Mecánica Vectorial (2022-2)

Actividad 7

Sebastián González Juárez **Grupo 8110: Mirna Villavicencio Torres**

1. Una fuerza (en Newtons) dada por la expresión $\vec{F} = 2x\hat{\imath} + y^3\hat{\jmath}$ actúa sobre un objeto mientras éste se mueve en la dirección y, desde el origen hasta $y=5\ m$. Encuentra el trabajo realizado sobre el objeto por la fuerza.

El movimiento del objeto se nos describe que únicamente tiene cambios en el eje y, por lo cual, podemos reconstruir la fuerza del siguiente modo: $\vec{F} = y^3\hat{\jmath}$

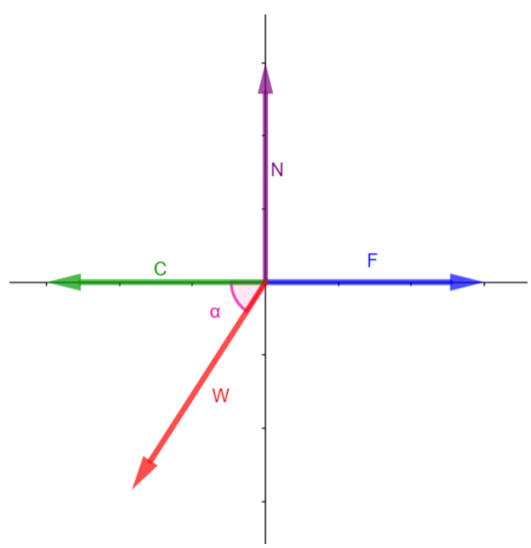
También notemos que el objeto solo recorre de 0 a 5 metros, entonces, consideremos la función $F: [0,5] \to \mathbb{R}; \quad F(y) = y^3$. Integremos en el intervalo requerido, para obtener el trabajo realizado.

$$W = \int_0^5 F(y)\,dy = \int_0^5 y^3\,dy = \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{625}{4} - 0 = \frac{625}{4} = 156.25$$

Por lo tanto, el trabajo realizado sobre el objeto por la fuerza fue de $\boldsymbol{156.25\ J}$.

2. Un hombre empuja una caja pesada hacia arriba de una rampa que forma un ángulo de 30º con la horizontal. La masa de la caja es de 60 kg y el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la rampa es de 0.45. ¿Cuánto trabajo debe realizar el hombre para empujar la caja a una altura de 2.5 m con rapidez constante? Supón que el hombre empuja la caja en una dirección paralela a la superficie de la rampa.

Primero dibujemos en un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas, en el plano inclinado.



Donde,

$\vec{F}$ es la fuerza del hombre que empuja la caja

$\overrightarrow{W}$ es la fuerza peso de la caja, talque, $\overrightarrow{W} = m\vec{g}$

$\vec{N}$ es la fuerza normal de la caja

$\vec{C}$ es la fuerza de fricción, talque, $\vec{C} = \mu\vec{N}$, donde μ es el coeficiente de fricción.

α es el ángulo que forma el eje x con la fuerza $\overrightarrow{W}$, talque $\alpha = 60°$ esto por trigonometría.

Ahora veamos las fuerzas que actúan en cada eje.

Eje x,

$$\vec{F} - \vec{C} - \overrightarrow{W}\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} - \mu\vec{N} - \overrightarrow{W}\cos\alpha = 0$$

Eje y,

$$\vec{N} - \overrightarrow{W}\sin\alpha = 0$$

Notemos que $\vec{N} = \overrightarrow{W}\sin\alpha$,

$$\Rightarrow \vec{F} - \mu\overrightarrow{W}\sin\alpha - \overrightarrow{W}\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \mu\overrightarrow{W}\sin\alpha + \overrightarrow{W}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{W}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$\therefore \vec{F} = m\vec{g}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Entonces la fuerza solo se esta ejerciendo en un solo eje, talque, la fuerza en el plano es

$$\vec{F} = (m\vec{g}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha), 0)$$

Recordemos que el trabajo está dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\Rightarrow W = (m\vec{g}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha), 0) \cdot \vec{s}$$

Donde $\vec{s}$ es el desplazamiento, talque, $\vec{s} = (2.5\ m - 0\ m, 0\ \ m - 0\ m) = (2.5\ m, 0\ m)$.

Sustituyamos nuestros datos y consideremos $\vec{g} = 9.8\ \ m/s^2$:

$$W = (m\vec{g}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha), 0) \cdot \vec{s}$$

$$\Rightarrow W = \Big((60\ kg)(9.8\ m/s^2)\big((0.45)\sin 60° + \cos 60°\big), 0\Big) \cdot (2.5\ m, 0\ m)$$

$$\Rightarrow W = \left(588\left(\left(\frac{9}{20}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot 2.5, 0 \cdot 0\right)$$

$$\Rightarrow W = \left(588\left(\frac{9\sqrt{3}}{40} + \frac{1}{2}\right) \cdot 2.5, 0\right)$$

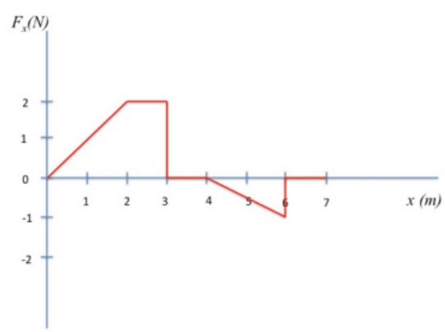
$$\Rightarrow W = \left(1470\left(\frac{(2)9\sqrt{3} + 2(20)}{80}\right), 0\right)$$

$$\Rightarrow W = \left(1470\left(\frac{9\sqrt{3} + 20}{40}\right), 0\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{W = \frac{1470\left(9\sqrt{3} + 20\right)}{40}\ J \cong 1307.875\,805\ J}$$

Por lo tanto, el trabajo que debe realizar el hombre para empujar la caja a una altura de 2.5 m con rapidez constante es de aproximadamente $\boldsymbol{1307.875\,805\ J}$.

3. A un automóvil modelo de juguete que tiene una masa de *2 kg*, se le aplica una fuerza paralela al eje *x*, mientras se mueve por una pista recta. La componente *x* de la fuerza varía con la coordenada *x* como lo muestra la figura. Calcula el trabajo efectuado por $\vec{F}$ cuando el auto se mueve de (a) *x =0* a *x =3 m*, (b) *x =3 m* a *x =4 m*, (c) *x =4 m* a *x =7m*, (d) *x =0* a *x =7 m*, (e) de *x =7 m* a *x = 2 m*, (f) suponiendo que el auto está inicialmente en reposo en *x =0*, utiliza el teorema de trabajo-energía para determinar la rapidez del auto en *x=3m*, *x= 4m* y *x=7 m*.



Notemos que el trabajo será la integral de la función de la gráfica, por lo tanto, resolvamos usando el significado geométrico de la integral (el área bajo la curva).

a) $\boldsymbol{x = 0}$ **a** $\boldsymbol{x = 3\ m}$

$$W_a = \int_0^3 F(x)\,dx = \int_0^2 F(x)\,dx + \int_2^3 F(x)\,dx = \frac{(2)(2)}{2} + (1)(2) = 2 + 2 = 4$$

Por lo tanto, el trabajo fue de $\boldsymbol{W_a = 4\ J}$

b) $\boldsymbol{x = 3}$ a $\boldsymbol{x = 4\,m}$

$$W_b = \int_3^4 F(x)\,dx = (1)(0) = 0$$

Por lo tanto, el trabajo fue de $\boldsymbol{W_b = 0\,J}$

c) $\boldsymbol{x = 4}$ a $\boldsymbol{x = 7\,m}$

$$W_c = \int_4^7 F(x)\,dx = \int_4^6 F(x)\,dx + \int_6^7 F(x)\,dx = \frac{(-2)(1)}{2} + (1)(0) = -1 + 0 = -1$$

Por lo tanto, el trabajo fue de $\boldsymbol{W_c = -1\,J}$

d) $\boldsymbol{x = 0}$ a $\boldsymbol{x = 7\,m}$

$$W_d = \int_0^7 F(x)\,dx = W_a + W_b + W_c = 4 + 0 - 1 = 3$$

Por lo tanto, el trabajo fue de $\boldsymbol{W_d = 3\,J}$

e) $\boldsymbol{x = 7}$ a $\boldsymbol{x = 2\,m}$

$$W_e = \int_7^2 F(x)\,dx = -\int_2^7 F(x)\,dx = -\left(W_d - \int_0^2 F(x)\,dx\right) = -(3-2) = -(1) = -1$$

Por lo tanto, el trabajo fue de $\boldsymbol{W_e = -1\,J}$

f)

Partamos de que el auto inicia en reposo, además sabemos el trabajo que tuvo en esas partes del recorrido. Utilizando la energía cinética podemos despejar para llegar a una expresión que nos de la velocidad.

Como empieza en reposo, entonces: $W = E_c$

Donde, E_c es la energía cinética dad por $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}mv^2$

El automóvil tiene de masa $m = 2\,kg, \Rightarrow W = \frac{1}{2}(2)v^2 \Rightarrow W = v^2 \therefore v = \sqrt{W}$

Para, $x = 3\,m \Rightarrow v = \sqrt{4} \Rightarrow \boldsymbol{v = 2\ m/s}$

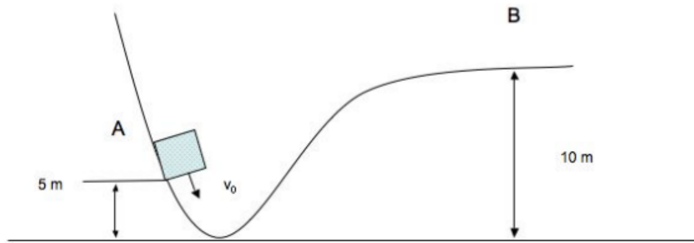
Para, $x = 4\,m \Rightarrow v = \sqrt{4} \Rightarrow \boldsymbol{v = 2\ m/s}$

Para, $x = 7\,m \Rightarrow v = \sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{v = \sqrt{3}\ m/s}$

Hemos encontrado la rapidez buscada en los intervalos dichos.

4. Un objeto se desliza sin rozamiento a lo largo de la pista que se muestra en la figura. Inicialmente está en el punto A y se lanza con una rapidez v_0. Describe, con todo detalle, el movimiento del objeto en los siguientes casos:

a) Si $v_0 = 7$ m/s
b) Si v_0=12 m/s
c) ¿Cuál es el valor mínimo de v_o para que el objeto alcance el punto B?



Para resolver los incisos, antes necesitamos encontrar una expresión para poder sustituir la velocidad y obtener hasta que altura llegara nuestro objeto. Tenemos que la energía total del sistema en cualquier momento se conserva y está dada por:

$$E_T = E_c + E_p \Rightarrow E_T = \frac{mv^2}{2} + mgh \Rightarrow E_T = m\left(\frac{v^2}{2} + gh\right)$$

Despejemos la altura, $\Rightarrow h = \frac{\frac{E_T}{m} - \frac{v^2}{2}}{g}$

Antes veamos quien es E_T,

$$E_T = m\left(\frac{{v_0}^2}{2} + 5g\right)$$

Regresado,

$$\Rightarrow h = \frac{\frac{m\left(\frac{{v_0}^2}{2} + 5g\right)}{m} - \frac{v^2}{2}}{g} = \frac{\frac{{v_0}^2}{2} + 5g - \frac{v^2}{2}}{g} = \frac{\frac{{v_0}^2 + 10g - v^2}{2}}{g} = \frac{{v_0}^2 + 10g - v^2}{2g}$$
$$= \frac{{v_0}^2 - v^2}{2g} + \frac{10g}{2g} \therefore h = \frac{{v_0}^2 - v^2}{2g} + 5$$

También de esta expresión hallada, podemos encontrar la altura máxima del objeto que es cuando la velocidad llega a 0.

$$\therefore h_{max} = \frac{{v_0}^2}{2g} + 5$$

También podemos despejar la velocidad de la expresión que nos da la altura y así conocer la velocidad de la partícula en cualquier momento.

$$\Rightarrow h = \frac{{v_0}^2 - v^2}{2g} + 5 \Rightarrow h - 5 = \frac{{v_0}^2 - v^2}{2g} \Rightarrow 2g(h-5) = {v_0}^2 - v^2 \Rightarrow v^2$$
$$= {v_0}^2 - 2g(h-5) \therefore v = \sqrt{{v_0}^2 - 2g(h-5)}$$

Para resolver los incisos tomaremos $g = 9.8\ m/s^2$

a) Si $\boldsymbol{v_0 = 7\ m/s}$,

- La altura del objeto está dada por:

$$h_a = \frac{7^2 - v^2}{2(9.8)} + 5 = \frac{49 - v^2}{19.6} + 5 \therefore \boldsymbol{h_a = \frac{49 - v^2}{19.6} + 5\ \ m}$$

- La altura velocidad del objeto está dada por:

$$v_a = \sqrt{7^2 - 2(9.8)(h-5)} = \sqrt{49 - 19.6(h-5)} = \sqrt{49 - 19.6h + 98} = \sqrt{147 - 19.6h}$$

$$\therefore \boldsymbol{v_a = \sqrt{147 - 19.6h}\ \ m/s}$$

- La altura máxima del objeto está dada por:

$$h_{amax} = \frac{7^2}{2(9.8)} + 5 = \frac{49}{19.6} + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2} \therefore \boldsymbol{h_{amax} = 7.5\ \ m}$$

b) Si $\boldsymbol{v_0 = 12\ m/s}$,

- La altura del objeto está dada por:

$$h_b = \frac{12^2 - v^2}{2(9.8)} + 5 = \frac{144 - v^2}{19.6} + 5 \therefore \boldsymbol{h_b = \frac{144 - v^2}{19.6} + 5\ \ m}$$

- La altura velocidad del objeto está dada por:

$$v_b = \sqrt{12^2 - 2(9.8)(h-5)} = \sqrt{144 - 19.6(h-5)} = \sqrt{144 - 19.6h + 98}$$
$$= \sqrt{242 - 19.6h} \therefore \boldsymbol{v_b = \sqrt{242 - 19.6h}\ \ m/s}$$

- La altura máxima del objeto está dada por:

$$h_{bmax} = \frac{12^2}{2(9.8)} + 5 = \frac{144}{19.6} + 5 = \frac{360}{49} + 5 = \frac{605}{49}$$

$$\therefore \boldsymbol{h_{bmax} = \frac{605}{49}\ \ m \cong 12.347\ \ m}$$

c)

Debemos buscar el valor mínimo de v_0 para llegar al punto B, el cual tiene una altura de $10\ m$. Despejemos v_0 de la altura máxima que es $10\ m$,

$$h_{cmax} = \frac{{v_0}^2}{2g} + 5 \Rightarrow 10 = \frac{{v_0}^2}{2g} + 5 \Rightarrow 5 = \frac{{v_0}^2}{2g} \Rightarrow 10g = {v_0}^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{10g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{10(9.8)} \Rightarrow v_0 = 7\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la velocidad mínima de v_0 para que el objeto alcance el punto B, es de $v_0 = 7\sqrt{2} \quad m/s \cong 9.899 \; m/s$.

5. La función de energía potencial para una fuerza que actúa sobre una partícula tiene la forma $U = 3x^3y - 7z$. Encuentra la expresión para esta fuerza que actúa sobre la partícula en el punto (x,y,z). Recuerda que $\vec{F} = -\nabla U$.

Encontremos $\vec{F}$ si $\vec{F} = -\nabla U$.

$$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla(3x^3y - 7z) = -\left[\frac{d}{dx}(3x^3y - 7z), \frac{d}{dy}(3x^3y - 7z), \frac{d}{dz}(3x^3y - 7z)\right]$$
$$= -\left[\frac{d}{dx}3x^3y - \frac{d}{dx}7z, \frac{d}{dy}3x^3y - \frac{d}{dy}7z, \frac{d}{dz}3x^3y - \frac{d}{dz}7z\right]$$
$$= -(9x^2y - 0, 3x^3 - 0, 0 - 7) = -(9x^2y, 3x^3, -7) = (-9x^2y, -3x^3, 7)$$

$$\therefore \boldsymbol{\vec{F} = (-9x^2y, -3x^3, 7)}$$