Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Electromagnetismo II – Tarea 1
Profesores:
Dr. Alejandro Reyes Coronado
Ayud. Daniel Espinosa González
Ayud. Atzin López Tercero
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

Nota. El profe dijo que subiría las respuestas, por lo que entendí, sin embargo no las encontré.

1.- Problema: (10pts)

(a) Demuestra que la matriz de rotación en dos dimensiones

$$\begin{pmatrix} \overline{A_y} \\ \\ \overline{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ \\ A_z \end{pmatrix}$$

preserva el producto punto, es decir, muestra que:

$$\overline{A_y}\;\overline{B_y} + \overline{A_z}\;\overline{B_z} = A_y B_y + A_z B_z\,.$$

(b) ¿Qué condiciones deben satisfacer los elementos (R_{ij}) de la matriz de rotación en tres dimensiones para que se preserve la longitud de un vector $\vec{A}$ (para cualquier vector $\vec{A}$)?

a)

P. d. $\overline{A_y}\,\overline{B_y} + \overline{A_z}\,\overline{B_z} = A_y B_y + A_z B_z$, i. e. el producto punto se preserva.

Expresemos las componentes transformadas de $\overline{A_y}\,\overline{A_z}$ de $\vec{A}$ y de $\overline{B_y}\,\overline{B_z}$ de $\vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} \overline{A_y} \\ \overline{A_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \cdot A_y + \sin\phi \cdot A_z \\ -\sin\phi \cdot A_y + \cos\phi \cdot A_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{B_y} \\ \overline{B_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \cdot B_y + \sin\phi \cdot B_z \\ -\sin\phi \cdot B_y + \cos\phi \cdot B_z \end{pmatrix}$$

Procedamos a calcular el producto punto $\vec{\bar{A}} \cdot \vec{\bar{B}}$: $\vec{\bar{A}} \cdot \vec{\bar{B}} = \overline{A_y}\,\overline{B_y} + \overline{A_z}\,\overline{B_z}$. Sustituyamos:

$$\begin{aligned}
\overline{A_y}\,\overline{B_y} + \overline{A_z}\,\overline{B_z} &= (\cos\phi \cdot A_y + \sin\phi \cdot A_z)(\cos\phi \cdot B_y + \sin\phi \cdot B_z) \\
&\quad + (-\sin\phi \cdot A_y + \cos\phi \cdot A_z)(-\sin\phi \cdot B_y + \cos\phi \cdot B_z) \\
&= \cos\phi\, A_y \cos\phi\, B_y + \cos\phi\, A_y \sin\phi\, B_z + \sin\phi\, A_z \cos\phi\, B_y + \sin\phi\, A_z \sin\phi\, B_z \\
&\quad + \sin\phi\, A_y \sin\phi\, B_y - \sin\phi\, A_y \cos\phi\, B_z - \cos\phi\, A_z \sin\phi\, B_y + \cos\phi\, A_z \cos\phi\, B_z \\
&= (\cos^2\phi + \sin^2\phi) A_y B_y + (\cos\phi \sin\phi - \cos\phi \sin\phi) A_y B_z \\
&\quad + (\sin\phi \cos\phi - \sin\phi \cos\phi) A_z B_y + (\sin^2\phi + \cos^2\phi) A_z B_z \\
&= (A_y B_y + A_z B_z)(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \\
&= A_y B_y + A_z B_z
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{A_y}\,\overline{B_y} + \overline{A_z}\,\overline{B_z} = A_y B_y + A_z B_z$, i. e. el producto punto se preserva. ■

b)

Tenemos que, para tres dimensiones, la longitud de un vector $\vec{A}$ será otorgada por la norma euclidiana:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Ahora, al aplicar dicha rotación dada por una matriz R, el vector transformado $\vec{\vec{A}}$ se expresará como: $\vec{\vec{A}} = R\vec{A}$. Pero se busca que se la longitud del vector se preserve, así, las normas de ambos vectores deberán ser la misma: $\left|\vec{\vec{A}}\right| = \left|\vec{A}\right|$. Lo que implica que:

$$\left|\vec{\vec{A}}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 \Rightarrow \left(R\vec{A}\right)\cdot\left(R\vec{A}\right) = \vec{A}\cdot\vec{A} \Rightarrow \vec{A}\cdot\left(R^TR\vec{A}\right) = \vec{A}\cdot\vec{A} \Rightarrow R^TR = I$$

Por esto, tenemos la condición de que la matriz R es ortogonal, i.e. los elementos de la matriz de rotación $R_{\{ij\}}$ deben cumplir con que las filas (o columnas) de R sean vectores ortonormales, es decir, mutuamente ortogonales y de norma unitaria. Además de que la transpuesta de R debe ser igual a su inversa, $R^T = R^{-1}$. Con esto tendremos asegurado que la matriz de rotación preserva la longitud y el producto punto de los vectores.

Demostración de la igualdad $\left(R\vec{A}\right)\cdot\left(R\vec{A}\right) = \vec{A}\cdot\left(R^TR\vec{A}\right)$.

Dem.

Expandamos el producto escalar: $\left(R\vec{A}\right)\cdot\left(R\vec{A}\right) = \left(R\vec{A}\right)^T\cdot\left(R\vec{A}\right)$

Esto por definición del producto escalar, el cual se puede escribir como el producto matricial del vector transpuesto por el vector original.

Por propiedades de la transpuesta: $\left(R\vec{A}\right)^T\cdot\left(R\vec{A}\right) = \overrightarrow{A^T}R^T\cdot R\vec{A}$

Esto implica al agrupar, que: $\overrightarrow{A^T}R^T\cdot R\vec{A} = \overrightarrow{A^T}\cdot\left(R^TR\right)\cdot\vec{A}$

Por lo tanto: $\left(R\vec{A}\right)\cdot\left(R\vec{A}\right) = \vec{A}\cdot\left(R^TR\vec{A}\right)$

$\blacksquare$

2.- Problema: (10pts)

(a) ¿Cómo se transforman las componentes de un vector bajo una traslación de coordenadas ($\overline{x} = x, \overline{y} = y - a, \overline{z} = z$), donde a es una constante?

(b) ¿Cómo se transforman las componentes de un vector bajo una inversión de coordenadas ($\overline{x} = -x, \overline{y} = -y, \overline{z} = -z$)?

(c) ¿Cómo se transforma el producto cruz de dos vectores bajo inversión? [**NOTA**: El producto cruz de dos vectores es formalmente llamado un **pseudovector** debido a su comportamiento "anómalo"]. ¿El producto cruz de dos pseudovectores es un vector o un pseudovector? Menciona dos pseudovectores que se usen en mecánica clásica.

(d) ¿Cómo se transforma el triple producto escalar $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ bajo una transformación de inversión? [**NOTA**: A este objeto se le llama formalmente un **pseudoescalar**].

a)

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y - a, \quad \bar{z} = z$$

- La componente x no se ve afectada $\Rightarrow \overline{A_x} = A_x$.

- La componente y no se ve afectada en traslación en sí, pues es una traslación de las coordenadas, no del vector en sí $\Rightarrow \overline{A_y} = A_y$.

- La componente z no se ve afectada $\Rightarrow \overline{A_z} = A_z$.

Por lo tanto, las componentes del vector $\vec{A}$ no cambian bajo una traslación de coordenadas:

$$\overline{A_x} = A_x, \quad \overline{A_y} = A_y, \quad \overline{A_z} = A_z.$$

b)

$$\bar{x} = -x, \quad \bar{y} = -y, \quad \bar{z} = -z$$

- La componente x del vector se transforma en $\overline{A_x} = -A_x$.

- La componente y del vector se transforma en $\overline{A_y} = -A_y$.

- La componente z del vector se transforma en $\overline{A_z} = -A_z$.

Por lo tanto, bajo la inversión de coordenadas, las componentes del vector $\vec{A}$ invierten el signo:

$$\overline{A_x} = -A_x, \quad \overline{A_y} = -A_y, \quad \overline{A_z} = -A_z.$$

c)

En un producto cruz de vectores $\vec{A} \times \vec{B}$ obtenemos como resultado un pseudovector, bajo una inversión de coordenadas $\bar{x} = -x$, $\bar{y} = -y$, $\bar{z} = -z$, los vectores se transforman en $\bar{\vec{A}} = -\vec{A}$ y $\bar{\vec{B}} = -\vec{B}$. Realicemos el producto cruz: $\bar{\vec{A}} \times \bar{\vec{B}} = \left(-\vec{A}\right) \times \left(-\vec{B}\right) = \vec{A} \times \vec{B}$. Así, el producto cruz de dos vectores, un pseudovector, no se ve afectado bajo una inversión de coordenadas.

El producto cruz de dos pseudovectores es un vector verdadero. Esto se debe a que los pseudovectores ya tienen un comportamiento anómalo bajo una inversión de coordenadas pues cambian de signo, y el producto cruz de dos de ellos revertirá ese cambio, resultando en un vector que no cambia de signo bajo inversión.

Ejemplos de pseudovectores en mecánica clásica:

1. Momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición y $\vec{p}$ es el momento lineal.
2. Campo magnético $\vec{B}$ que surge como el rotacional de un campo vectorial, ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$).

d)

El triple producto escalar ($\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ es un pseudoescalar. Bajo una inversión de coordenadas, los vectores se transforman en $\vec{\vec{A}} = -\vec{A}$, $\vec{\vec{B}} = -\vec{B}$, y $\vec{\vec{C}} = -\vec{C}$.

El triple producto escalar bajo inversión se transforma como:

$$\vec{\vec{A}} \cdot \left(\vec{\vec{B}} \times \vec{\vec{C}}\right) = \left(-\vec{A}\right) \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = -\left(\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)\right)$$

Así, el triple producto escalar, pseudoescalar, cambiara su signo bajo la inversión de coordenadas.

3.- Problema: (10pts) Comprueba la validez del teorema de la divergencia, haciendo por un lado la integral de volumen y por otro la integral de superficie, comprobando que ambos cálculos dan lo mismo, para:

(a) $\vec{A}(\vec{r}) = (xy)\,\hat{e}_x + (3xyz)\,\hat{e}_y + (2zx)\,\hat{e}_z$, tomando como volumen de integración un cubo de lado 2 centrado en el origen de coordenadas.

(b) $\vec{A}(\vec{r}) = r^2\,\hat{e}_r$, tomando como volumen de integración una esfera de radio R centrada en el origen de coordenadas.

(c) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\,\hat{e}_r$, tomando como volumen de integración una esfera de radio R centrada en el origen de coordenadas.

Recordemos el teorema de la divergencia, con las 2 siguientes notaciones (la segunda de clase):

$$\iiint_V (\nabla\cdot\bar{A})\,dV = \iint_S \bar{A}\cdot d\bar{S}, \qquad \int_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\,dV = \int_S \bar{A}\cdot d\bar{a}$$

a) $\bar{A}(\bar{r}) = (xy)\hat{e}_x + (3xyz)\hat{e}_y + (2zx)\hat{e}_z$

Por un lado,

$$\iiint_V (\nabla\cdot\bar{A})\,dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{A_y}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial \mathrm{z}}\right) dV = \iiint_V \left(\frac{\partial(xy)}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial(3xyz)}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial(2zx)}{\partial \mathrm{z}}\right) dV$$
$$= \iiint_V (y + 3\mathrm{xz} + 2\mathrm{x})\,dxdydz$$

Analicemos cada termino por separado, observar la geometría del cubo con los ejes.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y(x)\Big|_{-1}^{1} dydz = (1-1)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ydydz = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 3\mathrm{xz}\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} z\frac{3}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} dydz = (1-1)\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} zdydz = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2\mathrm{x}\,dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2\Big|_{-1}^{1} dydz = (1-1)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dydz = 0$$

Por lo tanto,

$$\iiint_V (y + 3\mathrm{xz} + 2\mathrm{x})\,dxdydz = 0 \Rightarrow \iiint_V (\nabla\cdot\bar{A})\,dV = 0$$

Mientras que, por otra parte, para la integral de área, analicemos las interacciones que tendrán cada superficie.

$$\int_{x=1} A_x\;dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(y)\;dy\,dz = 0, \qquad \int_{x=-1} A_x\;dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-y)\;dy\,dz = 0$$

$$\int_{y=1} A_x\;dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(3xz)\;dx\,dz = 0, \qquad \int_{y=1} A_x\;dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-3xz)\;dx\,dz = 0$$

$$\int_{z=1} A_x \; dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (2x) \; dx\, dy = 0, \qquad \int_{y=1} A_x \; dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (-2x) \; dx\, dy = 0$$

Por lo tanto,

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = 0$$

Finalmente, concluimos que,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A})\, dV = \iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

b) $\bar{A}(\bar{r}) = r^2 \hat{e}_r$

Recordemos la divergencia $\nabla \cdot \bar{A}$ en coordenadas esféricas se escribe como:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi) \Rightarrow \nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(r^4) = 4\frac{r^3}{r^2} = 4r$$

Por un lado,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A})\, dV = \iiint_V (4r)\, dV$$

Donde, $dV = r^2 \sin\theta \; dr d\theta d\phi$,

$$\Rightarrow \iiint_V (4r)\, dV = \iiint_V (4r)\, r^2 \sin\theta \; dr d\theta d\phi = 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^3 \sin\theta \; dr d\theta d\phi$$

$$4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{4} R^4 d\theta d\phi = R^4 \int_0^{2\pi} -(-1-1) d\phi = 2R^4 \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^4$$

Por lo tanto,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A})\, dV = 4\pi R^4$$

Por otro lado, con $dS = r^2 \sin\theta \; d\theta d\phi$, pues se trata de una circunferencia de radio R,

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_S R^2 \cdot R^2 \sin\theta \; d\theta d\phi = R^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta d\phi = 2R^4 \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^4$$

Por lo tanto,

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = 4\pi R^4$$

Finalmente, concluimos que,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A})\, dV = \iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

c) $\bar{A} = \frac{1}{r^2}\hat{e}_r$

La divergencia de un campo vectorial en coordenadas esféricas se calcula utilizando la fórmula:

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi) \Rightarrow \nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(1) = 0$$

Entonces, para $r \neq 0$, la divergencia del campo $\vec{A}$ es cero. Sin embargo, esta simplificación no es válida en $r = 0$, donde el campo tiene una singularidad. Para manejar la singularidad, se introduce la función delta de Dirac. La función delta de Dirac, $\delta(\vec{r})$, se utiliza para describir distribuciones puntuales. Sabemos que, en el origen, el campo $\vec{A}(\vec{r})$ tiene una singularidad, por lo que la divergencia en $r = 0$ no puede ser cero. La divergencia real, teniendo en cuenta la singularidad, se corrige como: $\nabla \cdot \vec{A} = 4\pi\delta(\vec{r})$. Esto implica que toda la "masa" de la divergencia se concentra en el origen.

Por un lado,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A})\ dV = 4\pi \iiint_V \delta(\vec{r})\ dV$$

Observemos que al integrar sobre el volumen V incluye el origen. La integral de la delta de Dirac sobre el volumen V da 1 si el origen está dentro de V, entonces:

$$= 4\pi \iiint_V \delta(\vec{r})\ dV = 4\pi$$

Lo que implica:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A})\, dV = 4\pi$$

Por otro lado, La integral de superficie en una esfera de radio R para el campo $\vec{A}$ es:

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_S \frac{1}{R^2} \cdot R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta d\phi = 2\int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$

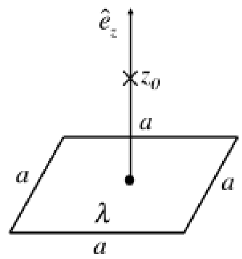
Por lo tanto,

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = 4\pi$$

Finalmente, concluimos que,

$$\iiint_V (\nabla \cdot \bar{A})\, dV = \iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

4. Problema: (15pts) Calcula el campo eléctrico $\vec{E}$ (magnitud y dirección) a una distancia z_0 sobre el centro de un cuadrado formado por cuatro alambres de lado a, con densidad lineal de carga λ uniforme (ver figura).

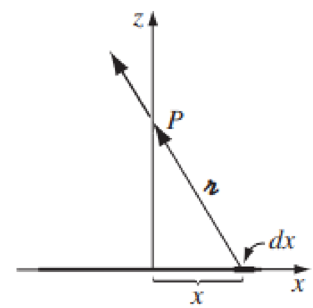


Planteemos el problema con una dimensión menos, de modo que tengamos la siguiente representación del campo eléctrico a una distancia z por encima del punto medio de una recta segmento de línea de longitud 2L que lleva la carga lineal uniforme λ. Resolvamos utilizando la simetría del sistema y dividamos la línea en pares colocados simétricamente (en ±x).

$$\bar{r} = z\hat{z}, \qquad \bar{r}' = x\hat{x}, \qquad dl' = dx$$

$$\bar{\mathrm{r}} = \bar{r} - \bar{r}' = z\hat{z} - x\hat{x}, \qquad \mathrm{r} = \sqrt{z^2 + x^2}, \qquad \hat{\mathrm{r}} = \frac{\bar{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}} = \frac{z\hat{z} - x\hat{x}}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda}{z^2 + x^2}\frac{z\hat{z} - x\hat{x}}{\sqrt{z^2 + x^2}}dx \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{z\hat{z}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\hat{x}}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[z\hat{z}\int_{-L}^{L}\frac{1}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}dx - \hat{x}\int_{-L}^{L}\frac{x}{(z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[z\hat{z}\left(\frac{x}{z^2\sqrt{z^2 + x^2}}\right)\Bigg|_{-L}^{L} - \hat{x}\left(-\frac{1}{\sqrt{z^2 + x^2}}\right)\Bigg|_{-L}^{L}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda L}{z\sqrt{z^2 + L^2}}\hat{z}
\end{aligned}$$



Ahora aumentemos otra dimensión para darle la forma general, para esto notar que

$$L \to \frac{a}{2} \quad y \quad z \to \sqrt{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Así para un lado,

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda a}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}}$$

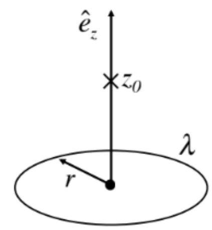
Como tendríamos 4 lados, y queremos la componente vertical, entonces multipliquemos por:

$$4\cos\theta = 4\frac{z}{\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

De modo que el campo queda como:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\lambda a z}{\left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)\sqrt{z^2 + \frac{a^2}{4}}}\hat{z}$$

5. Problema: (15pts) Calcula el campo eléctrico $\vec{E}$ (magnitud y dirección) a una distancia z_0 sobre el centro de un alambre circular de radio r, con densidad lineal de carga λ uniforme (ver figura).



Definimos el campo eléctrico como una colección de cargas puntuales discretas q_i. pero al tener ahora una región continua, se había dicho que la suma se convierte en una integral, de modo que:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathrm{r}}\, dq$$

Como la carga se distribuye a lo largo de una línea, con caga por unidad de longitud λ, entonces $dq \approx \lambda dl$, al considerarlo en una circunferencia tenemos que equivale a decir que: $dq \approx \lambda r d\theta$

Observemos que podemos relacionar al vector $\bar{\mathrm{r}}$ con Pitágoras: $\mathrm{r}^2 = r^2 + z^2$. Mientras que:

$$\hat{\mathrm{r}} = \frac{\bar{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}} = \frac{z\hat{z} - r\hat{r}}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

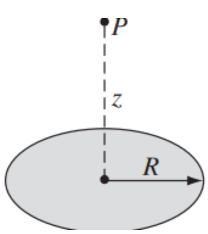
Como integramos sobre una circunferencia, implica que vamos a integrar desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\bar{E}(\bar{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 + z^2}\frac{z\hat{z} - r\hat{r}}{\sqrt{z^2 + r^2}}\lambda r d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_0^{2\pi} \frac{rz\hat{z}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{r^2\hat{r}}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta\right] \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[rz\hat{z}\int_0^{2\pi} d\theta - r^2\int_0^{2\pi} (\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})\, d\theta\right] \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[rz\hat{z}(2\pi - 0) - r^2(0 + 0)\right] \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi rz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z} \\
&= \frac{\lambda rz}{2\epsilon_0(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}
\end{aligned}$$

Esta es la expresión para el campo eléctrico a una distancia z encima del centro de un bucle circular de radio r levando una carga lineal uniforme λ. También podemos dejarlo como:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(2\pi r)z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

Extra para mí: Si se buscase obtener para un disco, solo sería sumar varios discos como el anterior con $\lambda = \sigma dr$:

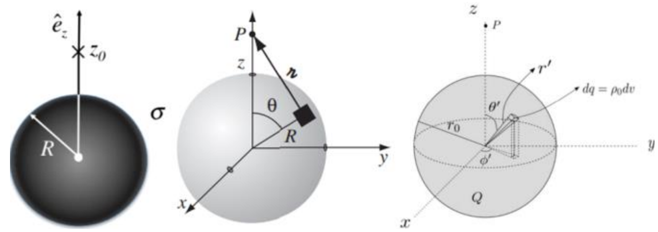


$$\bar{E}_{ring} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\sigma dr)2\pi rz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z} \Rightarrow \bar{E}_{disc} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\sigma z\hat{z}\int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

$$\therefore \bar{E}_{disc} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\sigma z\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\hat{z}$$

6. Problema: (20pts) Calcula el campo eléctrico $\vec{E}$ (magnitud y dirección) a una distancia z_0 del centro de una superficie esférica de radio R, con densidad superficial de carga σ uniforme (ver figura). Considerar el caso $z_0 < R$ (dentro de la esfera), así como $z_0 > R$ (fuera de la esfera). Expresar el resultado en términos de la carga total sobre la esfera Q

Hint: Usar la ley de los cosenos para escribir $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ en términos de θ y de R. Asegurarse de tomar la raíz positiva: $\sqrt{R^2+z_0^2-2Rz_0} = (R-z_0)$ si $R > z_0$, o bien (z_0-R) si $R < z_0$.



Como hemos visto, el campo eléctrico para una distribución continua en una superficie es:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\bar{r}')}{\mathrm{r}^2}\hat{\mathrm{r}}\,da' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(r')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}\frac{\bar{r}-\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\,da' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(r')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}(\bar{r}-\bar{r}')\,da'$$

También véase que para este problema tenemos una esfera, la densidad superficial uniforme de carga es dada por: $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$. Por construcción de la esfera podemos observar que nos planteamos únicamente en la coordenada del eje z, así podemos dar la integral para nuestro campo electromagnético:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iint_{x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2} \frac{\sigma}{\left(\sqrt{(0-x)^2+(0-y')^2+(z-z')^2}\right)^3}(\langle 0,0,z\rangle - \langle x',y',z'\rangle)dS'$$

Tenemos que la superficie es esférica, así que cambiemos a coordenadas esféricas (r_0,ϕ_0,θ_0), así obteniendo nuestra nueva $\bar{r}'$, pero identificado de donde a dónde van los parámetros.

$$\bar{r}' = R\langle\cos\phi'\sin\theta', \sin\phi'\sin\theta', \cos\theta'\rangle, \qquad \phi' \in [0,2\pi] \wedge \theta' \in [0,\pi]$$

También identifiquemos que $dS' = R^2\sin\theta'\,d\phi' d\theta'$, por lo tanto,

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(\sqrt{(0-R\cos\phi'\sin\theta')^2+(0-R\sin\phi'\sin\theta')^2+(z-R\cos\theta')^2}\right)^3}(\langle 0,0,z\rangle - R\langle\cos\phi'\sin\theta',\sin\phi'\sin\theta',\cos\theta'\rangle)(R^2\sin\theta'\,d\phi' d\theta')$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}R^2\sigma\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(\sqrt{(0-R\cos\phi'\sin\theta')^2+(0-R\sin\phi'\sin\theta')^2+(z-R\cos\theta')^2}\right)^3}$$

$$\langle -R\cos\phi'\sin\theta', -\mathrm{R}\sin\phi'\sin\theta', \mathrm{z}-\mathrm{R}\cos\theta'\rangle(\sin\theta'\,d\phi' d\theta')$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}R^2\sigma\Big\langle -R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'\sin^2\theta'}{(R^2\sin^2\theta'+(z-R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}}d\phi' d\theta',$$

$$-R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi'\sin^2\theta'}{(R^2\sin^2\theta'+(z-R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}}d\phi' d\theta',$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\mathrm{z}-\mathrm{R}\cos\theta')\sin\theta'}{(R^2\sin^2\theta'+(z-R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}}d\phi' d\theta'\ \Big\rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} R^2\sigma \Big\langle -R\left(\int_0^{2\pi} \cos\phi'\, d\phi'\right)\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta'}{(R^2\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'\right),$$

$$-R\left(\int_0^{2\pi} \sin\phi'\, d\phi'\right)\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta'}{(R^2\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'\right),$$

$$\left(\int_0^{2\pi} d\phi'\right)\left(\int_0^{\pi} \frac{(\mathrm{z - Rcos}\,\theta')\sin\theta'}{(R^2\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'\right)\Big\rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} R^2\sigma \Big\langle -R(0)\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta'}{(R^2\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'\right),$$

$$-R(0)\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta'}{(R^2\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'\right), (2\pi)\left(\int_0^{\pi} \frac{(\mathrm{z - Rcos}\,\theta')\sin\theta'}{(R^2\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'\right)\Big\rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} R^2\sigma \Big\langle\ 0{,}0{,}2\pi \int_0^{\pi} \frac{(\mathrm{z - Rcos}\,\theta')\sin\theta'}{(R^2\sin^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'\ \Big\rangle$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} R^2\sigma\langle 0{,}0{,}1\rangle \int_0^{\pi} \frac{(\mathrm{z - Rcos}\,\theta')\sin\theta'}{(R^2(1 - \cos^2\theta') + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} R^2\sigma\hat{z} \int_0^{\pi} \frac{(\mathrm{z - Rcos}\,\theta')\sin\theta'}{(R^2 - R^2\cos^2\theta' + (z - R\cos\theta')^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta'$$

Resolvamos por cambio de variable,

$$u = z - R\cos\theta^{'} \Rightarrow R\cos\theta^{'} = z - u, \qquad du = R\sin\theta^{'}\, d\theta^{'} \Rightarrow \frac{du}{R} = \sin\theta^{'}\, d\theta^{'}$$

A lo que obtenemos que,

$$\bar{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} R^2\sigma\hat{z} \int_{\mathrm{z-Rcos}\,0}^{\mathrm{z-Rcos}\,\pi} \frac{u\sin\theta'}{(R^2 - (z-u)^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{R\sin\theta'} = \frac{1}{2\epsilon_0} R\sigma\hat{z} \int_{\mathrm{z-Rcos}\,0}^{\mathrm{z-Rcos}\,\pi} \frac{u}{(2zu + R^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}} du$$

Nuevamente aplicamos un cambio de variable.

$$v = 2zu + R^2 - z^2 \Rightarrow \frac{v + z^2 - R^2}{2z} = u, \qquad dv = 2zdu \Rightarrow \frac{dv}{2z} = du$$

Así obteniendo,

$$\bar{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} R\sigma\hat{z} \int_{2z(z-R)+R^2-z^2}^{2z(z+R)+R^2-z^2} \frac{v + z^2 - R^2}{2zv^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{dv}{2z}\right)$$

$$= \frac{R\sigma\hat{z}}{8\epsilon_0 z^2} \int_{2z(z-R)+R^2-z^2}^{2z(z+R)+R^2-z^2} v^{-\frac{1}{2}} + (z^2 - R^2)v^{-\frac{3}{2}}\, dv$$

$$= \frac{R\sigma\hat{z}}{8\epsilon_0 z^2}\left(2v^{\frac{1}{2}}\Big|_{z^2 - 2Rz + R^2}^{z^2 + 2Rz + R^2} + (z^2 - R^2)\left(-2v^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{z^2 - 2Rz + R^2}^{z^2 + 2Rz + R^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}\left(\left(\sqrt{z^2+2Rz+R^2}-\sqrt{z^2-2Rz+R^2}\right)-(z^2-R^2)\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+2Rz+R^2}}-\frac{1}{\sqrt{z^2-2Rz+R^2}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}\left(\left(\sqrt{(z+R)^2}-\sqrt{(z-R)^2}\right)-(z^2-R^2)\left(\frac{1}{\sqrt{(z+R)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(z-R)^2}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}\left((z+R)-|z-R|-(z^2-R^2)\left(\frac{1}{z+R}-\frac{1}{|z-R|}\right)\right)$$

Observemos que acá tenemos 2 opciones, si $z < R$ o $z > R$.

$$\bar{E} = \begin{cases} \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}\left((z+R)-(R-z)-(z^2-R^2)\left(\frac{1}{z+R}-\frac{1}{R-z}\right)\right), & z < R \\ \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}\left((z+R)-(z-R)-(z^2-R^2)\left(\frac{1}{z+R}-\frac{1}{z-R}\right)\right), & z > R \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}\left(2z-(z^2-R^2)\left(-\frac{2z}{R^2-z^2}\right)\right), & z < R \\ \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}\left(2R-(z^2-R^2)\left(-\frac{2R}{z^2-R^2}\right)\right), & z > R \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}(0), & z < R \\ \frac{\sigma R\hat{z}}{4\epsilon_0 z^2}(4R), & z > R \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \bar{0}, & z < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z^2}\hat{z}, & z > R \end{cases}$$

Por lo tanto, para el campo eléctrico en $\langle 0,0,z\rangle$, sustituyendo $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$:

$$\bar{E} = \begin{cases} \bar{0}, & z < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}\,\hat{z}, & z > R \end{cases}$$

7.- Problema: (10pts) Usando la segunda identidad de Green demuestra que $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = G_D(\vec{r}\,', \vec{r})$, con G_D la función de Green de Dirichlet.

Obs. Para este apartado cambie la notación de vectores a ponerlos con tipo de letra negrita.

Lo que buscamos es demostrar que la función de Green de Dirichlet es simétrica, utilizando la segunda identidad de Green. La cual establece que para dos funciones $\phi(\boldsymbol{r})$ y $\psi(\boldsymbol{r})$, la siguiente relación se cumple:

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)dV = \int_S \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS$$

Donde V es un volumen, S es la superficie que encierra el volumen, $\frac{\partial}{\partial n}$ la derivada en la dirección normal a la superficie. Queremos aplicar a la función de Green de Dirichlet: $\phi(\boldsymbol{r}) = G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, $\psi(r) = G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$. Al aplicar la segunda identidad de Green con estas funciones, obtenemos:

$$\int_V \left(G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\nabla^2 G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) - G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\nabla^2 G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right)dV = \int_S \left(G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\frac{\partial G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})}{\partial n} - G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\frac{\partial G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n}\right)dS$$

La función de Green de Dirichlet $G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla_r^2 G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

Sustituyendo en la integral volumétrica:

$$\int_V \Big(G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\big(-\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\big) - G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\big(-\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\big)\Big)\,dV$$
$$= -\int_V \left(G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') - G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\right)dV$$

Recordemos la propiedad de la función delta de Dirac para puntos donde está centrada:

$$\int_V f(y)\delta(y - z)dV = f(z)$$

Como nuestra con delta de Dirac se evalúa en el punto donde la delta está centrada, obtenemos:

$$= -\int_V \left(G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\nabla^2 G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}) - G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\nabla^2 G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right)dV = -\big(G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\big)$$

Ahora, consideremos la integral sobre la superficie, como estamos tratando con la función de Green de Dirichlet, que por definición es cero en la frontera S, ambos términos dentro de la integral sobre S son cero: $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{y} \quad G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0 \quad \text{en} \quad S$. Por lo tanto, la integral sobre la superficie también se anula:

$$\int_S 0\ dS = 0$$

Por lo tanto,

$$-\big(G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})\big) = 0$$

Concluimos que la función de Green de Dirichlet es simétrica $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad \blacksquare$

8.- Problema: (10pts) La función de Green de Dirichlet para cualquier volumen V finito siempre se puede escribir de la forma:

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \Lambda(\vec{r},\vec{r}\,') \qquad \vec{r},\vec{r}\,' \in V.$$

La función $\Lambda(\vec{r},\vec{r}\,')$ satisface que $\nabla^2\Lambda(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$. Usa el significado físico de la función de Green de Dirichlet para mostrar que

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') < \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Se nos da la función de Green de Dirichlet para cualquier volumen finito,

$$G_D\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|} + \Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$$

donde $\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$ satisface la ecuación de Laplace: $\nabla^2\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) = 0$

Tenemos que la función de Green de Dirichlet $G_D\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$ representa el potencial en $\vec{r}$ debido a una carga puntual en $\overrightarrow{r'}$ con condiciones de frontera específicas en la superficie del volumen. Esta función debe cumplir que el potencial en la frontera sea cero.

Dado que $\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) = 0$, y considerando que el potencial en la frontera es cero, $\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$ debe ser tal que corrige el término

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}$$

para que el potencial total sea cero en la frontera.

Este último término, representa el potencial debido a una carga puntual en $\overrightarrow{r'}$ en un espacio libre sin condiciones de frontera. Sin embargo, en presencia de una frontera, la función $\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$ se introduce para cumplir con las condiciones de frontera. Dado que $\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$ debe cancelar parcialmente el efecto del potencial en la frontera, podemos concluir que $\Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$ es una función negativa en cualquier punto $\vec{r}$ dentro del volumen.

Por lo tanto,

$$G_D\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|} + \Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) \Rightarrow G_D\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) - \Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}, \qquad \Lambda\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) < 0$$

Por ende, $G_D\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right)$, debe ser menor que el potencial original $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}$, es decir:

$$G_D\left(\vec{r},\overrightarrow{r'}\right) < \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}-\overrightarrow{r'}\right|}$$

■

Problema TORITO: (20pts) Considera que f es una función solamente de dos variables (y y z). Muestra que el gradiente

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\hat{e}_z \tag{1}$$

se transforma como un vector bajo rotaciones.

Hint:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{y}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{y}}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \overline{y}}\right), \tag{2}$$

y de forma análoga

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \overline{z}}\right). \tag{3}$$

Sabiendo que $\overline{y} = y\cos\phi + z\sin\phi$ y que $\overline{z} = -y\sin\phi + z\cos\phi$. Resuelve este sistema de ecuaciones para y y z, y calcula las derivadas $\partial y/\partial\overline{y}$, $\partial z/\partial\overline{y}$, etc.

Definamos el cómo vamos a rotar nuestros vectores $\bar{y}$ y $\bar{z}$ con respecto a un ángulo ϕ.

$$\bar{y} = y\cos\phi + z\sin\phi\,, \qquad \bar{z} = -y\sin\phi + z\cos\phi$$

Por regla de la cadena sabemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar{y}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar{z}}$$

Con las que podemos calcular las derivadas parciales de las coordenadas originales con respecto a las rotadas:

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \cos\phi\,, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} = \sin\phi\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\sin\phi\,, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \cos\phi$$

Procederemos a sustituir las parciales,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\sin\phi\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial f}{\partial y}\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\phi$$

Ahora expresemos el gradiente, pero con las coordenadas rotadas,

$$\nabla_{\bar{y},\bar{z}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)\hat{e}_{\bar{y}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)\hat{e}_{\bar{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\sin\phi\right)\hat{e}_{\bar{y}} + \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\sin\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\phi\right)\hat{e}_{\bar{z}}$$

Observemos que el gradiente se transforma como vector de rotaciones,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{y}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$