Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Mecánica Analítica

Tarea 5

Profesores:
Dra. Rosa María Méndez Vargas

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- (6.7) En un espectrómetro de masas, se acelera un ión positivo de una sola carga ($q = 1.602 \times 10^{-19}$ C) por medio de una diferencia de potencial de 1000 voltios. Luego pasa por un campo magnético uniforme en el que $B = 0.1$ weber$/m^2$, y se desvía en una trayectoria circular de 0.182 m. Determinar: a) la velocidad del ión; b) la masa del ión en kilogramos y unidades de masa atómica; c) el número de masa del ión.

Partamos de la ecuación que nos relaciona el potencial electrónico con la energía cinética y despejemos v^2: $V = \frac{T}{q} = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{q} \Rightarrow v^2 = \frac{2qV}{m}$. Mientras que, por otra parte, en un movimiento circular bajo la influencia de un campo magnético, una partícula cargada experimenta fuerza magnética perpendicularmente a su velocidad y al campo magnético. La fuerza magnética F_m sobre una partícula cargada de carga q en movimiento con velocidad v en un campo magnético de intensidad B se calcula utilizando la ley de Lorentz: $F_m = qvB$. Cuando la partícula sigue una trayectoria circular, la fuerza magnética es igual a la fuerza centrípeta necesaria para mantenerla en esa trayectoria: $F_m = \frac{mv^2}{r}$. Donde m es la masa de la partícula y r es el radio de la trayectoria circular. Igualando ambas expresiones: $qvB = \frac{mv^2}{r}$. De aquí, podemos despejar la velocidad v para un movimiento circular bajo un campo magnético: $v = \frac{qrB}{m}$

Ahora podemos calcular v de la cual si tengamos las variables: $\frac{v^2}{v} = v = \frac{\left(\frac{2qV}{m}\right)}{\left(\frac{qrB}{m}\right)} = \frac{2V}{rB}$
Sustituyamos nuestros valores. $v = \frac{2V}{rB} = \frac{2(100\,Volts)}{(0.182)\left(0.1\frac{weber}{m^2}\right)} \approx 1.1 \times 10^5\,\frac{m}{s}$

a) $v \approx 1.1 \times 10^5\,\frac{m}{s}$

Despejemos la masa, para ello ocupemos la ecuación que se tenía anteriormente:

$$v = \frac{qrB}{m} \Rightarrow m = \frac{qrB}{v} = \frac{(1.602 \times 10^{19}C)(0.182)\left(0.1\frac{weber}{m^2}\right)}{1.1 \times 10^5\,\frac{m}{s}} \approx 2.65 \times 10^{-26}kg$$

b) $m \approx 15.947\ uma$

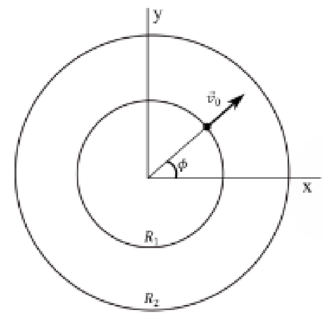
Si se considera que no alcanza las 16 uma, el número de masa del ion sería de $A = 15\ uma$, sin embargo, si se considera dicha aproximación tendremos que el número de masa del ion será de $A = 16\ uma$.

c) $16\ uma$

2.- (6.10) Una partícula positiva de carga e se mueve en el campo eléctrico central

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}\hat{e}_\rho,$$

que hay entre las placas de un condensador cilíndrico, y un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{k}$, paralelo al eje del condensador.



a) Establecer las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cilíndricas.

b) Demostrar que la ecuación de movimiento en función de la variable angular ϕ, que es una coordenada ignorable, se resuelve fácilmente y da como integral de movimiento

$$m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}e\rho^2 B = h = \text{ constante.}$$

c) Demostrar quye, utilizando el resultado hallado en b), la ecuación radial se puede reducir a una ecuación de movimiento unidimensional, que nos dará una segunda integral de movimiento que expresa la conservación de la energía total.

d) Si la partícula es emitida del cilindro interior con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{e}_\rho$, ¿cuál debe ser el valor mínimo de v_0 para que la partícula llegue al otro cilindro cuyo radio es R_2? [*Sugerencia*: el valor mínimo de v_0 se obtendrá cuando R_2 sea un punto de **retorno**.]

Para coordenadas cilíndricas y hallemos la velocidad considerando que ya sabemos que:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} h_i \dot{q}_i\,\hat{e}_i, \qquad h_\rho = 1, \qquad h_\phi = \rho, \qquad h_z = 1 \Rightarrow \bar{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{k}$$

De este modo y considerando la simetría entorno al eje $\hat{k} \Rightarrow v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2$

De electromagnetismo sabeos que los campos eléctricos y magnéticos son de la forma:

$$\bar{E} = -\nabla U = -\nabla e\alpha \ln\rho \Rightarrow U = e\alpha\ln\rho + U(\infty) = e\alpha\ln\rho$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}, \qquad t.q.\ \ \bar{A} = -\frac{1}{2}(\bar{r}\times\bar{B}) = -\frac{1}{2}\left(\left(\rho\hat{e}_\rho + z\hat{k}\right)\times B\hat{k}\right) = -\frac{1}{2}B\rho\hat{e}_\rho\times\hat{k} = \frac{1}{2}B\rho\hat{e}_\phi$$

Por lo tanto, $L = T - U + e\bar{v}\cdot\bar{A} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) - e\alpha\ln\rho + \frac{1}{2}e\rho^2 B\dot{\phi}$

Encontremos las ecuaciones de movimiento: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

Para ρ, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\rho} = \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - \left(m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{e\alpha}{\rho} + e\rho B\dot{\phi}\right) = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + \frac{e\alpha}{\rho} - e\rho B\dot{\phi} = 0$

Para ϕ, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}e\rho^2 B\right) = 0 \Rightarrow m\rho^2\dot{\phi} + \frac{1}{2}e\rho^2 B = h = cte$

Hasta este punto hemos resulto encontrado las ecuaciones de movimiento e intuido que a partir de la derivada de la segunda ecuación de movimiento que lo que está dentro del paréntesis debe ser constante. Despejemos $\dot{\phi}$ de la ecuación de movimiento para ϕ, t. q. $\dot{\phi} = \frac{h - \frac{1}{2}e\rho^2 B}{m\rho^2}$

Ahora sustituyamos esa expresión en nuestra ecuación de movimiento para ρ:

$$m\ddot{\rho} - m\rho\left(\frac{h - \frac{1}{2}e\rho^2 B}{m\rho^2}\right)^2 + \frac{e\alpha}{\rho} - e\rho B\left(\frac{h - \frac{1}{2}e\rho^2 B}{m\rho^2}\right) = 0$$

$$m\ddot{\rho} - \frac{1}{m\rho^3}\left(h^2 - h\rho^2 Be + \frac{1}{4}\rho^4 B^2 e^2\right) + \frac{e\alpha}{\rho} - \frac{eB}{m\rho}\left(h - \frac{1}{2}e\rho^2 B\right) = 0$$

$$m\ddot{\rho} - \frac{h^2}{m\rho^3} + \frac{h\rho^2 Be}{m\rho^3} - \frac{1}{4}\frac{\rho^4 B^2 e^2}{m\rho^3} + \frac{e\alpha}{\rho} - \frac{eBh}{m\rho} + \frac{1}{2}\frac{e^2 B^2 \rho^2}{m\rho} = 0$$
$$m\ddot{\rho} - \frac{h^2}{m\rho^3} + \frac{hBe}{m\rho} - \frac{1}{4}\frac{B^2 e^2}{m}\rho + \frac{e\alpha}{\rho} - \frac{hBe}{m\rho} + \frac{2}{4}\frac{e^2 B^2}{m}\rho = 0$$
$$m\ddot{\rho} - \frac{h^2}{m\rho^3} + \frac{e\alpha}{\rho} + \frac{1}{4}\frac{e^2 B^2}{m}\rho = 0$$
$$m\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{h^2}{m}\frac{\dot{\rho}}{\rho^3} + e\alpha\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{e^2 B^2}{4m}\rho\dot{\rho} = 0$$

Por lo tanto, tenemos la ecuación unidimensional para ρ.

$$m\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{h^2}{m}\frac{\dot{\rho}}{\rho^3} + e\alpha\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{e^2 B^2}{4m}\rho\dot{\rho} = 0$$

Busquemos una relación con la derivada respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{d}{dt}\frac{h^2}{2m}\frac{1}{\rho^2} + \frac{d}{dt}\frac{e^2 B^2}{8m}\rho^2 + \frac{d}{dt}e\alpha\ln(\rho) = \frac{d}{dt}m; m = cte$$

Ahora integremos:

$$\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{h^2}{2m}\frac{1}{\rho^2} + \frac{e^2 B^2}{8m}\rho^2 + e\alpha\ln(\rho) = m; m = cte$$

Bien, ahora recordemos que $\dot{\phi} = \frac{h - \frac{1}{2}e\rho^2 B}{m\rho^2} \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{h^2 - he\rho^2 B + \frac{1}{4}e^2\rho^4 B^2}{m^2\rho^4}$.

$$\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \left(\frac{h^2}{2m}\frac{1}{\rho^2} + \frac{e^2 B^2}{8m}\rho^2\right) + e\alpha\ln(\rho) = m$$
$$\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \left(\rho^2\frac{m}{2}\left[\frac{h^2 - he\rho^2 B + \frac{1}{4}e^2 B^2\rho^4}{m^2\rho^4}\right] + \frac{he\rho^4 B}{2m\rho^4}\right) + e\alpha\ln(\rho) = m$$
$$\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \left(\rho^2\frac{m}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{heB}{2m}\right) + e\alpha\ln(\rho) = m$$
$$\frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \rho^2\frac{m}{2}\dot{\phi}^2 + k + e\alpha\ln(\rho) = m;\ k = \frac{heB}{2m} = cte$$
$$\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) + e\alpha\ln(\rho) = n;\ n = cte$$

De modo que $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right)$ y $U = e\alpha\ln(\rho)$, por ende, tenemos la energía total. Además, sabemos que

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i q_i - L = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 - L$$

Es una constante, ya que L no dpende explicaitamente de t, como U no dpende de ρ además se satisface que $H = T + U = E_T$.

$$H=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1-L=T+U=E_T$$

Entonces

$$\begin{aligned}H&=m\dot{\rho}^2+m\rho^2\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}e\rho^2B\dot{\phi}-\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2-\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2+e\alpha\ln(\rho)-\frac{1}{2}e\rho^2B\dot{\phi}\\&=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2\right)+e\alpha\ln(\rho)=\mathrm{E}_T\end{aligned}$$

Y con ambas llegamos a lo mismo.

Ahora partamos que teníamos:

$$T+U+q\bar{v}\cdot\bar{A}+\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}\rho=cte=E_T$$

Donde $\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}\rho$ lo obtuvimos arriba,

En el punto de retorno hay que darnos cuenta de que no actúa la energía cinética, mientras que en el punto inicial del sistema si actúan todos los términos, así por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{R_1}^2+R_1^2\dot{\phi}^2\right)+e\alpha\ln R_1+\frac{1}{2}eR_1^2B\dot{\phi}+\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}R_1=e\alpha\ln R_2+\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}R_2$$

Despejemos v^2 y consideramos $\dot{\phi}$ muy pequeño para simplificar cálculos:

$$\frac{1}{2}m(v_0^2)+e\alpha\ln R_1+\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}R_1=e\alpha\ln R_2+\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}R_2$$

$$\frac{1}{2}m(v_0^2)=e\alpha\ln R_2-e\alpha\ln R_1+\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}R_2-\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}R_1$$

$$\frac{1}{2}m(v_0^2)=e\alpha\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)+\frac{1}{4}\frac{e^2B^2}{m}(R_2-R_1)$$

$$v_0^2=\frac{2e\alpha}{m}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)+\frac{e^2B^2}{2m^2}(R_2-R_1)$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2e\alpha}{m}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)+\frac{e^2B^2}{2m^2}(R_2-R_1)}$$

Por lo tanto, el valor mínimo de v_0 es:

$$v_0=\sqrt{\frac{2e\alpha}{m}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)+\frac{e^2B^2}{2m^2}(R_2-R_1)}$$

3.- Una partícula de masa m está restringida a moverse en la superficie de un cilindro vertical de radio ρ. La partícula está sujeta a una fuerza dirigida hacia el origen y proporcional a la distancia de la partícula desde el origen. No olvides la fuerza de gravedad.

a) Escoge tus coordenadas generalizadas y escribe la hamiltoniana.

b) Escribe las ecuaciones de Hamilton del movimiento y resuelve para obtener el movimiento de la partícula.

Vamos a trabajar en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z). Consideraremos que el cilindro tiene radio ρ y cuenta con una fuerza hacia el origen $\bar{F} = -k\bar{r}$, siendo k la constante de proporcionalidad hacia el origen.

La energía potencia está dada por: $U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2) + mgz$

La energía cinética está dada por: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right)$

Por lo tanto, el Lagrangiano que se obtiene es: $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right) - mgz - \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2)$

Calculemos la hamiltoniana, con $q_1 = \phi, q_2 = z$: $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L$

$$\begin{aligned} H &= m\rho^2\dot{\phi}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 + mgz + \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz + \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz + \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2) \end{aligned}$$

Ahora hay que hallar los momentos conjugados de ϕ y z. Usaremos la relación $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, pues nuevamente como se dijo, la energía potencial no depende de la velocidad.

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi}, \qquad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2}, \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

Escribamos la hamiltoniana en términos de los momentos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{p_z}{m}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{p_\phi}{m\rho^2}\right)^2\right) + mgz + \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{p_z^2}{m^2} + \rho^2\frac{p_\phi^2}{m^2\rho^4}\right) + mgz + \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_z^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2}\right) + mgz + \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2) \end{aligned}$$

Además, observe que se satisface: $\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\rho^2}$, $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$. Las ecuaciones de movimiento se pueden encontrar en las ecuaciones $\dot{p}_i$: $\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$, $\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg - kz$

Vemos que el momento angular se conserva, mientras que en z se lleva a cabo: $\dot{p}_z = -mg - kz$

$$m\ddot{z} + kz + mg = 0$$

4.- (8.1) Una partícula estacionaria de masa $3m$ Kg estalla en tres piezas iguales dos de las cuales vuelan en direcciones perpendiculares entre sí, una con una velocidad de $2a$ m/seg y la otra de $3a$ m/seg. ¿Cuál es la magnitud, dirección y sentido de la cantidad de movimiento del tercer fragmento? La explosión tiene lugar en 10^{-5} segundos. Hállese la fuerza media que actúa sobre cada partícula durante la explosión.

Una vez planteado un sistema de referencia en donde las partículas salgan en direcciones $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ (perpendiculares). Utilizando el principio de conservación de momento hará un sistema a de partículas en cual la fuerza exterior es 0, tendremos:

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = 0$$

Recordemos como está dada la cantidad de momento:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0$$

Notemos que este ejercicio varía dependiendo como escojamos a $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$. Sustituyendo los que sabemos de las partículas 1 y 2, considerando que cada masa se separa en partes iguales con una masa m:

$$2am\hat{\imath}\frac{n}{s} + 3am\hat{\jmath}\ \frac{n}{s} + \bar{p}_3 = 0 \Rightarrow \bar{p}_3 = -(2am\hat{\imath} + 3am\hat{\jmath}) = -m(2a\ \hat{\imath}\ + 3a\ \hat{\jmath})\ \frac{n}{s}$$

*Se ocupo la n para describir metro, esto pues la m ya ha sido ocupada en la masa.

Así para el tercer fragmento tenemos:

$$\bar{p}_3 = -ma(2\hat{\imath}\ + 3\hat{\jmath})\ \frac{n}{s}$$

De este modo,

$$\|\bar{p}_3\| = \sqrt{(-m^2a^2)(2^2 + 3^2)} = ma\sqrt{(4+9)} = ma\sqrt{13}$$

Entonces

$$p_3 = ma\sqrt{13}$$

Para hallar la fuerza media usaremos la siguiente relación que sucede a partir de 2 intervalos de tiempo (Esto pues recordemos $\bar{F} = m\bar{a}$):

$$\Delta\bar{p}_j = \bar{p}_j(t_f) - \bar{p}_j(t_i) \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_j(t)\,dt = \bar{F}_j(t_2 - t_1) = \bar{F}_j(10^{-5}s)$$

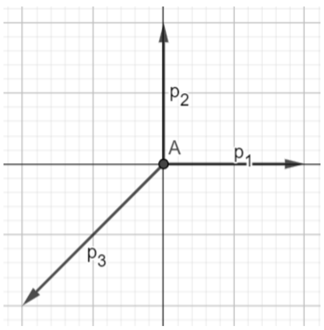
Por lo tanto,

$$\bar{F}_j = \bar{p}_j(10^5 s^{-1})$$

Ahora falta encontrar para cada partícula sustituyendo:

$$\bar{F}_1 = (10^5)2am\hat{\imath}\frac{n}{s^2}, \qquad \bar{F}_2 = (10^5)\ 3am\hat{\jmath}\ \frac{n}{s^2}, \qquad \bar{F}_3 = -(10^5)ma(2\hat{\imath}\ + 3\hat{\jmath})\ \frac{n}{s^2}$$

5.- (8.2) Un núcleo, originalmente en reposo, se desintegra por la emisión de un electrón, cuya cantidad de movimiento es 1.73 MeV/c y, perpendicularmente a la dirección del electrón, de un neutrino cuya cantidad de movimiento es 1.00 MeV/c [El megaelectrón-volt, MeV (un millón de electrón-volts) es una unidad de energía usada en la física moderna que es igual a 1.59×10^{-6} ergs. Correspondientemente, el MeV/c, donde c es la velocidad de la luz es una unidad de cantidad de movimiento lineal igual a 5.33×10^{-16} g-cm/seg.] ¿En qué dirección y sentido reculará el núcleo? ¿Cuál será su cantidad de movimiento de MeV/c? Si la masa del núcleo resultante es 3.90×10^{-22} g, ¿cuál será su energía cinética en electrón-volts?



Para saber en qué dirección y sentido reculara el núcleo, debemos considerar que al estar antes en reposo el sistema debe mantener la conservación de energía, además de que no hay fuerzas externas aplicando, de modo que: $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = 0$

Consideremos $\bar{p}_1$ como el momento del electrón y $\bar{p}_2$ del neutrino, los cuales se relacionan perpendicularmente, esto implica que una vez planteado un sistema de referencia en donde las partículas salgan en direcciones $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ (perpendiculares), tenemos:

$$p_i\hat{\imath} + p_2\hat{\jmath} \ + \bar{p}_3 = 0 \Rightarrow \bar{p}_3 = -(p_i\hat{\imath} + p_2\hat{\jmath})$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1.73}\right) = 30.03° \Rightarrow 30.03° + 180° = 210.03°$$

a) $\bar{p}_3 = -(1.73\ \hat{\imath} + \hat{\jmath})\ MeV/c$, a 210.03°.

Aprovechando la simetría del sistema se calcular la cantidad de movimiento, podemos utilizar teorema de Pitágoras, tenemos:

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 \Rightarrow p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(-1.73)^2 + (-1)^2}$$

b) $p_3 \approx 1.998 \frac{MeV}{c} = 2 \frac{MeV}{c}$

Por la definición de la energía cinética: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{m}{m} = \frac{1}{2}\frac{1}{m}(mv)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{m}p^2$

Antes veamos la conversión de $\frac{Mev}{c}$ a $\frac{gcm}{s}$: $p_3 = \left(2\frac{MeV}{c}\right)\left(\frac{5.33\times10^{-16}\frac{gcm}{c}}{1\frac{MeV}{c}}\right) = 1.066 \times 10^{-15}\frac{gcm}{s}$

Sustituyamos para hallar la energía cinética:

$$T = \frac{\left(1.066 \times 10^{-15}\frac{gcm}{s}\right)^2}{2(3.9 \times 10^{-22}g)} = 1.457 \times 10^{-9}\frac{gcm^2}{s^2} = 1.457 \times 10^{-4}\ ergs$$

Ahora falta pasar a MeV,

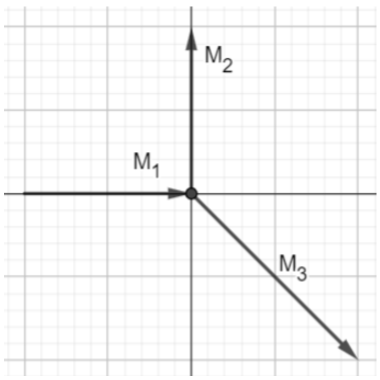
$$T = (1.457 \times 10^{-4}\ ergs)\left(\frac{1MeV}{1.59 \times 10^{-6}ergs}\right) = 9.163 \times 10^{-4}MeV = 916.3\ eV$$

c) $T = 916.3\ eV$

6.- (8.4) Una partícula de masa M_1 y velocidad V_1 es capturada por un núcleo en reposo, y otra partícula ligera de masa M_2 es expedida con una velocidad V_2 en ángulo recto con la trayectoria de la primera, reculando el resto del núcleo (de masa M_3) con una velocidad V_3. Demuestre que la energía cinética de M_2 es

$$T_2 = \frac{M_3}{M_2 + M_3}\left(Q + \frac{M_3 - M_1}{M_3}T_1\right) \tag{1}$$

donde Q es la energía liberada o desprendida en la reacción.



Lo que haremos es calcular los momentos inicial y final, para luego igualarlos. De primera instancia se tiene que el momento inicial es $\bar{p}_i = \bar{p}_1 + \bar{p}_N = M_1V_1\hat{\imath}$, pues el núcleo se encuentra en reposo. Luego se tiene que en la captura del por el núcleo sale la partícula M_2 y lo que queda que es la masa M_3 también sale expedida, con V_2 y V_3 respetivamente. De modo que el momento final es $\bar{p}_f = \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = M_2V_2\hat{\jmath} + \left(M_3V_{3x}\hat{\imath} - M_3V_{3y}\hat{\jmath}\right)$

En la figura adjunta es una representación del movimiento de las masas, no estoy diciendo que la masa sea el vector, solo para aclarar.

Al considerar que no hay fuerza externa que provoque cambios de energía, esta debe conservarse de modo que el momento inicial y final deben ser iguales. $\bar{p}_i = \bar{p}_f$.

$$M_1V_1\hat{\imath} = M_2V_2\hat{\jmath} + \left(M_3V_{3x}\hat{\imath} - M_3V_{3y}\hat{\jmath}\right)$$

$$M_1V_1 = M_3V_{3x} \Rightarrow V_{3x} = \frac{M_1V_1}{M_3}, \qquad M_2V_2 - M_3V_{3y} = 0 \ \Rightarrow V_{3y} = \frac{M_2V_2}{M_3}$$

Ahora calculemos la energía cinética,

$$T_3 = \frac{1}{2}M_3V_3^2 = \frac{1}{2}M_3\left(V_{3x}^2 + V_{3y}^2\right) = \frac{1}{2}M_3\left(\frac{M_1^2V_1^2}{M_3^2} + \frac{M_2^2V_2^2}{M_3^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{M_3}\left(M_1(M_1V_1^2) + M_2(M_2V_2^2)\right)$$
$$= \frac{1}{M_3}\left(M_1\left(\frac{1}{2}M_1V_1^2\right) + M_2\left(\frac{1}{2}M_2V_2^2\right)\right) = \frac{1}{M_3}(M_1T_1 + M_2T_2)$$

Sin embargo, la energía cinética no se conservará $\Rightarrow T_i = T_f - Q \Rightarrow T_1 = T_2 + T_3 - Q$

Sustituyamos y despejemos T_2,

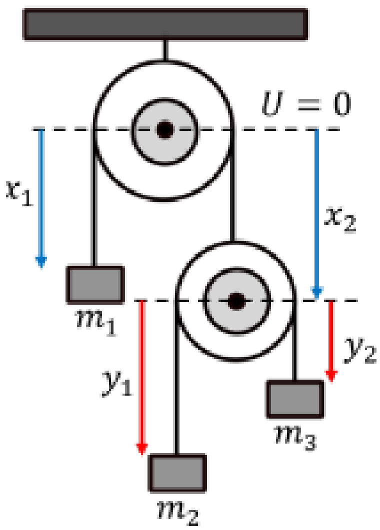
$$T_1 = T_2 + \frac{M_1T_1}{M_3} + \frac{M_2T_2}{M_3} - Q \Rightarrow T_1 = T_2\left(1 + \frac{M_2}{M_3}\right) + \frac{M_1T_1}{M_3} - Q \Rightarrow T_2\left(1 + \frac{M_2}{M_3}\right) = T_1 - \frac{M_1T_1}{M_3} + Q$$
$$\Rightarrow T_2\left(1 + \frac{M_2}{M_3}\right) = T_1\left(1 - \frac{M_1}{M_3}\right) + Q \Rightarrow T_2\left(\frac{M_3 + M_2}{M_3}\right) = T_1\left(\frac{M_3 - M_1}{M_3}\right) + Q \Rightarrow T_2$$
$$= \frac{T_1\left(\frac{M_3 - M_1}{M_3}\right) + Q}{\left(\frac{M_3 + M_2}{M_3}\right)}$$

Por lo tanto, $T_2 = \frac{M_3}{M_3 + M_2}\left(Q + \frac{M_3 - M_1}{M_3}T_1\right)$

7.- (8.11) Máquina de Atwood compuesta.

a) Escriba la Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange para la máquina de Atwood compuesta. Desprecie el efecto de las poleas en el movimiento.

b) Encuentre las aceleraciones de las partículas y las tensiones en las cuerdas.



Una vez elegido el punto donde la energía potencial gravitacional es 0, veamos que el sistema cuenta con 2 constricciones holonómicas, de modo que estas cuentan con 4 variables, una para la posición del centro y la otra para la segunda polea hallaremos las siguientes funciones:

$$\phi_1 = (x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 + x_2 - l_1 = 0$$

$$\phi_2 = (x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 + y_2 - l_2 = 0$$

Esto considerando que l_1 y l_2 son las longitudes de dichas cuerdas. Donde las tensiones de las cuerdas son las fuerzas de contrición:

$$\daleth_i = Q_i = \sum_k \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x}$$

Busquemos las relaciones para hallar las funciones de posición para cada masa. Para esto consideremos nuestros ejes $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$.

$$\bar{r}_1 = -x_1\hat{\jmath}, \qquad \bar{r}_2 = -(x_2 + y_1)\hat{\jmath}, \qquad \bar{r}_3 = -(x_2 + y_2)\hat{\jmath}$$

Ahora hay que hallar las velocidades,

$$\bar{v}_{m1} = -\dot{x}_1, \qquad \bar{v}_{m2} = -(\dot{x}_2 + \dot{y}_1)\hat{\jmath}, \qquad \bar{v}_{m3} = -(\dot{x}_2 + \dot{y}_2)\hat{\jmath}$$

De este modo la energía cinética $\left(T = \frac{1}{2}mv^2\right)$ del sistema de 3 masas queda como:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_2 + \dot{y}_2)^2$$

Y, por otro lado, la energía potencial $(U = mgh)$ queda como:

$$U = -m_1gx_1 - m_2g(x_2 + y_1) - m_3g(x_2 + y_2)$$

De modo que el Lagrangiano es $L = T - U$:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_2 + \dot{y}_2)^2 + m_1gx_1 + m_2g(x_2 + y_1) + m_3g(x_2 + y_2)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange estarán dadas por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k^n \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}$$

Para x_1,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=\sum_k^2 \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1)-m_1 g=\lambda_1\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1+x_2-l_1)+\lambda_2\frac{\partial}{\partial x_1}(y_1+y_2-l_2)$$

$$m_1(\ddot{x}_1-g)=\lambda_1$$

Para x_2,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=\sum_k^2 \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_2}$$

$$\frac{d}{dt}[m_2(\dot{x}_2+\dot{y}_1)+m_3(\dot{x}_2+\dot{y}_2)]-m_2 g-m_3 g=\lambda_1\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+x_2-l_1)+\lambda_2\frac{\partial}{\partial x_2}(y_1+y_2-l_2)$$

$$m_2(\ddot{x}_2+\ddot{y}_1)+m_3(\ddot{x}_2+\ddot{y}_2)-g(m_2+m_3)=\lambda_1$$

$$\ddot{x}_2(m_2+m_3)+m_2\ddot{y}_1+m_3\ddot{y}_2-g(m_2+m_3)=\lambda_1$$

Para y_1,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_1}=\sum_k^2 \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y_1}$$

$$\frac{d}{dt}\big(m_2(\dot{x}_2+\dot{y}_1)\big)-m_2 g=\lambda_1\frac{\partial}{\partial y_1}(x_1+x_2-l_1)+\lambda_2\frac{\partial}{\partial y_1}(y_1+y_2-l_2)$$

$$m_2(\ddot{x}_2+\ddot{y}_1)-m_2 g=\lambda_2$$

Para y_2,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_2}=\sum_k^2 \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial y_2}$$

$$\frac{d}{dt}\big(m_3(\dot{x}_2+\dot{y}_2)\big)-m_3 g=\lambda_1\frac{\partial}{\partial y_2}(x_1+x_2-l_1)+\lambda_2\frac{\partial}{\partial y_2}(y_1+y_2-l_2)$$

$$m_3(\ddot{x}_2+\ddot{y}_2)-m_3 g=\lambda_2$$

Ahora vamos a emplear nuevamente las constricciones, pero con sus segundas derivadas temporales:

$$\ddot{\phi}_1=\ddot{x}_1+\ddot{x}_2=0, \qquad \ddot{\phi}_2=\ddot{y}_1+\ddot{y}_2=0$$

Lo que implica que

$$\ddot{x}_1=-\ddot{x}_2, \qquad \ddot{y}_1=-\ddot{y}_2$$

De modo que podemos desarrollar nuestras ecuaciones de movimiento de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{x}_1-g)&=\lambda_1\\ -\ddot{x}_1(m_2+m_3)+\ddot{y}_1(m_2-m_3)-g(m_2+m_3)&=\lambda_1\\ m_2(\ddot{y}_1-\ddot{x}_1)-m_2 g&=\lambda_2\\ -m_3(\ddot{x}_1+\ddot{y}_1)-m_3 g&=\lambda_2 \end{aligned}$$

Nos falta encontrar las aceleraciones de las partículas y las tenciones de las cuerdas, para eso simplemente hay que resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 - \lambda_1 &= gm_1 \\ -(m_2+m_3)\ddot{x}_1 + (m_2-m_3)\ddot{y}_1 - \lambda_1 &= g(m_2+m_3) \\ -m_2\ddot{x}_1 + m_2\ddot{y}_1 - \lambda_2 &= m_2 g \\ -m_3\ddot{x}_1 - m_3\ddot{y}_1 - \lambda_2 &= m_3 g \end{aligned}$$

Opte por resolverlo utilizando Python, espero no perjudique mi tarea, pero por la ayudantía se entendió que se podían usar métodos computacionales en estos casos pues ya se sale de lo buscado en el curso y corresponde a otras materias.

Adjunto el mi Script:

```python
from sympy import symbols, Eq, solve
x, y, z, w = symbols('x y z w')
m1, m2, m3, g = symbols('m1 m2 m3 g')
eq1 = Eq(m1*x - w, g*m1)
eq2 = Eq(-(m2+m3)*x + (m2-m3)*y - w, g*(m2+m3))
eq3 = Eq(-m2*x + m2*y - z, m2*g)
eq4 = Eq(-m3*x - m3*y - z, m3*g)
sol = solve((eq1, eq2, eq3, eq4), (x, y, z, w))
print("Soluciones:")
print("x =", sol[x])
print("y =", sol[y])
print("z =", sol[z])
print("w =", sol[w])
```

```
Soluciones:
x = (g*m1*m2 + g*m1*m3 - 4*g*m2*m3)/(m1*m2 + m1*m3 + 4*m2*m3)
y = (2*g*m1*m2 - 2*g*m1*m3)/(m1*m2 + m1*m3 + 4*m2*m3)
z = -4*g*m1*m2*m3/(m1*m2 + m1*m3 + 4*m2*m3)
w = -8*g*m1*m2*m3/(m1*m2 + m1*m3 + 4*m2*m3)
```

Solo que cambie $\ddot{x}_1$ por x, $\ddot{y}_1$ por y, λ_1 por w y λ_2 por z. Entonces, simplificando, las soluciones quedan de la siguiente forma:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1(m_2+m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g \qquad \lambda_1 = -\frac{8m_1m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{2m_1(m_2-m_3)}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g \qquad \lambda_2 = -\frac{4m_1m_2m_3}{m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3}g$$

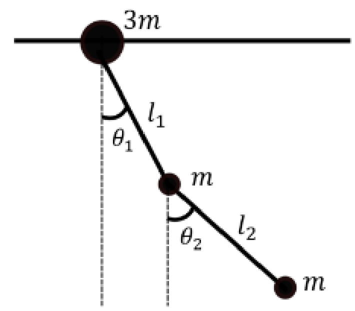
Así obtenemos las aceleraciones y las tensiones.

8.- (8.13) Una cuenta de masa $3m$ puede deslizarse sin rozamiento por un alambre como se indica en la figura. Unido a la cuenta hay un péndulo doble. Si, en una posición cercana a la de su equilibrio, se deja al sistema en libertad, a partir del reposo, las masas oscilan en el plano de la figura a un lado y otro de la vertical. **a)** Escríbase las ecuaciones de Lagrange del movimiento del sistema. **b)** Hállese las aceleraciones cuando los desplazamientos y las velocidades son pequeñas.

Hint: Considere las siguientes aproximaciones para la energía y la energía potencial:

$$T \ : \ \sin\theta_i \approx 0, \qquad \cos\theta_i \approx 1. \qquad U \ : \ \sin\theta_i \approx 0, \cos\theta_i - \frac{1}{2}\theta_i^2.$$

con lo que podrán escribir un sistema de ecuaciones de 3×3, en donde las incógnitas son las aceleraciones generalizadas.



Empecemos describiendo la posición de cada una de las masas:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1 &= x\hat{\imath} \\
\bar{r}_2 &= (x + l_1\sin\theta_1)\hat{\imath} - l_1\cos\theta_1\,\hat{\jmath} \\
\bar{r}_3 &= (x + l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2)\hat{\imath} - (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Procedamos a obtener las velocidades:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \dot{x}\hat{\imath} \\
\bar{v}_2 &= \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right)\hat{\imath} + l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\,\hat{\jmath} \\
\bar{v}_3 &= \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)\hat{\imath} - \left(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= \dot{x}^2 \\
v_2^2 &= \dot{x}^2 + 2l_1\dot{\theta}_1\dot{x}\cos\theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \\
v_3^2 &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\left(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \\
&\qquad + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\left(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

Pasemos con la energía cinética T, en la cual haremos las siguientes aproximaciones:

$$T\colon\ \sin\theta_i \approx 0, \cos\theta_i \approx 1$$

Obtengamos la contribución de cada partícula:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 \\
T_2 &= \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + 2l_1\dot{\theta}_1\dot{x} + l_1^2\dot{\theta}_1^2\right) \\
T_3 &= \frac{1}{2}m_3v_3^2 = \frac{1}{2}m_3\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)
\end{aligned}$$

Antes de obtener la energía cinética total, observemos que $m_1 = 3m, m_2 = m = m_3$, ahora si obtengamos la energía cinética total:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\left(3\dot{x}^2 + \left(\dot{x}^2 + 2l_1\dot{\theta}_1\dot{x} + l_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left(3\dot{x}^2 + \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\right)^2 + \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Trabajemos ahora con la energía potencial U, en la cual haremos las siguientes aproximaciones: $U\colon\ \sin\theta_i \approx 0, \cos\theta_i \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_i^2$

Para la energía potencial sumemos lo que agregan cada una:

$$\begin{aligned}
U &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g h_3 \\
&= 3mg(0) + mg(-l_1 \cos\theta_1) + mg(-l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2) \\
&= mg(-l_1 \cos\theta_1) + mg(-l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2) \\
&= -mg(2l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \\
&= -mg\left(2l_1\left(1 - \frac{1}{2}\theta_1^2\right) + l_2\left(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2\right)\right) \\
&= -mg\left(2l_1 - l_1\theta_1^2 + l_2 - \frac{1}{2}l_2\theta_2^2\right) \\
&= mg\left(l_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}l_2\theta_2^2\right)
\end{aligned}$$

Esto al considerar un cambio en donde nuestra energía potencial vale 0.

Ahora calculemos el Lagrangiano $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}m\left(3\dot{x}^2 + \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\right)^2 + \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2\right) - mg\left(l_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}l_2\theta_2^2\right)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange estarán dadas por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Para x,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\
m\frac{d}{dt}\left(3\dot{x} + \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}\right) + \left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2\right) &= 0 \\
5\ddot{x} + 2l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 &= 0
\end{aligned}$$

Para θ_1,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\
m\frac{d}{dt}\left(l_1\left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1\right) + l_1\left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)\right) + 2mgl_1\theta_1 &= 0 \\
l_1\left(\ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1\right) + l_1\left(\ddot{x} + l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2\right) + 2gl_1\theta_1 &= 0 \\
2l_1\ddot{x} + 2l_1^2\ddot{\theta}_1 + l_1l_2\ddot{\theta}_2 + 2gl_1\theta_1 &= 0
\end{aligned}$$

Para θ_2,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \\
m\frac{d}{dt}\left(l_2\left(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)\right) + mgl_2\theta_2 &= 0 \\
l_2\ddot{x} + l_1l_2\ddot{\theta}_1 + l_2^2\ddot{\theta}_2 + gl_2\theta_2 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$5\ddot{x} + 2l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 = 0$$
$$2l_1\ddot{x} + 2l_1^2\ddot{\theta}_1 + l_1l_2\ddot{\theta}_2 + 2gl_1\theta_1 = 0$$
$$l_2\ddot{x} + l_1l_2\ddot{\theta}_1 + l_2^2\ddot{\theta}_2 + gl_2\theta_2 = 0$$

Opte por resolverlo utilizando Python, espero no perjudique mi tarea, pero por la ayudantía se entendió que se podían usar métodos computacionales en estos casos pues ya se sale de lo buscado en el curso y corresponde a otras materias.

Adjunto el mi Script en cual se realizaron las siguientes modificaciones de notación:

$$5x + 2l_1y + l_2z = 0$$
$$2l_1x + 2l_1^2y + l_1l_2z + 2gl_1\theta_1 = 0$$
$$l_2x + l_1l_2y + l_2^2z + gl_2\theta_2 = 0$$

```python
from sympy import symbols, Eq, solve
x, y, z= symbols('x y z')
θ1, θ2, l1, l2, g = symbols('θ1 θ2 l1 l2 g')
eq1 = Eq(5*x+2*l1*y+l2*z, 0)
eq2 = Eq(2*l1*x+2*(l1**2)*y+l1*l2*z, -2*g*l1*θ1)
eq3 = Eq(l2*x+l1*l2*y+(l2**2)*z, -g*l2*θ2)
sol = solve((eq1, eq2, eq3), (x, y, z))
print("Soluciones:")
print("x =", sol[x])
print("y =", sol[y])
print("z =", sol[z])
```

```
Soluciones:
x = 2*g*θ1/3
y = (-8*g*θ1 + 3*g*θ2)/(3*l1)
z = (2*g*θ1 - 2*g*θ2)/l2
```

Por lo tanto,

$$\ddot{x} = \frac{2g\theta_1}{3}$$
$$\ddot{\theta}_1 = \frac{3g\theta_2 - 8g\theta_1}{3l_1}$$
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2g\theta_1 - 2g\theta_2}{l_2}$$