2.7 Demuestra que el caminante aleatorio en 2D también tiene probabilidad 1 de regresar al origen y valor esperado en el tiempo de regreso ∞.

Posición inicial: $\mathbf{S_0} = (0,0)$. Movimientos posibles: En cada paso n, el caminante elige uno de los 4 vecinos:

$$\mathbf{S_{n+1}} = \mathbf{S_n} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}, \quad P(\mathbf{v}) = \frac{1}{4}.$$

La posición se puede expresar como $\mathbf{S_n} = (X_n, Y_n)$, donde X_n y Y_n son caminantes aleatorios independientes en 1d.

El caminante solo puede regresar al origen después de un número par de pasos $(2n)$.

Proba de retorno en $2n$ pasos es ir al origen de las 2 coordenadas: $p_{2n} \equiv P\big(\mathbf{S_{2n}} = (0,0)\big) = P(X_{2n} = 0)P(Y_{2n} = 0)$

Para una caminata aleatoria simple en 1D: $P(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

- Hay $\binom{2n}{n}$ caminos que vuelven en $2n$ pasos (combinaciones de n pasos a la derecha y n a la izquierda).
- Cada camino tiene probabilidad $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

Para n grande, la aproximación de Stirling da:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}2\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Sustituyendo: $P(X_{2n} = 0) \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Implicando que $P\big(\mathbf{S_{2n}} = (0,0)\big) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\pi n}$

Un estado es recurrente si la suma de las probabilidades de retorno diverge: (Cadenas de Markov)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty, \qquad \text{pues } \sum \frac{1}{n} \text{ es una serie armonica que diverge}$$

Esto implica que el estado (0,0) es recurrente: el caminante regresa al origen con probabilidad 1.

Que remos demostrar que $E[T] = \infty$. Sea T el tiempo hasta el primer regreso al origen en una caminata aleatoria en 2d. El tiempo esperado de retorno:

$$E[T] = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, P(T = 2n)\,, \text{tiempos pares porque el regreso solo es un número par de pasos}$$

No conocemos $f_{2n} = P(T = 2n)$ la proba de regresar por primera vez al origen en el paso $2n$ pero si $p_{2n} = P(S_{2n} = 0)$ de estar en el origen sin importar si ya se estuvo antes. Además de que:

$$p_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k}p_{2n-2k} \Rightarrow p_{2n} \geq f_{2k}, \qquad \text{Ponemos una cota: } f_{2k} \geq Ap_{2n} \;\; con\ A > 0$$

Dice que llega en el paso $2k$ y hace recorrido cerrado desde el origen y de $2n - 2k$ pasos.

$$[E] = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\, f_{2n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2nAp_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nA\frac{1}{\pi n} = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \Rightarrow [E] = \infty$$