Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México

Mecánica Cuántica - Tarea 4

Profesores:

Dr. Chumin Wang Chen

Ayud. Tomas Javier Escamilla Lara

Ayud. Oliver Isaac Barreto Quintanar

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

Considere un sistema cuántico con cuatro estados ortonormales $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ y un hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$, siendo

$$\hat{H}_0 = V_0[-|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| + |4\rangle\langle 4| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 2|]$$

$$\hat{H}' = \varepsilon V_0[|1\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 3| + |2\rangle\langle 4| - |3\rangle\langle 4| + |2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 1| + |4\rangle\langle 2| - |4\rangle\langle 3|]$$

Con constantes V_0 y $\varepsilon \ll 1$.

a) (0.6 pts.) Escriba los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{H}_0$.
b) (0.7 pts.) Usando la teoría de perturbaciones para estados degenerados obtenga las energías $\hat{H}$.
c) (0.7 pts.) Encuentre los eigenvalores exactos de $\hat{H}$, expande en serie de potencias en ε y compare con el inciso b).

a)

Tenemos $\hat{H}_0 = V_0[-|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| + |4\rangle\langle 4| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 2|]$. Así la matriz de $\hat{H}_0$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ es:

$$\hat{H}_0 = V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener los eigenvalores y eigenvectores de $\hat{H}_0$, resolvemos: $\det(\hat{H}_0 - \lambda I) = 0$

$$\det(\hat{H}_0 - \lambda I) = V_0(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4) = V_0(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) = 0$$

Por lo tanto $\lambda = \pm\sqrt{2}V_0$ (ambos con degeneración 2). Este procedimiento lo hemos repetido tantas veces que ya es ambiguo realizar algo de lineal 2, procedamos con una calculadora de eigenvectores.

Para el eigenvalor $\lambda = -\sqrt{2}V_0$: $v = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para el eigenvalor $\lambda = \sqrt{2}V_0$: $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

De modo que al normalizar:

Para $\lambda = \sqrt{2}V_0$: $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = -\sqrt{2}V_0$: $\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)

Ya obtuvimos los eigenvalores de $\widehat{H}_0$, estos corresponden a las energías del sistema sin perturbación $E^{(0)}$, de donde vimos que tenían degeneración 2.

Para esto tenemos:

$$E^{(0)} = \sqrt{2}V_0, \qquad |\psi_1\rangle = \frac{(\sqrt{2}-1)|1\rangle + |3\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \qquad |\psi_2\rangle = \frac{(\sqrt{2}-1)|2\rangle + |4\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

$$E^{(0)} = -\sqrt{2}V_0, \qquad |\psi_1\rangle = \frac{(-\sqrt{2}-1)|1\rangle + |3\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \qquad |\psi_2\rangle = \frac{(-\sqrt{2}-1)|2\rangle + |4\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

De modo que:

$$E_{\pm}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(W_{aa} + W_{bb} \pm \sqrt{(W_{aa} - w_{bb})^2 + 4|W_{ab}|^2}\right)$$

$$W = \begin{pmatrix} W_{aa} & W_{ab} \\ W_{ba} & W_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\psi_a|\widehat{H}'|\psi_b\rangle & \langle\psi_a|\widehat{H}'|\psi_b\rangle \\ \langle\psi_b|\widehat{H}'|\psi_a\rangle & \langle\psi_b|\widehat{H}'|\psi_b\rangle \end{pmatrix}$$

- $E^{(0)} = \sqrt{2}V_0$

$$\begin{aligned}
W_{11} &= \langle\psi_1|\widehat{H}'|\psi_1\rangle \\
&= \left(\frac{(\sqrt{2}-1)\langle 1| + \langle 3|}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\widehat{H}'\left(\frac{(\sqrt{2}-1)|1\rangle + |3\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\left((\sqrt{2}-1)^2\langle 1|\widehat{H}'|1\rangle + (\sqrt{2}-1)\langle 1|\widehat{H}'|3\rangle + (\sqrt{2}-1)\langle 3|\widehat{H}'|1\rangle + \langle 3|\widehat{H}'|3\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4-2\sqrt{2}}\left((\sqrt{2}-1)^2(0) + (\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + (\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + 0\right) \\
&= \frac{\varepsilon V_0(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{ab} &= \langle \psi_1 | \hat{H}' | \psi_2 \rangle \\
&= \left(\frac{(\sqrt{2}-1)\langle 1| + \langle 3|}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right) \hat{H}' \left(\frac{(\sqrt{2}-1)|2\rangle + |4\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{4-2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}-1)^2 \langle 1|\hat{H}'|2\rangle + (\sqrt{2}-1)\langle 1|\hat{H}'|4\rangle + (\sqrt{2}-1)\langle 3|\hat{H}'|2\rangle + \langle 3|\hat{H}'|4\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4-2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}-1)^2 (\varepsilon V_0) + (\sqrt{2}-1)(0) + (\sqrt{2}-1)(0) + (-\varepsilon V_0) \right) \\
&= \frac{\varepsilon V_0}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{22} &= \langle \psi_2 | \hat{H}' | \psi_2 \rangle \\
&= \left(\frac{(\sqrt{2}-1)\langle 2| + \langle 4|}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right) \hat{H}' \left(\frac{(\sqrt{2}-1)|2\rangle + |4\rangle}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{4-2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}-1)^2 \langle 2|\hat{H}'|2\rangle + (\sqrt{2}-1)\langle 2|\hat{H}'|4\rangle + (\sqrt{2}-1)\langle 4|\hat{H}'|2\rangle + \langle 4|\hat{H}'|4\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4-2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}-1)^2 (0) + (\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + (\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + 0 \right) \\
&= \frac{\varepsilon V_0 (\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

De modo que,

$$
\begin{aligned}
E_{\pm}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon V_0(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon V_0(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon V_0(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon V_0(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} \right)^2 + 4\left| \frac{\varepsilon V_0}{\sqrt{2}} \right|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon V_0(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon V_0(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{4\left| \frac{\varepsilon V_0}{\sqrt{2}} \right|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}\varepsilon V_0 \pm \sqrt{2}\varepsilon V_0 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} E_+ = \sqrt{2}\varepsilon V_0 \\ E_- = 0 \end{cases}, \qquad E^0 = V_0\sqrt{2}
$$

- $E^{(0)} = -\sqrt{2}V_0$

$$
\begin{aligned}
W_{11} &= \langle \psi_1 | \hat{H}' | \psi_1 \rangle \\
&= \left(\frac{(-\sqrt{2}-1)\langle 1| + \langle 3|}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \hat{H}' \left(\frac{(-\sqrt{2}-1)|1\rangle + |3\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^2 \langle 1|\hat{H}'|1\rangle + (-\sqrt{2}-1)\langle 1|\hat{H}'|3\rangle + (-\sqrt{2}-1)\langle 3|\hat{H}'|1\rangle + \langle 3|\hat{H}'|3\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^2 (0) + (-\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + (-\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + 0 \right) \\
&= \frac{\varepsilon V_0 (-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{ab} &= \langle \psi_1 | \hat{H}' | \psi_2 \rangle \\
&= \left(\frac{(-\sqrt{2}-1)\langle 1| + \langle 3|}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \hat{H}' \left(\frac{(-\sqrt{2}-1)|2\rangle + |4\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^2 \langle 1|\hat{H}'|2\rangle + (-\sqrt{2}-1)\langle 1|\hat{H}'|4\rangle + (-\sqrt{2}-1)\langle 3|\hat{H}'|2\rangle + \langle 3|\hat{H}'|4\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^2 (\varepsilon V_0) + (-\sqrt{2}-1)(0) + (-\sqrt{2}-1)(0) + (-\varepsilon V_0) \right) \\
&= \frac{\varepsilon V_0}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{22} &= \langle \psi_2 | \hat{H}' | \psi_2 \rangle \\
&= \left(\frac{(-\sqrt{2}-1)\langle 2| + \langle 4|}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \hat{H}' \left(\frac{(-\sqrt{2}-1)|2\rangle + |4\rangle}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^2 \langle 2|\hat{H}'|2\rangle + (-\sqrt{2}-1)\langle 2|\hat{H}'|4\rangle + (-\sqrt{2}-1)\langle 4|\hat{H}'|2\rangle + \langle 4|\hat{H}'|4\rangle \right) \\
&= \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \left((-\sqrt{2}-1)^2 (0) + (-\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + (-\sqrt{2}-1)(\varepsilon V_0) + 0 \right) \\
&= \frac{\varepsilon V_0(-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

De modo que,

$$
\begin{aligned}
E_{\pm}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon V_0(-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon V_0(-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon V_0(-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}} - \frac{\varepsilon V_0(-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}} \right)^2 + 4\left| \frac{\varepsilon V_0}{\sqrt{2}} \right|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon V_0(-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}} + \frac{\varepsilon V_0(-\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}} \pm \sqrt{4\left| \frac{\varepsilon V_0}{\sqrt{2}} \right|^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2}\varepsilon V_0 \pm \sqrt{2}\varepsilon V_0 \right) \\
&= \begin{cases} E_+ = -\sqrt{2}\varepsilon V_0 \\ E_- = 0 \end{cases}, \qquad E^0 = V_0\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

c)

La matriz total del hamiltoniano es: $\hat{H} = \widehat{H_0} + \widehat{H'}$

$$
\widehat{H_0} = V_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{H'} = \varepsilon V_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Por lo tanto: $\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & 1+\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & -1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 0 & 1 & -\varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$.

Los eigenvalores exactos son resolviendo: $\det(\widehat{H} - \lambda I) = 0$

Expandiendo los eigenvalores como serie en potencias de ε, podemos escribir:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon^2\lambda^{(2)} + \ldots$$

donde $\lambda^{(0)}$ son los eigenvalores de $\widehat{H_0}$, y $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, etc., son las correcciones.

El determinante de la matriz ($H - \lambda I$) es:

$$\mathrm{Det}(H - \lambda I) = 4V_0^4\epsilon^4 + 8V_0^4\epsilon^3 + 8V_0^4\epsilon^2 + 8V_0^4\epsilon + 4V_0^4 - 4V_0^2\epsilon^2\lambda^2 - 4V_0^2\epsilon\lambda^2 - 4V_0^2\lambda^2 + \lambda^4$$

Resolviendo el polinomio característico, obtenemos los siguientes valores propios:

$$\lambda_1 = -\sqrt{2V_0^2\epsilon^2 + 2V_0^2}, \lambda_2 = \sqrt{2V_0^2\epsilon^2 + 2V_0^2} \lambda_3 = -\sqrt{2V_0^2\epsilon^2 + 4V_0^2\epsilon + 2V_0^2}, \lambda_4 = \sqrt{2V_0^2\epsilon^2 + 4V_0^2\epsilon + 2V_0^2}$$

Vemos una buena aproimación.

Para ello use un script de Python.

```
import sympy as sp

# Definimos los parámetros y variables

V0, epsilon, lambda_ = sp.symbols('V0 epsilon lambda')

# Matriz H0

H0 = V0 * sp.Matrix([
    [-1, 0, 1, 0],
    [0, -1, 0, 1],
    [1, 0, 1, 0],
    [0, 1, 0, 1]
])

# Matriz H'

H_prime = epsilon * V0 * sp.Matrix([
    [0, 1, 1, 0],
    [1, 0, 0, 1],
    [1, 0, 0, -1],
    [0, 1, -1, 0]
])

# Matriz total H

H = H0 + H_prime

# Construimos la matriz (H - lambda*I)

I = sp.eye(4)

H_lambda = H - lambda_ * I

# Calculamos el determinante para obtener el polinomio característico

determinant = sp.simplify(H_lambda.det())

# Resolviendo el polinomio característico

eigenvalues = sp.solve(determinant, lambda_)

determinant, eigenvalues
```

2. (2.0 pts.) Una partícula que se encuentra a $t = 0$ en el estado base del pozo de potencial infinito unidimensional con paredes en $x = 0$ y $x = a$, se le impone la perturbación $\widehat{H}'(t) = x^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ donde $0 \leq x \leq a, 0 < t \leq \infty$ y τ es una constante. Calcule la probabilidad a primer orden de encontrar la partícula en el primer estado excitado para $t \geq 0$ y su límite cuando $t \to \infty$.

El pozo de potencial infinito unidimensional tiene soluciones estacionarias dadas por:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1,2,3,$$

y los niveles de energía correspondientes son: $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1,2,3,$

Inicialmente, la partícula está en el estado base ($n = 1$):

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Se busca la probabilidad de transición al primer estado excitado ($n = 2$) de la perturbación $\widehat{H'}(t) = x^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. A primer orden, la proba de transición al estado excitado ($n = 2$) es:

$$P_{1\to 2}(t) = |c_{12}(t)|^2$$

$$c_{12}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{21}t'}\left\langle\psi_2\middle|\widehat{H'}(t')\middle|\psi_1\right\rangle\,dt', \qquad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}.$$

Siendo la matriz de elementos del operador perturbativo:

$$\left\langle\psi_2\middle|\widehat{H'}(t')\middle|\psi_1\right\rangle = \left\langle\psi_2\middle|x^2\left(1 - e^{-t'/\tau}\right)\middle|\psi_1\right\rangle.$$

La parte espacial del elemento de matriz es:

$$\langle\psi_2|x^2|\psi_1\rangle = \int_0^a \psi_2^*(x)\; x^2\;\psi_1(x)\,dx = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)x^2\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx$$

Resolvamos con la identidad trigonométrica: $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right].$$

Sustituyendo en el integral:

$$\langle\psi_2|x^2|\psi_1\rangle = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx - \frac{1}{a}\int_0^a x^2\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)dx$$

Por lo tanto,

$$\langle\psi_2|x^2|\psi_1\rangle = -\frac{16a^2}{9\pi^2}$$

Volvamos con $c_{12}(t)$:

$$c_{12}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{21}t'}\langle\psi_2|x^2|\psi_1\rangle\left(1-e^{-t'/\tau}\right)dt' = \frac{16a^2}{9\pi^2\hbar}\int_0^t\left[e^{i\omega_{21}t'} - e^{i\omega_{21}t'}e^{-t'/\tau}\right]dt'.$$

$$c_{12}(t) = \frac{16a^2}{9\pi^2\hbar}[I_1(t) - I_2(t)]$$

donde:

$$I_1(t) = \int_0^t e^{i\omega_{21}t'}dt', \quad I_2(t) = \int_0^t e^{i\omega_{21}t'}e^{-t'/\tau}dt'$$

$$I_1(t) = \int_0^t e^{i\omega_{21}t'}dt' = \left[\frac{e^{i\omega_{21}t'}}{i\omega_{21}}\right]_0^t = \frac{e^{i\omega_{21}t}-1}{i\omega_{21}}.$$

$$I_2(t) = \int_0^t e^{i\omega_{21}t'}e^{-t'/\tau}dt' = \int_0^t e^{(i\omega_{21}-1/\tau)t'}dt' = \frac{\tau}{1-i\omega_{21}\tau}\left(e^{(i\omega_{21}-1/\tau)t}-1\right).$$

La probabilidad de transición a primer orden es:

$$P_{1\to2}(t) = |c_{12}(t)|^2$$

y hemos encontrado que:

$$c_{12}(t) = \frac{16a^2}{9\pi^2\hbar}\left[\frac{e^{i\omega_{21}t}-1}{i\omega_{21}} - \frac{\tau}{1-i\omega_{21}\tau}\left(e^{(i\omega_{21}-1/\tau)t}-1\right)\right]$$

Para $t \to \infty$, evaluamos cada término:

$$\lim_{t\to\infty} I_1(t) \approx 0, \qquad \lim_{t\to\infty} I_2(t) = -\frac{\tau}{1-i\omega_{21}\tau}.$$

Sustituyendo:

$$c_{12}(\infty) = \frac{16a^2}{9\pi^2\hbar}\cdot\frac{\tau}{1-i\omega_{21}\tau}$$

La probabilidad de transición es:

$$P_{1\to2}(\infty) = |c_{12}(\infty)|^2 = \left|\frac{16a^2}{9\pi^2\hbar}\right|^2\cdot\left|\frac{\tau}{1-i\omega_{21}\tau}\right|^2$$

Con:

$$\left|\frac{\tau}{1-i\omega_{21}\tau}\right|^2 = \frac{\tau^2}{(1-i\omega_{21}\tau)(1+i\omega_{21}\tau)} = \frac{\tau^2}{1+\omega_{21}^2\tau^2}$$

Por lo tanto:

$$P_{1\to2}(\infty) = \left(\frac{16a^2}{9\pi^2\hbar}\right)^2\cdot\frac{\tau^2}{1+\omega_{21}^2\tau^2}, \qquad \omega_{21} = \frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}$$

3. Considere una partícula cargada con momento angular orbital $\hat{L}$ en un campo magneitco $\bar{B}(t) = \left(2\sqrt{2}B_l \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), 4B_l \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), B_0\right)$, cuyo hamiltoniano es $\hat{H} = -\bar{\mu} \cdot \bar{B} = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)$ con $\bar{\mu} = \gamma_L \hat{L}$, $\hat{H}_0 = \gamma_L B_0 \hat{L}_z$ y $B_l \ll B_0$. Sean $|l, m\rangle$ eigenestados de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$.

a) (0.6 pts.) Escriba $\hat{H}'(t) = \hat{v}e^{i\omega t} + \hat{v}^{\dagger}e^{-i\omega t}$ y encuentre $\hat{v}$ como una función de $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ y B_l;

b) (0.8 pts.) Determine la tasa de transición del estado $|l, m\rangle$ al $|l', m'\rangle$ usando la regla de oro de Fermi para transiciones permitidas de emisión y absorción de fotones. ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia ω permitidas?

c) (0.6 pts.) Para el caso de absorción de un fotón, considere $l = 2$ y elabore una tabla con las tasas de transisión entre estados $|l, m\rangle$. ¿Cuáles transiciones presentan mayor tasa de probabilidad?

4. Considere la ecuación de eigenvalores para la parte radial $u(r) = rR(r)$ del átomo de hidrogeno dada por $-(\hbar/2\mu)(d^2u(r)/dr^2) + V((r)u(r) = Eu(r)$ con $V(r) = -\frac{e^2}{r} + \hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2$. b) (1.0 pts.) Encuentre las energías E_n^{WKB} para los estados ligados usando la aproximación WKB a partir de $\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu\big(E - V(r)\big)}dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$ siendo r_1 y r_2 los puntos de retorno. Hint. Se recomienda usar la identidad $\int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{(x-a)(b-x)}dx = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2$. c) (1.0 pts.) Calcule la diferencia $|E_n^{WKB} - E_n|/E_l$ para $l = 1$ y $n = 2,3,4$, donde $E_n = E_l/n^2$ son las energías del átomo de hidrogeno, y grafique dicha diferencia como función de n.

b)

En la aproximación WKB, se cumple la relación:

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu\big(E - V(r)\big)}\ dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

Con $V(r)$ es el potencial efectivo dado como: $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$, sustituyamos

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu\left(E - \left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}\right)\right)}\ dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{2\mu}{r^2}\left(Er^2 - \left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu}\right)\right)}\ dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

$$\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{Er^2 2\mu - \left(-\frac{2\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0}r + \frac{2\mu\hbar^2 l(l+1)}{2\mu}\right)}\ dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

$$\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-r^2 - \frac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 E} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu E}}\ dr = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\sqrt{-2\mu E}}$$

Hagamos un cambio de variable $x = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}$, $y = -\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu E}$, tal que, $\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-r^2 - xr - y}\ dr$, obteneinedo las raíces, $r_1 = \frac{-x+\sqrt{x^2-4y}}{2}$ y $r_2 = \frac{-x-\sqrt{x^2-4y}}{2}$, lo que nos lleva al Hint, pues obtenemos:

$$\frac{1}{r}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)}\ dr = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}\right)^2$$

Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}\right)^2 = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\sqrt{-2\mu E}} \Rightarrow \frac{\pi}{2}\left(r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} + r_1\right) = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\sqrt{-2\mu E}}$$

Nuevamente utilizaremos un cambio de variable, tal que $r_1 + r_2 = x$ y $r_1 r_2 = y$:

$$\frac{\pi}{2}\left(x-2\sqrt{y}\right)=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\sqrt{-2\mu E}}$$

$$\frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}-2\sqrt{-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu E}}\right)=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\sqrt{-2\mu E}}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{-\sqrt{2\mu E}}\left(-\frac{e^2\sqrt{-2\mu}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{-E}}-2\hbar\sqrt{\hbar^2 l(l+1)}\right)=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\hbar}{\sqrt{-2\mu E}}$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^2\sqrt{-2\mu}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{-E}}-2\hbar\sqrt{\hbar^2 l(l+1)}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

Despejando para E:

$$E=\frac{-e^4 2\mu}{64\varepsilon_0^2\pi^2\hbar^2}\frac{1}{\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{l(l+1)}\right)^2}$$

Donde tenemos una constante que podemos aproximar, de modo que

$$E_n=\frac{-13.6\ eV}{\left[n-\frac{1}{2}+\sqrt{l(l+1)}\right]^2}$$

a)

$$E_1=-13.6\ eV,\qquad E_2=\frac{-13.6\ eV}{(2)^2}=-3.4\ eV,\qquad E_3=\frac{-13.6\ eV}{(3)^2}=-1.51\ eV,$$
$$E_4=\frac{-13.6\ eV}{(4)^2}=-0.85\ eV$$

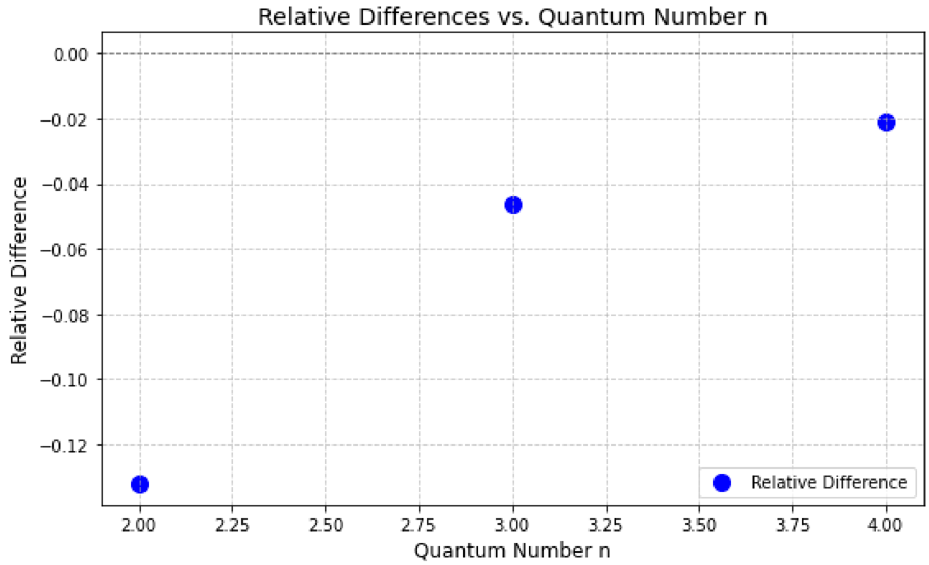
Con $l=1\Rightarrow\sqrt{l(l+1)}=\sqrt{2}$

$$E_2^{WKB}=\frac{-13.6\ eV}{\left(2-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)^2}=-1.6\ eV,\qquad E_3^{WKB}=\frac{-13.6\ eV}{\left(3-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)^2}=-0.89\ eV,$$
$$E_4^{WKB}=\frac{-13.6\ eV}{\left(4-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)^2}=-0.57\ eV$$

De modo que,

$$n=2\Rightarrow\frac{\left|E_2^{WKB}-E_2\right|}{E_1}=\frac{|-1.6+3.4|}{-13.6}=-0.132$$
$$n=3\Rightarrow\frac{\left|E_3^{WKB}-E_3\right|}{E_1}=\frac{|-0.89+1.51|}{-13.6}=-0.046$$
$$n=4\Rightarrow\frac{\left|E_4^{WKB}-E_4\right|}{E_1}=\frac{|-0.57+0.85|}{-13.6}=-0.021$$

Presento una grafica para los n calculados,



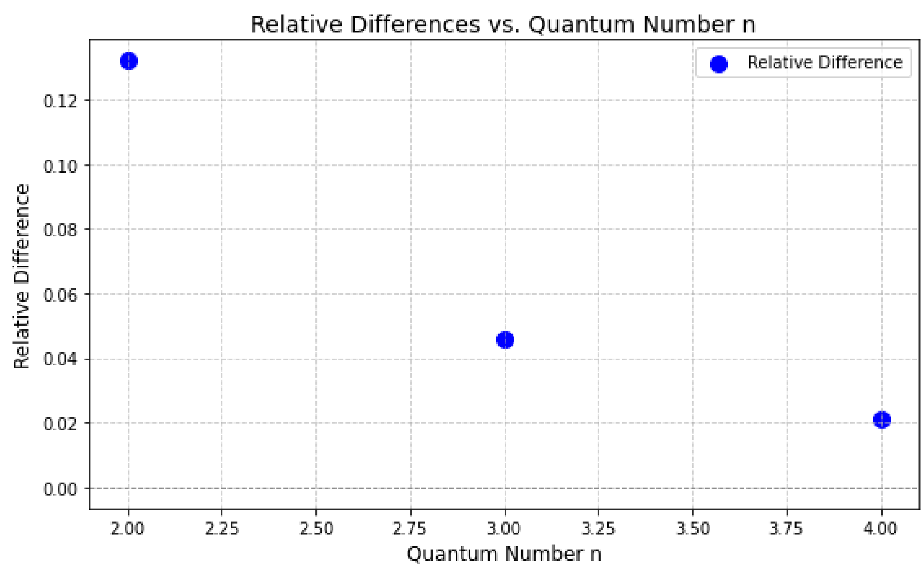
Investigando también encontré que la diferencia relativa también podía ser: $\frac{|E_n^{WKB}-E_n|}{|E_1|}$

Yo según tal cual se indicaba en el problema, pero en caso de poder utilizarla así tendríamos:

$$n = 2 \Rightarrow \frac{|E_2^{WKB} - E_2|}{|E_1|} = 0.132$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{|E_3^{WKB} - E_3|}{|E_1|} = 0.046$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{|E_4^{WKB} - E_4|}{|E_1|} = 0.021$$



5.- Considere el hamiltoniano con operadores de creación (aniquilación) fermiónicos $\hat{c}_1^\dagger$ ($\hat{c}_2^\dagger$) y $\hat{c}_1$ ($\hat{c}_2$) dado por $\hat{H} = 3(\varepsilon + 2\lambda)c_1^\dagger c_1 + (5\varepsilon + 6\lambda)c_2^\dagger c_2 + (5\varepsilon + 2\lambda)c_1 c_1^\dagger + (3\varepsilon + 2\lambda)c_2 c_2^\dagger + 2\sqrt{3}\varepsilon(c_1^\dagger c_2 - c_1 c_2^\dagger) + 4\sqrt{3}\lambda(c_1 c_2 - c_1^\dagger c_2^\dagger)$ así como la transformación $\hat{c}_1 = u_1\hat{e}_1 - v_1\hat{e}_2 + u_2\hat{e}_1^\dagger - v_2\hat{e}_2^\dagger$ y $\hat{c}_2 = u_1\hat{e}_2 + v_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2^\dagger + v_2\hat{e}_1^\dagger$ con $u_j, v_j \in \mathbb{R}$.

(a) (1.0 pt.) Demuestre que $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ satisfacen las relaciones de conmutación para fermiones, es decir, $[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta^\dagger]_+ \equiv \hat{e}_\alpha\hat{e}_\beta^\dagger + \hat{e}_\beta^\dagger\hat{e}_\alpha = \delta_{\alpha,\beta}$ y $[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta]_+ = [\hat{e}_\alpha^\dagger, \hat{e}_\beta^\dagger]_+ = 0$, si $u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 = 1$.

(b) (1.0 pt.) Usando la transformación con $u_1 = 1/4$, $u_2 = -3u_1$ y $v_1 = v_2$ determine las eigen-energías del hamiltoniano transformado $\hat{H} = \alpha\,\hat{e}_1^\dagger\hat{e}_1 + \beta\,\hat{e}_2^\dagger\hat{e}_2 + \gamma$ donde α, β y γ son constantes que dependen de λ y ε.

- En el problema 5 inciso (a) agreguen las siguientes hipótesis

$$u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 = 1 \text{ y } u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$$