Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Mecánica Analítica

Tarea 6

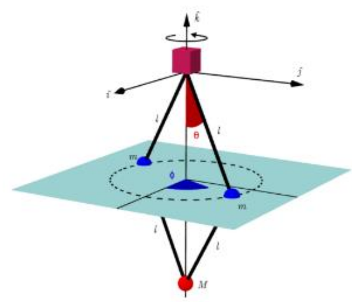
Profesores:
Dra. Rosa María Méndez Vargas

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- (8,16) Analícese el movimiento del regulador del problema 8.15 (Hauser), si la velocidad angular del eje no está restringida a ω, sino que gira libremente sin que tenga ningún momento rotacional externo (o par resistente) aplicado, es decir $\omega = \omega(t)$. **a)** Hállese la velocidad angular de rotación estacionaria para una altura dada, z, del manguito inferior. **b)** Hállese la frecuencia de las pequeñas vibraciones por encima y por debajo de este movimiento estacionario (para ello necesitas identificar un potencial efectivo). **c)** ¿Cuáles son las diferencias entre este movimiento y el del problema 8.15? ¿Qué cantidades se conservan?

Establezcamos las posiciones de las 3 masas, con las cuales obtendremos las energías cinéticas, potencial y de ahí el Lagrangiano y el hamiltoniano del sistema.



$$\bar{r}_{m1} = l\sin\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + l\sin\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - l\cos\theta\,\hat{k}$$
$$\bar{r}_{m2} = l\sin\theta\cos(\phi+\pi)\,\hat{\imath} + l\sin\theta\sin(\phi+\pi)\,\hat{\jmath} - l\cos\theta\,\hat{k}$$
$$\bar{r}_{M} = -2l\cos\theta\,\hat{k}$$

Derivemos para hallar las velocidades,

$$\bar{v}_{m1} = l\big(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\big)\hat{\imath} + l\big(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\big)\hat{\jmath} + l\dot\theta\sin\theta\,\hat{k}$$
$$\bar{v}_{m2} = l\big(\dot\theta\cos\theta\cos(\phi+\pi) - \dot\phi\sin\theta\sin(\phi+\pi)\big)\hat{\imath} + l\big(\dot\theta\cos\theta\sin(\phi+\pi) + \dot\phi\sin\theta\cos(\phi+\pi)\big)\hat{\jmath} + l\dot\theta\sin\theta\,\hat{k}$$
$$\bar{v}_{M} = 2l\dot\theta\sin\theta\,\hat{k}$$

De este modo podemos hallar V^2, para cada una,

$$\begin{aligned}V_{m1}^2 &= l^2\left[\big(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\big)^2 + \big(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\big)^2 + \dot\theta^2\sin^2\theta\right]\\
&= l^2\big[\big(\dot\theta^2\cos^2\theta\cos^2\phi - 2\dot\theta\dot\phi\cos\theta\cos\phi\sin\theta\sin\phi + \dot\phi^2\sin^2\theta\sin^2\phi\big)\\
&\qquad + \big(\dot\theta^2\cos^2\theta\sin^2\phi + 2\dot\theta\dot\phi\cos\theta\sin\phi\sin\theta\cos\phi + \dot\phi^2\sin^2\theta\cos^2\phi\big) + \dot\theta^2\sin^2\theta\big]\\
&= l^2\big[\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{m2}^2 &= l^2\left[\big(\dot\theta\cos\theta\cos(\phi+\pi) - \dot\phi\sin\theta\sin(\phi+\pi)\big)^2 + \big(\dot\theta\cos\theta\sin(\phi+\pi) + \dot\phi\sin\theta\cos(\phi+\pi)\big)^2\right.\\
&\qquad \left. + \dot\theta^2\sin^2\theta\right]\\
&= l^2\big[\big(\dot\theta^2\cos^2\theta\cos^2(\phi+\pi) - 2\dot\theta\dot\phi\cos\theta\cos(\phi+\pi)\sin\theta\sin(\phi+\pi) + \dot\phi^2\sin^2\theta\sin^2(\phi+\pi)\big)\\
&\qquad + \big(\dot\theta^2\cos^2\theta\sin^2(\phi+\pi) + 2\dot\theta\dot\phi\cos\theta\sin(\phi+\pi)\sin\theta\cos(\phi+\pi)\\
&\qquad + \dot\phi^2\sin^2\theta\cos^2(\phi+\pi)\big) + \dot\theta^2\sin^2\theta\big]\\
&= l^2\big[\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2\big]\end{aligned}$$

$$V_M^2 = 4l^2\dot\theta^2\sin^2\theta$$

Ahora podemos calcular la energía cinética del sistema.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 V_{m1}^2 + \frac{1}{2}MV_{m2}^2 + V_M^2 \\
&= \frac{1}{2}ml^2\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right] + \frac{1}{2}ml^2\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right] + \frac{1}{2}M4l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \\
&= ml^2\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right] + 2Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \\
&= l^2\dot{\theta}^2(m + 2\sin^2\theta\,M) + ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2
\end{aligned}
$$

Calculemos la energía potencial estableciendo el cero potencial en el origen del sistema coordenado, así: $U_{m1} = mg(-l\cos\theta)$, $U_{m2} = mg(-l\cos\theta)$, $U_M = Mg(-2l\cos\theta)$. Ahora podemos calcular la energía potencial del sistema.

$$U = mg(-l\cos\theta) + mg(-l\cos\theta) + Mg(-2l\cos\theta) = -2(m+M)gl\cos\theta$$

Tenemos todo para hallar el Lagrangiano,

$$L = T - U = l^2\dot{\theta}^2(m + 2\sin^2\theta\,M) + ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + 2(m+M)gl\cos\theta$$

Procedamos a obtener las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Para θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(l^2\dot{\theta}^2(m + 2\sin^2\theta\,M)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(l^2\dot{\theta}^2(m + 2\sin^2\theta\,M) + ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + 2(m+M)gl\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(2l^2\dot{\theta}(m + 2\sin^2\theta\,M)\right) - \left(Ml^2\dot{\theta}^2 4\sin\theta\cos\theta + 2ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - 2(m+M)gl\sin\theta\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
2l^2m\ddot{\theta} + 8l^2\dot{\theta}^2M\sin\theta\cos\theta + 4l^2M\ddot{\theta}\sin^2\theta - Ml^2\dot{\theta}^2 4\sin\theta\cos\theta - 2ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \\
+ 2(m+M)gl\sin\theta = 0
\end{aligned}
$$

Desarrollando,

$$\ddot{\theta}(m + 2M\sin^2\theta) + \left(2\dot{\theta}^2M - m\dot{\phi}^2\right)\sin\theta\cos\theta + (m+M)\frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Para ϕ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\left(ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}(L) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(2ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) - 0 = 0$$

$$2ml^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + 4ml^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = 0$$

Desarrollando,

$$\ddot{\phi}\sin^2\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\sin(2\theta) = 0$$

Por lo tanto, tenemos las siguientes 2 ecuaciones de movimiento:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta}(m + 2M\sin^2\theta) + \left(2\dot{\theta}^2M - m\dot{\phi}^2\right)\sin\theta\cos\theta + (m+M)\frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\
\ddot{\phi}\sin^2\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\sin(2\theta) = 0
\end{aligned}
$$

Con esto podemos obtener la función de Hamilton para el sistema,

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi}-L$$

Sin embargo, ya habíamos obtenido $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ en pasos anteriores,

$$\begin{aligned}H=&\ 2l^2\dot{\theta}(m+2\sin^2\theta\, M)+2ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta\\&-\left(l^2\dot{\theta}^2(m+2\sin^2\theta\, M)+ml^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2+2(m+M)gl\cos\theta\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H=l^2\dot{\theta}(m+2\sin^2\theta\, M)+ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta-2(m+M)gl\cos\theta$$

Considerando que nos encontramos a una altura z constante, sucede que $\ddot{\theta}=\dot{\theta}=0$, pues tendríamos un θ fijo, es decir constante, podemos simplificar la primera ecuación de Lagrange hallada y despejar $\dot{\phi}$:

$$-m\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta+(m+M)\frac{g}{l}\sin\theta=0\Rightarrow\dot{\phi}^2=\frac{(m+M)g}{ml\cos\theta}$$

Para el manguito inferior:

$$\bar{r}_M=-2l\cos\theta\,\hat{k}=-z\hat{k},\qquad z=2l\cos\theta$$

Esto implica que,

$$\dot{\phi}^2=\frac{2(m+M)g}{mz}\Rightarrow\dot{\phi}=\sqrt{\frac{2(m+M)g}{mz}}$$

Después de haber estudiado el regulador, hemos hallado la velocidad angular de rotación estacionaria para una altura dada, z, del manguito inferior.

Regresando a la energía mecánica del sistema, $H=cte=E$,

$$H=l^2\dot{\theta}(m+2\sin^2\theta\, M)+ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta-2(m+M)gl\cos\theta$$

$$\frac{H}{2l^2}=\frac{l^2\dot{\theta}(m+2\sin^2\theta\, M)+ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta-2(m+M)gl\cos\theta}{2l^2}$$

Tal que como es contaste,

$$E=\frac{1}{2}\dot{\theta}(m+2\sin^2\theta\, M)\dot{\theta}+\frac{m}{2}\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2-(m+M)\frac{g}{l}\cos\theta$$

Observemos que en la ecuación tenemos términos que son proporcionales a las energías cinética y potencial efectivas, tal que m_{ef} y v_{ef}:

$$m_{ef}=m+2\sin^2\theta\, M$$

$$v_{ef}=\frac{m}{2}\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2-(m+M)\frac{g}{l}\cos\theta$$

Para que exista un punto de equilibrio estable, debe cumplir con $\frac{d^2v_{ef}}{d\theta^2}>0$. Busquemos los puntos críticos derivando.

$$\frac{dv_{ef}}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{m}{2}\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2-(m+M)\frac{g}{l}\cos\theta\right)=m\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta+(m+M)\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

Retomando lo hallado en el inciso anterior, a una altura z constante, sucede que $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, lo que implica que para alturas constantes se tiene ángulos constates y estos puntos críticos cuando se hace vibrar el sistema. Tenemos que para estos puntos:

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{2(m+M)g}{mz}$$

Calculemos la segunda derivada,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_{ef}}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(m\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + (m+M)\frac{g}{l}\sin\theta\right) \\
&= m\dot{\phi}^2\cos^2\theta - m\dot{\phi}^2\sin^2\theta + (m+M)\frac{g}{l}\cos\theta \\
&= -m\dot{\phi}^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (m+M)\frac{g}{l}\cos\theta \\
&= -\frac{m2(m+M)g}{mz}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (m+M)\frac{g}{l}\cos\theta \\
&= -\frac{2(m+M)g}{z}\cos(2\theta) + \frac{(m+M)g}{l}\cos\theta \\
&= -\frac{(m+M)g}{l\cos\theta}\cos(2\theta) + \frac{(m+M)g}{l}\cos\theta \\
&= \frac{(m+M)g}{l}\left(\cos\theta - \frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}$$

Donde tenemos que, $\frac{(m+M)g}{l} > 0$, veamos que sucede con el otro termino,

$$\left(\cos\theta - \frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

Observar que trabajamos de 0 a $\frac{\pi}{2}$, por lo que $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} > 0$. Así tenemos un punto de equilibrio estable, aproximemos con la relación armónica,

$$\Omega^2 = \frac{k}{m_{ef}}, \qquad k = \frac{d^2}{d\theta^2}v_{ef}$$

Ya conocemos ese dato, de este modo,

$$\Omega = \sqrt{\frac{(m+M)g\sin^2\theta}{l\cos\theta\,(m + 2\sin^2\theta\, M)}}$$

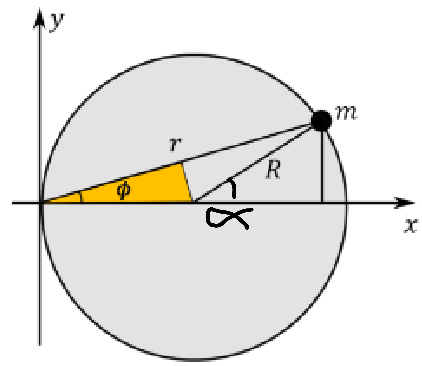
Así hemos hallado la frecuencia para las pequeñas vibraciones por encima y por debajo del movimiento estacionario.

Finalmente, y respondiendo a la última pregunta, la diferencia con el problema 8.15 es que en el tenemos $\dot{\theta} = w = cte$. Esto cambia nuestras ecuaciones de Lagrange, las cuales serás modificadas y se tendrá:

$$\begin{aligned}
(2w^2M - m\dot{\phi}^2)\sin\theta\cos\theta + (m+M)\frac{g}{l}\sin\theta &= 0 \\
\ddot{\phi}\sin^2\theta + \dot{\phi}w\sin(2\theta) &= 0
\end{aligned}$$

Como la energía H no incluye términos de $\ddot{\theta}$, esta cantidad se conservará de modo que ambas energías (cinética y potencial) serán efectivas, la masa también lo será y todo lo que le sigue será de la misma forma pues se siguió el caso donde $w = 0$. Entonces tenemos que las ecuaciones de movimiento cambiaron.

2.- (7.1) Una partícula sigue una órbita circular bajo la acción de una fuerza central de atracción que está dirigida hacia un punto de la circunferencia. Demuestre que la magnitud de la fuerza varía con el inverso de la quinta potencia de la distancia.



Consideremos una partícula que orbita de forma circular bajo una influencia de una fuerza central atractiva dirigida hacia el origen del eje coordenado en un punto del círculo. Observemos primero que se satisface que:

$$r \sin\phi = R \sin\alpha$$

$$r\cos\phi = R(1+\cos\alpha)$$

Esto por propiedades trigonométricas vistas en geometría analítica. De este modo obtendríamos la ecuación orbital:

$$r = 2R\cos\phi$$

Usemos dicha expresión para hallar el potencial entorno a r, de modo que esta está dada por:

$$U(r) = E - T$$

Esto pues se trata de una fuerza conservativa. Bien, sabemos que la energía cinética de la partícula estará dada por: $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)$, pues $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$ para este tipo de movimientos. Donde, $\dot{r} = -2R\dot{\phi}\sin\phi = -\frac{2Rl}{mr^2}\sin\phi$. Lo que nos implica que:

$$m\dot{r}^2 = m\left(-\frac{2Rl}{mr^2}\sin\phi\right)^2 = \frac{4R^2l^2}{mr^4}\sin^2\phi = \frac{4R^2l^2}{mr^4}(1-\cos^2\phi) = \frac{4R^2l^2}{mr^4}\left(1-\frac{r^2}{4R^2}\right)$$
$$= \frac{4R^2l^2}{mr^4} - \frac{l^2}{mr^2}$$

Sustituyamos,

$$\begin{aligned}
U(r) &= E - \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)\\
&= E - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{4R^2l^2}{mr^4} - \frac{l^2}{mr^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}\right)\\
&= E - \frac{1}{2}\left(\frac{4R^2l^2}{mr^4} - \frac{l^2}{mr^2} + \frac{l^2}{mr^2}\right)\\
&= E - \frac{2R^2l^2}{mr^4}
\end{aligned}$$

Y por ser fuerza conservativa sabemos que: $\bar{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{e}_r$,

$$\bar{F} = -\frac{8R^2l^2}{mr^5}\hat{e}_r$$

3.- (7.7) **a)** Obtener las condiciones de la k para las que serán estables las órbitas circulares correspondientes al siguiente campo de fuerza central: $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$, **b)** hállese el periodo de las pequeñas oscilaciones respecto a las órbitas circulares estables.

Con respecto a las características generales de las orbitas, para que órbita circular sea estable en un campo de fuerza central, la segunda derivada del potencial efectivo $U_{ef}(r)$ con respecto a r debe ser positiva en el radio de la órbita circular. El potencial efectivo se define como:

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{h^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{h^2}{2mr^2} \Rightarrow \frac{d^2U_{ef}}{dr^2} = k + \frac{3h^2}{mr^4}$$

Para orbitas circulares sabemos que la fuerza neta es cero, lo que nos lleva a $\frac{dU_{ef}}{dr} = 0$, esto nos da el radio de la órbita circular r_0. Entonces, podemos sustituir r_0 en $\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}$ y así encontrar las condiciones que necesitamos para satisfacer que $\frac{d^2U_{ef}}{dr^2} > 0$.

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = kr - \frac{h^2}{mr^3} \Rightarrow kr_0 - \frac{h^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{h^2}{km}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Sustituyendo,

$$\left.\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}\right|_{r\,=\,r_0} = k + \frac{3h^2}{mr_0^4} = k + \frac{3h^2}{m\left(\left(\frac{h^2}{km}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^4} = k + \frac{3h^2}{m}\frac{km}{h^2} = k + 3k = 4k$$

De modo $4k > 0 \Rightarrow k > 0$.

a) La condición para que sean orbitas circulares estables es que $k > 0$.

El período de las pequeñas oscilaciones alrededor de una órbita circular estable se puede encontrar utilizando la ley de Hooke. Para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio, la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento. El período T de una oscilación simple está dado por: $T = 2\pi\sqrt{m/k_{ef}}$, k_{ef} es la cosntante efectiva del resorte que se Encuentra en el potencial efectivo U_{ef}, evaluada en r_0.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

b) El periodo de las oscilaciones respecto a las orbitas circulares estables es $T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

4.- (7.10) Hállese la velocidad de escape de una partícula de la superficie de la Tierra, dado que la constante gravitacional es $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/(Kg)^2$.

Supongamos que la única fuerza que actúa sobre el objeto una vez lanzado es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra. Para ello hagamos el siguiente análisis de la conservación de energía (S: superficie, A: atracción):

$$E_S = E_A \Rightarrow (E_c + E_p)_S = (E_c + E_p) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Ya teniendo la ecuación de velocidad de escape, hay que conocer los datos aproximados de la masa y el radio ecuatorial del planeta, pues G ya nos la dan.

$$M \approx 5.972 \times 10^{24}\ kg, \qquad R \approx 6.378\ km$$

Sustituyendo,

$$v = \sqrt{\frac{2\left(6.67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{(kg)^2}\right)(5.972 \times 10^{24}\ kg)}{(6378\ km)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11})(5.972 \times 10^{24})}{(6378000)}\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{kgm}{s^2}\right)m^2}{(kg)^2}\right)(kg)}{(m)}\right)} = 11176.23582\frac{m}{s}$$

Por lo tanto, la velocidad de escape es de:

$$v = 11.176\frac{km}{s}$$

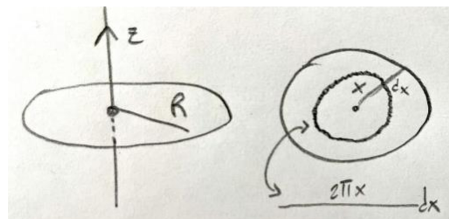
Momentos de inercia

Calcula los momentos de inercia de las siguientes configuraciones

Recordemos el momento de inercia esta dado por: $I = \sum x_i^2 m_i$

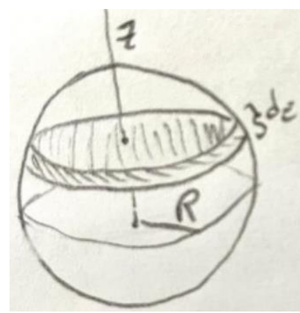
5.- Una esfera homogénea de masa M y radio R con respecto de un eje por su centro.

Expongamos la situación, al estar rotando entorno a su propio eje, digamos el eje z, tendremos que calcular el momento de inercia respecto a cada uno de sus diámetros, el cual serían discos de donde sabemos están dados sus momentos por: $\frac{1}{2}MR^2$



Veamos la breve demostración, en la figura a la derecha planteo el pensamiento, vamos a obtener el momento de inercia del disco de masa M y radio R respecto a su eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro. Lo que haremos primero será analizar cómo es que se ve un elemento de masa que dista de una distancia x del eje de rotación, el cual es un anillo de radio x y s. p. d. g. de anchura dx. Podemos darnos cuenta de que podremos formar un rectángulo de longitud $2\pi x$ y anchura dx. De este modo el diferencial de masa será igual a: $dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi x dx = \frac{2M}{R^2} x dx$.

Así podemos calcular el momento de inercia que es: $I = \int_0^R x^2 dm = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} MR^2$

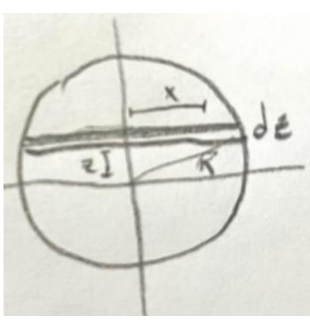


Bien una vez demostrado eso, veamos la idea en las imágenes de la esfera. Dividiremos la esfera en discos de radio x y de una anchura de dz, pero como vimos tenemos que el momento de inercia de estos discos será $\frac{1}{2}x^2 dm$, así teniendo que la masa de cada uno de esos será: $dm = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi x^2 dz = \frac{3M}{4R^3} x^2 dz$.

Calculemos el momento de inercia de la esfera:

$$I = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} x^2 dm = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{3M}{4R^3} x^2 dz \right) = \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^{R} x^4 dz$$

Utilizando como se ve en la imagen por Pitágoras que $R^2 = x^2 + z^2$,



$$\begin{aligned} I = \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 dz &= \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz \\ &= \frac{3M}{8R^3} \left(\int_{-R}^{R} R^4 dz - \int_{-R}^{R} 2R^2 z^2 dz + \int_{-R}^{R} z^4 dz \right) \\ &= \frac{3M}{8R^3} \left(R^4(R+R) - 2R^2 \left(\frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3} \right) + \left(\frac{R^5}{5} + \frac{R^5}{5} \right) \right) \\ &= \frac{3M}{8R^3} \left(2R^5 - \frac{4}{3} R^5 + \frac{2}{5} R^5 \right) = \frac{3M}{8R^3} \left(\frac{16}{15} R^5 \right) = \frac{2}{5} MR^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el momento de inercia es $\frac{2}{5}MR^2$ unidades de masa por longitud al cuadrado.

6.- Un anillo cilíndrico homogéneo de masa M y radios R_1 y R_2 con respecto a su eje de simetría.

Lo que haremos será restar los momentos de inercia que se tienen para ambas placas (R_1 y R_2). De este modo obteniendo el momento de inercia que no interesa que es el anillo de radios R_1 y R_2. Además, se considera que el eje de simetría es el eje z. Como vimos en el inciso anterior, el momento de inercia de un disco es: $I = \frac{1}{2}MR^2$. Ahora hay que considerar que habrá cambio en las masas, y consideremos que el cilindro cuenta con una longitud l. Sea m_1 la masa contenida en el cilindro de radio R_1 y m_2 la masa contenida en el cilindro de radio R_2. Así

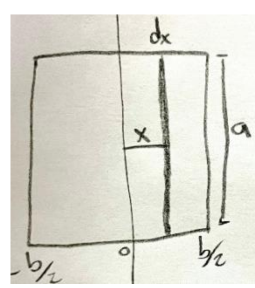
$$m_1 = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h}\pi R_1^2 h = \frac{M}{R_2^2 - R_1^2}R_1^2$$
$$m_2 = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)h}\pi R_2^2 h = \frac{M}{R_2^2 - R_1^2}R_2^2$$

Ahora sustituyendo en la formula hallada:

$$\begin{aligned} I &= I_2 - I_1 \\ &= \frac{1}{2}m_2R_2^2 - \frac{1}{2}m_1R_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{M}{R_2^2 - R_1^2}R_2^2\right)R_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{M}{R_2^2 - R_1^2}R_1^2\right)R_1^2 \\ &= \frac{1}{2}M\left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}M\left(\frac{(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el momento de inercia es $\frac{1}{2}M(R_2^2 + R_1^2)$ unidades de masa por longitud al cuadrado.

7.- Un paralelepipedo rectangular homogéneo, de lados a, b, c, con respecto a **tres** ejes por su centro de simetría, perpendiculares a sus caras.



*Nota. Quiero suponer que con perpendiculares a sus caras se refiere a hallar el momento de inercia para cada cara (el cual es análogo para todos los casos), pues si no se referiría a una sola cara, no puede ser perpendicular a las 3 caras.

Bien, vamos a proceder de manera similar al ejemplo de la esfera, primero planteando como actúa la inercia en una placa rectangular, para luego proceder a analizar el paralelepípedo.

Consideremos la imagen a la derecha, una placa rectangular de masa M con lados a y b respecto al eje que pasa por dicha placa. Tomemos un elemento de masa que esta x distancia del eje, tendrá longitud a y su anchura será de dx. De este modo el diferencial de masa estará dado por: $dm = \frac{M}{ab} a dx = \frac{M}{b} dx$. Calculando el momento de inercia tenemos:

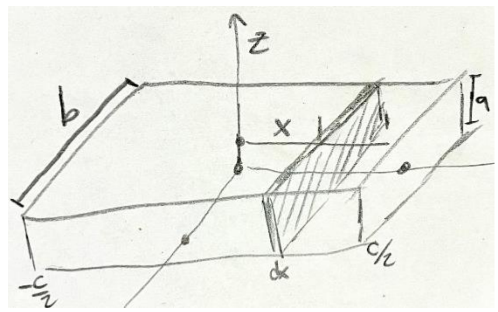
$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{M}{b} x^2 dx = \frac{M}{b} \left(\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3} \right) = \frac{2Mb^3}{3(8)b} = \frac{1}{12} Mb^2$$

Ahora utilicemos el Teorema de Steiner. Este teorema establece que el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje que pasa por su centro de masa es igual a la suma del momento de inercia del mismo cuerpo respecto a un eje paralelo al primero y que pasa por el centro de masa, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

$$I_2 = I_1 + md^2$$

Siendo:

- I_2 el momento de inercia respecto al segundo eje.
- I_1 el momento de inercia respecto al primer eje.
- m y d la masa del cuerpo y la distancia entre los ejes, respectivamente.



Bien ahora si consideramos el paralelepípedo, el cual dividiremos en placas rectangulares de lados a, b y anchura dx. Y como vimos por teorema de Steiner y momento de inercia de las placas, tenemos que para las placas en vista del nuevo eje su momento de inercia es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} b^2 dm + x^2 dm &= \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2\right) dm \\ &= \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2\right) \frac{M}{abc} abdx \\ &= \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2\right) \frac{M}{c} dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, el momento de inercia del paralelepípedo es:

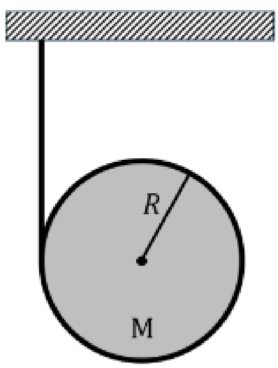
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2\right) \frac{M}{c} dx \\ &= \frac{M}{c} \left(\frac{1}{12} b^2 \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dx + \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} x^2 dx \right) \\ &= \frac{M}{c} \left(\frac{1}{12} b^2 \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\right) + \left(\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^3}{3} \right) \right) \\ &= \frac{M}{c} \left(\frac{1}{12} b^2 c + \left(2 \frac{1}{24} c^3 \right) \right) \\ &= \frac{M}{c} \left(\frac{1}{12} b^2 c + \frac{1}{12} c^3 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} M(b^2 + c^2)$$

Por lo tanto, el momento de inercia es $\frac{1}{12} M(b^2 + c^2)$ unidades de masa por longitud al cuadrado. O bien si se consideran otras placas en vez de la tomada, podemos llegar análogamente a:

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2), \qquad I = \frac{1}{12} M(a^2 + c^2)$$

8.- Un cilindro homogéneo de radio R y masa M tiene una cuerda enrollada alrededor de su borde (un yo-yo). El extremo de la cuerda se mantiene fijo a una altura dada. Determine la aceleración angular del disco y la aceleración hacia abajo del CM del yo-yo.



Tenemos un cilindro de radio R y masa M, el cual se encuentra enrollado por una cuerda (como un yo-yo). Este cilindro es soltado a una altura fija y en este proceso cae desenrollando la cuerda.

Las fuerzas involucradas en el problema son:

- La tensión de la cuerda T
- La fuerza gravitacional Mg

Analicemos el módulo de torque. Sabemos que, debido a la tensión generada por la cuerda, el toque estará dado por: $\tau = T \cdot R$

O bien aplicando la ecuación de la dinámica de rotación: $\tau = I\alpha$. Donde I es el momento de inercia del cilindro respecto a su eje, que para un cilindro homogéneo es: $I = \frac{1}{2} MR^2$

Sustituyendo, $T \cdot R = I\alpha \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2\alpha$

Por lo tanto, la ecuación del torque queda como: $T = \frac{1}{2} MR\alpha$.

Ahora veamos que sucede con el movimiento del centro de masa, sabemos de la relación de la aceleración del centro de masa con la aceleración angular y está dada por: $a = R\alpha$. Y por traslación: $Mg - T = Ma$, sustituyendo obtenemos: $Mg - T = MR\alpha$. Sustituyamos la ecuación del torque y desarrollemos: $Mg - \frac{1}{2} MR\alpha = MR\alpha \Rightarrow g - \frac{1}{2} R\alpha = R\alpha \Rightarrow g = \frac{3}{2} R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$

Hemos encontrado que la aceleración angular viene dada por: $\alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$, ahora sustituyamos en la expresión de centro de masa: $a = R\alpha \Rightarrow a = R\frac{2}{3}\frac{g}{R} \Rightarrow a = \frac{2}{3} g$. Por lo tanto, la aceleración del centro de masa es $a = \frac{2}{3} g$.