Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México

Electromagnetismo II – Tarea 8

Profesores:

Dr. Alejandro Reyes Coronado

Ayud. Daniel Espinosa González

Ayud. Atzin López Tercero

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- Problema: (10pts) Muestra que las ecuaciones diferenciales para ϕ y $\vec{A}$, dadas por:

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = -\frac{\rho_{\text{Tot}}}{\epsilon_0}$$

y

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{J}_{\text{Tot}} - \mu_0\epsilon_0 \nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

se pueden escribir de la siguiente forma simétrica:

$$\Box^2\phi + \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\rho_{\text{Tot}}}{\epsilon_0}$$

y

$$\Box^2\vec{A} - \nabla L = -\mu_0\vec{J}_{\text{Tot}},$$

en donde

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

y

$$L \equiv \nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\bar{A}) &= \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(L - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}L - \frac{\partial}{\partial t}\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi \\ &= \left(\nabla^2\phi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi\right) + \frac{\partial}{\partial t}L = \Box^2\,\phi + \frac{\partial}{\partial t}L \Rightarrow \Box^2\,\phi + \frac{\partial}{\partial t}L = -\frac{\rho_{Tot}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi \\ &\qquad = -\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) + \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} - \nabla\cdot\bar{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi \\ &\qquad = \big(-\nabla\times(\nabla\times\bar{A}) + \nabla(\nabla\cdot\bar{A})\big) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} - \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \mu_0\epsilon_0\nabla\frac{\partial}{\partial t}\phi \\ &\qquad = \nabla^2\bar{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} - \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - \nabla\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = \Box^2\bar{A} - \nabla L \Rightarrow \Box^2\bar{A} - \nabla L \\ &\qquad = \mu_0\bar{J}_{tot}\end{aligned}$$

2.- Problema: (20pts)

(a) Calcula los campos electromagnéticos, así como las distribuciones de carga y corrientes, producidos por los siguientes potenciales:

$$\phi(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{e}_r.$$

(b) Dada la libertad de norma en los potenciales

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \qquad \text{y} \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t},$$

usa $\lambda = -(1/4\pi\epsilon_0)(qt/r)$ para transformar los potenciales en el inciso anterior. Explica y comenta tu resultado. Piensa en cuál es el significado detrás del hecho.

(c) Considera que $\phi = 0$ y $\vec{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{e_y}$, donde A_0, ω y k son constantes. Calcula los campos electromagnéticos y muestra que satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío. ¿Qué condiciones necesitas imponer sobre ω y k?

(d) De los siguientes potenciales indica si están bajo la norma de Coulomb o de Lorenz (nota que no son mutuamente excluyentes):

i) $\phi = 0$; $\vec{A} = \vec{0}$ para $|x| > ct$ y $\vec{A} = (\mu_0 k/4c)(ct - |x|)^2\,\hat{e}_z$ para $|x| < ct$,

ii) $\phi(\vec{r},t) = 0$ y $\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$,

iii) $\phi = 0$ y $\vec{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{e_y}$, donde A_0, ω y k son constantes.

a) Calculemos los campos electromagnéticos.

$$\bar{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A} = -\nabla(0) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\right) = 0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\frac{\partial}{\partial t}t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\bar{B} = \nabla\times\bar{A}$$

En esféricas (r,θ,φ), el rotacional de un campo vectorial $(\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\varphi\hat{\varphi})$ está dado por:

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi}.$$

Dado que el potencial vector $\bar{A}$ solo tiene un componente en la dirección radial $\hat{r}$, podemos identificar $A_r = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ y $A_\theta = A_\varphi = 0$.

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) = 0, \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right) = 0, \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) = 0$$

Por lo tanto, $\bar{B} = \bar{0}$

Calculemos las distribuciones o densidades de carga ρ, por ley de Gauss,

$$\nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla\cdot\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(4\pi\delta(\bar{r})\right) = \frac{q\delta(\bar{r})}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = q\delta(\bar{r})$$

Calculemos la corriente $\bar{J}$, por ley de ampere maxwell.

$$\nabla\times\bar{B} = \mu_0\bar{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{E} \Rightarrow \nabla\times\bar{0} = \mu_0\bar{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \Rightarrow \bar{0} = \mu_0\bar{J} + \mu_0\epsilon_0\bar{0} \Rightarrow \bar{J} = \bar{0}$$

b)

$$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\lambda = 0 - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\frac{\partial}{\partial t}t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}' &= \bar{A} + \nabla\lambda = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} + \left[\frac{\partial}{\partial r}\lambda\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\lambda\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\lambda\hat{\varphi}\right] \\ &= -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} + \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}\right)\hat{\varphi}\right] \\ &= -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} - \frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \bar{0}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad \bar{A}' = \bar{0}$$

Este resultado indica que, al elegir apropiadamente la función λ, hemos transformado el sistema de manera que el campo electromagnético es estático y solo está determinado por un potencial escalar electrostático ϕ'. Esta libertad en la elección de λ muestra que los potenciales no son únicos y pueden ajustarse mediante la libertad de norma, sin alterar los campos físicos $\bar{E}$ y $\bar{B}$ resultantes.

c) Las ecuaciones de en el vacío son: $\nabla\cdot\bar{E} = 0,\ \nabla\cdot\bar{B} = 0,\ \nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t},\ \nabla\times\bar{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$

Hallar los campos,

$$\bar{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\bar{A} = -\nabla(0) - \frac{\partial}{\partial t}(A_0\sin(kx-\omega t)\,\hat{y} = A_0\omega\cos(kx-\omega t)\,\hat{y}$$

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \nabla\times\bar{A} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_0\sin(kx-\omega t) & 0\end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}0\hat{x} + \frac{\partial}{\partial x}A_0\sin(kx-\omega t)\,\hat{z} + \frac{\partial}{\partial z}0\hat{y} - \frac{\partial}{\partial y}0\hat{z} - \frac{\partial}{\partial z}A_0\sin(kx-\omega t)\,\hat{x} - \frac{\partial}{\partial x}0\hat{y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}A_0\sin(kx-\omega t)\,\hat{z} = A_0 k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{E} = A_0\omega\cos(kx-\omega t)\,\hat{y}, \qquad \bar{B} = A_0 k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z}$$

- $\nabla\cdot\bar{E} = 0$

$$\nabla\cdot A_0\omega\cos(kx-\omega t)\,\hat{y} = \frac{\partial}{\partial x}0 + \frac{\partial}{\partial y}A_0\omega\cos(kx-\omega t) + \frac{\partial}{\partial z}0 = 0$$

- $\nabla\cdot\bar{B} = 0$

$$\nabla\cdot A_0 k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} = \frac{\partial}{\partial x}0 + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}A_0 k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} = 0$$

- $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_0\omega\cos(kx-\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}0\hat{z} + \frac{\partial}{\partial x}0\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}A_0\omega\cos(kx-\omega t)\,\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}0\hat{x} - \frac{\partial}{\partial x}A_0\omega\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} - \frac{\partial}{\partial z}0\hat{y}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}A_0\omega\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} = A_0\omega k\sin(kx-\omega t)\,\hat{z}$$

$$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(A_0k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z}) = A_0\omega k\sin(kx-\omega t)\,\hat{z}$$

- $\nabla \times \bar{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_0k\cos(kx-\omega t) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}0\hat{z} + \frac{\partial}{\partial x}A_0k\cos(kx-\omega t)\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}0\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}A_0k\cos(kx-\omega t)\,\hat{x} - \frac{\partial}{\partial x}0\hat{z} - \frac{\partial}{\partial z}0\hat{y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}A_0k\cos(kx-\omega t)\,\hat{y} = -A_0k^2\sin(kx-\omega t)\,\hat{y}$$

$$-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(A_0\omega\cos(kx-\omega t)\,\hat{y}) = -A_0\mu_0\varepsilon_0\omega^2\sin(kx-\omega t)\,\hat{y}$$

Por lo tanto,

$$-A_0k^2\sin(kx-\omega t)\,\hat{y} = -A_0\mu_0\varepsilon_0\omega^2\sin(kx-\omega t)\,\hat{y} \Rightarrow k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 \Rightarrow \omega = ck$$

d)

La condición para el potencial para las normas de Coulomb y de Lorenz son:

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0, \qquad \nabla \cdot \bar{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi$$

1.

$$\phi = 0, \qquad \bar{A} = \bar{0} \;\; si|x| > ct\,, \qquad \bar{A} = \frac{\mu_0 k}{4c}(ct-|x|)^2\hat{z} \;\; si\;|x| < ct$$

De primeras se cumple $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ para $\bar{A} = \bar{0} \;\; si|x| > ct$, para $|x| < ct$ podemos notar que la parcial de $\frac{\partial}{\partial z}$ se evaluarla a una constante y por ende es 0, Cumpliendo con la norma de Coulomb, Por otro lado como $\phi = 0$, esto implica que $\nabla \cdot \bar{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$, lo cual nuevamente ya se sabía, pero ahora cumpliendo la norma de Lorenz. Cumple ambas

2.

$$\phi = 0, \qquad \bar{A} = -\frac{qt}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Observemos que

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\frac{qt}{\varepsilon_0}\delta^3(\bar{r}) \neq -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

Por lo tanto, no se cumple ninguna de las normas,

3.

$$\phi = 0, \qquad \bar{A} = A_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{z}$$

Deirectamentente tenemos $\nabla \cdot \bar{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$, además $\nabla \cdot \bar{A} = \frac{\partial}{\partial z}A_0 \sin(kx - \omega t) = 0$.

Se satisfacen ambas normas.

3.- Problema: (10pts) Deriva la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt}(T + q\phi) = \frac{\partial}{\partial t}\left[q\left(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right],$$

donde $T = (1/2)mv^2$ es la energía cinética y $q\phi$ la energía potencial de una partícula viajando con velocidad $\vec{v}$ (que no depende de la posición).

Hint: Puedes comenzar calculando la derivada temporal de la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{\text{mec}}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) = q\left[-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\right].$$

Creo que se refiere a llegar a la ecuación, no a derivarla. Así que derivaremos a esa ecuación,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T + q\phi) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + q\phi\right) = \frac{1}{2}m\bar{v}\cdot\frac{d}{dt}\bar{v} + q\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi + (\bar{v}\cdot\nabla)\phi\right)\\ &= \bar{v}\cdot\bar{F} + q\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi + (\bar{v}\cdot\nabla)\phi\right)\end{aligned}$$

Podemos usar la ley de fuerza de Lorentz en términos de potenciales:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}_{mec}}{dt} = q(\bar{E} + \bar{v}\times\bar{B}) = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + \bar{v}\times(\nabla\times\bar{A})\right)$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T + q\phi) &= \bar{v}\cdot q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + \bar{v}\times(\nabla\times\bar{A})\right) + q\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi + (\bar{v}\cdot\nabla)\phi\right)\\ &= -q\left(\bar{v}\cdot\nabla\phi + \bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} + \bar{v}\cdot\bar{v}\times(\nabla\times\bar{A})\right) + q\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi + (\bar{v}\cdot\nabla)\phi\right)\\ &= -q\left(\bar{v}\cdot\nabla\phi + \bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right) + q\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi + (\bar{v}\cdot\nabla)\phi\right) = q\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi - \bar{v}\cdot\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\big(q(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A})\big)\end{aligned}$$

4.- Problema: (20pts)

(a) Considera un alambre eléctricamente neutro e infinito, que porta una corriente que se prende abruptamente (en todo el alambre) y crece linealmente con el tiempo $I(t) = kt$ para $t > 0$, mientras que $I(t) = 0$ para $t \leq 0$. Calcula los campos electromagnéticos generados.

(b) Repite tus cálculos pero ahora considerando una corriente de la forma $I(t) = q_0\delta(t)$, con $\delta(t)$ la delta de Dirac.

a)

Primero calculemos el potencial vectorial, como $\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$, sabemos que la expresión para calcular el potencial vectorial se da como sigue,

$$\begin{aligned}
\bar{A}(s,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\hat{z} \int_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}} \frac{k\left(t - \frac{\sqrt{s^2+z^2}}{c}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}} dz \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}\hat{z}\left[t\int_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2+z^2}} - \frac{1}{c}\int_0^{\sqrt{(ct)^2-s^2}} dz\right] \\
&= \frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{z}\left[t\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-s^2}\right]
\end{aligned}$$

Ahora calculemos el campo eléctrico, sabemos que la expresión para calcular el campo eléctrico se da como sigue

$$\begin{aligned}
\bar{E}(s,t) &= -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{z}\left[t\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-s^2}\right]\right) \\
&= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{z}\left[\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right) + \frac{t}{s}\left(\frac{s}{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right)\left(c + \frac{1}{2}\frac{2c^2t}{(ct)^2-s^2}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{2c^2t}{2c\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right] \\
&= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{z}\left[\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right) + \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} - \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right] \\
&= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right)\hat{z}
\end{aligned}$$

Ahora pasemos a calcular el campo magnético, sabemos que la expresión para calcular el campo magnético se da como sigue,

$$\bar{B}(s,t) = -\frac{\partial \bar{A}_z}{\partial t}\hat{\phi} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{z}\left[t\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right) - \frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-s^2}\right]\right]\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\left[t\left(\frac{s}{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{s(-2s)}{\sqrt{(ct)^2-s^2}}-ct-\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s^2}\right) - \frac{(-2s)}{2c\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right]\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\left[-\frac{ct^2}{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}+\frac{s}{c\sqrt{(ct)^2-s^2}}\right]\hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu_0 k}{2\pi}\sqrt{(ct)^2-s^2}\,\hat{\phi}$$

Por lo tanto,

$$\bar{A}(s,t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\hat{z}\left[t\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right)-\frac{1}{c}\sqrt{(ct)^2-s^2}\right]$$

$$\bar{E}(s,t) = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s^2}}{s}\right)\hat{z}$$

$$\bar{B}(s,t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi}\sqrt{(ct)^2-s^2}\,\hat{\phi}$$

b)

Repetir los cálculos, pero con la delta de Dirac,

$$\bar{A}(s,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_0\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\sqrt{s^2+z^2}}dz$$

Suponiendo que $r = \sqrt{s^2+z^2} \Rightarrow z = \sqrt{-s^2+r^2} \Rightarrow dz = \frac{r\,dr}{\sqrt{-s^2+r^2}}, si\ z = 0 \Rightarrow r = s, si\ z \to \infty \Rightarrow r \to \infty$.

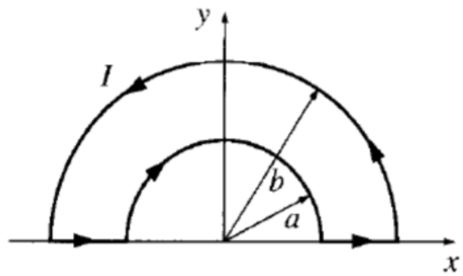
$$\bar{A}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0}{2\pi}\hat{z}\int_{s}^{\infty}\frac{1}{r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{r\,dr}{\sqrt{-s^2+r^2}} = \frac{\mu_0 q_0}{2\pi}\hat{z}\int_{s}^{\infty}\frac{\frac{1}{r}\delta(r-ct)}{\sqrt{-s^2+r^2}}dr$$

$$= \frac{\mu_0 q_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(ct)^2-s^2}}\hat{z}$$

$$\bar{E}(s,t) = -\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 q_0}{2\pi}c\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2c^2t}{((ct)^2-s^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{z} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

$$\bar{B}(s,t) = -\frac{\partial\bar{A}_z}{\partial t}\hat{\phi} = -\frac{\mu_0 q_0}{2\pi}c\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-2s}{((ct)^2-s^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\phi} = -\frac{\mu_0 q_0 sc}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{\frac{3}{2}}}\hat{\phi}$$

5.- Problema: (20pts) Considera un alambre eléctricamente neutro curvado como se muestra en la figura, con una corriente que se incrementa linealmente con el tiempo como $I(t) = kt$. Calcula el potencial vectorial $\vec{A}$ en el centro y después calcula el campo eléctrico en ese punto. Explica cómo es posible que un alambre neutro pueda producirlo. También explica por qué no puedes calcular el campo magnético a partir de la expresión del potencial vectorial que calculaste.



La expresión para el potencial vectorial retardado es

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\bar{I}(t_r)}{r} dl$$

Siendo I es la corriente que fluye a través, dl es la longitud del elemento de corriente, r es la distancia y t_r es el tiempo retardado. $t_r = t - \frac{r}{c}$

Observemos que la ecuación de corriente se convierte en, $\bar{I}(t_r) = kt_r = k\left(t - \frac{r}{c}\right)$, sustituyamos

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{k\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\bar{l} = \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\int \frac{d\bar{l}}{r} - \frac{1}{c}\int d\bar{l}\right)$$

En cuanto al bucle completo $\int d\bar{l}$, expresa el potencial retardado.

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left(\frac{1}{a}\int_1 d\bar{l} + \frac{1}{b}\int_2 d\bar{l} + 2\hat{x}\int_a^b \frac{dx}{x}\right)$$

Con $\int_1 d\bar{l} = 2a\hat{x}$ es para el círculo interior y $\int_2 d\bar{l} = -2b\hat{x}$ es para el círculo exterior.

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left(\frac{1}{a}2a\hat{x} - \frac{1}{b}2b\hat{x} + 2\hat{x}\int_a^b \frac{dx}{x}\right) = \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left(2 - 2 + 2\ln\frac{b}{a}\right)\hat{x} = \frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\hat{x}$$

Pasemos a calcular para el campo eléctrico en el centro del bucle

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\bar{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\hat{x} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\hat{x}$$

No se puede calcular el campo magnético a partir de la expresión del potencial vectorial $\bar{A}$ porque esta depende únicamente del tiempo, reflejando el crecimiento lineal de la corriente, pero no presenta una variación espacial. Para obtener el campo magnético, es necesario que el potencial vectorial tenga dependencia espacial, ya que el campo magnético se calcula mediante el rotacional ($\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$). En este caso, debido a la ausencia de variación espacial en $\bar{A}$, el rotacional resultaría cero, impidiendo obtener un campo magnético. Además, al ser un alambre eléctricamente neutro, la configuración de corriente no genera un campo magnético estacionario sino un campo eléctrico inducido debido a la variación temporal de la corriente.