Mecánica Vectorial (2022-2)

Actividad 1

Sebastián González Juárez **Grupo 8110: Mirna Villavicencio Torres**

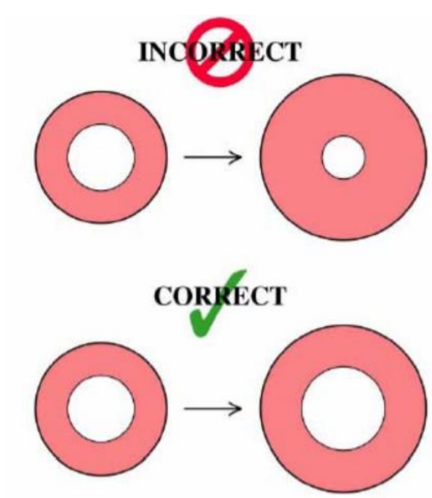
1. Iniciemos nuestro semestre con un problema para pensar. Por favor, primero piensa y escribe la que consideres es la respuesta correcta y explica por qué crees que es así, es decir, estarás formulando una hipótesis, lo que muchas veces lleva a la adquisición de nuevos conocimientos. Posteriormente, puedes buscar este problema en algún libro o la internet y verifica si tu respuesta fue correcta o no, o bien, puedes realizar un diseño experimental que te ayude a verificar tu hipótesis.

El problema es el siguiente:

Es bien sabido que por lo general los objetos se expanden al calentarse. Por ejemplo, una placa de hierro se expande cuando se calienta colocándola en un horno caliente. Ahora, considera que tienes una placa metálica a la que se le ha hecho un agujero en el centro. ¿Qué pasará con el agujero cuando se caliente la placa? ¿se agradará o se contraerá cuando haya dilatación?

¿Qué pienso que sucederá? Me imagino que como la placa metálica tiene un agujero en el centro, esta al ser calentada tendrá que expandirse también, provocando así, que el agujero se haga más pequeño. Por lo tanto, en mi opinión se contraerá el agujero.

¿Qué sucede realmente? Sucede que, al calentar la placa metálica, esta se expande y se hace más grande y provoca que el centro del agujero también se expanda. Esto en el caso de que, al ser calentada la placa, esta sea calentada proporcionalmente en toda su forma, par que así la expansión se lleve en todas partes por igual y haga que la placa metálica aumente su tamaño en todas direcciones.



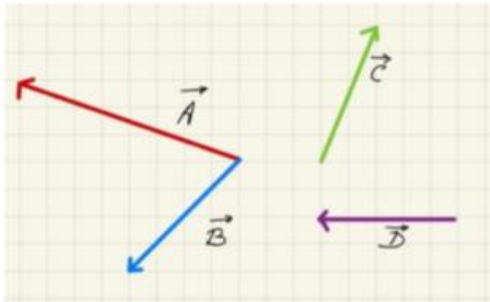
2. Observa los vectores que aparecen en la figura. Sin utilizar ningún sistema de coordenadas realiza las siguientes operaciones, esto es, solo aplica el método gráfico:

$i)\ \vec{A}+\vec{B}$

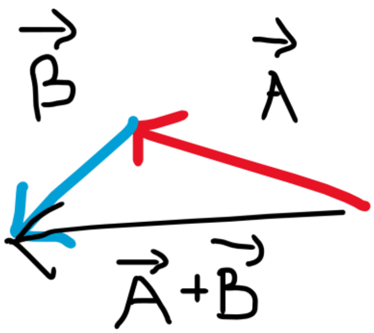
$ii)\ \vec{A}-\vec{B}$

$iii)\ 2\vec{A}-\vec{B}$

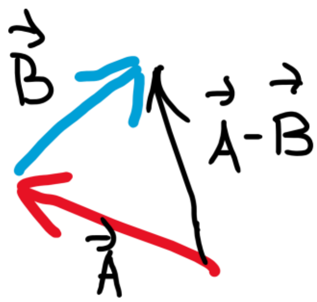
$iv)\ \vec{C}+\vec{D}$



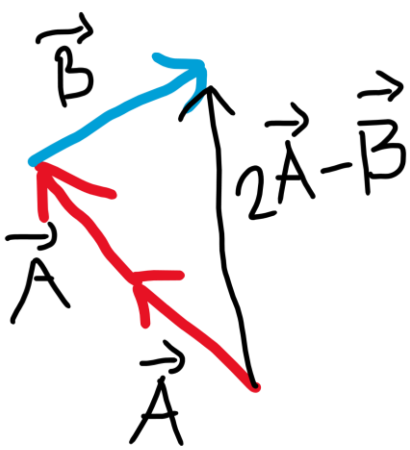
$i)\ \vec{A}+\vec{B}$



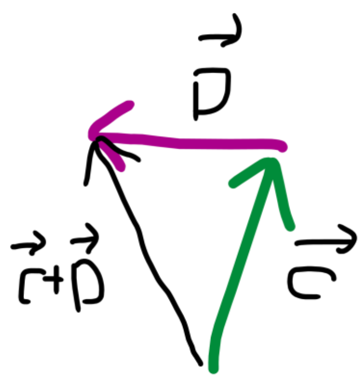
$ii)\ \vec{A}-\vec{B}$



$iii)\ 2\vec{A}-\vec{B}$



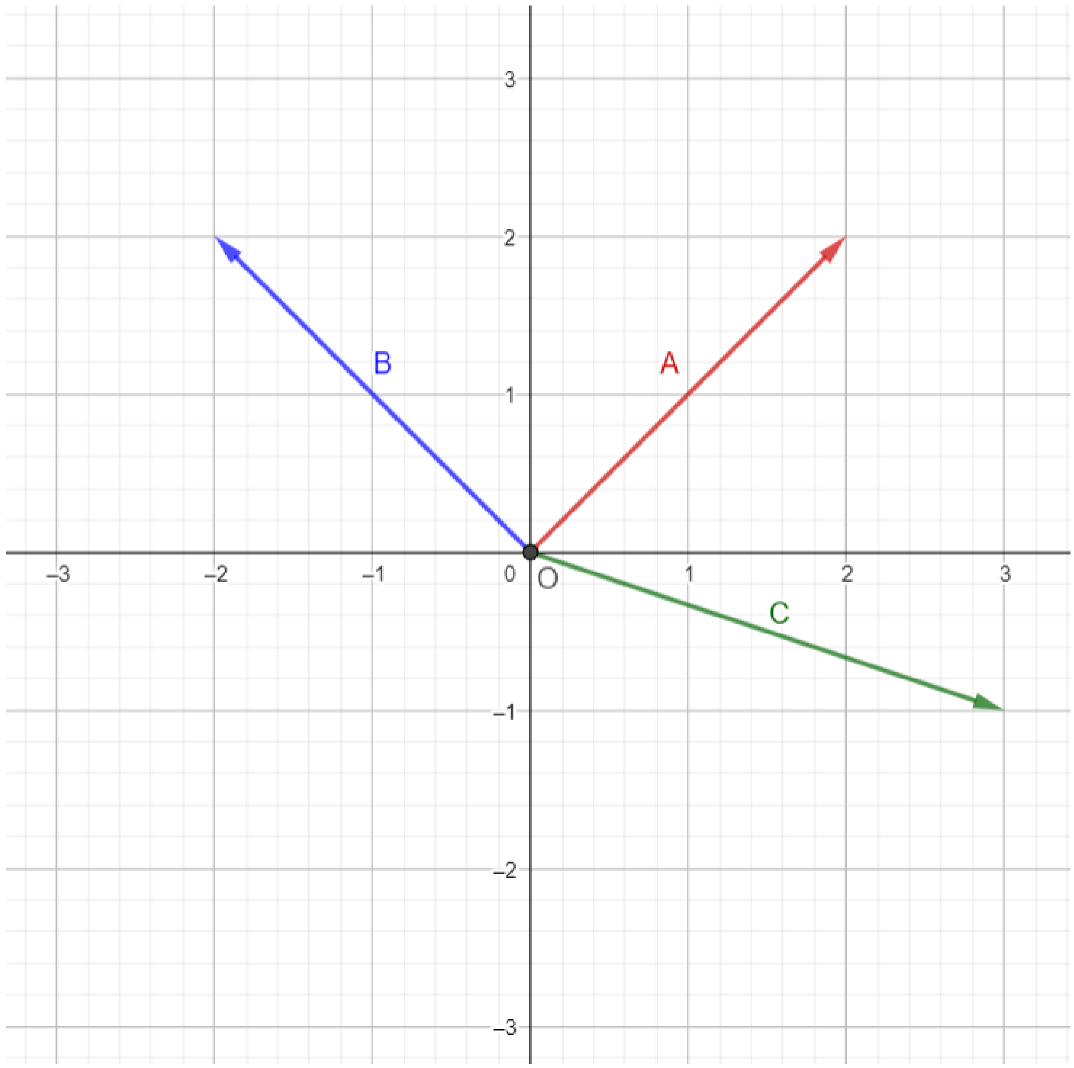
$iv)\ \vec{C}+\vec{D}$



3. Trabajemos en dos dimensiones. Considera los vectores

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j}, \quad \vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j}, \quad \vec{C} = 3\hat{i} - \hat{j}$$

i) Dibuja a cada uno de estos tres vectores en el plano.



ii) Escribe a estos vectores en coordenadas polares, es decir, encuentra el ángulo θ que hacen con el eje x y la magnitud r de cada vector

Recordemos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$V = \langle r, \theta \rangle$$

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°$$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$A = \langle 2\sqrt{2}, 45° \rangle$$

$\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right) = \tan^{-1}(-1) = -45° \Rightarrow \theta = 135°$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$B = \langle 2\sqrt{2}, 135° \rangle$$

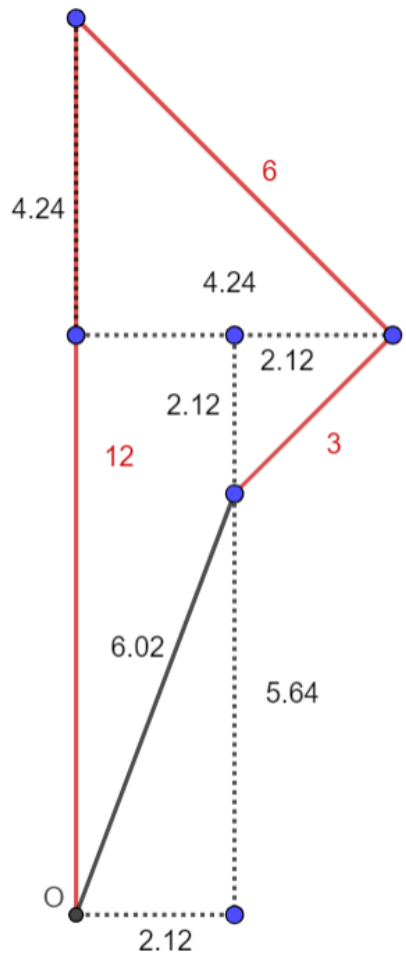
$\vec{C} = 3\hat{i} - \hat{j}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = -18.435° \Rightarrow \theta = 341.565°$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$C = \langle \sqrt{10}, 341.565° \rangle$$

4. Un jugador de golf mete la pelota en el hoyo en tres golpes. El primer golpe desplaza la pelota 12.0 pies hacia el norte; el segundo, 6.0 pies al sureste y el tercero, 3.0 pies al suroeste. ¿Qué desplazamiento sería necesario para meter la pelota en el hoyo al primer golpe?



Primero la pelota se dirige 12.0 pies al norte, no tenemos ningún problema porque solo se ha dirigido respecto a uno de nuestros ejes, si lo graficáramos.

Después no dice que se dirigió 6.0 pies al sureste y recordemos que se forma un ángulo de 45° en un hipotético triángulo que formamos, además este triángulo sería un rectángulo y podemos usar el teorema de Pitágoras. Sabemos que 2 de sus lados valen lo mismo y que la hipotenusa debe valer 6, entonces:

$$a^2 + a^2 = 6^2$$

$$2a^2 = 36$$

$$a^2 = 18$$

$$a = \sqrt{18}$$

$$a \approx 4.24$$

Ahora, el tercer golpe provoca que la pelota se dirija 3.0 pies al suroeste, de igual modo sucede algo muy parecido al golpe anterior, se formara un triángulo rectángulo con 2 lados iguales, pero con el valor de la hipotenusa igual a 3.

$$b^2 + b^2 = 3^2$$

$$2b^2 = 9$$

$$b^2 = \frac{9}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$b \approx 2.12$$

Ahora lo que sigue es encontrar las coordenadas del hoyo.

$$x = \sqrt{18} - \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 2.12$$

$$y = 12 - \sqrt{18} - \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 5.64$$

Por lo tanto, las coordenadas del hoyo son en (2.12,5.64) respecto al origen, que es la ubicación de donde se empezó a tirar.

Encontremos la magnitud de un vector ubicado en esas coordenadas, así obtenemos la distancia del hoyo con respecto al origen.

$$d = \sqrt{2.12^2 + 5.64^2} \approx 6.025$$

En conclusión, para meter hoyo en uno, se necesita hacer un tiro dirigido a las coordenadas (2.12,5.64) que recorra una distancia de 6.025.

5. Considera los vectores:

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}, \quad \vec{b} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}, \quad \vec{c} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

Encuentra

$i)\vec{b} + \vec{c}$

$ii)\ 3\vec{a} - 2\vec{b}$

$iii)\ \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

$iv)\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

$v)\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

$$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k},\ \ \vec{b} = -\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k},\ \ \vec{c} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$i)\vec{b} + \vec{c}$

$$= \left(-\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) + \left(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) = (-\hat{\imath} + 2\hat{\imath}) + (-4\hat{\jmath} + 2\hat{\jmath}) + \left(2\hat{k} + \hat{k}\right) = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

$ii)\ 3\vec{a} - 2\vec{b}$

$$= 3\left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) - 2\left(-\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) = \left(9\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 6\hat{k}\right) - \left(-2\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right)$$

$$= \left(9\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 6\hat{k}\right) + \left(2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 4\hat{k}\right) = (9\hat{\imath} + 2\hat{\imath}) + (9\hat{\jmath} + 8\hat{\jmath}) + \left(6\hat{k} - 4\hat{k}\right)$$

$$= 11\hat{\imath} + 17\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$iii)\ \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

$$= \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(\left(-\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \times \left(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right)\right)$$

$$= \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \hat{\imath} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \hat{\imath}[(-4)(1) - (2)(2)] - \hat{\jmath}[(-1)(1) - (2)(2)] + \hat{k}[(-1)(2) - (2)(-4)]$$

$$= \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \hat{\imath}[-4 - 4] - \hat{\jmath}[-1 - 4] + \hat{k}[-2 + 8] = \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(-8\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}\right)$$

$$= \left(3\hat{\imath} \cdot \widehat{-8}\hat{\imath}\right) + (3\hat{\jmath} \cdot 5\hat{\jmath}) + \left(2\hat{k} \cdot 6\hat{k}\right) = -24 + 15 + 12 = 3$$

$iv) \vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

$$\left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(\left(-\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) + \left(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right)\right) = \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \cdot \left(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}\right)$$

$$= (3\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}) + (3\hat{\jmath} \cdot -2\hat{\jmath}) + \left(2\hat{k} \cdot 3\hat{k}\right) = 3 - 6 + 6 = 3$$

$v) \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

$$= \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \times \left(\left(-\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \times \left(2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right)\right)$$

$$= \left(3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}\right) \times \left(-8\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ -8 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}[(3)(6) - (5)(2)] - \hat{\jmath}[(3)(6) - (-8)(2)] + \hat{k}[(3)(5) - (-8)(3)]$$

$$= \hat{\imath}[18 - 10] - \hat{\jmath}[18 + 16] + \hat{k}[15 + 24] = 8\hat{\imath} - 34\hat{\jmath} - 39\hat{k}$$