5.6 Distribución barométrica: Usando el ensamble canónico encuentra como varía la presión como función de la temperatura y la posición en un gas ideal que se encuentra en algún potencial determinado. Usa esto para calcular la variación de la presión y la densidad de partículas de un gas que se encuentra en un cilindro rotando con velocidad angular ω.

Consideremos un gas ideal en equilibrio térmico, contenido en un volumen bajo la acción de un potencial externo.

En el canónico, la proba de que una partícula esté en la posición y un momento usamos distribución de Boltzmann: $f(\vec{r},\vec{p}) = \frac{1}{Z_1} e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}+\Phi(\vec{r})\right)}$, con $\beta = \frac{1}{k_B T}$, Z_1 fun. de partición de una partícula y la energía cinética y potencial.

La densidad de partículas en la posición $\vec{r}$ se obtiene integrando sobre todos los momentos:

$$n(\vec{r}) = \int f(\vec{r},\vec{p})\ d^3p = \frac{1}{Z_1} e^{-\beta\Phi(\vec{r})} \int e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\ d^3p = \frac{1}{Z_1}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} e^{-\beta\Phi(\vec{r})}, \qquad \text{integral gaussiana}$$

Notamos los factores delante de la exponencial no dependen de la posición $\vec{r}$. Entonces, definimos una constante de referencia n_0 como la densidad de partículas cuando no hay potencial externo, t. q. $\Phi(\vec{r}) = 0$: $n_0 = \frac{1}{Z_1}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$

$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\beta\Phi(\vec{r})}$, Para un gas ideal, la presión se relaciona con la densidad por la ecuación de estado local:

$$P(\vec{r}) = n(\vec{r}) k_B T = n_0 k_B T e^{-\beta\Phi(\vec{r})}$$

Para el gas en el cilindro que rota con velocidad angular ω, la fuerza centrífuga es: $\vec{F} = m\omega^2 r\hat{r}$, el potencial efectivo:

$$\Phi_{ef}(r) = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_0^r m\omega^2 r'\, dr' = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \text{ (ignorando potenciales externos)}$$

Aplicando la distribución barométrica:

$$\boldsymbol{Densidad\ de\ partículas}: n(\vec{r}) = n_0 e^{-\beta\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)} = n_0 e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}}$$

$$\boldsymbol{Presión}: P(\vec{r}) = n_0 k_B T e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2k_B T}}$$