# Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Electromagnetismo II – Tarea 6
**Profesores:**
Dr. Alejandro Reyes Coronado
Ayud. Daniel Espinosa González
Ayud. Atzin López Tercero

**Alumno: Sebastián González Juárez**

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

**1.- Problema: (15pts)**

**(a)** Un solenoide muy largo de radio $a$ posee una corriente alterna, de modo que el campo magnético dentro es sinusoidal $\vec{B}(t) = B_0\cos(\omega t)\hat{e}_z$. Un aro circular de alambre de radio $a/2$ y resistencia $R$ se coloca dentro del solenoide de forma coaxial. Calcula la corriente inducida en el aro circular en función del tiempo.

**(b)** Considera el siguiente experimento (lo puedes hacer en tu casa ... o en la clase!), en el que dejas caer un imán de forma cilíndrica dentro de un tubo de cobre de diámetro ligeramente mayor que el del imán, y que sea largo (con un metro de largo es suficiente). Observarás que bajo la acción de la gravedad terrestre, el imán tarda mucho tiempo en salir del tubo, mientras que una pieza de metal sin magnetizar sale en una fracción de segundo. Explica de manera detallada por qué el imán cae más despacio.

a) Por la ley de ohm, la corriente está dada por:

$$I = \frac{\varepsilon(t)}{R}$$

De modo que hay que encontrar la fem:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

Así que hay que ver como hallar el flujo magnético:

$$\Phi_B(t) = \int_S \bar{B}(t)\cdot d\bar{a}$$

Como el campo magnético está dirigido a lo largo del eje z del solenoide y el área del aro circular está perpendicular al campo magnético, podemos simplificar el flujo como:

$$\Phi_B(t) = B(t)A = B_0\cos(\omega t)\,\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Calculamos la fem:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d}{dt}\left(B_0\cos(\omega t)\,\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = B_0\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\sin(\omega t)$$

Por lo tanto, la corriente inducida es:

$$I = \frac{B_0\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\sin(\omega t)}{R} = \frac{B_0\pi a^2\sin(\omega t)}{4R}$$

b)

No realice el experimento, pero expliquemos que sucede con electromagnetismo.

Véase que cuando el imán cae, generara un cambio en el campo magnético por la ley de Faraday.

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

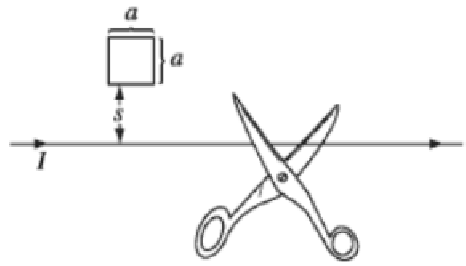
Y como hay un cambio en el campo magnético, entonces induce una fem en las paredes del tubo,

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_{\mathrm{B}}(t)}{dt}$$

La fem inducida genera corrientes circulares, las corrientes de Foucault, en las paredes del tubo. Y estas corrientes crean a su vez un campo magnético inducido y como sabemos por la ley de Lenz, este se opondría al movimiento del imán. El campo inducido produce esa fuerza de frenado magnética la cual como vimos se opondría al movimiento del imán, es decir a su velocidad $v$. Esta fuerza debe ser proporcional a la velocidad del imán.

De este modo comprendemos que, al tener una fuerza de frenado, el imán car más despacio.

**2.- Problema: (15pts)** Una espira cuadrada de alambre de lados $a$ y resistencia $R$ se encuentra a una distancia $s$ de un alambre muy largo que transporta una corriente $I$ (ver figura). De pronto alguien corta el alambre con corriente, de manera que $I$ se hace cero. ¿En qué dirección fluye la corriente inducida en la espira cuadrada?, y ¿cuál es la carga total que fluye en un punto dado de la espira durante el tiempo en que la corriente fluye?




Este problema se planteo en la tarea 5, ejercicio 3. a. Usemos algunos resultados encontrados para ese problema, pero de forma resumida. Primero consideremos que el campo magnético está dirigido hacia afuera de la página.

Busquemos cuánto vale la corriente inducida, $I = \frac{\varepsilon}{R}$.

Donde para la fem, vimos que la podemos obtener por regla de la cadena, pero llegábamos a,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi s(s+a)}$$

Sustituyendo,

$$I_{ind} = \frac{\frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi s(s+a)}}{R} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R}\frac{ds}{dt}\frac{1}{s(s+a)}$$

La carga total que fluye es la integral de la corriente inducida a lo largo del tiempo,

$$Q = \int I_{ind} dt = \int \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R}\frac{ds}{dt}\frac{1}{s(s+a)}dt = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R}\int ds\frac{1}{s(s+a)} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi R}\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{s}+1\right)}{a}\right)$$
$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\ln\left(\frac{a}{s}+1\right)$$

La corriente inducida en la espira cuadrada fluye en sentido antihorario cuando la observamos desde una vista de arriba. Pues por la ley de Lenz, que indica que la corriente se genera para oponerse a la disminución del campo magnético generado por el alambre, el cual apuntaba hacia afuera de la página. La corriente inducida intenta mantener un campo en la misma dirección, lo que provoca que circule en sentido antihorario.

**3.- Problema: (20pts)** Considera que una espira pequeña circular de radio $a$ está a una distancia $z_0$ de una espira circular de radio $b$, como se muestra en la figura. Los planos que contienen a las espiras son paralelos entre sí y perpendiculares al eje común.

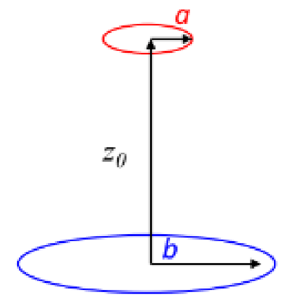
**(a)** Considera una corriente $I$ que fluye en la espira de radio $b$ (la grande). Calcula el flujo de campo magnético a través de la espira de radio $a$ (pequeña). La espira de radio $a$ es tan pequeña que puedes considerar que el campo magnético generado por la espira de radio $b$ es escencialmente constante.

**(b)** Considera ahora una corriente $I$ fluyendo en la espira pequeña. Calcula el flujo magnético a través de la espira grande. La espira pequeña la puedes considerar ahora como un dipolo magnético puntual.

**(c)** Calcula las inductancias y confirma que $M_{12} = M_{21}$.

a)

Se nos pide hallar el flujo magnético:




$$\Phi_B = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{a}$$

Como la espira pequeña es muy pequeña comparada con la distancia, podemos considerar que el campo magnético es uniforme a lo largo de toda la espira pequeña.

$$\Phi_B = B(z_0)A$$

El área de la espira pequeña es $A = \pi a^2$ y el campo magnético generado por una espira circular a una distancia $z$ de su centro está dado por la Ley de Biot-Savart.

$$B(z_0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sustituyendo para nuestra espira,

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I b^2 \pi a^2}{2(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b)

Consideremos la espira pequeña como un dipolo. El campo magnético generado por un dipolo magnético puntual, en coordenadas esféricas, se expresa mediante la ecuación:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right), \qquad m = I\pi a^2$$

Su explicación es casi análoga a como se explico en la tarea 4, donde mostré,

$$\bar{E}_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

Se nos pide hallar el flujo magnético:

$$\Phi_B = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{a} = \int_S \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) \cdot r^2 \sin\theta\, d\theta d\phi$$

Sustituyendo la expresión del campo magnético de un dipolo, necesitamos integrar solo la componente $\hat{r}$, ya que la componente $\hat{\theta}$ no contribuye al flujo a través de la espira, pues esta componente es tangencial a la superficie.

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{B}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi a^2}{r^3} r^2 \int_S 2\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4r}\int_0^{\theta_0} 2\cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2r} 2\pi \int_0^{\theta_0} \cos\theta\sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2r} 2\pi \frac{1}{2}\sin^2\theta_0\end{aligned}$$

El ángulo $\theta_0$ se puede relacionar con el radio de la espira grande y la distancia entre las espiras. Geométricamente, tenemos que: $\sin\theta_0 = \frac{b}{r}$

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 I\pi a^2}{2r}\left(\frac{b}{r}\right)^2, \qquad Donde\ r = \sqrt{b^2 + z_0^2} \Rightarrow \Phi_{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 I\pi a^2 b^2}{2(b^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

c)

La inductancia mutua entre dos espiras es una medida de cuánta energía magnética es transferida entre ellas debido a las corrientes que circulan en cada una. La inductancia mutua se define como:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}, \qquad M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Vimos que,

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow M_{12} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_2 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto,

$$M_{12} = M_{21}$$

**4.- Problema: (20pts)** Calcula la auto–inductancia por unidad de longitud de un solenoide muy largo, de radio $R$ y con $n$ vueltas por unidad de longitud.

Recordemos que la autoinductancia relaciona el flujo magnético con la corriente,

$$\Phi = \mathrm{LI}$$

Donde justamente $L$ es la autoinductancia,

El flujo magnético a través de una sola espira esta dado por:

$$\Phi_1 = BA = B(\pi R^2)$$

Dado que el campo magnético es constante del solenoide y paralelo a la dirección de la longitud, entonces,

$$Bl = \mu_0 I_{enc} = \mu_0(nlI)$$

Donde $n$ sería el número de vueltas, $B = \mu_0 nI$, sustituyamos y consideremos n vueltas por unidad de longitud,

$$\Phi = \mu_0 nI(\pi R^2)nl = \mu_0 n^2 I\pi R^2 l$$

Ahora podemos calcular la autoinductancia,

$$\mu_0 n^2 I\pi R^2 l = \mathrm{LI}$$

Por lo tanto,

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2 l$$

Ahora si la queremos como autoinductancia por unidad de longitud es:

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

**5.- Problema: (30pts)** Calcula la energía almacenada en una sección de longitud $l$ de un solenoide muy largo (de radio $R$, corriente $I$ y $n$ vueltas por unidad de longitud), por varias formas:

**(a)** Usando la ecuación (nota que ya calculaste $L$ en el problema anterior)

$$W = \frac{1}{2}LI^2. \tag{1}$$

**(b)** Usando la expresión ($\vec{A}$ está calculado en el ejemplo 5.12 del Griffiths)

$$W = \frac{1}{2}\oint(\vec{A}\cdot\vec{I})\,dl. \tag{2}$$

**(c)** Usando la expresión

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{Todo el espacio}} B^2 dV. \tag{3}$$

**(d)** Usando la expresión

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_V B^2 dV - \oint_S (\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{a}\right]. \tag{4}$$

a)

Tal como se indica, usemos lo del problema anterior,

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 \pi R^2 l)I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2$$

b)

En el ejemplo 5.12 podemos observar que nos dice: "Encuentre el potencial vectorial de un solenoide infinito con n vueltas por unidad de longitud, radio R y corriente I."

Donde llega al cálculo para el vector potencial:

$$\bar{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 n I}{2} s\hat{\phi}, & s \leq R \\ \dfrac{\mu_0 n I}{2}\dfrac{R^2}{s}\hat{\phi}, & s \geq R \end{cases} \Rightarrow s = R \Rightarrow \bar{A} = \frac{\mu_0 n I}{2}R\hat{\phi}$$

Sustituyamos,

$$W = \frac{1}{2}\oint(\bar{A}\cdot\bar{I})dl = \frac{1}{2}\oint\left(\frac{\mu_0 n I}{2}R\hat{\phi}I\right)nl = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 n I^2 R}{2}2\pi R n l = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2$$

c)

Recodemos que el campo magnético es $B = \mu_0 n I$ para lo que se encuentra dentro del solenoide, para lo de afuera es nulo, sustituyamos,

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_{T.E.} B^2 dV = \frac{1}{\mu_0}\int_{T.E.}(\mu_0 n I)^2 dV = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2\int_{T.E.} dV = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2$$

d)

Ahora se nos pide utilizando la expresión:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_V B^2 dV - \oint_S (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot d\bar{a}\right]$$

Veamos la primera integral

$$\int B^2 d\mathrm{V} = \mu_0^2 n^2 I^2 \pi (R^2 - a^2) l$$

Con $a$ una pequeña distancia del eje del solenoide hacia el interior.

El segundo término involucra el producto cruzado entre el potencial vectorial y el campo magnético. Además, obviemos que no hay contribución en el exterior del solenoide.

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} a\hat{\phi}, \qquad \bar{B} = \mu_0 n I \hat{z}$$

El producto cruzado es entonces:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \frac{1}{2}\mu_0^2 n^2 I^2 a(\hat{\phi} \times \hat{z}) = \frac{1}{2}\mu_0^2 n^2 I^2 a\hat{s}$$

donde $\hat{s}$ es la dirección radial hacia afuera. Ahora, integramos,

$$\oint_S (\bar{A} \times \bar{B}) \cdot d\bar{a} = \int \left(\frac{1}{2}\mu_0^2 n^2 I^2 a\hat{s}\right) \cdot (a d\phi dz \hat{s}) = \frac{1}{2}\mu_0^2 n^2 I^2 a^2 \cdot 2\pi l$$

Ahora podemos sustituir términos para obtener la energía total:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}[\mu_0^2 n^2 I^2 \pi (R^2 - a^2) l + \mu_0^2 n^2 I^2 \pi a^2 l] = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \pi R^2 l$$