Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1 – 32
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

32. Calcula el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria (continua) con distribución exponencial, es decir, de la forma $\lambda e^{-\lambda}$.

Sol.

Una variable aleatoria X tiene distribución exponecial con parámetro λ, $X \sim \exp \lambda$, si su función de distribución está dada por: $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x},\ si\ x \geq 0$

Equivalente, X tiene densidad $f(x)$ dada por: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x},\ si\ x \geq 0 \\ 0,\ si\ x < 0 \end{cases}$

- Valor esperado $E[X]$.

El valor esperado de X se define como:

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x) dx$$

Sustituyamos y resolvamos por cambio de variable,

$$E[X] = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx\,, \qquad u = \lambda x \Rightarrow du = \lambda dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\lambda}$$

En este caso los limites no cambian, pues cuando $x = 0 \Rightarrow u = 0$ y $x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$.

$$E[X] = \int_0^\infty u e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty u e^{-u} du$$

La cual tiene la forma de la definición de la función Gamma, la cual está definida como:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du\,, \qquad si\ n > 0$$

Para valores enteros de n, se cumple que: $\Gamma(n) = (n-1)!$

Así que en nuestro problema tenemos: $E[X] = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}(2-1)! = \frac{1}{\lambda}(1)! = \frac{1}{\lambda}$

El valor esperado de una variable aleatoria con distribución exponencial es $E[X] = \frac{1}{\lambda}$.

- Varianza $Var(x)$.

La varianza de X se define como:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Ya sabemos que $E[X] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow (E[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, falta ver quien es $E[X^2]$,

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Sustituyamos y resolvamos por cambio de variable,

$$E[X] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx\,, \qquad u = \lambda x \Rightarrow du = \lambda dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\lambda}$$

En este caso los limites no cambian, pues cuando $x = 0 \Rightarrow u = 0$ y $x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$.

$$E[X] = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 e^{-u} du = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} u^2 e^{-u} du$$

Así que en nuestro problema tenemos: $E[X] = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) = \frac{1}{\lambda^2}(3-1)! = \frac{1}{\lambda^2}(2)! = \frac{2}{\lambda^2}$

Por ende, $Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

La varianza de una variable aleatoria con distribución exponencial es $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.