Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Electromagnetismo II – Tarea 7
Profesores:
Dr. Alejandro Reyes Coronado
Ayud. Daniel Espinosa González
Ayud. Atzin López Tercero

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- Problema: (25pts) Calcula la fuerza magnética sobre el hemisferio norte debida al hemisferio sur de un cascarón esférico hueco, de radio R y densidad superficial de carga σ, que gira con rapidez angular ω, a partir de la expresión en términos del tensor de esfuerzos de Maxwell:

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a}.$$

Tenemos un cascaron que tiene radio R, densidad superficial de carga σ y gira con rapidez angular ω. Tenemos la expresión que nos da la fuerza magnética en términos del tensor de esfuerzos de Maxwell $\overleftrightarrow{T}$, que es:

$$\bar{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a}$$

Donde $\overleftrightarrow{T}$ es el tensor de esfuerzos de Maxwell, el cual está dado por:

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)$$

Considerando únicamente las componentes del tensor en dirección $\hat{z}$, se tiene

$$\left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a}\right)_z = \frac{1}{\mu_0}\left(B_z(\bar{B} \cdot d\bar{a}) - \frac{1}{2}B^2 da_z\right)$$

Donde sabemos que, dentro del cascaron $\bar{B} = \frac{2}{3}\mu_0 R\omega\hat{z}$ y fuera $\bar{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$. Con un momento $m = \frac{4}{3}\pi R^3(\sigma\omega R)$. De este modo podemos separar el área de interés, tal como se hizo en clase con un ejemplo del Griffiths (8.2)

Primero analicemos el disco, recordemos que las componentes $\hat{x}$ y $\hat{y}$, no son de nuestro interés.

$$\begin{aligned}
\left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a}\right)_z &= \frac{1}{\mu_0}\left(\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\right)\left(-\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega r dr d\phi\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\right)^2(-r dr d\phi)\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\right)^2\left(-r dr d\phi + \frac{1}{2}r dr d\phi\right) = -\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\right)^2 r dr d\phi \\
\bar{F}_{1\hat{z}} &= \oint_S -\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\right)^2 r dr d\phi = -\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\right)^2 2\pi\frac{R^2}{2} = -2\mu_0\pi\left(\frac{1}{3}\sigma R^2\omega\right)^2
\end{aligned}$$

Pasemos a analizar ahora la semiesfera,

$$\left(\overleftrightarrow{T}\cdot d\bar{a}\right)_z=\frac{1}{\mu_0}\left(\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r}_z+\sin\theta\,\hat{\theta}_z\right)\right)\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(2\cos\theta)R^2\sin\theta\,d\theta d\phi\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}\right)^2(4\cos^2\theta+\sin^2\theta)\right)(R^2\sin\theta\,d\theta d\phi\cos\theta)\right)$$
$$=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\mu_0\frac{4}{3}\pi R^3(\sigma\omega R)}{4\pi R^3}\right)^2\left[(3\cos^2\theta-1)(2\cos\theta)R^2\sin\theta\,d\theta d\phi\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(3\cos^2\theta+1)(R^2\sin\theta\,d\theta d\phi\cos\theta)\right]$$
$$=\mu_0\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R\right)^2(12\cos^2\theta-4-3\cos^2\theta-1)\left(\frac{1}{2}R^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta d\phi\right)$$
$$=\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R^2\right)^2(9\cos^2\theta-5)\sin\theta\cos\theta\,d\theta d\phi$$
$$\bar{F}_{2\hat{z}}=\oint_S\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R^2\right)^2(9\cos^2\theta-5)\sin\theta\cos\theta\,d\theta d\phi$$
$$=\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R^2\right)^2 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(9\cos^3\theta-5\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$
$$=\mu_0\pi\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R^2\right)^2\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\mu_0\pi}{4}\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R^2\right)^2$$

Ahora las sumamos para obtener la fuerza de ambas partes,

$$\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2=-2\mu_0\pi\left(\frac{1}{3}\sigma R^2\omega\right)^2\hat{z}-\frac{\mu_0\pi}{4}\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R^2\right)^2\hat{z}=-\mu_0\pi\left(2+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\sigma\omega R^2\right)^2\hat{z}$$

Por lo tanto,

$$\bar{F}=-\mu_0\pi\left(\frac{1}{2}\sigma\omega R^2\right)^2\hat{z}$$

2.- Problema: (25pts)

(a) Considera dos cargas puntuales iguales q, separadas una distancia $2a$. Considerando un plano equidistance de ambas cargas, calcula la fuerza entre ambas cargas integrando el tensor de esfuerzos de Maxwell sobre dicho plano.

(b) Repite el cálculo anterior considerando cargas de distinto signo.

El tensor de esfuerzos de Maxwell para la dirección $\hat{z}$ es:

$$\left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a}\right)_z = T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z$$

En el plano xy, se tiene que $da_x = da_y = 0$, así que solo consideramos da_z :

$$\left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a}\right)_z = T_{zz}da_z = \epsilon_0\left(E_zE_z - \frac{1}{2}E^2\right)(-rdrd\theta)$$

Donde ya conocemos la expresión del campo eléctrico a una distancia

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\frac{q}{\mathrm{r}^2}\cos\theta\,\hat{r}$$

Usando $\cos\theta = \frac{a}{r}$, se obtiene E_z y E^2, $E_z = 0$, $E^2 = \left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{r^2}{(r^2+a^2)^3}$. Sustituyamos

$$\left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a}\right)_z = \epsilon_0\left(0 - \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{r^2}{(r^2+a^2)^3}\right)(-rdrd\theta) = \epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{r^2}{(r^2+a^2)^3}rdrd\theta$$

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a} = \oint_S \epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{r^2}{(r^2+a^2)^3}rdrd\theta \\ &= \epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\int_0^\infty\frac{r^3}{(r^2+a^2)^3}dr\int_0^{2\pi}d\theta = \epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 2\pi\frac{1}{4a^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4a^2}\end{aligned}$$

Al considerar cargas de distinto signo se tiene que,

$$\bar{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\frac{q}{\mathrm{r}^2}\cos\theta\,\hat{r}$$

Usando $\sin\theta = \frac{a}{r}$, se obtiene E_z y E^2, $E_z^2 = E^2 = \left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{(r^2+a^2)^3}$. Sustituyamos

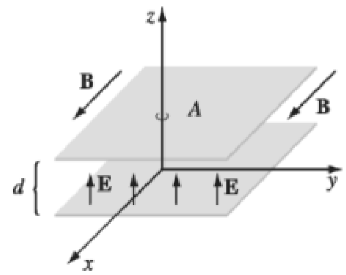
$$\begin{aligned}\left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\bar{a}\right)_z &= \epsilon_0\left(\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{(r^2+a^2)^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{(r^2+a^2)^3}\right)(-rdrd\theta) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{(r^2+a^2)^3}rdrd\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \oint_S -\frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{(r^2+a^2)^3}rdrd\theta = -\epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2\int_0^\infty\frac{r}{(r^2+a^2)^3}dr\int_0^{2\pi}d\theta \\ &= -\epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 2\pi\frac{1}{4a^4} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4a^2}\end{aligned}$$

3.- Problema: (25pts) Un capacitor de placas paralelas cargadas uniformemente genera un campo eléctrico uniforme entre las placas. El capacitor se coloca en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{e}_x$, como se muestra en la figura.

(a) Calcula el momento electromagnético entre las placas.

(b) Un alambre con cierta resistencia une ambas placas del capacitor (a lo largo del eje $\hat{e}_z$) por lo que el capacitor se comienza a descargar lentamente. La corriente que pasa por el alambre experimentará una fuerza magnética. ¿Cuál es el impulso total cedido al sistema durante toda la descarga del capacitor?



a)

El momento electromagnético está relacionado con el momento de la densidad de energía del campo electromagnético. Para un capacitor en presencia de un campo magnético uniforme, el momento electromagnético se puede expresar como: $\bar{p}_{em} = \epsilon_0 \bar{E} \times B\bar{A}$

Con ϵ_0 la permitividad del vacío, $\bar{E}$ es el campo eléctrico entre las placas, B es el campo magnético externo y $\bar{A}$ es el área entre las placas en la dirección perpendicular al campo eléctrico y al campo magnético.

El campo magnético es $\bar{B} = B\hat{x}$ y el campo eléctrico $\bar{E}$ es en dirección $\hat{z}$, $\bar{p}_{em} = \epsilon_0 EBAd\hat{y}$

donde d es la distancia entre las placas del capacitor.

b)

cuando el capacitor se descarga a través de un alambre con cierta resistencia, se produce una corriente. La corriente en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza de Lorentz dada por: $\bar{F} = I\bar{l} \times \bar{B}$, con $\bar{l}$ en dirección $\hat{z}$ y $\bar{B}$ en dirección $\hat{x}$.

La corriente total descargada produce un impulso que se puede calcular mediante la integral de la fuerza en el tiempo. Al integrar, el impulso total es:

$$\bar{I} = \int_0^\infty \bar{F}dt = \int_0^\infty I(\bar{l} \times \bar{B})dt = \int_0^\infty \left(-\frac{dQ}{dt}\right)Bd\hat{y}dt = Bd\hat{y}\int_\infty^0 dQ = BQd\hat{y} \Rightarrow \bar{I} = BQd\hat{y}$$

La carga inicial Q en el capacitor relacionada el campo eléctrico inicial E y el área A de las placas:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \Rightarrow Q = \epsilon_0 AE \Rightarrow \bar{I} = \epsilon_0 BAEd\hat{y}$$

4.- Problema: (25pts) Considera un capacitor de placas paralelas infinitas de modo que la placa inferior, localizada en $z = -d/2$, posee una densidad superficial de carga $-\sigma$ y la placa superior, localizada en $z = d/2$, posee una densidad de carga superficial σ.

(a) Calcula las nueve componentes del tensor de esfuerzos de Maxwell en la región entre las placas. Escribe el resultado como una matriz de 3×3.

(b) Empleando la siguiente ecuación, válida para el caso estático,

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{a}$$

calcula la fuerza electromagnética por unidad de área en la placa superior.

(c) Calcula el momento electromagnético, por unidad de área y por unidad de tiempo, que cruza el plano XY (o cualquier otro plano paralelo al plano XY entre las placas del capacitor).

(d) Para que las placas del capacitor no se muevan deberá existir una fuerza adicional que las contenga. Puedes pensar que existe entre las placas un cierto dieléctrico que las detiene. Supón ahora que dicho dieléctrico se quita repentinamente, de modo que el momento que calculaste en el inciso anterior lo absorben las placas y éstas comienzan a moverse. Calcula el momento por unidad de tiempo cedido a la placa superior (que es la fuerza actuando sobre dicha placa) y compara tu resultado con el del inciso (b). ***Nota:*** *No es que haya aparecido una fuerza adicional, sino más bien es otra forma alternativa de calcular la misma fuerza calculada en (b), calculada a partir de la ley de fuerzas, mientras que en el inciso (d) la calculaste a partir de la conservación de momento.*

a) El tensor de esfuerzos de Maxwell, T_{ij}, está dado por: $T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2 \right)$

Sabemos que entre las placas del capacitor hay un campo eléctrico uniforme.

La placa inferior $z = -\frac{d}{2}$ tiene una densidad superficial de carga $-\sigma$. La placa superior $z = \frac{d}{2}$ tiene una densidad superficial de carga σ.

La magnitud del campo eléctrico entre las placas es $E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, por Ley de Gauss. Por otra parte, observemos que esto es debido a que el campo eléctrico está dirigido en solo esa dirección, con esto en mente tenemos que $E_x = E_y = 0$. Por lo que, $E^2 = E_x + E_y + E_z = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2}$.

Todo componente fuera de la diagonal es inmediatamente 0, pues cuando $i \neq j$, tenemos que al menos una de las componentes E_i o E_j es 0. Implicando que $T_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

$$T_{xx} = \epsilon_0 \left(E_x E_x - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \right) = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}, \qquad T_{yy} = \epsilon_0 \left(E_y E_y - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \right) = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$T_{zz} = \epsilon_0 \left(E_z E_z - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \right) = \epsilon_0 \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \right) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Finalmente, podemos escribir el tensor de esfuerzos de Maxwell en la región entre las placas como una matriz:

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Veamos que se nos pide la fuerza por unidad de área en la placa superior, por lo que solo usamos la componente T_{zz} del tensor de esfuerzos, que es la presión electromagnética en la dirección$\hat{z}$.

$$F_z = \iint T_{zz} da_z = \iint \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}(-dxdy\hat{z}) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}A\hat{z}$$

La fuerza total por unidad de área, que llamaremos f, es entonces:

$$f = \frac{F_z}{A} = \frac{\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}A\hat{z}}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

c) Tenemos que la componente T_{zz} representa el flujo de momento electromagnético en la dirección $\hat{z}$ a través de una superficie perpendicular a $\hat{z}$, es decir, a través de cualquier plano paralelo al plano XY dentro de la región entre las placas del capacitor.

T_{zz} indica cuánta cantidad de momento electromagnético atraviesa el plano XY por unidad de área y por unidad de tiempo en la dirección $\hat{z}$. En otras palabras, T_{zz} nos da directamente el valor del flujo de momento electromagnético en la región entre las placas.

Por lo tanto, el momento electromagnético por unidad de área y por unidad de tiempo que cruza el plano XY es:

$$\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

d) Podemos interpretar T_{zz} como la fuerza por unidad de área que el campo electromagnético ejerce sobre la placa superior una vez que el dieléctrico es removido. Esta fuerza por unidad de área es: $f = T_{zz} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

Para obtener la fuerza total sobre la placa superior, multiplicamos la fuerza por unidad de área:

$$F = f \cdot A = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}A$$

Esta es la fuerza total que actúa sobre la placa superior en la dirección z después de retirar el dieléctrico. En el inciso (b), calculamos la misma fuerza utilizando el tensor de esfuerzos de Maxwell, y llegamos a la misma expresión:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}A$$

El enfoque en este inciso (d) utiliza la conservación de momento electromagnético para obtener la misma fuerza que en el inciso (b), pero de una manera diferente. Ambos métodos son válidos y consistentes, y llevan al mismo resultado:

La fuerza calculada en ambos incisos corresponde a la presión ejercida por el campo eléctrico entre las placas, y representa el empuje que experimentan las placas una vez que el dieléctrico es removido.