Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1 - 31

Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

31. Calcula el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con distribución de Poisson.

Sol.

La función de densidad de probabilidad de $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ es:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Nota. También se encuentra como $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, considerado que es función discreta.

Hay que calcular el valor esperado $E[X]$ y la varianza $Var(x)$.

- Valor esperado $E[X]$.

El valor esperado de X se define como:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k)$$

Sustituyendo y resolviendo,

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Notamos que el índice de la suma ha cambiado pues ahora comienza en $k = 1$en lugar de $k = 0$. Esto es válido porque cuando $k = 1$, el término $kP(X = k)$ es cero y no contribuye a la suma.

Vemos ahora que esa última suma es una serie de Taylor de e^{λ}, pues:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{\lambda}$$

Por ende,

$$E[X] = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

El valor esperado de una variable aleatoria con distribución de Poisson es $E[X] = \lambda$.

- Varianza $Var(x)$.

La varianza de X se define como:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Ya sabemos que $E[X] = \lambda \Rightarrow (E[X])^2 = \lambda^2$, falta ver quien es $E[X^2]$,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) + k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P(X = k) + \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} + \lambda \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-1)!} + \lambda = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = e^{\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Notamos que el índice de la suma ha ido cambiado sucede lo mismo, los términos anteriores dan cero y no contribuyen a la suma.

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

La varianza de una variable aleatoria con distribución de Poisson es $Var(X) = \lambda$.