



Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 14
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano
Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez
sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx



14. Un juego de volados consiste en lo siguiente:

Cada vez que se tira el volado y sale águila, el jugador 1 gana un peso y el jugador 2 lo pierde; cada vez que sale sol, el jugador 2 gana un peso y el 1 lo pierde.

El juego se termina cuando uno de los dos jugadores se queda sin dinero.

Calcula la probabilidad de que el jugador 1 gane si comienza con i pesos, mientras que el jugador 2 comienza con $10 - i$ ($i < 10$).

Sol.

Denotemos $P(i)$ como la proba de que el jugador 1 gane empezando con i pesos.

Lo pensaré como un caminante con pasos de ± 1 , de modo que estos pasos cumplen que:

- El jugador 1 avanza de i a $i + 1$ cuando sale águila con una proba de $\frac{1}{2}$
- El jugador 1 retrocede de i a $i - 1$ cuando sale sol con una proba de $\frac{1}{2}$

Lo planteamos de igual forma que las otras ocasiones:

$$P(i) = \frac{1}{2}P(i + 1) + \frac{1}{2}P(i - 1)$$

Además, tenemos que:

- Cuando el jugador 1 llega a 0 pesos, la proba de ganar es de $P(0) = 0$
- Cuando el jugador 1 llega a 10 pesos, la proba de ganar es de $P(10) = 1$

Ahora veamos que,

$$\begin{aligned}P(i) &= \frac{1}{2}P(i + 1) + \frac{1}{2}P(i - 1) \\P(i) &= \frac{1}{2}(P(i + 1) + P(i - 1)) \\2P(i) &= P(i + 1) + P(i - 1) \\P(i) + P(i) &= P(i + 1) + P(i - 1) \\P(i + 1) - P(i) &= P(i) - P(i - 1)\end{aligned}$$

Definamos la diferencia $P(i) - P(i - 1) = c$ una constante, pues es la misma para todo i .

Ahora veamos que al sumar desde $i = 1$ hasta i tenemos:

$$P(1) - P(0) = c$$

$$P(2) - P(1) = c$$

$$\vdots$$

$$P(i) - P(i - 1) = c$$

Tenemos: $[P(1) - P(0)] + [P(2) - P(1)] + \dots + [P(i) - P(i - 1)] = c + c + \dots + c$

Por ende, $P(i) - P(0) = ic$

Pero por la condición $P(0) = 0$, entonces $P(i) = ic$.

Pero por la condición $P(10) = 1$, entonces $1 = P(10) = 10c$.

Entonces, $c = \frac{1}{10}$

Por lo tanto, sustituyendo c :

$$P(i) = \frac{i}{10}$$

Vemos que la proba de que el jugador 1 gane depende directamente de su dinero inicial i de manera lineal. Suponiendo que empieza con 5 monedas tendrá un 0.5 de proba de ganar y así con las demás cantidades de monedas.