# Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 07
**Profesores:**
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
**Alumno: Sebastián González Juárez**

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx


**7. Demuestra que si $P$ es una probabilidad y $\{A_i\}$ son subconjuntos del espacio de muestreo (no necesariamente disjuntos), entonces**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots + (-1)^{n+1} \sum_{k_1<k_2<\ldots<k_2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_1}\right) + \ldots + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_i}\right)$$

**Para esto primero demuestra el caso N = 2 y después aplica inducción.**

**Sol. Demostramos por inducción,**

Paso base $N = 2$:

Sean $A_1$ y $A_2$, aplicamos:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Lo cual es cierto por definición, pues la resta es que si simplemente sumamos $P(A_1)$ y $P(A_2)$, la intersección $P(A_1 \cap A_2)$ se cuenta dos veces, por lo que se resta una vez.

Paso inductivo

Sup. que es válido para $N$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_{k_i}\right)$$

Obs.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) + P(A_{N+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \cap A_{N+1}\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_{k_i}\right) + P(A_{N+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \cap A_{N+1}\right)$$

Véase que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \cap A_{N+1}\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k \cap A_{N+1}) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{N+1}\right) + \ldots + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i\right)$$

Sustituyendo,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_{k_i}\right) + P(A_{N+1})$$
$$- \left[\sum_{k=1}^{N} P(A_k \cap A_{N+1}) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{N+1}\right) + \ldots + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i\right)\right]$$

Resolviendo,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots + (-1)^{N+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_{k_i}\right) + P(A_{N+1}) - \sum_{k=1}^{N} P(A_k \cap A_{N+1})$$
$$+ \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{N+1}\right) + (-1)^{N+2} P\left(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N+1} P(A_k) - \sum_{k_1<k_2} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) + \ldots + (-1)^{N+2} P\left(\bigcap_{i=1}^{N+1} A_i\right)$$

■