



Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Electromagnetismo II – Tarea 3

Profesores:

Dr. Alejandro Reyes Coronado

Ayud. Daniel Espinosa González

Ayud. Atzin López Tercero

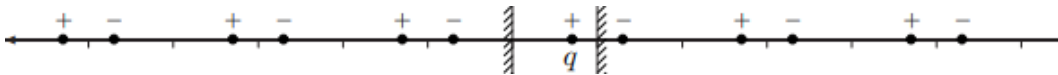
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx



1.- Problema: (20pts) Dos planos conductores infinitos metálicos están aterrizados y separados una distancia d . Una carga puntual q se coloca en la región entre ambos planos, a una distancia x de una placa.

- Calcula la fuerza total que siente la carga q .
- Calcula el límite $d \rightarrow \infty$ y confirma que se recupera el caso de una carga y un solo plano.
- Calcula la fuerza cuando $x = (d/2)$ y verifica que es el resultado que esperas.



Definamos el sistema de coordenadas con los dos planos conductores paralelos conectados a tierra en $z = 0$ (placa inferior) y $z = d$ (placa superior). La carga puntual q se coloca a una distancia x de la placa inferior, i. e. su posición es $z = x$. Usemos método de imágenes, hay que colocar cargas imágenes con su signo a cierta distancia. Tenemos infinitas cargas imágenes a lo largo del eje en ambas direcciones, entre más nos alejamos las fuerzas ejercidas serán cada vez más menores. Consideremos x' de modo que $d = x + x'$, i. e. es la distancia al plano que tenga a la derecha. Notemos que la distancia entre las cargas es $2x' = 2(d - x)$. Con las demás cargas imágenes solo bastara sumar nd , para el sistema de cargas positivo a negativo podemos utilizar la expresión $nd + 2(d - x)$ para la distancia, pero observamos que en los sistemas negativo a positivo tendremos $nd - 2(d - x)$. Por principio de superposición podemos calcular la fuerza (solo ejercida en dirección de z),

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \left\{ \frac{1}{[2(d-x)]^2} + \frac{1}{[2d+2(d-x)]^2} + \frac{1}{[4d+2(d-x)]^2} + \dots - \frac{1}{[2(d-x)]^2} - \frac{1}{[2d-2(d-x)]^2} - \frac{1}{[4d-2(d-x)]^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4} \left\{ \left[\frac{1}{(d-x)^2} + \frac{1}{(2d-x)^2} + \frac{1}{(3d-x)^2} + \dots \right] - \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d+x)^2} + \frac{1}{(2d+x)^2} + \dots \right] \right\}$$

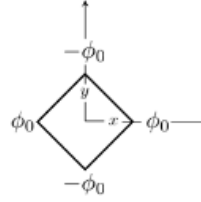
Observemos que $\lim_{d \rightarrow 0} F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4} \left\{ [0 + 0 + 0 + \dots] - \left[\frac{1}{x^2} + 0 + 0 + \dots \right] \right\} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2x)^2}$

Se recupera el caso de una carga y un solo plano.

Y con $x = \frac{d}{2}$, es evidente por intuición y por geometría debería dar la fuerza debería ser nula.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4} \left\{ \left[\frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3d}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{5d}{2}\right)^2} + \dots \right] - \left[\frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3d}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{5d}{2}\right)^2} + \dots \right] \right\} = 0$$

2. Problema: (20pts) El eje \hat{e}_z corre a lo largo del centro de una línea infinita de un ducto de ventilación con sección transversal cuadrada. Para un conductor de metal real (no un conductor perfecto), el potencial electrostático $\phi(x, y)$ varía de forma lineal a lo largo de las paredes del ducto. Considera que las esquinas del ducto en $(\pm a, 0)$ se mantienen a un potencial $+\phi_0$ y los vértices del ducto en $(0, \pm a)$ se mantienen a un potencial $-\phi_0$, como se muestra en la figura.



Calcula el potencial dentro del ducto comenzando con la solución de prueba:

$$\phi(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy. \quad (1)$$

De inicio se nos da la solución de la prueba para el potencial $\phi(x, y)$, la cual está dada por:

$$\phi(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy$$

La simetría del problema nos permite simplificar la solución. Se observa que, debido a la simetría del ducto, el potencial debe ser el mismo si intercambiamos x por $-x$ o y por $-y$. Esto implica que los términos que cambian de signo bajo estas transformaciones (es decir, los términos lineales y el término cruzado deben ser cero. Por lo tanto, $B = C = F = 0$, y la solución simplificada se reduce a: $\phi(x, y) = A + Dx^2 + Ey^2$. El potencial dentro del ducto debe satisfacer la ecuación de Laplace, que para dos dimensiones se expresa como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Dado que $\phi(x, y) = A + Dx^2 + Ey^2$, calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2D, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2E$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace, obtenemos: $2D + 2E = 0 \Rightarrow D = -E$

Entonces, la solución se simplifica aún más a: $\phi(x, y) = A + D(x^2 - y^2)$

Para determinar A y D , usamos las condiciones de contorno dadas en las esquinas del ducto:

1. En $(a, 0)$, el potencial es $(+\phi_0)$, por lo que: $\phi(a, 0) = A + Da^2 = \phi_0$
2. En $(0, a)$, el potencial es $(-\phi_0)$, por lo que: $\phi(0, a) = A - Da^2 = -\phi_0$

Para tener sentido, entonces $A = 0$ y $D = \phi_0/a^2$

Por lo tanto, la solución final para el potencial es:

$$\phi(x, y) = \frac{\phi_0}{a^2} (x^2 - y^2)$$

Esta es la expresión que describe el potencial electrostático dentro del ducto cuadrado, considerando las condiciones de contorno y la simetría del problema.

3. Problema: (20pts) Un conjunto de constantes α_n parametriza el potencial en un volumen $r < a$ como

$$\phi_{\text{ext}}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

Sea \hat{e}_z apuntando en la dirección $\theta = 0$ y considera una esfera conductora sólida de radio $R < a$ en el origen. Muestra que la fuerza ejercida sobre la esfera cuando se conecta a tierra está en la dirección z con magnitud

$$F_z = 4\pi\epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\alpha_n\alpha_{n+1}. \quad (3)$$

Hint: Los polinomios de Legendre satisfacen que $(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$.

Consideramos una esfera conductora de radio R en un volumen donde se da un potencial ($\phi_{\text{ext}}(r, \theta)$), expresado como una serie infinita de polinomios de Legendre, de la forma:

$$\phi_{\text{ext}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \alpha_n P_n(\cos \theta)$$

donde α_n son constantes y $P_n(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre. Queremos calcular la fuerza eléctrica sobre la esfera debido a la distribución de carga inducida. Dado que la esfera es conductora, el potencial en su superficie es constante, y podemos dividir el problema en dos regiones:

1. Dentro de la esfera ($r \leq R$): Aquí, el potencial interno debe satisfacer la ecuación de Laplace, y la condición de frontera en la superficie $r = R$ es que el potencial debe igualar el externo. Así, el potencial interno $\phi_0(r, \theta)$ es:

$$\phi_0(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{R^n} \right) \alpha_n P_n(\cos \theta)$$

donde los términos se han ajustado para asegurar la continuidad y satisfacer las condiciones de frontera.

2. Fuera de la esfera ($r \geq R$): En esta región, el potencial externo $\phi_e(r, \theta)$ toma la forma estándar de una serie multipolar, dado por:

$$\phi_e(r, \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} \right) \alpha_n P_n(\cos \theta)$$

Esta forma asegura que el potencial cae a cero a medida que r tiende al infinito, como es de esperar para un problema electrostático.

Ahora podemos calcular la densidad de carga inducida sobre la discontinuidad que se da en la esfera, de modo que considerando ambos potenciales:

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial(\phi_0 + \phi_e)}{\partial r} \right|_{r=R}$$

La derivada de la primera expresión:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} \frac{1}{R} P_n(\cos \theta)$$

$$\text{si } r = R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n P_n(\cos \theta)$$

La derivada de la segunda expresión:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \alpha_n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \frac{R}{r^2} P_n(\cos \theta)$$

$$\text{si } r = R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \alpha_n P_n(\cos \theta)$$

Al sumar ambas contribuciones, la densidad superficial de carga es:

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} (n + (n+1)) \alpha_n P_n(\cos \theta) = -\epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{\alpha_n}{R} P_n(\cos \theta)$$

Con la densidad de carga podemos calcular la fuerza total. La fuerza sobre la esfera debida a la densidad de carga inducida se calcula mediante la integral de la densidad de carga y el campo eléctrico. La fuerza neta está dada por:

$$\vec{F} = \int_S \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n} dS$$

Donde el vector normal está dado por: $\hat{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z$, acá podemos notar que, al realizar la integración, con el vector normal implicado sobre la superficie $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$, y con $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, la única componente que prevalece es la de \hat{e}_z . Se tomará el cambio de variable $x = \cos \theta$. Por lo tanto, la fuerza en esa dirección y tomando los índices n y k y desarrollando llegamos a:

$$F_z = \pi \epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (2n+1)(2k+1) \alpha_n \alpha_k \int_{-1}^1 x P_n(x) P_k(x) dx$$

Además, podemos utilizar lo que nos dice el Hint,

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

$$xP_n(x) = \frac{1}{2n+1} [(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)]$$

Usemos esta relación de recurrencia para los polinomios de Legendre:

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x)$$

Así,

$$F_z = \pi \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (2n+1)(2k+1) \alpha_n \alpha_k \int_{-1}^1 P_k(x) \left(\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) \right) dx$$

Acá es importante recordar las propiedades de ortogonalidad, en las que la integral obtenemos una delta de Kronecker, la cual es igual a 1 cuando $n = k$ y 0 cuando $n \neq k$.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_k(x) dx = \frac{2\delta_{nk}}{2n+1}$$

Esto implica que la integral será cero a menos que $n = k$, es decir, cuando los índices de los polinomios coincidan. Aplicamos esto en las dos integrales resultantes.

Primero, la integral que contiene $P_{n+1}(x)$:

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_{n+1}(x) dx = \frac{2}{2n+3} \delta_{k,n+1}$$

Segundo, la integral que contiene $P_{n-1}(x)$:

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_{n-1}(x) dx = \frac{2}{2n-1} \delta_{k,n-1}$$

Sustituimos en la expresión de F_z :

$$F_z = \pi \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (2n+1)(2k+1) \alpha_n \alpha_k \left(\frac{n+1}{2n+1} \delta_{k,n+1} + \frac{n}{2n+1} \delta_{k,n-1} \right)$$

Dado que las integrales no nulas ocurren solo cuando $k = n+1$ o $k = n-1$, las sumas sobre k se pueden simplificar. Sustituyendo estas expresiones:

$$F_z = 2\pi \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+3)}{2n+1} \alpha_n \alpha_{n+1} \frac{n+1}{2n+3} + 2\pi \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n-1)}{2n+1} \alpha_n \alpha_{n-1} \frac{n}{2n-1}$$

El primer término de la segunda suma no contribuye ya que $\alpha_0 = 0$, lo que significa que la suma empieza en $n = 2$. Luego, se redefine el índice de la suma como $m = n-1$, lo que hace que la segunda suma sea idéntica a la primera. Así, la fuerza queda como:

$$F_z = 2\pi \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n \alpha_{n+1} (n+1) = 4\pi \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \alpha_n \alpha_{n+1}$$

Nota. Estuve horas tratando de desarrollar todos los cálculos, pero por más que intente no me salían, me sería de mucha ayuda si en la solución de la tarea 3 nos mandan la solución completa sin saltos en la explicación. Si bien lo que el profe busca es que entendamos la solución y la física del problema, tras pensarlo e intentar resolverlo o en dado caso el comprender como se hace en las soluciones de los libros, pero en verdad no logre desarrollar este ejercicio y me he quedado con demasiadas dudas.):

4. Problema: (20pts) Dos cascarones esféricos concéntricos de radios a y b ($b > a$) son divididos en dos hemisferios por el mismo plano horizontal, el plano XY . El hemisferio de arriba de la esfera interior y el hemisferio de abajo de la esfera exterior se mantienen a un potencial ϕ_0 . Los otros dos hemisferios se mantienen aterrizados (a potencial cero).

- (i) Calcula el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie en polinomios de Legendre.
- (ii) Incluye términos hasta al menos $l = 4$ y coteja tu solución con la de los casos límite $b \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$.
- (iii) Considera el plano $X = 0$ (plano YZ) y grafica la solución que obtuviste en (i) incluyendo suficientes valores de l en la suma como para que la solución no cambie en las tres primeras cifras significativas. La gráfica la puedes hacer con código de color. Para el cálculo numérico considera $\phi_0 = 1$, $a = 2$ y $b = 3$.

Busquemos la solución a la ecuación de Laplace con las simetrías azimutales descritas en el problema, para ello escojamos las coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

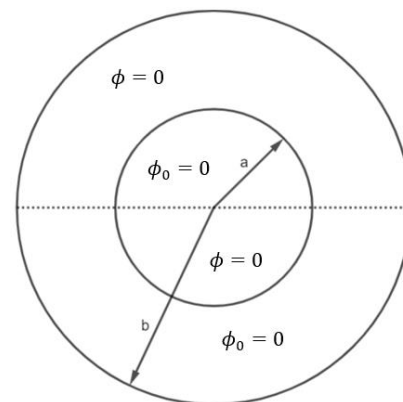
A partir del método de separación de variables obtenemos la solución general:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) = & \sum_l (A_l a^l + B_l r^{-l-1}) (A_{m=0} + B_{m=0} \phi) P_l^{m=0} \cos \theta \\ & + \sum_{m \neq 0, l} (A_l a^l + B_l r^{-l-1}) (A_m e^{im\phi} + B_m e^{-im\phi}) P_l^m \cos \theta \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno son acimutalmente simétricas, el potencial eléctrico no será función de ϕ . La única forma de hacer que la solución general sea independiente de ϕ es establecer $m = 0$ y $B_m = 0$. De este modo,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_l [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l^{m=0} \cos \theta$$

Nota. Trate de resumir la idea, la solución se vio en clase, el demostrarla con mas claridad me llevara más tiempo, así que espero comprendan que vamos a partir de esa solución.



Lo que haremos será pensar en la esfera como si estuviera hecha por piezas, primero por el radio obteniendo 3 diferentes cachos y luego por el ángulo donde se tendrán 2 sub casos por cada caso donde si involucra esta separación. Construyamos las soluciones a partir de la radio.

- $0 \leq r \leq a$, Como en esta pieza el potencial es finito $\Rightarrow B_l = 0 \forall l$:

$$\Phi(0 \leq r \leq a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l \cos \theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l \cos \theta$$

- $a \leq r \leq b$:

$$\Phi(a \leq r \leq b, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l \cos \theta$$

- $b \leq r$, Como en esta pieza al alejarnos Φ tiende a 0, pues es finito $\Rightarrow A_l = 0 \forall l$:

$$\Phi(b \leq r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-l-1}] P_l \cos \theta = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l \cos \theta$$

En resumen,

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l \cos \theta & 0 \leq r \leq a \\ \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l \cos \theta & a \leq r \leq b \\ \sum_{l=0}^{\infty} D_l r^{-(l+1)} P_l \cos \theta & b \leq r \end{cases}$$

Veamos que los otros sub casos suceden cuando ubicamos perpendicular al plano que separa a los cascarones, i.e. al plano XY, así que tenemos condiciones de frontera si visualizamos la simetría que se forma en el eje z.

$$\Phi(r = a, \theta) = \begin{cases} \phi_0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}, \quad \Phi(r = b, \theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \phi_0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Observemos que para $r = a$ tenemos lo siguiente:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l \cos \theta = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l a^l + C_l a^{-(l+1)}] P_l \cos \theta$$

Integremos y multipliquemos por $P_{l'} \cos \theta$, para resolver con la integral de Fourier donde sale una delta de Kronecker (tomando el caso no nulo), también se satisface con otra igualdad por lo del ángulo que da ϕ_0 .

$$\int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l \cos \theta P_{l'} \cos \theta d(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} = \int_0^1 \phi_0 P_{l'} \cos \theta d(\cos \theta)$$

Donde podemos resolver la última integral,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_0 P_{l'} \cos \theta d(\cos \theta) &= \frac{\phi_0}{2l+1} (P_{l+1}(1) - P_{l-1}(1) - P_{l+1}(0) + P_{l-1}(0)) \\ &= \frac{\phi_0}{2l+1} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos considerar

$$A_l a^l \frac{2}{2l+1} = \frac{\phi_0}{2l+1} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \Rightarrow A_l = \frac{\phi_0}{2a^l} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0))$$

Y como,

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l \cos \theta = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l a^l + C_l a^{-(l+1)}] P_l \cos \theta \Rightarrow A_l a^l = B_l a^l + C_l a^{-(l+1)}$$

Si $l = 0$, tenemos la siguiente igualdad de 3 ecuaciones:

$$A_0 a^0 = B_0 a^0 + C_0 a^{-(0+1)} = \frac{\phi_0}{2} (P_{0-1}(0) - P_{0+1}(0))$$

$$A_0 = B_0 + \frac{C_0}{a} = \frac{\phi_0}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{\phi_0}{2}, \quad B_0 = \frac{\phi_0}{2} - \frac{C_0}{a}$$

Si $l \neq 0$, tenemos la siguiente igualdad de 3 ecuaciones:

$$A_l a^l = B_l a^l + C_l a^{-(l+1)} = \frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0))$$

- Observemos que para $r = b$ tenemos lo siguiente:

$$\sum_{l=0}^{\infty} [B_l b^l + C_l b^{-(l+1)}] P_l \cos \theta = \sum_{l=0}^{\infty} D_l b^{-(l+1)} P_l \cos \theta$$

Integremos y multipliquemos por $P_{l'} x$ (pues ahora tomaremos $\cos \theta = x$), para resolver la integral de Fourier donde sale una delta de Kronecker (tomando el caso no nulo), también se satisface con otra igualdad por lo del ángulo que da ϕ_0 .

$$\int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} D_l b^{-(l+1)} P_l x dx = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{D_l}{b^{l+1}} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} = \int_{-1}^0 \phi_0 P_{l'} x dx$$

Donde podemos resolver la última integral,

$$\int_{-1}^0 \phi_0 P_{l'} x dx = \frac{\phi_0}{2l+1} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0) + 2\delta_{l0})$$

Por lo tanto, podemos considerar

$$\frac{D_l}{b^{l+1}} \frac{2}{2l+1} = \frac{\phi_0}{2l+1} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0) + 2\delta_{l0}) \Rightarrow D_l = \frac{\phi_0}{2} b^{l+1} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0) + 2\delta_{l0})$$

Y como,

$$\sum_{l=0}^{\infty} [B_l b^l + C_l b^{-(l+1)}] P_l \cos \theta = \sum_{l=0}^{\infty} D_l b^{-(l+1)} P_l \cos \theta \Rightarrow \frac{D_l}{b^{l+1}} = B_l b^l + \frac{C_l}{b^{l+1}}$$

Si $l = 0$, tenemos la siguiente igualdad de 3 ecuaciones:

$$\frac{D_0}{b^{0+1}} = B_0 b^0 + \frac{C_0}{b^{0+1}} = \frac{\phi_0}{2} (P_{0+1}(0) - P_{0-1}(0) + 2\delta_{00})$$

$$\frac{D_0}{b} = B_0 + \frac{C_0}{b} = \frac{\phi_0}{2} \Rightarrow D_0 = \frac{\phi_0}{2} b, \quad B_0 = \frac{\phi_0}{2} - \frac{C_0}{b}$$

Retomamos que,

$$B_0 = \frac{\phi_0}{2} - \frac{C_0}{a} \Rightarrow C_0 = 0, \quad B_0 = \frac{\phi_0}{2}$$

Si $l \neq 0$, tenemos la siguiente igualdad de 3 ecuaciones:

$$\frac{D_l}{b^{l+1}} = B_l b^l + \frac{C_l}{b^{l+1}} = \frac{\phi_0}{2} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0))$$

Tenemos que:

$$B_l = \frac{\frac{\phi_0}{2} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0))}{a^l} - \frac{C_l}{a^{2l+1}}$$

Además,

$$\begin{aligned} -\frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) &= B_l b^l + \frac{C_l}{b^{l+1}} \Rightarrow -\frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \left(\frac{1}{b^l} + \frac{1}{a^l} \right) \\ &= C_l \left(\frac{1}{b^{2l+1}} - \frac{1}{a^{2l+1}} \right) \\ \Rightarrow C_l &= \frac{-\frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \left(\frac{1}{b^l} + \frac{1}{a^l} \right)}{\frac{1}{b^{2l+1}} - \frac{1}{a^{2l+1}}} = \frac{\phi_0}{2} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0)) \left(\frac{a^{2l+1} b^{l+1} + a^{l+1} b^{2l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{\frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0))}{a^l} - \frac{\frac{\phi_0}{2} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0)) \left(\frac{a^{2l+1} b^{l+1} + a^{l+1} b^{2l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right)}{a^{2l+1}} \\ &= \frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \left(\frac{a^{l+1} b^{l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

Terminando en la siguiente regla de correspondencia para los componentes:

$$\begin{aligned} A_l &= \begin{cases} \frac{\phi_0}{2} & l = 0 \\ \frac{\phi_0}{2a^l} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) & l \neq 0 \end{cases} \\ B_l &= \begin{cases} \frac{\phi_0}{2} & l = 0 \\ \frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \left(\frac{a^{l+1} b^{l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) & l \neq 0 \end{cases} \\ C_l &= \begin{cases} 0 & l = 0 \\ \frac{\phi_0}{2} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0)) \left(\frac{a^{2l+1} b^{l+1} + a^{l+1} b^{2l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) & l \neq 0 \end{cases} \\ D_l &= \begin{cases} \frac{\phi_0 b}{2} & l = 0 \\ \frac{\phi_0}{2} b^l (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) & l \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El problema nos pide el potencial en la región $a \leq r \leq b$:

$$\begin{aligned}
 \Phi(a \leq r \leq b, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[B_l r^l + C_l \frac{1}{r^{l+1}} \right] P_l \cos \theta \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\phi_0}{2} (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \left(\frac{a^{l+1} b^{l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) r^l \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\phi_0}{2} (P_{l+1}(0) - P_{l-1}(0)) \left(\frac{a^{2l+1} b^{l+1} + a^{l+1} b^{2l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) \frac{1}{r^{l+1}} \right] P_l \cos \theta \\
 &= \frac{\phi_0}{2} \left(1 + \sum_{l=0}^{\infty} P_l \cos \theta (P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)) \left[\left(\frac{a^{l+1} b^{l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) r^l \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{a^{2l+1} b^{l+1} + a^{l+1} b^{2l+1}}{a^{2l+1} - b^{2l+1}} \right) \frac{1}{r^{l+1}} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Ahora calculemos los términos hasta $l = 4$,

Los polinomios de Legendre $P_l(\cos \theta)$ para los primeros valores de l son:

$$\begin{aligned}
 P_0(\cos \theta) &= 1 & P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\
 P_1(\cos \theta) &= \cos \theta & P_4(\cos \theta) &= \frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \\
 P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \Phi(r, \theta) \approx \frac{\phi_0}{2} \left\{ 1 + \cos \theta (P_0(0) - P_2(0)) \left[\left(\frac{a^2 b^2}{a^3 - b^3} \right) r - \left(\frac{a^3 b^2 + a^2 b^3}{a^3 - b^3} \right) \frac{1}{r^2} \right] \right. \\
 + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) (P_1(0) - P_3(0)) \left[\left(\frac{a^3 b^3}{a^5 - b^5} \right) r^2 - \left(\frac{a^5 b^3 + a^3 b^5}{a^5 - b^5} \right) \frac{1}{r^3} \right] \\
 + \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) (P_2(0) - P_4(0)) \left[\left(\frac{a^4 b^4}{a^7 - b^7} \right) r^3 - \left(\frac{a^7 b^4 + a^4 b^7}{a^7 - b^7} \right) \frac{1}{r^4} \right] \\
 + \frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) (P_3(0) - P_5(0)) \left[\left(\frac{a^5 b^5}{a^9 - b^9} \right) r^4 \right. \\
 \left. \left. - \left(\frac{a^9 b^5 + a^5 b^9}{a^9 - b^9} \right) \frac{1}{r^5} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Cuando $b \rightarrow \infty$. Vemos que el potencial también lo hará.

Cuando $a \rightarrow 0$. Vemos que el potencial también lo hará.

No supe cómo hacer la gráfica.

Nota. Ejercicio muy complicado y no sé si este era el camino de resolver o no, agradecería que en la solución argumenten y sean claros pues es fácil revolvase con tantas cuentas, además agreguen el código para generar la gráfica.

5. Problema: (20pts) La superficie de una esfera conductora de radio a , centrada en el origen, se divide en cuatro secciones ("gajos") iguales por planos que se intersectan en el eje z . Los "gajos" se mantienen alternadamente a potenciales ϕ_0 y $-\phi_0$.

- (i) Calcula el potencial como una representación en serie (en base esférica) para todos los puntos interiores a la esfera.
- (ii) Calcula explícitamente los términos hasta $l = 2$.
- (iii) Calcula como una representación en serie (en base esférica) la densidad superficial de carga en la superficie de la esfera.
- (iv) Grafica en el plano $Z = 0$ (plano XY) el potencial que calculaste en (i) considerando $\phi_0 = 1$ y $a = 1$, tomando suficientes sumandos como para que la solución no cambie en la tercera cifra decimal. Puedes graficar con código de color.

La solución en coordenadas esféricas presentada en el problema se basa en resolver la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ para un potencial eléctrico ϕ en el interior de una esfera conductora de radio a , centrada en el origen. Dado que no hay cargas en el interior de la esfera (es decir, la densidad de carga $\rho = 0$ en el interior), el potencial debe satisfacer la ecuación de Laplace.

Nota. No se llegó a ver en clase antes del día de la entrega, espero no exista problema con hacer uso de la solución general sin implementar la demostración.

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (r, θ, φ) se puede expresar en términos de una serie de armónicos esféricos. Esto se debe a la simetría esférica del problema. El potencial $\phi(r, \theta, \varphi)$ se puede descomponer como:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

- $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos, que dependen de los ángulos θ (colatitud) y φ (longitud).
- $A_{l,m}$ son los coeficientes de la serie que deben determinarse a partir de las condiciones de frontera.
- r^l aparece porque en el interior de la esfera la solución debe ser regular en el origen (no puede haber términos en r^{-l-1} que diverjan cuando $(r \rightarrow 0)$).

Las condiciones de frontera se aplican en la superficie de la esfera $r = a$, donde se define que el potencial cambia dependiendo del ángulo azimutal φ . Según el problema:

$$\phi(r = a, \theta, \varphi) = \begin{cases} -\phi_0 & 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \phi_0 & \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \end{cases}, \begin{cases} \pi < \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Esta condición indica que la esfera está dividida en cuatro "gajos", cada uno con un potencial alterno de $\pm\phi_0$.

Para satisfacer la condición de frontera, los coeficientes ($A_{l,m}$) deben ser determinados de tal manera que la expansión en armónicos esféricos se ajuste a la distribución de potenciales en la superficie. Esto se hace utilizando la ortogonalidad de los armónicos esféricos, se multiplica

por $Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi)$ e integrando, se tiene (apliquemos lo que hemos estado haciendo con los cos, para simplificar más sencillo):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} a^l Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) d \cos \theta d\varphi \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} a^l \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{l,m}^*(\theta, \varphi) Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) d \cos \theta d\varphi = A_{l',m'} a^{l'} \end{aligned}$$

Así,

$$A_{l,m} = \frac{1}{a^l} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \int_0^{2\pi} \pm \phi_0 e^{-im\varphi} d\varphi \int_{-1}^1 P_l^m(x) dx$$

El único problema es ese cambio de signo provocado por la división de gajos, separemos esa parte para evaluar por regiones,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \pm \phi_0 e^{-im\varphi} d\varphi \\ = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_0 e^{-im\varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \phi_0 e^{-im\varphi} d\varphi - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \phi_0 e^{-im\varphi} d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \phi_0 e^{-im\varphi} d\varphi \\ = \pm \frac{i\phi_0}{m} e^{-im\varphi} \left[\frac{\pi}{2} \middle| \frac{\pi}{2} \right] \left[\frac{3\pi}{2} \middle| \frac{2\pi}{\pi} \right] = \frac{2i\phi_0}{m} (1 + e^{-im\pi} - e^{-im\frac{\pi}{2}} - e^{-3im\frac{\pi}{2}}) \end{aligned}$$

Acá también hay que hacer notar que para m impar,

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} d\varphi = 0$$

Por lo que seguiremos con el caso relevante que es cuando m es par,

$$\int_0^{2\pi} \pm \phi_0 e^{-im\varphi} d\varphi = \frac{2i\phi_0}{m} (1 + 1 - (-1)^k - (-1)^k)$$

Donde para $m = 2^k$ para simplificar, pues si desarrollamos tendremos múltiplos de 2 que no sean de 4, y podemos ver que, en todos los múltiplos de 4, también sucede lo mismo del caso impar, se va a 0.

Se concluye que el coeficiente $A_{l,m}$ solo es diferente de cero cuando $m = 4n + 2$:

$$A_{l,m} = \frac{1}{a^l} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \left(\frac{8i\phi_0}{m} \right) \int_{-1}^1 P_l^m(x) dx$$

Luego se nos pide tomar hasta $l = 2$, dado que $m = \pm 1, 0$ para $l = 0, 1$, y por la propiedad de simetría del problema, se establece que $\phi(\varphi) = 0$. Para $l = 2$ se mantienen los términos con

$m = \pm 2$. Su polinomio de Legendre asociado es: $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Con la derivada segunda: $P_2'(x) = (-1)^2(1 - x^2)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_2(x) = 3(1 - x^2)$.

$$A_{2,2} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{(5)(0)!}{4\pi(4)!}} \left(\frac{8i\phi_0}{2}\right) \int_{-1}^1 3(1 - x^2) dx = \frac{4i\phi_0}{a^2} \sqrt{\frac{5}{4^2\pi(3)(2)}}^4$$

Por lo tanto,

$$A_{2,2} = \frac{4i\phi_0}{a^2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}}, \quad A_{2,-2} = -\frac{4i\phi_0}{a^2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}}$$

Procedamos a calcular el potencial,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4i\phi_0}{a^2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} r^2 [Y_{2,2}(\theta, \varphi) - Y_{2,-2}(\theta, \varphi)]$$

Con los valores de los armónicos esféricos: $Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) = \left(\frac{15}{32}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$

El potencial se reescribe:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{4i\phi_0}{a^2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} r^2 \left(\frac{15}{32}\right)^{1/2} \sin^2 \theta [e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}] = \frac{5\phi_0}{\pi a^2} r^2 \sin(2\varphi) (\cos^2 \theta - 1)$$

Ahora calculemos la carga inducida usando:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{in}} &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi) \Big|_{r=a} \\ &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{l,m} l r^{l-1} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Nota. No supe cómo hacerlo en wólfam, no estoy muy familiarizado con este tipo de actividades, sería de mucha ayuda que en la solución de la tarea agreguen el código para generar la gráfica. Por favor, ya todos sabemos como debe quedar, la duda no es esa, la duda es como generar el código.

6. Problema TORITO: (20pts) Un anillo de radio R tiene una densidad lineal uniforme λ . Una partícula con carga positiva $+q$ y masa m está inicialmente localizada en el centro del anillo y se le da un pequeño empujón (lo que coloquialmente llamamos un “garnuchazo”). Si la partícula está restringida a moverse sobre el plano que contiene al anillo, muestra que el movimiento corresponderá a un movimiento armónico simple (para pequeñas oscilaciones), y calcula su frecuencia. **Hint: Calcula la energía potencial de la partícula cuando está a un radio r (pequeño), integrando sobre el anillo y luego calculando el negativo de la derivada para calcular la fuerza. Necesitarás usar la ley de los cosenos y la serie de Taylor de:**

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3\epsilon^2}{8}.$$

Después de un pequeño empujón, la partícula se mueve sobre el plano que contiene al anillo. Pensemos en un elemento infinitesimal de carga de este anillo, el cual estará dado por $Rd\theta$, podemos determinar la energía potencial debido a la interacción electrostática como:

$$dU = \frac{q(\lambda R)d\theta}{4\pi\epsilon_0 l}$$

Con: q la carga de la partícula en el centro, λ la densidad lineal de carga del anillo, R el radio del anillo, l la distancia entre la carga y el elemento diferencial.

Para calcular esta distancia l , utilizamos la ley de cosenos para el triángulo formado entre el centro del anillo, el elemento infinitesimal de carga en el anillo, y la posición de la partícula desplazada una distancia r del centro: $l = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$

Sustituyendo esta expresión para l en la ecuación de dU , obtenemos la energía potencial diferencial en función de r y θ :

$$dU = \frac{q(\lambda R)d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}$$

Para obtener la energía potencial total, integramos sobre todo el anillo. Como la simetría del problema permite reducir la integral a la mitad del anillo, tenemos:

$$U = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}$$

Dado que estamos interesados en pequeñas oscilaciones podemos utilizar una serie de Taylor para aproximar la raíz cuadrada en el denominador. El Hint del problema nos da la expansión de la serie de Taylor.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3\epsilon^2}{8}$$

Aplicando esta expansión a la integral, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{r^2 - 2Rr \cos \theta}{2R^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{r^2 - 2Rr \cos \theta}{R^2} \right)^2 \right)$$

Nos quedamos con términos hasta segundo orden, ya que solo estamos interesados en pequeñas oscilaciones. Esto da lugar a la siguiente expresión aproximada para la energía potencial:

$$U \approx \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_0^\pi \left[1 + \frac{r^2}{2R^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] d\theta \right).$$

Evaluando esta integral nos da:

$$U \approx \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\pi + \frac{r^2}{4R^2} \pi \right)$$

La energía potencial total resulta ser:

$$U \approx \frac{q\lambda}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right)$$

Para obtener la fuerza que actúa sobre la partícula, usamos que $F = -\nabla U$,

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} r$$

La ecuación de movimiento de la partícula viene dada por la segunda ley de Newton: $F = ma$

Sustituyendo la expresión de la fuerza:

$$ma = -\frac{q\lambda}{4\epsilon_0 R^2} r$$

Esta es la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple, cuya solución general es $r(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, el movimiento de la partícula es un movimiento armónico simple, y la frecuencia de oscilación está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{q\lambda}{4\epsilon_0 m R^2}}.$$