Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1 - 15
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

15. Hay dos máquinas que producen monedas "desbalanceadas", es decir, con una mayor probabilidad de que caiga una cara que la otra. La máquina 1 produce monedas con probabilidad p = 0,4 de salir sol. La máquina 2 produce monedas con una probabilidad p = 0,6 de salir sol. Tú tienes una moneda de una de las máquinas, pero no sabes de cuál. Ahora supón que inicialmente consideras que es igualmente probable que tu moneda sea de la máquina 1 o de la 2, esto es: P (p = 0,4) = P (p = 0,6) = 0,5.

a) Lanzas 10 veces la moneda y te salen 6 soles. ¿Cómo cambia esta información tu distribución de probabilidad?

b) Ahora supón que lanzas otras 10 veces la moneda. ¿Cómo cambia entonces la probabilidad?

Sol.

Para este problema usaremos el teorema de Bayes: $P[A_n|B] = \frac{P[B|A_n]P[A_n]}{\sum P[B|A_i]P[A_i]}$

Denotemos los eventos:

- M_1: La moneda es de la maquina 1 i. e. $P(sol) = 0.4$
- M_2: La moneda es de la maquina 2 i. e. $P(sol) = 0.6$

a)

Pero veamos que al final se dice que inicialmente se considera que es igual de probable que la moneda sea de cualquiera de las dos maquinas i. e. $P(M_1) = P(M_2) = 0.5$

La probabilidad de obtener k soles en n lanzamientos, si la probabilidad de sol es p, se da por la fórmula binomial (Bernoulli): $P(k\ soles|p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Además, en este caso para las monedas de las maquinas se tiene que justo estas probabilidades son "opuestas" por lo que con calcular un módulo podemos saber cuánto es el otro.

Calculemos la probabilidad de tener la moneda 1, dado que al tirar la moneda 10 veces salieron 6 soles,

$$P[M_1|6\ soles] = \frac{P[6\ soles|M_1]P[M_1]}{P[6\ soles|M_1]P[M_1] + P[6\ soles|M_2]P[M_2]}$$

Vamos con el coeficiente binomial,

$$P[6\ soles|M_1] = \binom{10}{6} p^6(1-p)^4 = \binom{10}{6}(0.4)^6(0.6)^4 \approx 0.1115$$
$$P[6\ soles|M_2] = \binom{10}{6}(0.6)^6(0.4)^4 \approx 0.2508$$

Se sigue que,

$$P[M_1|6\ soles] = \frac{(0.1115)(0.5)}{(0.1115)(0.5)+(0.2508)(0.5)} = \frac{(0.1115)}{(0.1115)+(0.2508)} \approx 0.3077 \approx 0.31$$

Análogamente podemos hacerlo para $P[M_2|6\ soles]$ o solo dar el argumento de que son "opuestos".

$$P[M_2|6\ soles] = \frac{(0.2508)(0.5)}{(0.1115)(0.5)+(0.2508)(0.5)} = \frac{(0.2508)}{(0.1115)+(0.2508)} \approx 0.6922 \approx 0.69$$

Después de observar 6 soles en 10 lanzamientos, la probabilidad de que la moneda provenga de la máquina 2 ha aumentado de 50% a aproximadamente 69%, mientras que la probabilidad de que provenga de la máquina 1 ha disminuido a 31%.

b)

Supongamos que lanzamos otras 10 veces la moneda, pero ahora para variar y seguir el camino de los 6 soles para que sea más notorio el cambio, propongo que nos salen 7 soles.

Recordando que ahora:

$$P[M_1] = P[M_1|6\ soles], \qquad P[M_2] = P[M_2|6\ soles]$$

Actualizando nuestra probabilidad de Bayes:

$$P[M_i|7\ soles] = \frac{P[7\ soles|M_i]P[M_i]}{P[7\ soles|M_i]P[M_1] + P[7\ soles|M_i]P[M_2]}$$

Vamos con el coeficiente binomial,

$$P[7\ soles|M_1] = \binom{10}{7}(0.4)^7(0.6)^3 \approx 0.042$$

$$P[7\ soles|M_2] = \binom{10}{7}(0.6)^3(0.4)^7 \approx 0.215$$

Se sigue que,

$$P[M_1|7\ soles] = \frac{(0.042)(0.31)}{(0.042)(0.31)+(0.215)(0.69)} \approx 0.08$$
$$P[M_2|7\ soles] = \frac{(0.215)(0.69)}{(0.042)(0.31)+(0.215)(0.69)} \approx 0.92$$

Después de realizar otros 10 lanzamientos y obtener 7 soles, la probabilidad de que la moneda provenga de la máquina 2 ha aumentado de 69% a aproximadamente 92%, mientras que la probabilidad de que provenga de la máquina 1 ha disminuido a 8%.