Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México

Mecánica Cuántica - Tarea 1

Profesores:

Dr. Chumin Wang Chen

Ayud. Tomas Javier Escamilla Lara

Ayud. Oliver Isaac Barreto Quintanar

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1. Usando el método de Gram-Schmidt, orto normalice las siguientes bases y compruebe explícitamente la ortogonalidad entre los elementos de las nuevas bases.
   a) (0.8 pts.) Sea $\{|n\rangle | n = 1,2,3,4\}$ con $|1\rangle = \boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}$, $|2\rangle = i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} - 2\boldsymbol{e_4}$, $|3\rangle = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} - i\boldsymbol{e_4}$ y $|4\rangle = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}$, donde $\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = \delta_{i,j}$
   b) (0.8 pts.) $\{x, x^3, x^5\}$ es unas bases del espacio de polinomios del orden 5 en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

a)

- $|1'\rangle$

$$|1'\rangle = \frac{|1\rangle}{\||1\rangle\|} = \frac{\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}}{\sqrt{1^2 + (-i)^2 + 1^2}} = \frac{\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}}{\sqrt{1 - 1 + 1}} = \frac{\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}}{\sqrt{1}} = \boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}$$

- $|2'\rangle = \frac{|2\rangle - \langle 1'|2\rangle |1'\rangle}{\left\||2\rangle - \langle 1'|2\rangle |1'\rangle\right\|}$

$$\langle 1'|2\rangle = (1, -i, 0, 1) \cdot (0, i, 1, -2) = 0 + 1 + 0 - 2 = -1$$

$$\langle 1'|2\rangle |1'\rangle = -1(\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}) = -\boldsymbol{e_1} + i\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_4}$$

$$|2\rangle - \langle 1'|2\rangle |1'\rangle = (i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} - 2\boldsymbol{e_4}) - (-\boldsymbol{e_1} + i\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_4}) = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3} - \boldsymbol{e_4}$$

$$|2'\rangle = \frac{\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3} - \boldsymbol{e_4}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3} - \boldsymbol{e_4})$$

- $|3'\rangle = \frac{|3\rangle - \langle 1'|3\rangle |1'\rangle - \langle 2'|3\rangle |2'\rangle}{\left\||3\rangle - \langle 1'|3\rangle |1'\rangle - \langle 2'|3\rangle |2'\rangle\right\|}$

$$\langle 1'|3\rangle = (1, -i, 0, 1) \cdot (1, 1, 1, -i) = 1 - i - i = 1 - 2i$$

$$\langle 1'|3\rangle |1'\rangle = (1 - 2i) \cdot (\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4}) = \boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4} - 2i\boldsymbol{e_1} - 2\boldsymbol{e_2} - 2i\boldsymbol{e_4}$$

$$= \boldsymbol{e_1} - 2i\boldsymbol{e_1} - 2\boldsymbol{e_2} + i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4} - 2i\boldsymbol{e_4}$$

$$|3\rangle - \langle 1'|3\rangle |1'\rangle = (\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} - i\boldsymbol{e_4}) - (\boldsymbol{e_1} - 2i\boldsymbol{e_1} - 2\boldsymbol{e_2} + i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4} - 2i\boldsymbol{e_4})$$

$$= 2i\boldsymbol{e_1} + 3\boldsymbol{e_2} + i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3} - \boldsymbol{e_4} + i\boldsymbol{e_4}$$

$$\langle 2'|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)\cdot(1,1,1,-i) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+0+1+i) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+i)$$

$$\langle 2'|3\rangle|2'\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2+i)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_3}-\boldsymbol{e_4}) = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e_1}+2\boldsymbol{e_3}-2\boldsymbol{e_4}+i\boldsymbol{e_1}+i\boldsymbol{e_3}-i\boldsymbol{e_4})$$

$$= \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e_1}+i\boldsymbol{e_1}+2\boldsymbol{e_3}+i\boldsymbol{e_3}-2\boldsymbol{e_4}-i\boldsymbol{e_4})$$

$$|3\rangle - \langle 1'|3\rangle|1'\rangle - \langle 2'|3\rangle|2'\rangle$$

$$= (2i\boldsymbol{e_1}+3\boldsymbol{e_2}+i\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3}-\boldsymbol{e_4}+i\boldsymbol{e_4}) - \left(\frac{1}{3}(2\boldsymbol{e_1}+i\boldsymbol{e_1}+2\boldsymbol{e_3}+i\boldsymbol{e_3}-2\boldsymbol{e_4}-i\boldsymbol{e_4})\right)$$

$$= (2i\boldsymbol{e_1}+3\boldsymbol{e_2}+i\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3}-\boldsymbol{e_4}+i\boldsymbol{e_4}) - \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{e_1}+\frac{i}{3}\boldsymbol{e_1}+\frac{2}{3}\boldsymbol{e_3}+\frac{i}{3}\boldsymbol{e_3}-\frac{2}{3}\boldsymbol{e_4}-\frac{i}{3}\boldsymbol{e_4}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\boldsymbol{e_1}+\frac{5i}{3}\boldsymbol{e_1}+3\boldsymbol{e_2}+i\boldsymbol{e_2}+\frac{1}{3}\boldsymbol{e_3}-\frac{i}{3}\boldsymbol{e_3}-\frac{1}{3}\boldsymbol{e_4}+\frac{4i}{3}\boldsymbol{e_4}$$

$$= \left(\frac{-2+5i}{3}\right)\boldsymbol{e_1}+(3+i)\boldsymbol{e_2}+\left(\frac{1-i}{3}\right)\boldsymbol{e_3}+\left(\frac{-1+4i}{3}\right)\boldsymbol{e_4}$$

$$\||3\rangle - \langle 1'|3\rangle|1'\rangle - \langle 2'|3\rangle|2'\rangle\| = \sqrt{\left(\frac{-2+5i}{3}\right)^2+(3+i)^2+\left(\frac{1-i}{3}\right)^2+\left(\frac{-1+4i}{3}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{8}{3}i}$$

$$|3'\rangle = \frac{\left(\frac{-2+5i}{3}\right)\boldsymbol{e_1}+(3+i)\boldsymbol{e_2}+\left(\frac{1-i}{3}\right)\boldsymbol{e_3}+\left(\frac{-1+4i}{3}\right)\boldsymbol{e_4}}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}$$

- $|4'\rangle = \frac{|4\rangle - \langle 1'|4\rangle|1'\rangle - \langle 2'|4\rangle|2'\rangle - \langle 3'|4\rangle|3'\rangle}{\||4\rangle - \langle 1'|4\rangle|1'\rangle - \langle 2'|4\rangle|2'\rangle - \langle 3'|4\rangle|3'\rangle\|}$

$$\langle 1'|4\rangle = (1,-i,0,1)\cdot(1,1,0,1) = 1-i+0+1 = 2-i$$

$$\langle 1'|4\rangle|1'\rangle = (2-i)\cdot(\boldsymbol{e_1}-i\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_4}) = 2\boldsymbol{e_1}-2i\boldsymbol{e_2}+2\boldsymbol{e_4}-i\boldsymbol{e_1}-\boldsymbol{e_2}-i\boldsymbol{e_4}$$

$$= (2-i)\boldsymbol{e_1}-(1+2i)\boldsymbol{e_2}+(2-i)\boldsymbol{e_4}$$

$$\langle 2'|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)\cdot(1,1,0,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+0+0-1) = 0$$

$$\langle 3'|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}\left(\left(\frac{-2+5i}{3}\right),(3+i),\left(\frac{1-i}{3}\right),\left(\frac{-1+4i}{3}\right)\right)\cdot(1,1,0,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}\left(\left(\frac{-2+5i}{3}\right)+(3+i)+0+\left(\frac{-1+4i}{3}\right)\right) = \frac{2+4i}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}$$

$$\langle 3'|4\rangle|3'\rangle = \frac{2+4i}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}\frac{\left(\frac{-2+5i}{3}\right)\boldsymbol{e_1} + (3+i)\boldsymbol{e_2} + \left(\frac{1-i}{3}\right)\boldsymbol{e_3} + \left(\frac{-1+4i}{3}\right)\boldsymbol{e_4}}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}$$

$$= \frac{2+4i}{4+\frac{8}{3}i}\left(\left(\frac{-2+5i}{3}\right)\boldsymbol{e_1} + (3+i)\boldsymbol{e_2} + \left(\frac{1-i}{3}\right)\boldsymbol{e_3} + \left(\frac{-1+4i}{3}\right)\boldsymbol{e_4}\right)$$

$$= \left(-\frac{17}{13}+\frac{27}{26}i\right)\boldsymbol{e_1} + \left(\frac{51}{26}+\frac{57}{26}i\right)\boldsymbol{e_2} + \left(\frac{11}{26}-\frac{3}{26}i\right)\boldsymbol{e_3} + \left(-\frac{23}{26}+\frac{12}{13}i\right)\boldsymbol{e_4}$$

$$|4\rangle - \langle 1'|4\rangle|1'\rangle - \langle 2'|4\rangle|2'\rangle - \langle 3'|4\rangle|3'\rangle$$

$$= (\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_4}) - \big((2-i)\boldsymbol{e_1} - (1+2i)\boldsymbol{e_2} + (2-i)\boldsymbol{e_4}\big)$$
$$- \left(\left(-\frac{17}{13}+\frac{27}{26}i\right)\boldsymbol{e_1} + \left(\frac{51}{26}+\frac{57}{26}i\right)\boldsymbol{e_2} + \left(\frac{11}{26}-\frac{3}{26}i\right)\boldsymbol{e_3} + \left(-\frac{23}{26}+\frac{12}{13}i\right)\boldsymbol{e_4}\right)$$

$$= \frac{\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_1} + \frac{\frac{1}{26}-\frac{5}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_2} + \frac{-\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_3} + \frac{-\frac{3}{26}+\frac{1}{13}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_4}$$

Hagamos las comprobaciones:

$$\langle 1'|2'\rangle = (\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_3}-\boldsymbol{e_4})\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\langle 1'|3'\rangle = (\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4})\cdot\left(\frac{\left(\frac{-2+5i}{3}\right)\boldsymbol{e_1} + (3+i)\boldsymbol{e_2} + \left(\frac{1-i}{3}\right)\boldsymbol{e_3} + \left(\frac{-1+4i}{3}\right)\boldsymbol{e_4}}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}\right)$$

$$= \frac{-\frac{2+5i}{3} + (3+i)(-i)i + \frac{-1+4i}{3}}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}} = \frac{-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i + 3i + 1 - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}} = 0$$

$$\langle 1'|4'\rangle = (\boldsymbol{e_1} - i\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_4})$$
$$\cdot\left(\frac{\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_1} + \frac{\frac{1}{26}-\frac{5}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_2} + \frac{-\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_3} + \frac{-\frac{3}{26}+\frac{1}{13}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_4}\right)$$

$$= \frac{\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i-\frac{1}{26}i-\frac{5}{26}-\frac{3}{26}+\frac{1}{13}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{3}i}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{3}i}} = 0$$

$$\langle 2'|3'\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_3}-\boldsymbol{e_4})\right)\cdot\left(\frac{\left(\frac{-2+5i}{3}\right)\boldsymbol{e_1}+(3+i)\boldsymbol{e_2}+\left(\frac{1-i}{3}\right)\boldsymbol{e_3}+\left(\frac{-1+4i}{3}\right)\boldsymbol{e_4}}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}\right)$$

$$= \frac{-\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{5i}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}i+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{4}{3\sqrt{3}}i}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}} = \frac{0}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}} = 0$$

$$\langle 2'|4'\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_3}-\boldsymbol{e_4})\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_1}+\frac{\frac{1}{26}-\frac{5}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_2}+\frac{-\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_3}+\frac{-\frac{3}{26}+\frac{1}{13}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_4}\right)$$

$$= \frac{\frac{4}{13\sqrt{3}}-\frac{i}{26\sqrt{3}}+0-\frac{11}{26\sqrt{3}}+\frac{3i}{26\sqrt{3}}+\frac{3}{26\sqrt{3}}-\frac{i}{13\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}} = 0$$

$$\langle 3'|4'\rangle = \left(\frac{\left(\frac{-2+5i}{3}\right)\boldsymbol{e_1}+(3+i)\boldsymbol{e_2}+\left(\frac{1-i}{3}\right)\boldsymbol{e_3}+\left(\frac{-1+4i}{3}\right)\boldsymbol{e_4}}{\sqrt{4+\frac{8}{3}i}}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_1}+\frac{\frac{1}{26}-\frac{5}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_2}+\frac{-\frac{11}{26}+\frac{3}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_3}+\frac{-\frac{3}{26}+\frac{1}{13}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\boldsymbol{e_4}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{-2+5i}{3}}{\sqrt{4-\frac{8}{3}i}}\cdot\frac{\frac{4}{13}-\frac{1}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\right)+\left(\frac{3+i}{\sqrt{4-\frac{8}{3}i}}\cdot\frac{\frac{1}{26}-\frac{5}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\right)$$

$$+\left(\frac{1+i}{\sqrt{4-\frac{8}{3}i}}\cdot\frac{-\frac{11}{26}-\frac{3}{26}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{3}+\frac{4i}{3}}{\sqrt{4-\frac{8}{3}i}}\cdot\frac{-\frac{3}{26}+\frac{1}{13}i}{\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}\right) = \frac{0}{\sqrt{4-\frac{8}{3}i}\sqrt{\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i}}$$

$$= 0$$

$$b) \qquad w_1 = x, \qquad \|w_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$w_2 = x^3 - \frac{\langle x^3|x\rangle|x\rangle}{\|x\|^2} = x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^4\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}x = x^3 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}x = x^3 - \frac{3}{5}x, \qquad \|w_2\|^2 = \sqrt{\frac{8}{175}}$$

$$w_3 = x^5 - \frac{\langle x^5|x\rangle|x\rangle}{\|x\|^2} - -\frac{\langle x^5|w_2\rangle|w_2\rangle}{\|w_2\|^2}, \qquad \frac{\langle x^5|x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} x^6\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{\langle x^5|w_2\rangle}{\|w_2\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} x^8 - \frac{3}{5}x^6 dx}{\int_{-1}^{1} x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{9}-\frac{3}{35}+\frac{1}{9}-\frac{3}{35}}{\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}} = \frac{16(175)}{8(315)} = \frac{10}{9}$$

$$w_3 = x^5 - \frac{3}{7}x - \frac{10}{9}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right), \qquad \|w_3\|^2 = \sqrt{\frac{128}{43659}}$$

De este modo el normalizarlos queda como:

$$u_1 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \qquad u_2 = \frac{\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)}{\sqrt{\frac{8}{175}}}, \qquad u_3 = \frac{x^5 - \frac{3}{7}x - \frac{10}{9}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}$$

Hagamos las comprobaciones:

$$\langle u_1|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{175}}}\int_{-1}^{1} x\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{175}}}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{175}}}(0) = 0$$

$$\langle u_1|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}\int_{-1}^{1} x^6 - \frac{10}{9}x^4 + \frac{5}{21}x^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{5}{63}+\frac{5}{63}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}\left(\frac{18-28+10}{63}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}(0) = 0$$

$$\langle u_2|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{175}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}\int_{-1}^{1} x^8 - \frac{10}{9}x^6 + \frac{5}{21}x^4 - \frac{3}{5}x^6 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{7}x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{175}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{11}{45}-\frac{11}{45}+\frac{19}{105}+\frac{19}{105}-\frac{1}{21}-\frac{1}{21}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{175}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{128}{43659}}}\left(\frac{35+35-77-77+57+57-15-15}{315}\right) = 0$$

2. (1.7 pts.) A partir del siguiente producto de incertidumbres $(\Delta x)(\Delta p) = \hbar/2$, deduzca la función de onda $\Psi(x)$ contenida en $\Delta\hat{A} \equiv \sqrt{\left(\hat{A} - \bar{A}\right)^2}$, donde $\bar{A} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\hat{A}\Psi(x)dx$ para $\hat{A} = \hat{x}$ o $\hat{p}$.

La relación de incertidumbre de Heisenberg establece que:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Este principio implica que el producto de las incertidumbres en la posición Δx y el momento Δp tiene un límite inferior dado por $\frac{\hbar}{2}$. Se busca deducir la función de onda $\Psi(x)$ que minimiza este producto de incertidumbres, es decir, que satisface la igualdad:

$$(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}$$

La incertidumbre $\Delta\hat{A}$ asociada a un operador $\hat{A}$ se define como:

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\langle\widehat{A^2}\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2}$$

Donde los términos $\langle\widehat{A^2}\rangle$ y $\langle\hat{A}\rangle$ son los valores esperados del cuadrado del operador y del operador, respectivamente. Los valores esperados para un operador $\hat{A}$ se calculan con la función de onda $\Psi(x)$ como:

$$\langle\hat{A}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\hat{A}\,\Psi(x)\,dx$$

Y el valor esperado del cuadrado del operador $\hat{A}$ es:

$$\langle\widehat{A^2}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\widehat{A^2}\,\Psi(x)\,dx$$

En mecánica cuántica, los operadores de posición $\hat{x}$ y de momento $\hat{p}$ están definidos de la siguiente manera:

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

Sabemos que una función de onda gaussiana es una forma que minimiza el producto de incertidumbres, dado que distribuye de manera equilibrada las incertidumbres en posición y momento. Proponemos entonces que la función de onda $\Psi(x)$ tiene la siguiente forma:

$$\Psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Donde A es una constante de normalización, σ es un parámetro que está relacionado con la dispersión espacial de la función de onda y también con la incertidumbre en la posición $\Delta x = \sigma$.

La función de onda debe estar normalizada, lo que significa que la probabilidad total de encontrar la partícula en algún lugar del espacio debe ser igual a 1. Esto impone la condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

Sustituyendo la forma de $\Psi(x)$ que hemos propuesto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = 1$$

Donde sabemos que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \text{donde } \alpha > 0$$

En nuestro caso, $\alpha = \frac{1}{\sigma^2}$,

$$A^2\sqrt{\pi\sigma^2} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}}$$

Por lo tanto, la función de onda normalizada es:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

La incertidumbre en la posición, Δx, se puede calcular utilizando la definición de la desviación estándar de x:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

Como la función de onda propuesta es simétrica alrededor de $x = 0$, tenemos que $\langle x\rangle = 0$. Entonces, solo necesitamos calcular $\langle x^2\rangle$:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx$$

Sustituyendo $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$:

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$$

Donde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}$$

Con $\alpha = \frac{1}{\sigma^2}$, obtenemos: $\langle x^2\rangle = \sigma^2$. Por lo tanto, la incertidumbre en la posición es: $\Delta x = \sigma$

La incertidumbre en el momento Δp, utilizamos el operador de momento $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$. La incertidumbre en el momento se calcula como:

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

Dado que $\langle p \rangle = 0$ tiene función de onda simétrica, solo necesitamos calcular $\langle p^2 \rangle$. Para ello, aplicamos el operador de momento a $\Psi(x)$:

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)$$

Calculando la derivada:

$$\hat{p}\Psi(x) = -i\hbar\left(-\frac{x}{\sigma^2}\right)\Psi(x)$$

El valor esperado de p^2 es entonces:

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2 \Psi(x)dx$$

Después de realizar los cálculos, se obtiene: $\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{\sigma^2}$. Por lo tanto, la incertidumbre en el momento es: $\Delta p = \frac{\hbar}{\sigma}$

Finalmente, verificamos que el producto de las incertidumbres satisface el principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p = \sigma \cdot \frac{\hbar}{\sigma} = \hbar$$

Ya que la relación de incertidumbre establece que $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, y en este caso hemos encontrado que $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$, concluimos que la función de onda gaussiana minimiza el producto de incertidumbre.

3. Considere dos operadores en forma matricial dados por:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) (0.3 pts.) Calcule el conmutador $[\hat{C}, \widehat{D}] = \hat{C}\widehat{D} - \widehat{D}\hat{C}$.
b) (0.6 pts.) Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{C}$ y de $\widehat{D}$.
c) (0.8 pts.) Construya los eigenvectores en común de $\hat{C}$ y $\widehat{D}$.

a) El conmutador se define como: $[\hat{C}, \widehat{D}] = \hat{C}\widehat{D} - \widehat{D}\hat{C}$

Calculemos $(\hat{C}\widehat{D})$:

$$\hat{C}\widehat{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & 36 & -4 & 12 \\ -4 & -4 & 20 & 4 \\ -4 & 12 & 4 & 36 \end{pmatrix}$$

Calculemos $(\widehat{D}\hat{C})$:

$$\widehat{D}\hat{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & 36 & -4 & 12 \\ -4 & -4 & 20 & 4 \\ -4 & 12 & 4 & 36 \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculemos el conmutador: $[\hat{C}, \widehat{D}] = \hat{C}\widehat{D} - \widehat{D}\hat{C}$

$$[\hat{C}, \widehat{D}] = \begin{pmatrix} 20 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & 36 & -4 & 12 \\ -4 & -4 & 20 & 4 \\ -4 & 12 & 4 & 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & 36 & -4 & 12 \\ -4 & -4 & 20 & 4 \\ -4 & 12 & 4 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{C}$ y $\widehat{D}$.

Para $\hat{C}$:

$$\det(\hat{C} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 - 24\lambda^3 + 192\lambda^2 - 640\lambda + 780$$
$$= (\lambda - 12)(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 48\lambda - 64) = (\lambda - 12)(\lambda - 4)^3 = 0$$

Así los valores propios son $\lambda_1 = 12$ y $\lambda_2 = 4$ con multicidad de 3.

Calculemos los vectores propios de los valores propios.

Vamos con λ_1, utilicemos sistema por eliminación de Gauss:

$$\hat{C} - 12I = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (\hat{C} - \lambda I) \cdot V = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_4, x_3 = 0 \Rightarrow V_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vamos con λ_2, utilicemos sistema por eliminación de Gauss:

$$\hat{C} - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (\hat{C} - 4I) \cdot V = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_1, x_2 = -x_4, x_3 = x_4$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_{21}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_{\lambda_{22}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_{\lambda_{23}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para cumplir con la normalización solo basta con multiplicar por $1/\sqrt{2}$

Para $\widehat{D}$:

$$\det(\widehat{D}-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 1 & -1 & -1\\ 1 & 5-\lambda & -1 & -1\\ -1 & -1 & 5-\lambda & 1\\ -1 & -1 & 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-20\lambda^3+144\lambda^2-448\lambda+512$$
$$=(\lambda-8)(\lambda^3-12\lambda^2+48\lambda-64)=(\lambda-8)(\lambda-4)^3=0$$

Así los valores propios son $\lambda_1=8$ y $\lambda_2=4$ con multicidad de 3.

Calculemos los vectores propios de los valores propios. Vamos con λ_1, utilicemos sistema por eliminación de Gauss:

$$\widehat{D}-8I=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -3 & 1\\ -1 & -1 & 1 & -3\end{pmatrix},\qquad (\widehat{D}-\lambda I)\cdot V=0$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}-3 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -3 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & -3 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & -3 & -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & -3 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0\\ -1 & -1 & -3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & -3 & 0\end{array}\right)$$

$$\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0\\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 0\\ -1 & -1 & 1 & -3 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0\\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0\end{array}\right)$$

$$\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1=-x_4, x_3=x_4, x_2=-x_4\Rightarrow V_\lambda=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Vamos con λ_2, utilicemos sistema por eliminación de Gauss:

$$\widehat{D} - 4I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\widehat{D} - \lambda I\right) \cdot V = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3 + x_4, x_2 = x_2, x_3 = x_3, x_4 = x_4$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_{21}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_{\lambda_{22}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_{\lambda_{23}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para cumplir con la normalización solo basta con multiplicar por $1/\sqrt{2}$.

4. Se tienen dos eigenfunciones normalizadas $\varPsi_1(x)$ y $\varPsi_2(x)$ de una partícula con eigenvalores $E_1 \neq E_2$, las cuales se anulan afuera de las regiones no traslapadas $\varOmega_1$ y $\varOmega_2$, respectivamente.
   a) (0.5 pts.) Demuestre si la partícula esta inicialmente en la región $\varOmega_1$ se quedara ahí para siempre.
   b) (0.6 pts.) Si la partícula inicia en el estado $\varPsi(x,0) = [3\varPsi_1(x) + 4\varPsi_2(x)]/\sqrt{5}$, pruebe que la densidad de probabilidad $|\varPsi(x,t)|^2$ es independiente del tiempo.
   c) (0.6 pts.) Ahora, si las dos regiones $\varOmega_1$ y $\varOmega_2$ se traslapan parcialmente y la partícula inicia en el estado de inciso (b), demuestre que $|\varPsi(x,t)|^2$ es una función periódica en el tiempo y determine el periodo.

a)

Partamos de que las 2 regiones del espacio Ω_1 y Ω_2 son no traslapadas, y tenemos las dos eigenfunciones normalizadas $\varPsi_1(x)$ y $\varPsi_2(x)$ correspondientes a los eigenvalores E_1 y E_2 del hamiltoniano H, respectivamente. Por definición, las funciones de onda $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ satisfacen las ecuaciones de Schrödinger independientes del tiempo: $H\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x)$. Se sabe que $\Psi_1(x)$ está confinada a la región $\Omega_1 \Rightarrow \Psi_1(x) = 0$ para $x \notin \Omega_1$, y $\Psi_2(x)$ está confinada a la región $\Omega_2 \Rightarrow \Psi_2(x) = 0$ para $x \notin \Omega_2$.

Si la partícula está inicialmente en la región Ω_1, esto significa que el estado inicial de la partícula está descrito por $\Psi(x,0) = \Psi_1(x)$. La evolución temporal de un estado en la mecánica cuántica está dada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = H\Psi(x,t)$$

Dado que $\Psi_1(x)$ es una eigenfunción de H con eigenvalor E_1, la solución a esta ecuación para el estado inicial $\Psi(x,0) = \Psi_1(x)$ es: $\Psi(x,t) = \Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$

La densidad de probabilidad en el espacio de configuración está dada por el módulo al cuadrado de la función de onda: $|\Psi(x,t)|^2 = \left|\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}\right|^2 = |\Psi_1(x)|^2$

Puesto que el factor de fase $e^{-iE_1t/\hbar}$ no afecta el valor de la densidad de probabilidad, tenemos que: $|\Psi(x,t)|^2 = |\Psi_1(x)|^2$

Dado que $\Psi_1(x)$ está confinada en la región Ω_1, la densidad de probabilidad $|\Psi(x,t)|^2$ no cambia en el tiempo, podemos concluir que la partícula permanecerá en la región Ω_1 para siempre. En otras palabras, esto se debe a que la probabilidad de encontrar la partícula fuera de Ω_1 es cero para todo t, dado que:

$$\int_{\Omega_2}|\Psi(x,t)|^2\,dx = \int_{\Omega_2}|\Psi_1(x)|^2\,dx = 0$$

Por lo tanto, si la partícula está inicialmente en la región Ω_1, permanecerá ahí para siempre, dado que su función de onda no tiene soporte en la región Ω_2, y no hay ninguna interacción que permita que la partícula se escape bajo la evolución temporal del hamiltoniano H.

b)

Tenemos dos eigenfunciones $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ del hamiltoniano H, correspondientes a los eigenvalores E_1 y E_2, respectivamente: $H\Psi_1(x) = E_1\Psi_1(x), \quad H\Psi_2(x) = E_2\Psi_2(x)$

Las eigenfunciones están normalizadas y forman una base en el subespacio correspondiente a estos dos eigenestados. El estado inicial de la partícula es una combinación lineal de los dos eigenestados normalizados $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$:

$$\Psi(x,0) = \frac{3\Psi_1(x) + 4\Psi_2(x)}{5}$$

Este estado es una superposición de las funciones de onda $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$, y está normalizado.

Si el estado inicial es una combinación lineal de eigenestados de H, cada término evoluciona en el tiempo de acuerdo con su propio eigenvalor. La solución para $\Psi(x,t)$ se puede escribir como:

$$\Psi(x,t) = \frac{3\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + 4\Psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}}{5}$$

Aquí, las funciones de onda $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ son las mismas que en $t = 0$, pero ahora multiplicadas por factores de fase temporales $e^{-iE_1t/\hbar}$ y $e^{-iE_2t/\hbar}$, respectivamente.

La densidad de probabilidad en mecánica cuántica está dada por el módulo al cuadrado de la función de onda $\Psi(x,t)$:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \left|\frac{3\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + 4\Psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}}{5}\right|^2 = \frac{1}{25}\left|3\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + 4\Psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2$$

Para calcular el módulo al cuadrado, usamos la propiedad $(a+b)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{R}(a^*b)$.

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{\left(\left|3\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}\right|^2 + \left|4\Psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2 + 2\mathrm{R}\left(3\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} \cdot 4\Psi_2^*(x)e^{iE_2t/\hbar}\right)\right)}{25}$$

Donde, $\left|3\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}\right|^2 = 9|\Psi_1(x)|^2$, $\left|4\Psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2 = 16|\Psi_2(x)|^2$

Las funciones $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ están en regiones Ω_1 y Ω_2, que no se traslapan. Lo que implica que no tienen soporte en la misma región del espacio, es decir, $\Psi_1(x)\Psi_2^*(x) = 0$ en todo x. Por lo tanto, el término cruzado se anula:

$$2\mathrm{R}\left(3\Psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} \cdot 4\Psi_2^*(x)e^{iE_2t/\hbar}\right) = 24\mathrm{R}\left(\Psi_1(x)\Psi_2^*(x)e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\right) = 0$$

Así, la densidad de probabilidad queda como:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{25}\left(9|\Psi_1(x)|^2 + 16|\Psi_2(x)|^2\right)$$

Dado que $|\Psi_1(x)|^2$ y $|\Psi_2(x)|^2$ no dependen del tiempo, concluimos que $|\Psi(x,t)|^2$ es independiente del tiempo.

c)

A diferencia del inciso (b), donde $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ estaban confinadas a regiones no traslapadas, ahora existe un traslape parcial entre estas regiones. Esto implica que el término cruzado $\Psi_1(x)\Psi_2^*(x)$ no se anula en todo x. Por lo tanto, el término cruzado genera una dependencia temporal en $|\Psi(x,t)|^2$. El término cruzado es:

$$\mathrm{R}\left(\Psi_1(x)\Psi_2^*(x)e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\right)$$

Este término contiene una oscilación temporal debido al factor $e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}$. Al tomar la parte real, obtenemos una función oscilante en el tiempo:

$$\mathrm{R}\left(\Psi_1(x)\Psi_2^*(x)e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\right) = \Psi_1(x)\Psi_2^*(x)\cos\left(\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}\right)$$

Dado que la densidad de probabilidad contiene un término oscilatorio en el tiempo $\cos\left(\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}\right)$, podemos concluir que $|\Psi(x,t)|^2$ es una función periódica en el tiempo.

El período T de una función coseno $\cos(\omega t)$ está dado por: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, donde ω es la frecuencia angular de la oscilación. En nuestro caso, la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$$

Por lo tanto, el período de las oscilaciones de $|\Psi(x,t)|^2$ es: $T = \frac{2\pi\hbar}{E_1-E_2}$

5. (1.6 pts.) Un operador $\hat{A}$ que no conmuta con el hamiltoniano del sistema $(\hat{H})$ tiene eigenvalores A_1 y A_2 con eigenfunciones asociadas $|\alpha_1\rangle = (|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle)/\sqrt{2}$ y $|\alpha_2\rangle = (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle)/\sqrt{2}$, donde $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ son eigenfunciones ortonormales de $\hat{H}$ con eigenvalores E_1 y E_2. Si el sistema se encuentra al tiempo $t = 0$ en un estado $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha_1\rangle$, encuentre el valor esperado de $\hat{A}$ para cualquier tiempo t y la probabilidad de medir el eigenvalor A_1.

Como el operador de $\hat{A}$ no conmuta $\Rightarrow [\hat{A}, \hat{H}] \neq 0$. Como $|\alpha_1\rangle$ y $|\alpha_2\rangle$ son eigenestados de $\hat{A}$ con eigenvalores A_1 y A_2 y como $\{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle\}$ forma una base ortonormal, podemos expresar $\hat{A}$ en esa base como: $\hat{A} = A_1|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + A_2|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$, de modo que $\hat{A}|\alpha_1\rangle = A_1|\alpha_1\rangle,\ \hat{A}|\alpha_2\rangle = A_2|\alpha_2\rangle$

$$|\alpha_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle), \qquad |\alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle$$

Como $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ son eigenfunciones ortonormales de $\hat{H}$ con eigenvalores E_1 y E_2

$$\Rightarrow H|\phi_1\rangle = E_1|\phi_1\rangle, \qquad H|\phi_2\rangle = E_2|\phi_2\rangle$$

Tenemos para $t = 0$, que nos encontramos en el estado $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha_1\rangle$,

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle)$$

Utilizando las relaciones de $|\alpha_1\rangle$ y $|\alpha_2\rangle$, encontramos $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$,

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle - |\alpha_2\rangle), \qquad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle)$$

El valor esperado de $\hat{A}$ en el estado $|\psi(t)\rangle$ se define como:

$$\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$$

dado que $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ no son eigenfunciones de $\hat{A}$, escribimos $\psi(t)$ en términos de α_1 y α_2 y por la evolución temporal del estado está dada por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|\phi_1\rangle - e^{-iE_2t/\hbar}|\phi_2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle - |\alpha_2\rangle) - e^{-iE_2t/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_2\rangle - |\alpha_1\rangle)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(e^{-iE_1t/\hbar} + e^{-iE_2t/\hbar}\right)|\alpha_1\rangle + \left(e^{-iE_1t/\hbar} + e^{-iE_2t/\hbar}\right)|\alpha_2\rangle\right)$$

Calculemos el valor esperado:

$$\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|(A_1|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + A_2|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|\psi(t)\rangle = A_1|\langle\alpha_1|\psi(t)\rangle|^2 + A_2|\langle\alpha_2|\psi(t)\rangle|^2$$

Donde,

$$\langle\alpha_1|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{-iE_1t/\hbar} + e^{-iE_2t/\hbar}\right), \qquad \langle\alpha_2|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{-iE_1t/\hbar} - e^{-iE_2t/\hbar}\right)$$

Calculamos los módulos al cuadrado:

$$|\langle \alpha_1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-iE_1t/\hbar} + e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2, \qquad |\langle \alpha_2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-iE_1t/\hbar} - e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2$$

Podemos dejarlo acá,

$$\langle \hat{A}\rangle(t) = A_1\frac{1}{4}\left|e^{-iE_1t/\hbar} + e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2 + A_2\frac{1}{4}\left|e^{-iE_1t/\hbar} - e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2$$

O bien, usando que

$$\left|e^{-iE_1t/\hbar} \pm e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2 = 2 \pm 2\cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)$$

obtenemos:

$$|\langle \alpha_1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)\right], \qquad |\langle \alpha_2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)\right]$$

Finalmente, el valor esperado de $\hat{A}$ es:

$$\langle \hat{A}\rangle(t) = A_1\frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)\right] + A_2\frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)\right]$$

Simplificando:

$$\langle \hat{A}\rangle(t) = \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2}\cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)$$

La probabilidad de medir el eigenvalor A_1 es $|\langle \alpha_1|\psi(t)\rangle|^2$.

$$P(A_1, t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)\right]$$

6. Considere el hamiltoniano $\widehat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y el estado $|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   a) (0.5 pts.) Encuentre la evolución temporal del estado $|\psi(t)\rangle$ vía el operador $\widehat{U}(t) = e^{-i\widehat{H}t/\hbar}$ y vía los eigenvalores del hamiltoniano $\widehat{H}$, así compare los resultados obtenidos de ambos caminos.
   b) (0.4 pts.) Determine el valor esperado de $\hat{A}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ al tiempo t en el esquema de Schrödinger.
   c) (0.4 pts.) Determine $\hat{A}_H(t)$ en el esquema de Heisenberg vía el operador $\widehat{U}(t)$, así como resolviendo la ecuación de Heisenberg y compare los resultados de ambas rutas.
   d) (0.4 pts.) Compare el valor esperado de $\hat{A}_H(t)$ con el resultado del inciso (b).

a)

El operador de evolución temporal está dado por: $\widehat{U}(t) = e^{-i\widehat{H}t/\hbar}$

Calculemos $\widehat{U}(t)$, necesitamos calcular la exponencial de la matriz $\widehat{H}$. Ero véase que podemos escribir la exponencial en términos de funciones trigonométricas utilizando la identidad:

$$e^{-i\widehat{H}t/\hbar} = \cos(\omega t)\, I - i\sin(\omega t)\,\frac{\widehat{H}}{\hbar\omega}$$

Ahora, sustituimos $\widehat{H}$: $\widehat{U}(t) = \cos(\omega t)\, I - i\sin(\omega t) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Simplificando: $\widehat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

Ahora aplicamos $\widehat{U}(t)$ al estado inicial $|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hemos encontrado la evolución temporal del estado.

Ahora por los eigenvalores del Hamiltoniano $\widehat{H}$. Resolvemos el determinante para encontrar los eigenvalores λ:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\hbar\omega$$

Busquemos los eigenvectores correspondientes a cada eigenvalor. Para $\lambda = \hbar\omega,\ \lambda = -\hbar\omega$, los eigenvectores son:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

El estado inicial se puede escribir como una combinación lineal de los eigenvectores v_1 y v_2:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)$$

La evolución temporal de los eigenestados está dada por: $v_1(t) = e^{-i\omega t} v_1, \quad v_2(t) = e^{i\omega t} v_2$

Por lo tanto, el estado evolucionado es: $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t} v_1 + e^{i\omega t} v_2\right)$

Sustituimos v_1 y v_2:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} + e^{i\omega t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\right)$$

Simplificando: $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}$

Ambos caminos llegan al mismo resultado, es decir, son equivalentes y válidos para calcular la evolución temporal en este caso. $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}$

b)

El valor esperado del operador $\hat{A}_s$ en un estado $|\psi(t)\rangle$ se calcula como: $\langle \hat{A}_s\rangle = \langle\psi(t)|\hat{A}_s|\psi(t)\rangle$

En a), vimos la evolución temporal del estado $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}$

Apliquemos $\hat{A}_s$ al estado $|\psi(t)\rangle$:

$$\hat{A}_s|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ -\sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

Calculemos $\langle\psi(t)|\hat{A}_s|\psi(t)\rangle$, primero veamos que $\langle\psi(t)| = (\cos(\omega t) \quad \sin(\omega t))$, de modo que el valor esperado estará dado por:

$$\langle\hat{A}_s\rangle = (\cos(\omega t) \quad \sin(\omega t))\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ -\sin(\omega t)\end{pmatrix} = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) = \cos(2\omega t)$$

Así hemos encontrado el valor esperado de $\hat{A}_s$ al tiempo t en el esquema de Schrödinger.

c)

La evolución de un operador $\hat{A}_H(t)$ en el esquema de Heisenberg está dada por la transformación: $\hat{A}_H(t) = \widehat{U}^{+}(t)\hat{A}_s\widehat{\mathrm{U}}(t)$, con $\widehat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ el operador de evolución temporal.

En el inciso a), ya calculamos el operador de evolución $\widehat{U}(t)$ y tenemos que $\hat{A}_s = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Como $\widehat{U}(t)$ es una matriz unitaria, su conjugado transpuesto es su transpuesta:

$$\widehat{U}(t) = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}, \qquad \widehat{U}^{+}(t) = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\hat{A}_H(t) &= \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & -\cos(\omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(2\omega t) & \sin(2\omega t)\\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Así calculamos $\hat{A}_H(t)$ en el esquema de Heisenberg usando $\widehat{U}(t)$.

Ahora calculemos $\hat{A}_H(t)$ a partir de la solución de la ecuación de Heisenberg, la ecuación de Heisenberg para la evolución temporal de un operador $\hat{A}_H(t)$ es:

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\widehat{H}, \hat{A}_H(t)\right]$$

donde $\left[\widehat{H}, \hat{A}_H(t)\right]$ es el conmutador entre el Hamiltoniano $\widehat{H}$ y el operador $\hat{A}_H(t)$. Tenemos que $\hat{A}_H(t) = \hat{A}_s$, es decir:

$$\hat{A}_H(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos el conmutador: $\left[\widehat{H}, \hat{A}_H(t)\right] = \widehat{H}\hat{A}_H(t) - \hat{A}_H(t)\widehat{H}$

$$\widehat{H}\hat{A}_H(t) = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{A}_H(t)\widehat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, el conmutador es: $\left[\widehat{H}, \hat{A}_H(t)\right] = 2\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

La ecuación de Heisenberg se convierte en:

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = 2i\omega \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos:

$$\hat{A}_H(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) \end{pmatrix}$$

Ambos métodos nos dan el mismo resultado.

d)

Para comparar el valor esperado de $\hat{A}_H(t)$ en el esquema de Heisenberg con el resultado del inciso b), necesitamos calcularlo. En el esquema de Heisenberg, el estado $|\psi(0)\rangle$ no cambia con el tiempo. $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Obtuvimos en el inciso anterior el operador $\hat{A}_H(t)$ que obtuvimos en el inciso anterior es. El valor esperado de $\hat{A}_H(t)$ en el esquema de Heisenberg se calcula como: $\langle \hat{A}_H(t) \rangle = \langle \psi(0)|\hat{A}_H(t)|\psi(0)\rangle$

$$\left\langle \hat{A}_H(t) \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \cos(2\omega t) + 0 \cdot \sin(2\omega t) = \cos(2\omega t)$$

El valor esperado en el esquema de Schrödinger del inciso b), resulto ser el mismo. El valor esperado de $\hat{A}_H(t)$ en el esquema de Heisenberg es exactamente el mismo que el valor esperado de $\hat{A}_s$ en el esquema de Schrödinger:

$$\left\langle \hat{A}_H(t) \right\rangle = \left\langle \hat{A}_s(t) \right\rangle = \cos(2\omega t)$$

Este resultado refleja que los dos esquemas (Heisenberg y Schrödinger) son completamente equivalentes en cuanto a la predicción de valores esperados de observables.