Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México

Física Estadística

Tarea 1- 05

Profesores:

Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

Utiliza la definición de la integral de Lebesgue para mostrar (directamente) que el valor esperado de una función en el intervalo (a, b) es:

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\,dx$$

(Es decir, explica como pasar de la integral de 0 a 1 a la integral de a a b e intepreta la definición de la integral de Lebesgue).

Sol.

Recordemos que, para una función no negativa $f: X \to [0,\infty]$ medible, la integral de Lebesgue se define como:

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X s\,d\mu \mid s \leq f, s\ simple\right\}$$

Donde una función simple s es de la forma:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)$$

Con $c_i \geq 0$ y cada A_i medible.

Empecemos, cuando tenemos la medida de probabilidad uniforme en (a,b) definida por:

$$dP(x) = \frac{dx}{b-a}$$

la definición de valor esperado (o esperanza matemática) de f es

$$E[f] = \int_a^b f(x)\,dP(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Donde dicha integral se entiende según la definición de la integral de Lebesgue.

Para conectar la integral en (a, b) con un integral en el intervalo unitario $(0,1)$, definimos la transformación lineal

$$T: (0,1) \to (a, b), \qquad T(y) = a + (b - a)y$$

Esta función es biyectiva y medible, y su inversa es

$$T^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

El teorema del cambio de variable nos dice que,

$$dx = T'(y)dy = (b - a)dy$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f\big(T(y)\big)\,T'(y)dy = \int_0^1 f\big(T(y)\big)\,(b - a)dy = (b - a)\int_0^1 f(a + (b - a)y)\,dy$$

De modo que, dividiendo ambos lados por $b - a$:

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f(a + (b - a)y)\,dy$$

Retomando lo de arriba con el valor esperado:

$$E[f] = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f(a + (b - a)y)\,dy$$

Con esto explicamos como pasar de la integral de 0 a 1 a la integral de a a b.

Veamos la interpretación de la integral de Lebesgue. Para interpretar la relación

$$E[f] = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

desde el punto de vista de la integral de Lebesgue, recordemos que esta integral se define a partir de funciones simples. Una función simple es una combinación de indicadores de conjuntos medibles:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x)\,, \qquad A_i \subset (a.b)$$

La integral de Lebesgue de $s(x)$ sobre $(a.b)$ es:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i m(A_i)$$

donde $m(A_i)$ es la medida de Lebesgue de A_i i. e. su longitud. La medida de probabilidad en $(a.b)$ es

$$dP(x) = \frac{dx}{b - a}$$

Integrar $s(x)$ respecto a $P(x)$ nos da

$$E[s] = \int_a^b s(x)\, dP(x) = \int_a^b s(x) \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} c_i m(A_i)$$

Para cualquier función medible $f(x)$, su integral de Lebesgue se define como el supremo sobre todas las funciones simples $s(x)$ que cumplen $0 \leq s(x) \leq f(x)$. Tomando el límite, obtenemos:

$$E[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Esto significa que, bajo una distribución uniforme en$(b-a)$, la integral de Lebesgue de $f(x)$ nos da el valor esperado en términos del promedio ponderado de $f(x)$ en el intervalo.