l\sin(\theta))\hat{\imath} + (a\sin(\omega t) - l\cos(\theta))\hat{\jmath}$$

La velocidad queda como:

$$\bar{v} = \left(-a\omega\sin(\omega t) + l\dot{\theta}\cos(\theta)\right)\hat{\imath} + \left(a\omega\cos(\omega t) + l\dot{\theta}\sin(\theta)\right)\hat{\jmath}$$

La aceleración queda como:

$$\bar{a} = \left(-a\omega^2\cos(\omega t) + l\ddot{\theta}\cos(\theta) - l\dot{\theta}^2\sin(\theta)\right)\hat{\imath} + \left(-a\omega^2\sin(\omega t) + l\ddot{\theta}\sin(\theta) + l\dot{\theta}^2\cos(\theta)\right)\hat{\jmath}$$

b)

Como ya obtuvimos a $\bar{v}$, procedamos a calcular a v^2,

$$\begin{aligned}
v^2 &= \sqrt{\left(\left(-a\omega\sin(\omega t) - l\dot{\theta}\cos(\theta)\right)^2 + \left(a\omega\cos(\omega t) - l\dot{\theta}\sin(\theta)\right)^2\right)}^2 \\
&= \left(-a\omega\sin(\omega t) - l\dot{\theta}\cos(\theta)\right)^2 + \left(a\omega\cos(\omega t) - l\dot{\theta}\sin(\theta)\right)^2 \\
&= a^2\omega^2\sin^2(\omega t) - 2a\omega\sin(\omega t)\, l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta) + a^2\omega^2\cos^2(\omega t) \\
&\qquad - 2a\omega\cos(\omega t)\, l\dot{\theta}\sin(\theta) + l^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta) \\
&= a^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + l^2\dot{\theta}^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) - 4a\omega\sin(\omega t)\, l\dot{\theta}\cos(\theta) \\
&= a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 4a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Procedamos a hallar la aceleración generalizada,

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial\theta}$$

Vamos por partes y se toma $a, \omega = ctes$.

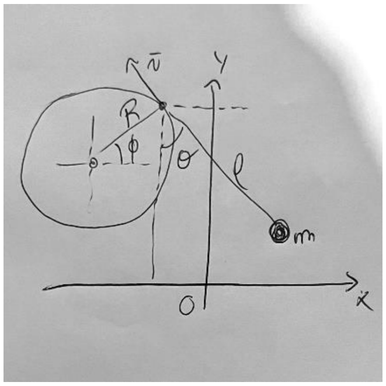
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial\theta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\left(a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 4a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\cos(\theta)\right)}{\partial\theta} = 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta) \\
\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\left(a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 4a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\cos(\theta)\right)}{\partial\dot{\theta}} = l^2\dot{\theta} - 2a\omega l\sin(\omega t)\cos(\theta) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(l^2\dot{\theta} - 2a\omega l\sin(\omega t)\cos(\theta)\right) \\
&= l^2\ddot{\theta} - 2a\omega l\left(\omega\cos(\omega t)\cos(\theta) - \dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\
&= l^2\ddot{\theta} - 2a\omega l\left(\omega\cos(\omega t)\cos(\theta) - \dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta)\right)
\end{aligned}$$

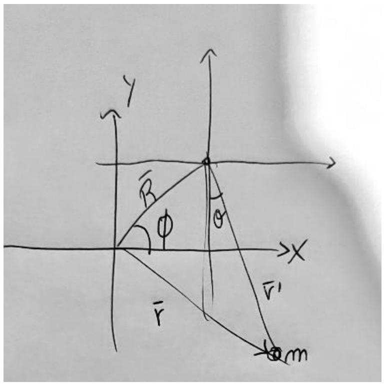
Por lo tanto, la aceleración generalizada es:

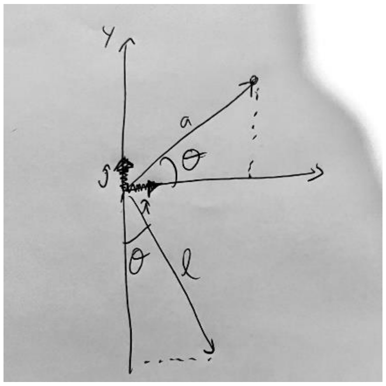
$$a = l^2\ddot{\theta} - 2a\omega l\big(\omega\cos(\omega t)\cos(\theta) - \dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta)\big) - 2a\omega l\dot{\theta}\sin(\omega t)\sin(\theta)$$

$$= l^2\ddot{\theta} - 2a\omega^2 l\cos(\omega t)\cos(\theta)$$

A continuación, muestro los diagramas:







6.- (3.16) (50 %) **a)** Demostrar que las matrices de transformación para una rotación de un ángulo θ alrededor de los ejes x, y y z son, respectivamente,

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(50 %) **b)** Demostrar que la matriz producto $\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\phi)$ representa la matriz de transformación para rotaciones sucesivas de dos ángulos ϕ y θ alrededor de los ejes z y x, respectivamente. **c)** Demostrar que para esta $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{R}_z(\phi)^{-1})(\mathbf{R}_x(\theta)^{-1}) = (\mathbf{R}_z(-\phi))(\mathbf{R}_x(-\theta))$$

a)

Rotación en x. Cuando se rota alrededor del eje x con un ángulo θ, tenemos lo siguiente:

$$\hat{\imath}' = \hat{\imath}, \qquad \hat{\jmath}' = \cos(\theta)\,\hat{\jmath} + \sin(\theta)\,\hat{k}, \qquad \hat{k}' = -\sin(\theta)\,\hat{\jmath} + \cos(\theta)\,\hat{k}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar de manera matricial como:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotación en y. Cuando se rota alrededor del eje y con un ángulo θ, tenemos lo siguiente:

$$\hat{\imath}' = \cos(\theta)\,\hat{\imath} - \sin(\theta)\,\hat{k}, \qquad \hat{\jmath}' = \hat{\jmath}', \qquad \hat{k}' = \sin(\theta)\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{k}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar de manera matricial como:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotación en x. Cuando se rota alrededor del eje x con un ángulo θ, tenemos lo siguiente:

$$\hat{\imath}' = \cos(\theta)\,\hat{\imath} + \sin(\theta)\,\hat{\jmath}, \qquad \hat{\jmath}' = -\sin(\theta)\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}, \qquad \hat{k}' = \hat{k}'$$

Estas ecuaciones se pueden expresar de manera matricial como:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P. d. La matriz producto $R = R_x(\theta)R_z(\varphi)$ representa la matriz de transformación para rotaciones sucesivas de dos ángulos $\theta\ y\ \varphi$ alrededor de los ejes x y z, respectivamente.

Dem. Calculemos $R = R_x(\theta)R_z(\varphi)$, donde

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Representan las matrices de rotación para los ejes x y z respectivamente.

$$R = R_x(\theta)R_z(\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ \dfrac{-\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)}{2} & \dfrac{\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)}{2} & \sin(\theta) \\ \dfrac{-\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)}{2} & \dfrac{-\sin(\theta+\varphi)-\sin(\theta-\varphi)}{2} & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz R obtenida representa la matriz de transformación para rotaciones sucesivas de dos ángulos φ y θ alrededor de los ejes z y x, respectivamente.

■

P. d. $R^{-1} = (R_z(\varphi)^{-1})(R_x(\theta)^{-1}) = \big(R_z(-\varphi)\big)\big(R_x(-\theta)\big)$

Dem. Se tiene

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Para encontrar la inversa de R, por definición, $RR^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad.

$$RR^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} R^{-1} = I$$

Como $R = R_x(\theta)R_z(\varphi) \Rightarrow R^{-1} = R_x(\theta)^{-1}R_z(\varphi)^{-1}$, para satisfacer que $RR^{-1} = I$.

Pues

$$R_x(\theta)R_z(\varphi)R_x(\theta)^{-1}R_z(\varphi)^{-1} = R_x(\theta)R_x(\theta)^{-1}R_z(\varphi)R_z(\varphi)^{-1} = II = I$$

Demostremos la otra igualdad,

Para la matriz $R_z(\varphi)$:

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de esta matriz es su transpuesta:

$$R_z(\varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la matriz $R_x(\theta)$:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

La inversa de esta matriz es su transpuesta:

$$R_x(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ahora, multipliquemos estas dos inversas:

$$(R_z(\varphi)^{-1})(R_x(\theta)^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Realizando la multiplicación matricial:

$$(R_z(\varphi)^{-1})(R_x(\theta)^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}]$$

Ahora, comparemos esta matriz con $R_z(-\varphi)R_x(-\theta)$:

$$R_z(-\varphi)R_x(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) & 0 \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ 0 & -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

Simplificamos las funciones trigonométricas con los ángulos negativos:

$$R_z(-\varphi)R_x(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Realizando la multiplicación:

$$R_z(-\varphi)R_x(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

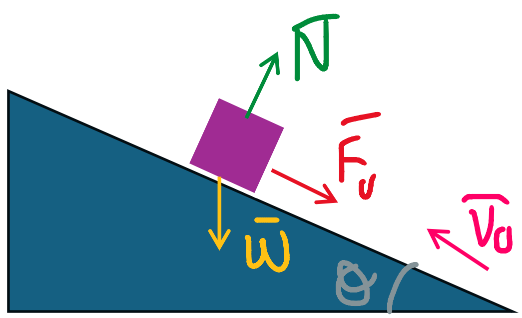
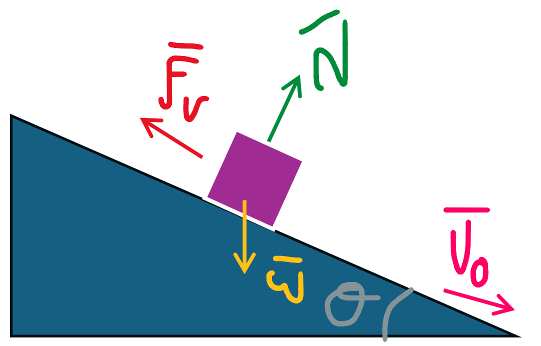
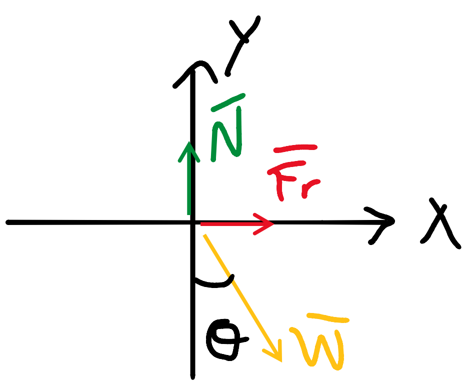
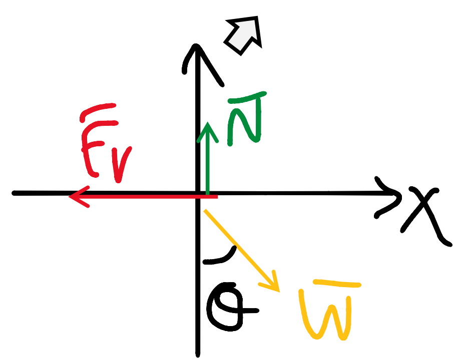
¡Vemos que son iguales! Por lo tanto, hemos demostrado que $R^{-1} = (R_z(\varphi)^{-1})(R_x(\theta)^{-1}) = R_z(-\varphi)R_x(-\theta)$.

$\blacksquare$

7.- (4.1) Se lanza un bloque hacia arriba sobre un plano inclinado con una velocidad inicial v_0. Si el plano forma un ángulo θ con la horizontal y el coeficiente de rozamiento (deslizante) entre el plano y el bloque es μ, hállese el tiempo que tarda el bloque en volver al pie del plano inclinado. (30 %) ¿Cuál será el valor mínimo del coeficiente de rozamiento en reposo o estático para que el bloque se detenga en el plano inclinado?

- ☐ (30 %) Realizar dos diagramas de fuerza, uno para el movimiento de subida del bloque y otro para el movimiento de bajada. La dirección y sentido del sistema de referencia deberá ser igual en ambos casos.
- ☐ (10 %) Para determinar los tiempos de subida y bajada deben conocer la **distancia** que recorre sobre el bloque, cálculala en términos de las variables del sistema.
- ☐ (30 %) Los tiempos de subida y de bajada son **distintos**. La distancia que reccorre de subida es la misma que de bajada. Consideralo para calcular el tiempo total de del recorrido.

Los diagramas son

Subida	Bajada
	
	

Nota. Se usarán componentes de los vectores, esto en caso de que se percaten que no se han puesto los acentos de vectores.

La componente de la fuerza gravitacional que actúa a lo largo del plano inclinado se puede expresar como $mg\sin(\theta)$, donde m es la masa del bloque y g es la aceleración debido a la gravedad. La fuerza de fricción que se opone al movimiento está dada por $F_f = \mu N$, donde μ es el coeficiente de fricción y N es la fuerza normal.

Consideremos $t_0 = 0$, tiempo inicial, que es cuando es lanzado el bloque a la velocidad $-v_0$. El signo negativo es debido a la dirección en la que se colocó el diagrama. Propongamos t_1 que se da cuando no puede avanzar más y debe regresar, en otras palabras, $v = 0$.

También véase que no existe movimiento alguno respecto al eje y, lo que implica que $\sum F_y = 0$

$$W_y + N_y = 0 \Rightarrow W_y = N_y$$

Analizando el eje x, se tiene que

$$\sum F_x = ma_x = F_{rx} + W_x = ma_x$$

Donde $F_{rx} = \mu N_y = \mu W_y = \mu mg\cos(\theta)$

Por otro lado, $W_x = mg\sin(\theta)$

Es decir,

$$\sum F_x = ma_x = \mu mg\cos(\theta) + mg\sin(\theta)$$

Lo que implica,

$$a_{x1} = \mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)$$

También hay que tomar en cuenta que:

$$v_x = v_{0x} + a_x(t - t_o)$$

En las condiciones propuestas al inicio, se dijo que,

$$0 = -v_0 + a_{x1}(t_1 - 0)$$

Despejemos t_1.

$$v_0 = a_{x1}t_1$$
$$t_1 = \frac{v_0}{a_{x1}}$$

Por lo tanto, el tiempo que tardará en subir será,

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)}$$

Ahora consideremos la función para la posición:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2$$

Con esto podemos calcular la distancia que se recorrerá, sustituyamos nuestro tiempo de interés, el cual es t_1,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 - v_0\left(\frac{v_0}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} - 0\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))\left(\frac{v_0}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} - 0\right)^2 \\
&= -\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} + \frac{1}{2}(\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))\frac{v_0^2}{(\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))^2} \\
&= -\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida, la cual es la misma obviamente de subida y de bajada, es:

$$d = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)}$$

Ahora calculemos el tiempo de bajada, solo que en este caso se ve afectado por el signo la aceleración:

$$a_{x2} = -\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)$$

Pues la fricción tiene otra dirección de empuje. Para hallar t_2, utilicemos nuevamente la función posición, pero ahora el cambio es que empezamos desde x_1 a $v_0 = 0$, tal que:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + v_0(t_2 - 0) + \frac{1}{2}a_{x2}(t_2 - 0)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} + 0(t_2 - 0) + \frac{1}{2}(-\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))(t_2 - 0)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} + \frac{1}{2}(-\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))(t_2)^2
\end{aligned}$$

Notemos que x_2 es la posición inicial, de modo que $x_2 = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(-\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))(t_2)^2 &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} \\
(-\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))(t_2)^2 &= \frac{v_0^2}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} \\
(t_2)^2 &= \frac{v_0^2}{(\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))(-\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta))} \\
t_2 &= \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2(-\mu^2\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo que tardará en bajar será,

$$t_2 = \frac{v_0}{g\sqrt{-\mu^2\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}}$$

Finalmente sumemos los tiempos, para ver cuanto tarda en subir y bajar:

$$t_T = t_1 + t_2$$

$$= \frac{v_0}{\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta)} + \frac{v_0}{g^2\sqrt{-\mu^2\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}}$$

Por lo tanto,

$$t_T = \frac{v_0}{g}\left(\frac{v_0}{\mu\cos(\theta) + \sin(\theta)} + \frac{v_0}{\sqrt{-\mu^2\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}}\right)$$

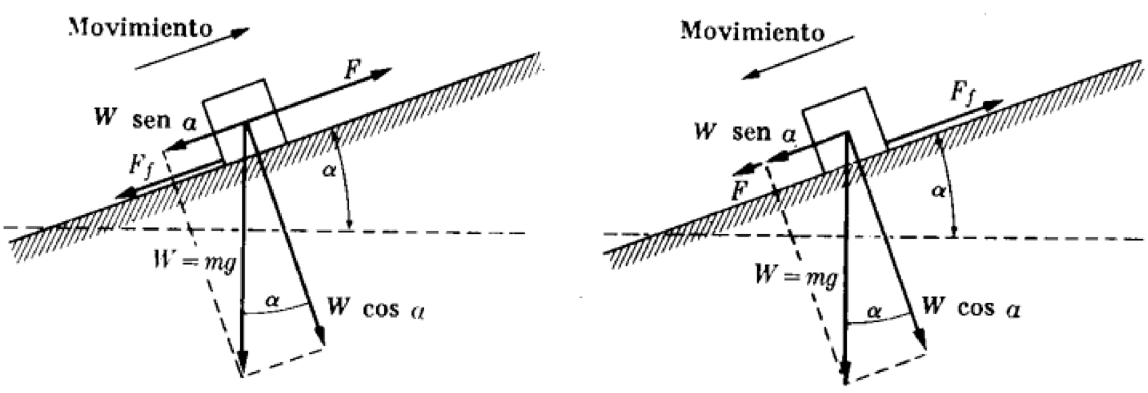
Respecto al mínimo coeficiente de fricción, debemos analizar la situación de bajada, o más bien, cuando $v = 0$. En este caso se debe llegar a una aceleración igual a 0, $a_x = 0$, pues el bloque se frena en su totalidad.

$$\begin{aligned} a_{x2} &= -\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta) \\ 0 &= -\mu g\cos(\theta) + g\sin(\theta) \\ \mu g\cos(\theta) &= g\sin(\theta) \\ \mu\cos(\theta) &= \sin(\theta) \\ \mu &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \mu &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que no se tenga aceleración, o, es decir, el coeficiente mínimo de μ debe ser

$$\mu = \tan(\theta)$$

Agrego figura 7-11 del Alonso fin de cómo se ven los sistemas:



(a) Movimiento del cuerpo hacia arriba

(b) Movimiento del cuerpo hacia abajo

Figura 7-11

8.- (4.2) Encontrar la posición en un tiempo t de una partícula de masa m, cuando la fuerza aplicada es $F = 2m\cos\omega t$ y $x = 0$ a $t = 0$ y $x = -b$ a $t = \pi/2\omega$.

Si no vienen los Calculos **explícitos** de las integrales realizadas y la correcta identificación de las constantes de integración, la respuesta no será calificada.

Nota. Se usarán componentes de los vectores, esto en caso de que se percaten que no se han puesto los acentos de vectores. Todo debido a que solo se trabaja en una dirección.

Para encontrar la posición de la partícula en función del tiempo t, primero necesitamos resolver la ecuación diferencial de movimiento utilizando la segunda ley de Newton, que relaciona la fuerza aplicada con la aceleración de la partícula:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Dado que la fuerza aplicada $F = 2m\cos(\omega t)$, podemos escribir la ecuación diferencial de movimiento como:

$$2m\cos(\omega t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Dividimos ambos lados por m y obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\cos(\omega t)$$

Ahora, integramos dos veces para obtener la posición en función del tiempo. La primera integral nos dará la velocidad:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^2x}{dt^2}dt &= \int 2\cos(\omega t)\,dt \\
\frac{dx}{dt} &= \int 2\cos(\omega t)\,dt \\
\frac{dx}{dt} &= 2\int \cos(\omega t)\,dt \\
\frac{dx}{dt} &= 2\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right) + C_1
\end{aligned}$$

Donde C_1 es una constante de integración que determinaremos a partir de las condiciones iniciales. Integramos nuevamente para obtener la posición:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{dt}dt &= \int \left(2\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right) + C_1\right)dt \\
x &= \int \left(2\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right) + C_1\right)dt \\
x &= 2\int \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)dt + C_1 t + C_2 \\
x &= -\frac{2\cos(\omega t)}{\omega^2} + C_1 t + C_2
\end{aligned}$$

Donde C_2 es otra constante de integración. Ahora, aplicamos las condiciones iniciales:

1. En $t = 0, x = 0$:

$$0 = -\frac{2\cos(0)}{\omega^2} + C_1(0) + C_2$$
$$C_2 = \frac{2}{\omega^2}$$

2. En $t = \frac{\pi}{2\omega}, x = -b$:

$$-b = -\frac{2\cos(\pi/2)}{\omega^2} + C_1\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) + \frac{2}{\omega^2}$$
$$-b = \frac{2}{\omega^2} + \frac{C_1\pi}{2\omega} + \frac{2}{\omega^2}$$
$$-b - \frac{4}{\omega^2} = \frac{C_1\pi}{2\omega}$$
$$C_1 = \frac{-2b\omega}{\pi} - \frac{4\omega}{\pi^2}$$

Entonces, la posición en función del tiempo es:

$$x = -\frac{2\cos(\omega t)}{\omega^2} + \left(\frac{-2b\omega}{\pi} - \frac{4\omega}{\pi^2}\right)t + \frac{2}{\omega^2}$$