Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 2 – 4.7
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

4.7 **Gas de esferas duras I:** En el problema del gas ideal asumimos como una hipótesis de trabajo la idea de que los átomos que conforman a nuestro gas son puntuales además de que no existe potencial de interacción entre ellos (de modo que la probabilidad de encontrar una átomo cualquiera en una cierta región del espacio no se ve afectada por la posición que tengan los demás átomos). Estas hipótesis resultan en que el número de microestados accesibles al sistema para un volumen V, número de átomos N y una energía E fijos ($\Omega(N, E, V)$) será proporcional a la N-ésima potencia del volumen

$$\Omega(N, E, V) \propto V^N.$$

¿Pero cómo cambia este resultado si asumimos que los átomos sí ocupan un determinado volumen distinto de cero? Para resolver esta cuestión, considera que los átomos de nuestro gas son esferas duras de diámetro D (esto quiere decir que un átomo arbitrario de nuestro gas ignorará la existencia de los demás átomos a menos que al moverse quiera ocupar el mismo volumen que otro átomo simultáneamente está ocupando, en cuyo caso interactuarán como una colisión perfectamente elástica sin deformarse ni disipar energía entre ellos); en términos generales, si pensamos que nuestro gas está contenido en un volumen V, el volumen libre para el j-ésimo átomo es $V - (j-1)v_0$, siendo v_0 el volumen que ocupa un átomo. Suponiendo que tenemos un número fijo N de átomos y que el volumen que estos ocupan es mucho menor al volumen del contenedor del gas ($Nv_0 \ll V$), demuestra que se satisface la relación

$$P(V - \frac{1}{2}Nv_0) = NkT.$$

Hint: Argumenta por qué el número de microestados es aproximadamente proporcional al producto del volumen libre que tiene cada átomo conforme va "llenando" el gas, esto es

$$\Omega(N, E, V) \propto V(V - v_0)(V - 2v_0)\dots(V - (N-1)v_0)$$

y usa la relación

$$\frac{P}{T} = k\left(\frac{\partial ln(\Omega)}{\partial V}\right)_{N,E}.$$

Para el primer átomo, el volumen disponible es V⟹Para el segundo, es $V - v_0$ ⟹Para el tercero, $V - 2v_0$ ⟹Así sucesivamente hasta el N-ésimo átomo, que tiene $V - (N-1)v_0$.

Entonces, el número de microestados es proporcional al producto de los volúmenes disponibles: $\Omega(N, E, V) \propto V\,(V - v_0)(V - 2v_0)\dots(V - (N-1)v_0)$

Reescribimos como: $\Omega \propto \prod_{j=0}^{N-1}(V - jv_0)$

Como $Nv_0 \ll V$, podemos aproximar el logaritmo de Ω:

$$\ln\Omega \approx \ln\left(V^N \prod_{j=0}^{N-1}\left(1 - \frac{jv_0}{V}\right)\right) = N\ln V + \sum_{j=0}^{N-1}\ln\left(1 - \frac{jv_0}{V}\right)$$

Para $\frac{jv_0}{V}$ pequeño, usamos la aproximación de Taylor $\ln(1-x) \approx -x$:

$$\ln\Omega \approx N\ln V - \sum_{j=0}^{N-1}\frac{jv_0}{V} = N\ln V - \frac{v_0}{V}\sum_{j=0}^{N-1} j$$

Donde: $\sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{(N-1)N}{2}$

Para N grande, $N - 1 \approx N$: $\ln\Omega \approx N\ln V - \frac{N^2 v_0}{2V}$

La presión se relaciona con la derivada de $\ln\Omega$ respecto a V: $\frac{P}{T} = k\left(\frac{\partial\ln\Omega}{\partial V}\right)_{N,E}$

$$\frac{\partial\ln\Omega}{\partial V} \approx \frac{\partial}{\partial V}\left(N\ln V - \frac{N^2 v_0}{2V}\right) = \frac{N}{V} + \frac{N^2 v_0}{2V^2} \Rightarrow P = NkT\left(\frac{1}{V} + \frac{Nv_0}{2V^2}\right) = \frac{NkT}{V}\left(1 + \frac{Nv_0}{2V}\right)$$

$$PV = NkT\left(1 + \frac{Nv_0}{2V}\right) \Longrightarrow V - \frac{1}{2}Nv_0 = V\left(1 - \frac{Nv_0}{2V}\right)$$

$$P\left(V - \frac{1}{2}Nv_0\right) \approx NkT\left(1 + \frac{Nv_0}{2V}\right)\left(1 - \frac{Nv_0}{2V}\right) \approx NkT\left(1 - \left(\frac{Nv_0}{2V}\right)^2\right)$$

Como $\left(\frac{Nv_0}{2V}\right)^2$ es muy pequeño (porque $Nv_0 \ll V$), podemos despreciarlo y obtener:

$$P\left(V - \frac{1}{2}Nv_0\right) \approx NkT$$