Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Electromagnetismo II – Tarea 5
Profesores:
Dr. Alejandro Reyes Coronado
Ayud. Daniel Espinosa González
Ayud. Atzin López Tercero
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- Problema: (20pts)

(a) Considera una batería de cierta fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ y resistencia interna r, que se conecta a una resistencia variable R. Si quisieras que la batería entregara la potencia máxima posible a la resistencia, ¿qué valor de R tendrías que elegir? (Por supuesto que no puedes modificar $\mathcal{E}$ ni r).

(b) Considera una espira rectangular de altura h, que tiene una parte dentro de un capacitor de placas paralelas (de tal manera que la altura h es paralela al campo eléctrico), mientras que la otra parte está afuera del capacitor (ver figura) donde el campo eléctrico es prácticamente cero. ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida en la espira? Si la espira posee una resistencia R, ¿cuál será la corriente que fluye? Explica tu argumentación.

Nota: *Aquí Griffiths nos hace una advertencia de que son preguntas con truco, por lo que tendrás que tener cuidado, ya que si inventas una máquina de movimiento perpetuo ... algo andará mal.*

a)

Partamos de la ley de calentamiento de Joule, $P = VI = I^2R$

Donde la corriente tiene sus unidades en amperes y la resistencia en ohm, entonces la potencia será watts por segundo.

Ahora podemos usar la ley de ohm para encontrar la corriente del circuito, $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$

Sustituyamos en la potencia, $P = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R = \varepsilon^2 \frac{R}{(R+r)^2}$

Ahora derivemos para maximizar la potencia, esto lo haremos con respecto a R que es quien nos interesa evidentemente.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dR} &= \frac{d}{dR}\left(\varepsilon^2 \frac{R}{(R+r)^2}\right) \\
&= \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} \\
&= \varepsilon^2 \frac{R^2 + 2Rr + r^2 - 2R^2 - 2Rr}{(R+r)^4} \\
&= \varepsilon^2 \frac{-R^2 + r^2}{(R+r)^4}
\end{aligned}$$

Ahora igualemos a cero para buscar los puntos de inflexión,

$$\varepsilon^2 \frac{-R^2 + r^2}{(R+r)^4} = 0 \Rightarrow -R^2 + r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow \pm r = \pm R$$

Ahorrémonos casos y démosle el sentido físico, no tiene sentido tener unidades negativas, lo que no lleva a que no lo hay un caso posible que es cuando, $r = R$. Verifiquemos que se trata de un máximo,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2P}{dR^2} &= \frac{d}{dR}\left(\varepsilon^2 \frac{-R^2 + r^2}{(R+r)^4}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dR}(-R^2 + r^2)(R+r)^2 - (-R^2 + r^2)\frac{d}{dR}(R+r)^4}{(R+r)^8} \\
&= \frac{-2R(R+r)^4 - (r^2 - R^2)4(R+r)^3}{(R+r)^8} \\
&= -\frac{2R}{(R+r)^4} - \frac{4(r^2 - R^2)}{(R+r)^5} \\
&= \frac{2(R-2r)}{(R+r)^4}
\end{aligned}$$

Sustituyamos $R = r$,

$$\frac{2(r-2r)}{(r+r)^4} = \frac{-2r}{(2r)^4} < 0, pues\ r > 0$$

Entonces con esto vemos que se trata de un máximo.

b)

La fuerza electromotriz se genera cuando cambia el flujo magnético a través de la espira. Sin embargo, no hay variación de flujo magnético, hay un campo eléctrico. No habrá fuerza electromotriz inducida. Dado que no se genera una fuerza electromotriz en la espira, podemos usar la expresión general para la fem inducida. En este caso, el campo eléctrico es estático y no cambia con el tiempo, por lo que no hay una variación temporal de flujo magnético que genere una fem inducida. Por lo tanto, la integral de la circulación del campo eléctrico a lo largo del contorno de la espira es cero:

$$\varepsilon = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

Ahora, si consideramos la relación entre la fuerza electromotriz y la densidad superficial de carga en las placas del capacitor, sabemos que:

$$\varepsilon = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h = 0 \Rightarrow \sigma = 0$$

No hay acumulación de carga neta que induzca una fem en la espira, la corriente resultante será:

$$I = 0$$

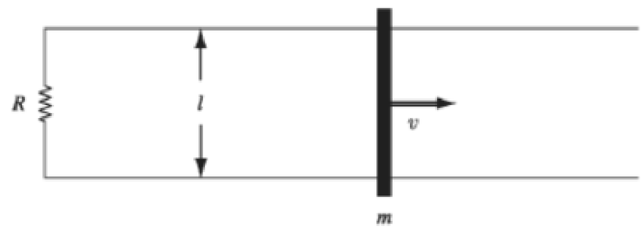
2.- Problema: (20pts) Una barra metálica de masa m resbala sin fricción sobre dos rieles conductores separados por una distancia l (ver figura). Considera que una resistencia R se conecta entre los rieles y que existe un campo magnético (que entra dentro de la página) que llena toda la región del espacio.

(a) Si la barra metálica se mueve con rapidez v hacia la derecha, calcula la corriente que circula sobre la resistencia y determina su dirección.

(b) Calcula la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre la barra.

(c) Si la barra comienza con una rapidez v_0 en el tiempo $t = 0$, y se deja deslizarse libremente, calcula su rapidez a un tiempo posterior t.

(d) La energía cinética inicial de la barra era $\frac{1}{2}mv_0^2$. Muestra que la energía cedida a la resistencia es exactamente $\frac{1}{2}mv_0^2$.



a)

Podemos usar la ley de ohm para encontrar la corriente del circuito, $I = \frac{\varepsilon}{R}$

Por parte de la resistencia no podemos trabajar, sin embargo, podemos buscar quien es esa fem.

Para calcular la fuerza electromotriz debemos resolver,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Entonces debemos conocer el flujo magnético a través de la espira,

$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S} = Blx$$

Colocando la coordenada x en dirección del movimiento.

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{d}{dt}x = -Blv$$

Donde v es la rapidez con la que la barra se mueve.

Sustituyamos la fem inducida,

$$I = -\frac{Blv}{R}$$

Observemos que el signo solo te dice su dirección, si la corriente inducida es negativa, esta fluirá en sentido antihorario, lo que indica que el flujo magnético se está aumentando y la corriente se opone a este cambio.

Dejemos solo su valor de magnitud,

$$I = \frac{Blv}{R}$$

b)

la fuerza magnética que actúa sobre un conductor con corriente, la cual se describe por la siguiente ecuación:

$$\bar{F}_B = \int I\left(d\bar{l} \times \bar{B}\right)$$

Para determina la fuerza magnética $\bar{F}_B$, debemos integrar la ecuación, la longitud del conductor es constante y está completamente dentro del campo magnético $\bar{B}$, también I es constante a lo largo de la barra y $d\bar{l}$ es un elemento de longitud a lo largo de la barra, es paralelo al vector de longitud $\bar{L}$ y como tiene longitud constante,

$$\bar{F}_B = I(\bar{L} \times \bar{B})$$

De este modo la magnitud de la fuerza magnética esta dada por el producto:

$$F_B = IlB \sin\theta$$

Donde θ es el ángulo entre el vector longitud $\bar{L}$ y el campo magnético $\bar{B}$, sabemos que estos dos vectores son perpendiculares, es decir $\theta = 90° \Rightarrow \sin 90° = 1$, por lo que la magnitud se reduce a:

$$F_B = IlB$$

Vamos a sustituir el valor de corriente,

$$F_B = \frac{BlvlB}{R} = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

Determinemos la dirección utilizando el producto cruzado $\bar{L} \times \bar{B}$. $\bar{L}$ es el vector que apunta en la dirección de la barra (en la dirección de la corriente inducida). Si la corriente fluye hacia abajo (en el sentido negativo del eje y), el vector $\bar{L}$ apunta hacia abajo. $\bar{B}$ el campo magnético entra a la página, es decir, hacia el eje $-z$.

Para explicar la dirección de la fuerza lo hare mediante la regla de la mano derecha. Apuntamos para $\bar{L}$ en dirección $-y$, el cual sigue la corriente inducida fluye hacia abajo en la barra. Luego giraremos la mano en dirección de $\bar{B}$, apuntando dentro de la hora hacia $-z$, finalmente para concluir el producto cruz, hay que alzar el pulgar el cual apunta para la izquierda.

Así que la fuerza magnética actúa en la dirección opuesta al movimiento de la barra, es decir, hacia la izquierda.

De modo que, si la barra se moviera a la derecha, la fuerza magnética actuará como un frenado,

$$F_B = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$$

Pues esta tiene dirección para la izquierda. Nos será útil para el siguiente inciso.

c)

Por segunda ley, considerando que ya solo nos movemos en un eje,

$$F = ma \Rightarrow -\frac{B^2 l^2 v}{R} = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR}dt \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{B^2 l^2}{mR}t \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{B^2 l^2}{mR}t}$$

Por lo tanto,

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR}t}$$

d)

La energía cinética inicial de la barra es:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La energía disipada será:

$$E = \int_0^\infty P\,dt$$

Donde la potencia disipada es: $P = I^2 R$

$$E = \int_0^\infty I^2 R\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{Blv}{R}\right)^2 R\,dt = \int_0^\infty \frac{B^2 l^2 v(t)^2}{R^2} R\,dt = \int_0^\infty \frac{B^2 l^2 v(t)^2}{R}dt$$

Donde ya calculamos $v(t)$,

$$E = \int_0^\infty \frac{B^2 l^2 \left(v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR}t}\right)^2}{R}dt = \int_0^\infty \frac{B^2 l^2 v_0^2 e^{-2\frac{B^2 l^2}{mR}t}}{R}dt$$

Recordemos que la integral de e^{-at} es $\frac{1}{a}$,

$$E = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R}\left(\frac{1}{2\frac{B^2 l^2}{mR}}\right) = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R}\frac{1}{2}\frac{mR}{B^2 l^2} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Por lo tanto, la energía disipada en la resistencia es igual a la energía cinética inicial de la barra,

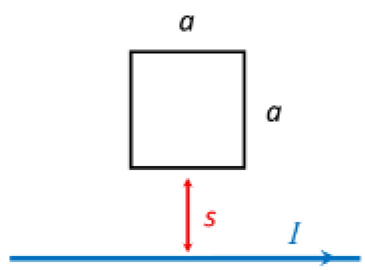
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = E_0$$

3.- Problema: (20pts) Considera una espira de alambre cuadrada (de lado a) localizada en una mesa, a una distancia s de un alambre recto muy largo, que transporta una corriente I (ver figura).

a) Calcula el flujo de campo magnético sobre la espira.

b) Si se mueve la espira alejándola del alambre recto con una rapidez v, calcula la fuerza electromotriz inducida en al espira. Así mismo, determina la dirección de la corriente.

c) ¿Qué pasaría si la espira se mueve a la izquierda con una rapidez v?



a)

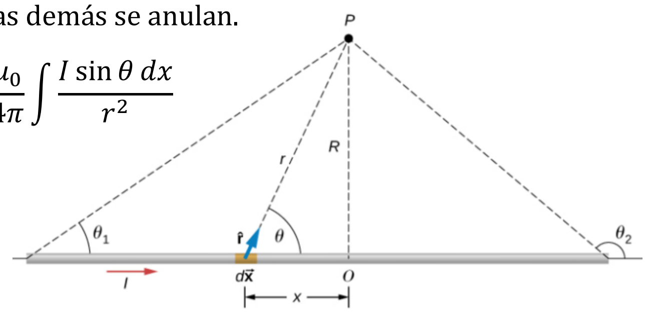
El flujo magnético a través de la espira es la integral del campo magnético a través de la superficie de área

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{a}$$

Debemos conocer el campo magnético producido por un alambre recto e infinito que lleva una corriente a una distancia s. Hagamos un resumen, de acuerdo con la ley de Biot-Savart, fijándonos en solo una componente, pues las demás se anulan.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \sin\theta \, dx}{r^2}$$

Donde $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$.



De modo que:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Este resultado indica que el campo magnético disminuye inversamente con la distancia desde el alambre y es perpendicular al plano formado por el alambre y el punto donde se mide el campo.

Regresemos al cálculo del flujo magnético,

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \int_s^{s+a} B(r) dA = \int_s^{s+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_s^{s+a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} [\ln(s+a) - \ln(s)]$$
$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{s+a}{s}\right)$$

b)

Calculemos la fuerza electromotriz usando regla de la cadena,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon = -\frac{d\Phi}{ds}\frac{ds}{dt} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{s+a}{s}\right)\right)v = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}v\left(-\frac{a}{s(s+a)}\right) = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi s(s+a)}$$

En el lado más cercano de la espira, el campo magnético apunta hacia afuera de la página. La ley de Lorentz nos dice que la fuerza magnética sobre una carga q en movimiento se da por:

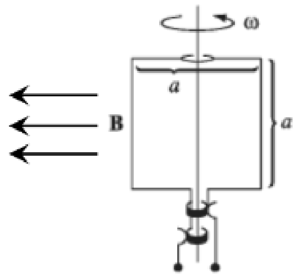
$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B}$$

La velocidad de la carga se mueve con la espira a la derecha. Como se dijo, el campo magnético apunta hacia afuera de la página, la fuerza sobre la carga en el lado cercano es hacia la derecha. En el lado lejano de la espira también estará orientado para afuera de la página, pero con una intensidad menor por la distancia. Dado que la fuerza en ambos lados de la espira actúa hacia la derecha, esto induce una corriente que fluye en un sentido tal que las cargas positivas en el lado cercano se desplazan a la derecha y en el lado lejano también se desplazan a la derecha, lo que resulta en que la corriente inducia fluye en sentido antihorario en la espira.

c)

Al mover la espira hacia la izquierda, el flujo del campo magnético no cambia porque la distancia entre la espira y el alambre se mantiene constante, en otras palabras, como el flujo magnético no varía en el tiempo, no se induce una fem, $\varepsilon = 0$

4.- Problema: (20pts) Una espira cuadrada de lado a se coloca como se muestra en la figura, de tal manera que gira a una frecuencia angular ω. Un campo magnético $\vec{B}$, constante y uniforme, que apunta hacia la izquierda llena toda la región. Calcula la fuerza electromotriz $\mathcal{E}(t)$ para este generador de corriente alterna.



Para calcular la fuerza electromotriz debemos resolver,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Entonces debemos conocer el flujo magnético a través de la espira,

$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S}$$

Donde $\bar{B}$ es el campo magnético y $\bar{S} = a^2$ es la superficie o área de la espira,

Consideremos el ángulo entre $\bar{B}$ y el vector normal al área es $\theta = \omega t$, así que el flujo es,

$$\Phi = \mathrm{Ba}^2 \cos \omega t$$

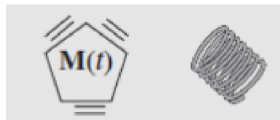
Regresemos a sustituir en la fuerza electromotriz,

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(\mathrm{Ba}^2 \cos \omega t) = -(-\mathrm{Ba}^2 \omega \sin \omega t)$$

Por lo tanto, la fem para este generador de corriente es alterna es $\varepsilon = \mathrm{Ba}^2 \omega \sin \omega t$

5.- Problema: (10pts) Una forma de medir la variación temporal de un objeto magnetizado $\vec{M}(t)$ es por medio de la *fuerza electromotriz* $\mathcal{E}_F(t)$ inducida por la magnetización en una bobina detectora cercana, como se muestra en la figura. Asume que la corriente estacionaria I_{bobina} en la bobina produce un campo magnético $\vec{B}_{\text{bobina}}$ y muestra que

$$\mathcal{E}_F(t) = -\frac{1}{I_{\text{bobina}}}\frac{d}{dt}\int_V \vec{B}_{\text{bobina}} \cdot \vec{M}(t) d^3r\,.$$



Magnetización dinámica   Bobina de detección

$$\Phi = \int_s \bar{B}_m(t) \cdot d\bar{a} = \int_s (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{a} = \oint_C \bar{A}_m \cdot d\bar{l} \Rightarrow I\Phi = \oint_C \bar{A}_m \cdot Id\bar{l}$$

$$\Rightarrow I\Phi = \oint_V \bar{A}_m \cdot \bar{J}_b dv = \frac{1}{\mu_0}\oint_V \bar{A}_m \cdot (\mu_0 \bar{J}_b) dv = \frac{1}{\mu_0}\oint_V \bar{A}_m \cdot (\nabla \times \bar{B}_b) dv$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot (\nabla \times \bar{A}_m) dv - \frac{1}{\mu_0}\int_V \nabla \cdot (\bar{B}_b \times \bar{A}) dv$$

Donde en ∞ , $\frac{1}{\mu_0}\int_V \nabla \cdot (\bar{B}_b \times \bar{A}_m) dv = 0$

$$\Rightarrow I\Phi = \frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot (\nabla \times \bar{A}_m) dv = \frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot \bar{B}_m dv$$

Recordar, $\bar{H}_m = \frac{\bar{B}_m}{\mu_0} - \bar{M}(t)$

$$\Rightarrow I\Phi = \frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot \left(\bar{H}_m + \bar{M}(t)\right) dv = \frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot \bar{M}(t) dv + \frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot \bar{H}_m dv$$

Donde,

$$\int_V \bar{B}_b \cdot \bar{H}_m dv = \int_V (\nabla \times \bar{A}_b) \cdot \bar{H}_m dv = \int_V \bar{A}_b \cdot (\nabla \times \bar{H}_m) dv + \int_V \nabla \cdot (\bar{A}_b \times \bar{H}_m) dv$$

Donde en ∞, $\int_V \nabla \cdot (\bar{A}_b \times \bar{H}_m) dv = 0$ y $\int_V \bar{A}_b \cdot (\nabla \times \bar{H}_m) dv = \int_V \bar{A}_b \cdot \bar{J}_{ext} dv = 0$. Por lo tanto,

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}} = -\frac{1}{\mathrm{I_B}}\frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot \bar{M}(t) dv$$

Concluimos que

$$\varepsilon_F(t) = -\frac{1}{I_B}\frac{d}{dt}\frac{1}{\mu_0}\int_V \bar{B}_b \cdot \bar{M}(t) dv$$

6.- Problema: (10pts) Imagina que existe en todo el espacio un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$. Considera también que hay una carga positiva en reposo, localizada en el origen. De pronto alguien apaga el campo magnético por lo que se induce un campo eléctrico. ¿En qué dirección se mueve la carga?

Supongamos que el campo magnético $\bar{B}$ es uniforme y orientado en la dirección del eje z, es decir, $\bar{B} = B_0\hat{z}$. Sabemos que al ser apagado este inducirá un campo eléctrico, pues como indica la Ley de Faraday, un campo eléctrico inducido $\bar{E}$ se genera debido a una variación temporal del campo magnético,

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Si $\bar{B} = B_0\hat{z}$ se apaga, entonces $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ es negativo, lo que indicaría una disminución del campo magnético, usando la regla de mano derecha podemos notar que el cambio induce un campo eléctrico que forma círculos alrededor del eje z.

Como el campo eléctrico inducido es tangente a estas trayectorias circulares, el vector $\bar{E}$ se orienta de manera azimutal en torno al eje z.

Así que pongamos una carga positiva y esta experimentara una fuerza eléctrica, $\bar{F} = q\bar{E}$.

Como el campo eléctrico inducido tiene una dirección azimutal, la fuerza será también en esa dirección, lo que nos dice que la carga se moverá en un camino circular alrededor del eje z.

Así que la carga positiva en reposo en el origen se empezará a mover por una trayectoria circular del plano xy, alrededor del eje z. La dirección sería con base al signo de la variación temporal del campo magnético, $-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$.