Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Mecánica Analítica

Tarea 1

Profesores:
Dra. Rosa María Méndez Vargas
Ayudante Erick Pineda.
Alumno: Sebastián González Juárez
sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

---

1. **(1.2) Demostrar que los tres vectores de posición son coplanares. ¿Cuál debe ser la magnitud de $\boldsymbol{c}$ para que los 3 vectores sean lados de un triángulo?**

$$\boldsymbol{\overline{r_1} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}} \qquad \boldsymbol{\overline{r_2} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}} \qquad \boldsymbol{\overline{r_3} = c\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}\right)}$$

Dem. Sean los vectores $\overline{r_1} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}, \overline{r_2} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}, \overline{r_3} = c\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}\right)$.

P. d. $\overline{r_1} \cdot (\overline{r_2} \times \overline{r_3}) = 0$

Podemos usar el triple producto escalar para demostrarlo, tal que se debe cumplir que

$$\overline{r_1} \cdot (\overline{r_2} \times \overline{r_3}) = 0$$

Veamos quien es ese producto

$$\begin{aligned}
\overline{r_1} \cdot (\overline{r_2} \times \overline{r_3}) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ c & c & -c \end{vmatrix} \\
&= 3[(4)(-c) - (c)(-5)] - 2[(3)(-c) - (c)(-5)] - 2[(3)(c) - (c)(4)] \\
&= 3[-4c + 5c] - 2[-3c + 5c] - 1[3c - 4c] \\
&= 3[c] - 2[2c] - [-c] \\
&= 3c - 4c + c \\
&= 4c - 4c \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{r_1} \cdot (\overline{r_2} \times \overline{r_3}) = 0$, i. e. los tres vectores de posición son coplanares.

■

Veamos cual debe ser la magnitud de c para que los 3 vectores sean lados de un triángulo Recordemos que usando la regla del paralelogramo podemos hallar el valor del tercer vector conociendo ya 2 vectores, esto se da al sumarlos.

$$\overline{r_3} = \overline{r_1} + \overline{r_2} = \left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right) + \left(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right) = (3+3)\hat{\imath} + (2+4)\hat{\jmath} + (-1-5)\hat{k}$$

$$= 6\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 6\hat{k} = 6\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}\right)$$

Si $\overline{r_3} = c\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}\right)$, entonces $c = 6$de este modo los 3 vectores son lados de un triángulo.

2. (1.5) **Comprobar la ecuación $\bar{\boldsymbol{A}} \times (\bar{\boldsymbol{B}} \times \bar{\boldsymbol{C}}) = (\bar{\boldsymbol{A}} \cdot \bar{\boldsymbol{C}})\bar{\boldsymbol{B}} - (\bar{\boldsymbol{A}} \cdot \bar{\boldsymbol{B}})\bar{\boldsymbol{C}}$**

Desarrollando ambos miembros en función de componentes cartesianas de los vectores. Hállese el triple producto vectorial $\bar{\boldsymbol{A}} \times (\bar{\boldsymbol{B}} \times \bar{\boldsymbol{C}})$ de los tres vectores.

$$\bar{\boldsymbol{A}} = 3\hat{\boldsymbol{\imath}} + 4\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 5\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = -\hat{\boldsymbol{\imath}} + 4\hat{\boldsymbol{\jmath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \bar{\boldsymbol{C}} = 2\hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$$

Primero comprobemos la ecuación y para eso utilicemos sus componentes cartesianas, así, consideremos

$$\bar{A} = (a_1, a_2 a_3) \qquad \bar{B} = (b_1, b_2, b_3) \qquad \bar{C} = (c_1, c_2, c_3)$$

Empecemos desde el lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned}
\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) &= \bar{A} \times \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \bar{A} \times \left[\hat{\imath}(b_2c_3 - b_3c_2) - \hat{\jmath}(b_1c_3 - b_3c_1) + \hat{k}(b_1c_2 - c_1b_2)\right] \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & -(b_1c_3 - b_3c_1) & (b_1c_2 - c_1b_2) \end{vmatrix} \\
&= \hat{\imath}[a_2(b_1c_2 - c_1b_2) + a_3(b_1c_3 - b_3c_1)] - \hat{\jmath}[a_1(b_1c_2 - c_1b_2) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2)] \\
&\quad + \hat{k}[-a_1(b_1c_3 - b_3c_1) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)] \\
&= ([(a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1) - (a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) \\
&\quad - (a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) - (a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)])
\end{aligned}$$

Ahora pasemos a el lado derecho de la igualdad

$$\begin{aligned}
(\bar{A} \cdot \bar{C})\bar{B} - (\bar{A} \cdot \bar{B})\bar{C} &= \big((a_1, a_2a_3) \cdot (c_1, c_2, c_3)\big)(b_1, b_2, b_3) - \big((a_1, a_2a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)\big)(c_1, c_2, c_3) \\
&= \big((a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1, (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1, (a_1c_1 + a_2c_2 \\
&\quad + a_3c_3)b_1\big) \\
&\quad - \big((a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1, (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1, (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1\big) \\
&= ([(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\
&\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1], [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\
&\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1], [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\
&\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1]) \\
&= ([(a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1) \\
&\quad - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) \\
&\quad - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) \\
&\quad - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)]) \\
&= ([(a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1) \\
&\quad - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) \\
&\quad - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) \\
&\quad - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)]) \\
&= ([(a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1) - (a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) \\
&\quad - (a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)], [(a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3) - (a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1)])
\end{aligned}$$

Ahora procedamos a hallar el triple producto vectorial $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ de los tres vectores.

$$\bar{A} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k} \qquad \bar{B} = -\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k} \qquad \bar{C} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{A} \times \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{A} \times \left[\hat{\imath}(4-2) - \hat{\jmath}(-1+4) + \hat{k}(1-8)\right]$$

$$= \left(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \times \left(2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 7\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\hat{\imath}(-28+15) - \hat{\jmath}(-21-10) + \hat{k}(-9-8)\right] = -13\hat{\imath} + 31\hat{\jmath} - 17\hat{k}$$

Por lo tanto,

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = -13\hat{\imath} + 31\hat{\jmath} - 17\hat{k}$$

3. (1.11) **Hállese el conjunto reciproco de vectores del conjunto de vectores no coplanares.**
   a) $\boldsymbol{\bar{b}_1 = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}, \bar{b}_2 = \hat{\imath} + 3\hat{k}, \bar{b}_3 = -3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}}$
   b) $\boldsymbol{\bar{b}_1 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}, \bar{b}_2 = -3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}, \bar{b}_3 = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}}$

a)

Veamos si cumple con ser coplanares

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = [2(0+12) - 1(-1+9) + 4(-4-0)]$$

$$= 2(12) - 1(8) + 4(-4) = 24 - 8 - 16 = 0$$

Vemos que no son coplanares pues $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3 = 0$, por ende, no nos sirve este conjunto de vectores.

b)

Veamos si cumple con ser coplanares

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [1(4+2) - 2(3-2) + 2(3+8)]$$

$$= 1(6) - 2(-1) + 2(11) = 6 + 2 + 22 = 30$$

Vemos que no son coplanares pues $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3 \neq 0$, ahora hallemos el conjunto de reciproco de vectores $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$.

$$\bar{c}_1 = \frac{\bar{b}_2 \times \bar{b}_3}{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3} = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(6) - \hat{\jmath}(-1) + \hat{k}(11)\right] = -\frac{6}{30}\hat{\imath} + \frac{1}{30}\hat{\jmath} + \frac{11}{30}\hat{k}$$

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{5}\hat{\imath} + \frac{1}{30}\hat{\jmath} + \frac{11}{30}\hat{k}$$

$$\bar{c}_2 = \frac{\bar{b}_3 \times \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3} = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(0) - \hat{\jmath}(5) + \hat{k}(5)\right] = -\frac{5}{30}\hat{\jmath} + \frac{5}{30}\hat{k}$$

$$\bar{c}_2 = -\frac{1}{6}\hat{\jmath} + \frac{1}{6}\hat{k}$$

$$\bar{c}_3 = \frac{\bar{b}_1 \times \bar{b}_2}{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 \times \bar{b}_3} = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(12) - \hat{\jmath}(8) + \hat{k}(2)\right] = \frac{12}{30}\hat{\imath} - \frac{8}{30}\hat{\jmath} + \frac{2}{30}\hat{k}$$

$$\bar{c}_3 = \frac{2}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{15}\hat{\jmath} + \frac{1}{15}\hat{k}$$

4. (1.12)

i. **Exprese los vectores $\boldsymbol{\bar{A} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}}$, $\boldsymbol{\bar{B} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}}$**

En función a una suma lineal de los vectores no coplanares del problema anterior (1.11) y en función de una suma lineal de sus vectores recíprocos.

ii. **Evaluar $\boldsymbol{\bar{A}\cdot\bar{B}}$ y $\boldsymbol{\bar{A}\times\bar{B}}$ utilizando los productos escalares $\boldsymbol{\alpha_i}$, $\boldsymbol{\beta_i}$, $\boldsymbol{\alpha_i^*}$ y $\boldsymbol{\beta_i^*}$ de $\boldsymbol{\bar{A}}$ y $\boldsymbol{\bar{B}}$ con el conjunto de vectores no coplanares de i) y sus vectores recíprocos. Compárese la respuesta con los productos escalar y vectorial de estos 3 vectores evaluados en función de las componentes cartesianas de $\boldsymbol{\bar{A}}$ y $\boldsymbol{\bar{B}}$.**

Del problema 3. Se llego a que los vectores $\bar{b}_1 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$,$\bar{b}_2 = -3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\bar{b}_3 = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$, fueron aquellos que cumplieron con ser no coplanares. De este modo trabajemos con estos.

También de aquel ejercicio se llego a que los vectores de base recíprocas estaban dados por:

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{5}\hat{\imath} + \frac{1}{30}\hat{\jmath} + \frac{11}{30}\hat{k}, \qquad \bar{c}_2 = -\frac{1}{6}\hat{\jmath} + \frac{1}{6}\hat{k}, \qquad \bar{c}_3 = \frac{2}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{15}\hat{\jmath} + \frac{1}{15}\hat{k}$$

i.

Veamos quienes son α_i^*, t. q. $\alpha_i^* = \bar{A}\cdot\bar{c}_i$

$$\alpha_1^* = \left[2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right]\cdot\frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(6) - \hat{\jmath}(-1) + \hat{k}(11)\right] = \frac{(2)(6) + (-4)(1) + (3)(11)}{30} = \frac{41}{30}$$
$$\alpha_2^* = \left[2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right]\cdot\frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(0) - \hat{\jmath}(5) + \hat{k}(5)\right] = \frac{(2)(0) + (-4)(-5) + (3)(5)}{30} = \frac{7}{6}$$
$$\alpha_3^* = \left[2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right]\cdot\frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(12) - \hat{\jmath}(8) + \hat{k}(2)\right] = \frac{(2)(12) + (-4)(-8) + (3)(2)}{30} = \frac{31}{15}$$

De este modo,

$$\bar{A} = \frac{41}{30}\bar{b}_1 + \frac{7}{6}\bar{b}_2 + \frac{29}{15}\bar{b}_3 = \frac{41}{30}\left(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) + \frac{7}{6}\left(-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) + \frac{31}{15}\left(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}\right)$$

Ahora busquemos los α_i, pues notemos que también podemos escribir $\bar{A} = \alpha_1\bar{c}_1 + \alpha_2\bar{c}_2 + \alpha_3\bar{c}_3$

Donde, $\alpha_i = \bar{A}\cdot\bar{b}_i$

$$\alpha_1 = \left[2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right]\cdot\left[\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right] = (2)(1) + (-4)(2) + (3)(2) = 0$$
$$\alpha_2 = \left[2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right]\cdot\left[-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right] = (2)(-3) + (-4)(-4) + (3)(2) = 16$$
$$\alpha_3 = \left[2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right]\cdot\left[2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}\right] = (2)(2) + (-4)(-1) + (3)(-1) = 5$$

Así,

$$\bar{A} = 0\bar{c}_1 + 16\bar{c}_2 + 5\bar{c}_3 = 0\left(\frac{1}{5}\hat{\imath} + \frac{1}{30}\hat{\jmath} + \frac{11}{30}\hat{k}\right) + 16\left(-\frac{1}{6}\hat{\jmath} + \frac{1}{6}\hat{k}\right) + 5\left(\frac{2}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{15}\hat{\jmath} + \frac{1}{15}\hat{k}\right)$$

Hasta ahora hemos encontrado $\bar{A} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ expresado por la forma

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^*\bar{b}_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\bar{c}_i$$

Y se puede verificar en ambos casos que se cumplen nuestras propuestas.

Procedamos a ver quienes son β_i^*, t. q. $\beta_i^* = \bar{B} \cdot \bar{c}_i$

$$\beta_1^* = \left[-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right] \cdot \frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(6) - \hat{\jmath}(-1) + \hat{k}(11)\right] = \frac{(-3)(6) + (2)(1) + (-1)(11)}{30} = -\frac{9}{10}$$
$$\beta_2^* = \left[-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right] \cdot \frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(0) - \hat{\jmath}(5) + \hat{k}(5)\right] = \frac{(-3)(0) + (2)(-5) + (-1)(5)}{30} = -\frac{1}{2}$$
$$\beta_3^* = \left[-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right] \cdot \frac{1}{30}\left[\hat{\imath}(12) - \hat{\jmath}(8) + \hat{k}(2)\right] = \frac{(-3)(12) + (2)(-8) + (-1)(2)}{30} = -\frac{9}{5}$$

De este modo,

$$\bar{B} = -\frac{9}{10}\bar{b}_1 - \frac{1}{2}\bar{b}_2 - \frac{9}{5}\bar{b}_3 = -\frac{9}{10}\left(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) - \frac{1}{2}\left(-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) - \frac{9}{5}\left(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}\right)$$

Ahora busquemos los β_i, pues notemos que también podemos escribir $\bar{B} = \beta_1\bar{c}_1 + \beta_2\bar{c}_2 + \beta_3\bar{c}_3$

Donde, $\beta_i = \bar{B} \cdot \bar{b}_i$

$$\beta_1 = \left[-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right] \cdot \left[\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right] = (-3)(1) + (2)(2) + (-1)(2) = -1$$
$$\beta_2 = \left[-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right] \cdot \left[-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right] = (-3)(-3) + (2)(-4) + (-1)(2) = -1$$
$$\beta_3 = \left[-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right] \cdot \left[2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}\right] = (-3)(2) + (2)(-1) + (-1)(-1) = -7$$

Así,

$$\bar{B} = -1\bar{c}_1 + 15\bar{c}_2 - 3\bar{c}_3 = -1\left(\frac{1}{5}\hat{\imath} + \frac{1}{30}\hat{\jmath} + \frac{11}{30}\hat{k}\right) - 1\left(-\frac{1}{6}\hat{\jmath} + \frac{1}{6}\hat{k}\right) - 7\left(\frac{2}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{15}\hat{\jmath} + \frac{1}{15}\hat{k}\right)$$

Hasta ahora hemos encontrado $\bar{B} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ expresado por la forma

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i^* \bar{b}_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{3} \beta_i \bar{c}_i$$

Nuevamente se puede verificar en ambos casos que se cumplen nuestras propuestas.

ii.

Evaluemos $\bar{A} \cdot \bar{B}$, $\bar{\alpha} \cdot \overline{\beta^*}$, $\overline{\alpha^*} \cdot \bar{\beta}$.

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \left(2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right) \cdot \left(-3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}\right) = -6 - 8 - 3 = -17$$

$$\bar{\alpha} \cdot \overline{\beta^*} = (0{,}16{,}5) \cdot \left(-\frac{9}{10}, -\frac{1}{2}, -\frac{9}{5}\right) = 0 - 8 - 9 = -17$$

$$\overline{\alpha^*} \cdot \bar{\beta} = \left(\frac{41}{30}, \frac{7}{6}, \frac{31}{15}\right) \cdot (-1, -1, -7) = -\frac{41}{30} - \frac{35}{30} - \frac{434}{30} = \frac{510}{30} = -17$$

Por lo tanto, comprobamos que $\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\beta^*} = \overline{\alpha^*} \cdot \bar{\beta}$

Evaluemos $\bar{A}\times\bar{B}$, $(\bar{b}_1.\bar{b}_2\times\bar{b}_3)\begin{vmatrix}\bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3\\ \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^*\\ \beta_1^* & \beta_2^* & \beta_3^*\end{vmatrix}$, $(\bar{c}_1,\bar{c}_2\times\bar{c}_3)\begin{vmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}$.

$$\bar{A}\times\bar{B}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 2 & -4 & 3\\ -3 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-2)\hat{\imath}-(7)\hat{\jmath}+(-8)\hat{k}=-2\hat{\imath}-7\hat{\jmath}-8\hat{k}$$

$$(b_1\cdot\bar{b}_2\times\bar{b}_3)\begin{vmatrix}\bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3\\ \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^*\\ \beta_1^* & \beta_2^* & \beta_3^*\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -3 & -4 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{1}{5}\hat{\imath}+\frac{1}{30}\hat{\jmath}+\frac{11}{30}\hat{k} & -\frac{1}{6}\hat{\jmath}+\frac{1}{6}\hat{k} & \frac{2}{5}\hat{\imath}-\frac{4}{15}\hat{\jmath}+\frac{1}{15}\hat{k}\\ \frac{41}{30} & \frac{7}{6} & \frac{31}{15}\\ -\frac{9}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{5}\end{vmatrix}$$
$$=30\left[\frac{-2\hat{\imath}-7\hat{\jmath}-8\hat{k}}{30}\right]=-2\hat{\imath}-7\hat{\jmath}-8\hat{k}$$

$$(\bar{c}_1,\bar{c}_2\times\bar{c}_3)\begin{vmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{11}{30}\\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{15} & \frac{1}{15}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+2\hat{k} & -3\hat{\imath}-4\hat{\jmath}+2\hat{k} & 2\hat{\imath}-\hat{\jmath}-\hat{k}\\ 0 & 16 & 5\\ -1 & -1 & -7\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{30}\left[-60\hat{\imath}-210\hat{\jmath}-240\hat{k}\right]$$
$$=-2\hat{\imath}-7\hat{\jmath}-8\hat{k}$$

Hemos comprobamos que $\bar{A}\times\bar{B}=(\bar{b}_1.\bar{b}_2\times\bar{b}_3)\begin{vmatrix}\bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3\\ \alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^*\\ \beta_1^* & \beta_2^* & \beta_3^*\end{vmatrix}=(\bar{c}_1,\bar{c}_2\times\bar{c}_3)\begin{vmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}$

5. (1.16)

La derivada del vector $\overline{A}(t)$ de magnitud constante se demostró que puede ser expresada como un producto vectorial $\frac{d}{dt}\overline{A}(t) = \overline{w} \times \overline{A}(t)$. Sin embargo, $\overline{w}$ no es única, ya que la suma del termino $c\overline{A}$ a $\overline{w}$ producir´a el mismo resultado. Por otro lado, la derivada de dos vectores de magnitud constante puede determinar $\overline{w}$ única, en función de la cual sus derivadas son expresables en la forma: $\frac{d}{dt}\overline{A}(t) = \overline{w} \times \overline{A}$ y $\frac{d}{dt}\overline{B}(t) = \overline{w} \times \overline{B}$. Considerando los vectores unidad

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \sin\alpha t\cos\beta t\,\hat{\imath} + \sin\alpha t\sin\beta t\,\hat{\jmath} + \cos\alpha t\,\hat{k}\,,\\ \hat{e}_2 &= \cos\alpha t\cos\beta t\,\hat{\imath} + \cos\alpha t\sin\beta t\,\hat{\jmath} - \sin\alpha t\,\hat{k}\\ \hat{e}_3 &= -\sin\beta t\,\hat{\imath} + \cos\beta t\,\hat{\jmath}\end{aligned}$$

hállese el vector de la velocidad angular $\overline{w}$ que satisface las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_1 = \overline{w} \times \hat{e}_1 \quad y \quad \frac{d}{dt}\hat{e}_2 = \overline{w} \times \hat{e}_2$$

Demostrar que la misma $\overline{w}$ también nos da

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_3 = \overline{w} \times \hat{e}_3$$

Nota. En la ayudantía se mencionó que el planteamiento del problema ya nos asegura que $\overline{w}$ satisface ambas ecuaciones y por ende bastara con hallarlo en una sola.

Busquemos quien es $\frac{d}{dt}\hat{e}_1$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{e}_1 &= \frac{d}{dt}\left(\sin\alpha t\cos\beta t\,\hat{\imath} + \sin\alpha t\sin\beta t\,\hat{\jmath} + \cos\alpha t\,\hat{k}\right)\\ &= \frac{d}{dt}(\sin\alpha t\cos\beta t)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(\sin\alpha t\sin\beta t)\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}(\cos\alpha t)\hat{k}\\ &= (\alpha\cos\alpha t\cos\beta t - \beta\sin\alpha t\sin\beta t)\hat{\imath} + (\alpha\cos\alpha t\sin\beta t + \beta\sin\alpha t\cos\beta t)\hat{\jmath} - \alpha\sin\alpha t\,\hat{k}\end{aligned}$$

El vector $\overline{w}$ es de la forma $\overline{w} = w_x\hat{\imath} + w_y\hat{\jmath} + w_z\hat{k}$, hallemos $\overline{w} \times \hat{e}_1$

$$\begin{aligned}\overline{w} \times \hat{e}_1 &= \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ w_x & w_y & w_z\\ \sin\alpha t\cos\beta t & \sin\alpha t\sin\beta t & \cos\alpha t\end{vmatrix}\\ &= \hat{\imath}\left(w_y\cos\alpha t - w_z\sin\alpha t\sin\beta t\right) - \hat{\jmath}(w_x\cos\alpha t - w_z\sin\alpha t\cos\beta t)\\ &\quad + \hat{k}\left(w_x\sin\alpha t\sin\beta t - w_y\sin\alpha t\cos\beta t\right)\end{aligned}$$

Así considerando que se satisface $\frac{d}{dt}\hat{e}_1 = \overline{w} \times \hat{e}_1$

$$\hat{\imath}: \alpha\cos\alpha t\cos\beta t - \beta\sin\alpha t\sin\beta t = w_y\cos\alpha t - w_z\sin\alpha t\sin\beta t$$

De acá vemos que $w_y = \alpha\cos\beta t$ y $w_z = \beta$

$$\hat{\jmath}: \alpha\cos\alpha t\sin\beta t + \beta\sin\alpha t\cos\beta t = -w_x\cos\alpha t + w_z\sin\alpha t\cos\beta t$$

De acá vemos que $w_x = -\alpha\sin\beta t$

Por ende $\overline{w} = -\alpha \sin \beta t\, \hat{\imath} + \alpha \cos \beta t\, \hat{\jmath} + \beta \hat{k}$ es el vector que satisface las ecuaciones.

Ahora veamos que también satisface la tercera ecuación planteada.

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_3 = \overline{w} \times \hat{e}_3$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{e}_3 &= \frac{d}{dt}(-\sin \beta t\, \hat{\imath} + \cos \beta t\, \hat{\jmath}) \\ &= \frac{d}{dt}(-\sin \beta t\, \hat{\imath}) + \frac{d}{dt}(\cos \beta t\, \hat{\jmath}) \\ &= -\beta \cos \beta t\, \hat{\imath} - \beta \sin \beta t\, \hat{\jmath}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{w} \times \hat{e}_3 &= \left(-\alpha \sin \beta t\, \hat{\imath} + \alpha \cos \beta t\, \hat{\jmath} + \beta \hat{k}\right) \times \left(-\sin \beta t\, \hat{\imath} + \cos \beta t\, \hat{k}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\alpha \sin \beta t & \alpha \cos \beta t & \beta \\ -\sin \beta t & \cos \beta t & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\imath}(\alpha \cos \beta t\,(0) - \beta \cos \beta t) - \hat{\jmath}(-\alpha \sin \beta t\,(0) + \beta \sin \beta t) \\ &\qquad + \hat{k}(-\alpha \sin \beta t \cos \beta t + \alpha \cos \beta t \sin \beta t) \\ &= -\beta \cos \beta t\, \hat{\imath} - \beta \sin \beta t\, \hat{\jmath}\end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que el vector $\overline{w}$ satisface también que

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_3 = \overline{w} \times \hat{e}_3$$

6. (1.18) a) Demostrar que los productos escalares α_i y α_i^* del vector $\bar{A}$ por los vectores base $\bar{b}_\iota$ y sus recíprocos $\bar{c}_\iota$, están relacionados linealmente como se indica por

$$\boldsymbol{\alpha_i^* = \sum_j g_{ij}^* \alpha_i \quad y \quad \alpha_i = \sum_j g_{ij}\, \alpha_i^*}$$

Expóngase los escalares g_{ij} y g_{ij}^* en función de los vectores base $\bar{b}_\iota$ y los recíprocos $\bar{c}_\iota$.

b) Demostrar que el producto escalar de dos vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ como

$$\boldsymbol{\bar{A} \cdot \bar{B} = \sum_{ij} g_{ij}^* \alpha_i \beta_j = \sum_{ij} g_{ij}\, \alpha_i^* \beta_j^*}$$

a)

$$\alpha_i^* = \bar{A} \cdot \bar{c}_i = \left(\sum_j^3 \alpha_j \bar{c}_j \right) \cdot \bar{c}_i = \sum_j^3 \alpha_j \bar{c}_j \cdot \bar{c}_i = \sum_j^3 \alpha_j g_{ij}^*$$

$$\alpha_i = \bar{A} \cdot \bar{b}_i = \left(\sum_j^3 \alpha_j^* \bar{b}_j \right) \cdot \bar{b}_i = \sum_j^3 \alpha_j^* \bar{b}_j \cdot \bar{b}_i = \sum_j^3 \alpha_j^* g_{ij}$$

$$g_{ij}^* = \bar{c}_j \cdot \bar{c}_i \quad y \quad g_{ij} = \bar{b}_j \cdot \bar{b}_i$$

b)

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \left(\sum_i^3 \alpha_i \bar{c}_i \right) \cdot \left(\sum_j^3 \beta_j \bar{c}_j \right) = \sum_{ij}^3 \alpha_i \beta_j \bar{c}_i \bar{c}_j = \sum_{ij}^3 \alpha_i \beta_j g_{ij}^*$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \left(\sum_i^3 \alpha_i^* \bar{b}_i \right) \cdot \left(\sum_j^3 \beta_j^* \bar{b}_j \right) = \sum_{ij}^3 \alpha_i^* \beta_j^* \bar{b}_i \bar{b}_j = \sum_{ij}^3 \alpha_i^* \beta_j^* g_{ij}$$

■

7. **Demuestre las ecuaciones**

a) $\frac{d}{dt}(c\bar{A}) = \frac{dc}{dt}\bar{A} + c\frac{d\bar{A}}{dt}$ b) $\frac{d}{dt}(\bar{A}\times\bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt}\times\bar{B} + \bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt}$

Dem.

a) $\frac{d}{dt}(c\bar{A}) = \frac{dc}{dt}\bar{A} + c\frac{d\bar{A}}{dt}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(c\bar{A}) &= \left(\frac{d}{dt}cA_x\hat{\imath} + \frac{d}{dt}cA_y\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}cA_z\hat{k}\right)\\
&= \left(\left(\left(\frac{d}{dt}c\right)A_x + c\left(\frac{d}{dt}A_x\right)\right)\hat{\imath} + \left(\left(\frac{d}{dt}c\right)A_y + c\left(\frac{d}{dt}A_y\right)\right)\hat{\jmath}\right.\\
&\qquad \left. + \left(\left(\frac{d}{dt}c\right)A_z + c\left(\frac{d}{dt}A_z\right)\right)\hat{k}\right)\\
&= \frac{d}{dt}c\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) + c\left(\frac{d}{dt}A_x\hat{\imath} + \frac{d}{dt}A_y\hat{\jmath} + \frac{d}{dt}A_z\hat{k}\right)\\
&= \frac{dc}{dt}\bar{A} + c\frac{d\bar{A}}{dt}
\end{aligned}
$$

b) $\frac{d}{dt}(\bar{A}\times\bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt}\times\bar{B} + \bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt}$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\bar{A}\times\bar{B}) &= \frac{d}{dt}\left(\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\hat{\imath}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) - \hat{\jmath}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)\right)\\
&= \hat{\imath}\left(\left[\frac{d}{dt}A_yB_z + A_y\frac{d}{dt}B_z\right] - \left[\frac{d}{dt}A_zB_y + A_z\frac{d}{dt}B_y\right]\right)\\
&\quad - \hat{\jmath}\left(\left[\frac{d}{dt}A_xB_z + A_x\frac{d}{dt}B_z\right] - \left[\frac{d}{dt}A_zB_x + A_z\frac{d}{dt}B_x\right]\right)\\
&\quad + \hat{k}\left(\left[\frac{d}{dt}A_xB_y + A_x\frac{d}{dt}B_y\right] - \left[\frac{d}{dt}A_yB_x + A_y\frac{d}{dt}B_x\right]\right)\\
&= \left[\hat{\imath}\left(\frac{d}{dt}A_yB_z - \frac{d}{dt}A_zB_y\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{d}{dt}A_xB_z - \frac{d}{dt}A_zB_x\right) + \hat{k}\left(\frac{d}{dt}A_xB_y - \frac{d}{dt}A_yB_x\right)\right]\\
&\quad + \left[\hat{\imath}\left(A_y\frac{d}{dt}B_z - A_z\frac{d}{dt}B_y\right) - \hat{\jmath}\left(A_x\frac{d}{dt}B_z - A_z\frac{d}{dt}B_x\right) + \hat{k}\left(A_x\frac{d}{dt}B_y - A_y\frac{d}{dt}B_x\right)\right]\\
&= \bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt} + \frac{d\bar{A}}{dt}\times\bar{B}\\
&= \frac{d\bar{A}}{dt}\times\bar{B} + \bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{dt}
\end{aligned}
$$

■

8. **(2.4) Hallar las componentes esféricas de la velocidad y la aceleración de la partícula cuyo vector de posición este dado por**

$$\boldsymbol{r = b}, \quad \boldsymbol{\theta = \theta_0 \cos wt}, \quad \boldsymbol{\phi = wt}, \quad \boldsymbol{con}: \boldsymbol{b, \theta_0, w \epsilon} \mathbb{R}$$

Nota. Las formulas a usar en este problema ya fueron demostradas por la maestra en clase, la cual nos dio permiso de utilizarlas. Además, entiéndase a e_r, e_θ, e_ϕ como vectores.

Primero calculamos las derivadas respecto al tiempo de estas variables que utilizaremos.

$$\dot{r} = 0, \qquad \dot{\theta} = -\theta_0 w \sin wt, \qquad \dot{\phi} = w, \qquad \ddot{r} = 0, \qquad \ddot{\theta} = -\theta_0 w^2 \cos wt, \qquad \ddot{\phi} = 0$$

En componentes esféricas tenemos que la velocidad se halla dada por:

$$\bar{v} = \dot{r} e_r + r\dot{\theta} e_\theta + r \sin\theta \dot{\phi}\, e_\phi$$

Así para nuestro vector posición tenemos

$$\begin{aligned}\bar{v} &= (0)e_r + b(-\theta_0 w \sin wt)e_\theta + b\sin(\theta_0 \cos wt) w\, e_\phi \\ &= -b\theta_0 w \sin wt\, e_\theta + b \sin(\theta_0 \cos wt) w\, e_\phi\end{aligned}$$

Por otro lado, las componentes esféricas de la aceleración se encontrarán dadas por:

$$\begin{aligned}\bar{a} = &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\, \dot{\phi}^2\right)e_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta - r\sin\theta\cos\theta\, \dot{\phi}^2\right)e_\theta \\ &+ \left(r\sin\theta\, \ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\cos\theta\, \dot{\theta}\dot{\phi}\right)e_\phi\end{aligned}$$

Así para nuestro vector posición tenemos

$$\begin{aligned}\bar{a} = &((0) - b(-\theta_0 w \sin wt)^2 - b\sin^2(\theta_0\cos wt)\,(w)^2)e_r \\ &+ (b(-\theta_0 w^2 \cos wt) + 2(0)(\theta_0 \cos wt) - b\sin(\theta_0\cos wt)\cos(\theta_0 \cos wt)\, w^2)e_\theta \\ &+ (b\sin(\theta_0\cos wt)\,(0) + 2(0)w\sin(\theta_0\cos wt) \\ &+ 2b\cos(\theta_0\cos wt)\,(-\theta_0 w \sin wt)w)e_\phi \\ = &((-b\theta_0^2 w^2 \sin^2 wt - bw^2\sin^2(\theta_0\cos wt))e_r - bw^2\left(\theta_0\cos wt + \frac{1}{2}\sin(2\theta_0\cos wt)\right)e_\theta \\ &- (2b\theta_0 w^2 \cos(\theta_0\cos wt)\sin wt)e_\phi \\ = &-bw^2(\theta_0^2\sin^2 wt + \sin^2(\theta_0\cos wt)\, e_r - bw^2\left(\theta_0\cos wt + \frac{1}{2}\sin(2\theta_0\cos wt)\right)e_\theta \\ &- 2b\theta_0 w^2\cos(\theta_0\cos wt)\sin wt\, e_\phi\end{aligned}$$

Podríamos seguir factorizando, pero decidí dejarlo así para ser más visible las componentes.