Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Electromagnetismo II – Tarea 4
Profesores:
Dr. Alejandro Reyes Coronado
Ayud. Daniel Espinosa González
Ayud. Atzin López Tercero
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- Problema: (20pts) Una esfera sólida de radio R está centrada en el origen. El hemisferio "norte" posee una densidad volumétrica de carga uniforme ρ_0 y el hemisferio "sur" una densidad volumétrica de carga uniforme $-\rho_0$. Calcular de manera aproximada el campo eléctrico $\vec{E}(r,\theta)$ para puntos alejados de la esfera.

Primero veamos el resultado al que se llegó tras seguir el método de expansión multipolar del potencial eléctrico, llegamos a el potencial de una distribución de carga se puede expresar por:

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int (r')^n P_n(\cos\alpha)\rho(\bar{r}')d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int \rho(\bar{r}')d\tau' + \frac{1}{r^2}\int r'\cos\alpha\,\rho(\bar{r}')d\tau' + \frac{1}{r^3}\int (r')^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right)\rho(\bar{r}')d\tau' + \dots\right]$$

Sabemos que los primeros términos son más dominantes, esto lo podemos notar a partir del decaimiento de $1/r^n$, donde entre más nos alejamos, generara menos impacto al potencial.

Hemos visto para el termino del monopolo que esta dado por:

$$\phi_{mon}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}, \qquad Q = \int \rho\, d\tau$$

Este término depende de la carga neta del sistema. Para una carga neta Q, el campo eléctrico se comporta como el de una carga puntual. Lo interesante sucede cuando la carga neta vale 0, provocando que primer término se cancele. Cuando sucede esto, el segundo termino el cual es el dipolar es el termino más significativo, este momento se caracteriza por reflejar la separación de las cargas positivas y negativas. Observemos que justamente eso sucede en nuestro problema,

$$Q = \int_V \rho(r')\, dV = \int_{VN} \rho_0\, dV + \int_{VS} -\rho_0\, dV = 0$$

Así que trabajaremos con la aproximación del dipolo, por lo que no podemos considerar una igualdad porque deberíamos analizar la generación de cada término de la expansión multi polar. Enfoquémonos que el dipolo es el termino más significativo, además que al alejarnos lo suficiente sería muy buena aproximación. El término del dipolo esta dado por:

$$\phi_{dip}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r'\cos\alpha\,\rho(\bar{r}')d\tau'$$

Donde α es el ángulo formado a partir de $\bar{r}$ y $\bar{r}'$, t. q. $r'\cos\alpha = \hat{r}\cdot\bar{r}'$, así

$$\phi_{dip}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\int \bar{r}'\rho(\bar{r}')d\tau'$$

Donde el momento dipolar esta dado por:

$$\bar{p} = \int \bar{r}'\rho(\bar{r}')d\tau' \Rightarrow \phi_{dip}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2}, \qquad \bar{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i\bar{r}'$$

Si el potencial depende de las variables r, θ (como es nuestro por simetría): $\phi_{dip}(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Así podemos obtener el campo eléctrico,

$$\bar{E}_{dip}(r,\theta,\varphi) = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right) = \left(\frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{r} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{\theta} + 0\hat{\varphi}\right)$$

$$\bar{E}_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

Planteemos ahora con nuestro problema, el momento dipolar $\bar{p}$ de la distribución de carga, el cálculo se divide en dos hemisferios:

- En el hemisferio norte $\left(\theta: 0 \to \frac{\pi}{2}\right)$, ρ_0. -En el hemisferio sur $\left(\theta: \frac{\pi}{2} \to \pi\right)$, $-\rho_0$.

El momento dipolar utilizando el eje z es:

$$p = \int z\rho d\tau$$

Donde z como dije es la coordenada vertical, ρ es la densidad de carga y $d\tau = r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi$, es el elemento de volumen en coordenadas esféricas, también veamos que cuando sumamos las contribuciones de ambos hemisferios, obtenemos un factor $2\rho_0$ frente a la integral del volumen solo sobre el hemisferio norte.

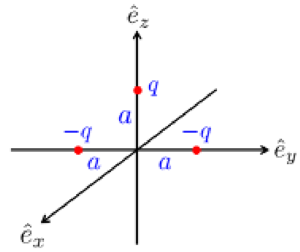
Así, el $2\rho_0$ refleja la combinación de las densidades de carga de ambos hemisferios. Esto efectivamente duplica la magnitud de la contribución del momento dipolar comparado con un solo hemisferio, manteniendo el signo acorde al dipolo.

$$\Rightarrow p = 2\rho_0\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\cos\theta\; r^2\sin\theta\; dr\, d\theta\, d\phi = 2\rho_0(2\pi)\int_0^R r^3 dr\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\; d\theta$$
$$= 2\rho_0(2\pi)\frac{R^4}{4}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\; d\theta = 2\rho_0(2\pi)\frac{R^4}{4}\frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{\rho_0\pi R^4}{2}$$

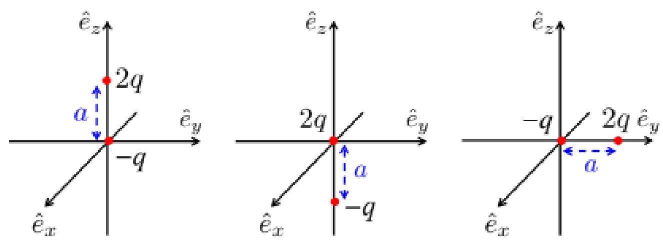
Sustituyendo en el dipo (aproximación del campo), i. e. para puntos lejanos:

$$\bar{E} \approx \frac{\left(\frac{\rho_0\pi R^4}{2}\right)}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) \approx \frac{\rho_0 R^4}{8\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

2.- Problema: (20pts) (a) Tres cargas puntuales están localizadas como se muestra en la siguiente figura, cada una a una distancia a del origen. Calcula de manera aproximada el campo eléctrico para puntos alejados del origen. Expresa tu respuesta en coordenadas esfércias e incluye los primeros dos términos de la expansión multipolar.



(b) Dos cargas puntuales, $2q$ y $-q$ están separadas por una distancia a. Para cada una de las geometrías mostradas en la figura, calcula (i) el momento monopolar, (ii) el momento dipolar y (iii) el potencial aproximado para valores grandes de r, en coordenadas esféricas, incluyendo las contribuciones del monopolo y el dipolo.



Nuevamente se trata de un problema el cual precisa del desarrollo multipolar para dar con su solución, sin embargo, se nos solicita que, en nuestra aproximación, solo incluyamos los dos primeros términos, i. e. el término del monopolo y del dipolo. Retomando:

$$\phi(\bar{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int \rho(\bar{r}')d\tau' + \frac{1}{r^2}\int r'\cos\alpha\, \rho(\bar{r}')d\tau'\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

Calculemos la carga neta Q: $Q = q - q - q = -q$

Calculemos la expresión del momento dipolar,

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \bar{r}' = qa\hat{z} + (-q)a\hat{y} + (-q)(-a)\hat{y} = qa\hat{z} - qa\hat{y} + qa\hat{y} = qa\hat{z}$$

Sustituyendo,

$$\phi(\bar{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{q}{r} + \frac{qa\cos\theta}{r^2}\right] \Rightarrow \phi(\bar{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r} + \frac{a\cos\theta}{r^2}\right]$$

Hemos encontrado el potencial aproximado, ahora podemos calcular el campo eléctrico

$$\bar{E}(\bar{r}) = -\nabla\phi = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\hat{r} + 2\frac{a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{a\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico aproximado para los dos primeros términos del desarrollo multipolar es:

$$\bar{E}(\bar{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\left(-\frac{1}{r^2}\hat{r} + \frac{a}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)\right)\right)$$

Pasemos al siguiente problema, se nos pide encontrar el momento, monopolar, dipolar y con ambos una aproximación para el potencial al alejarnos, esto para cada una de las figuras.

Primera imagen.

Calculemos la carga neta Q: $Q = 2q - q = q$

Calculemos la expresión del momento dipolar, $\bar{p} = 2qa\hat{z} - q(0)\hat{z} = 2qa\hat{z}$

Sustituyendo,

$$\phi(\bar{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{2qa\cos\theta}{r^2}\right] \Rightarrow \phi(\bar{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{2a\cos\theta}{r^2}\right]$$

Segunda imagen.

Calculemos la carga neta Q: $Q = 2q - q = q$

Calculemos la expresión del momento dipolar, $\bar{p} = 2q(0)\hat{z} - q(-a)\hat{z} = qa\hat{z}$

Sustituyendo,

$$\phi(\bar{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{qa\cos\theta}{r^2}\right] \Rightarrow \phi(\bar{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{a\cos\theta}{r^2}\right]$$

Tercera imagen.

Calculemos la carga neta Q: $Q = 2q - q = q$

Calculemos la expresión del momento dipolar, $\bar{p} = 2qa\hat{y} - q(0)\hat{y} = 2qa\hat{y}$

Sustituyendo,

$$\phi(\bar{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{2qa\sin\theta\sin\varphi}{r^2}\right] \Rightarrow \phi(\bar{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} + \frac{2a\sin\theta\sin\varphi}{r^2}\right]$$

3.- Problema: (20pts) Un dipolo puntual p está localizado en el origen y apunta en la dirección $\hat{e}_z$.

(a) ¿Cuál es la fuerza sobre una carga puntual q localizada en $(a, 0, 0)$ (coordenadas cartesianas)?

(b) ¿Cuál es la fuerza sobre q en $(0, 0, a)$?

(c) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover la carga q desde $(a, 0, 0)$ a $(0, 0, a)$?

Propongamos un dipolo puntual p ubicado en el origen y con dirección en $\hat{z}$. Recordemos como calcular la fuerza, $\bar{F} = q\bar{E}$, de modo que hay que conocer el campo eléctrico, para eso podemos usar ya directamente la expresión encontrada en el primer inciso,

$$\bar{E}_{dip}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

Véase que para una carga puntual localizada en $(a, 0,0)$ se satisface que $r = a, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$.

$$\Rightarrow \bar{E}_{dip}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(2\cos\frac{\pi}{2}\hat{r} + \sin\frac{\pi}{2}\hat{\theta}\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{\theta} \Rightarrow \bar{F} = q\bar{E} = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{\theta}$$

Si se nos pide en coordenadas cartesianas, como $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ es como si apuntara para abajo, i. e. en cartesianas tiene componente $\hat{z}$, pero apuntando para abajo,

$$\Rightarrow \bar{F} = -\frac{qp}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{z}$$

Véase que para una carga puntual localizada en $(0,0, a)$ se satisface que $r = a, \theta = 0, \varphi = 0$.

$$\Rightarrow \bar{E}_{dip}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left(2\cos 0\,\hat{r} + \sin 0\,\hat{\theta}\right) = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{r} \Rightarrow \bar{F} = q\bar{E} = \frac{2qp}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{r}$$

Si se nos pide en coordenadas cartesianas, como $\theta = 0 \Rightarrow$ apuntara para arriba, i. e. en cartesianas tiene componente $\hat{z}$, apuntando para arriba,

$$\Rightarrow \bar{F} = \frac{2qp}{4\pi\epsilon_0 a^3}\hat{z}$$

Para mover la carga q desde $(a, 0,0)$ a $(0,0, a)$, basta con calcular $W = q(\phi_f - \phi_i)$, pues es la integral del recorrido de las fuerzas,

$$W = \int_{(0,0,a)}^{(a,0,0)} \bar{F} = \int_{(0,0,a)}^{(a,0,0)} q\bar{E} = q(\phi_f - \phi_i)$$

$$\phi_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos 0}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{a^2}, \qquad \phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\frac{\pi}{2}}{a^2} = 0$$

$$\therefore W = q\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{a^2} - 0\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qp}{a^2}$$

Hemos encontrado el trabajo requerido.

4. Problema: (20pts) Muestra que el campo eléctrico de un dipolo *puntual* dado por la expresión

$$\vec{E}_{Dipolar}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\, r^3}\ (2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta)\,,$$

se puede escribir en una forma independiente de la localización del origen del sistema de coordenadas como:

$$\vec{E}_{Dipolar}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\ [3\,(\vec{p}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{p}]\,.$$

En el repaso del primer inciso ya demostramos como llegar a la expresión,

$$\bar{E}_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

Véase que hay que llegar a que $p\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right) = 3(\bar{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p}$, para ello es preciso recordar como definimos el momento dipolar, está dado por:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i\bar{r}' = p_r\hat{r} + p_\theta\hat{\theta}, \qquad \bar{p}\cdot\hat{r} = p_r$$

Donde, $p_r = p\cos\theta$, $p_\theta = p\sin\theta$

$$3(\bar{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p} = 3p_r\hat{r} - \left(p_r\hat{r} + p_\theta\hat{\theta}\right) = 2p_r\hat{r} + p_\theta\hat{\theta} = 2p_r\hat{r} + p_\theta\hat{\theta} = 2p\cos\theta\,\hat{r} + p\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$= p\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

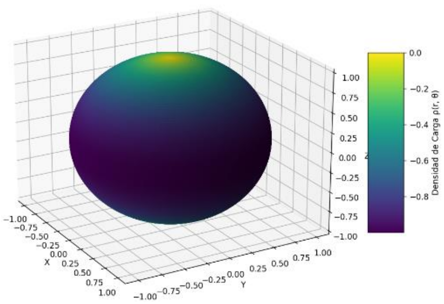
Por lo tanto, el campo eléctrico de un dipolo puntual puede ser escrito deformar independiente de la localización del origen del sistema en coordenadas, como:

$$\bar{E}_{dip}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}(3(\bar{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p})$$

5.- Problema: (20pts) Una esfera de radio R, centrada en el origen, posee una densidad de carga

$$\rho(r,\theta) = k\,\frac{R}{r^2}\,(R-2r)\sin\theta,$$

donde k es una constante y las variables r y θ son las variables usuales en coordenadas esféricas. Calcula el potencial de manera aproximada para puntos sobre el eje $\hat{e}_z$ lejos de la esfera.



El problema no indica que tan aproximado busca que sea, si nos alejamos demasiado podríamos hasta considerar una buena aproximación hasta el termino dipolar, incluso el monopolo si nos alejamos demasiado.

Ya no tenemos los casos puntuales, ahora hay que calcular integrando, pues se trata de una densidad de carga.

Para el término del monopolo:

$$\phi_{mon}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}, \qquad Q = \int \rho(\bar{r})d\tau$$

$$\begin{aligned}
\int \rho\, d\tau &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta\ r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= kR\int_0^R \frac{1}{r^2}(R-2r)r^2 dr \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= kR(Rr-r^2)\Big|_0^R \left(-\frac{\sin(2\theta)-2\theta}{4}\right)\Big|_0^\pi (\varphi)\Big|_0^{2\pi} \\
&= kR(0)\left(-\frac{\sin(2\theta)-2\theta}{4}\right)\Big|_0^\pi (\varphi)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_{mon}(\bar{r}) = 0$, así que analicemos término del dipolo.

Para el término del dipolo:

$$\phi_{dip}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r\cos\theta\,\rho(\bar{r})d\tau$$

$$\begin{aligned}
\int r\cos\theta\,\rho(\bar{r})d\tau &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r\cos\theta\, k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\
&= kR\int_0^R r\frac{1}{r^2}(R-2r)r^2 dr \int_0^\pi \cos\theta\sin^2\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= kR\left(-\frac{r^2(4r-3R)}{6}\right)\Big|_0^R \left(\frac{\sin(\theta)}{3}\right)\Big|_0^\pi (\varphi)\Big|_0^{2\pi} \\
&= kR\left(-\frac{r^2(4r-3R)}{6}\right)\Big|_0^R (0)(\varphi)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_{dip}(\bar{r}) = 0$, así que analicemos término del cuadrupolo.

Vemos que fallamos en nuestra intuición de creer que solo obteniendo los primeros términos sería buena aproximación, en este caso esos primeros dos términos son nulos. De este modo se espera que el siguiente termino, el cuadrupolo, sea la mejor aproximación, si es que es no nulo.

Para el término del dipolo:

$$\phi_{cua}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\int r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\rho(\bar{r})d\tau$$

$$\int r^2\left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\right)\rho(\bar{r})d\tau$$

$$= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$= kR\frac{1}{2}\int_0^R r^2(R-2r)\frac{1}{r^2}r^2\int_0^\pi(3\cos^2\theta - 1)\sin^2\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= kR\frac{1}{2}\int_0^R r^2(R-2r)\frac{1}{r^2}r^2\int_0^\pi(3\cos^2\theta - 1)\sin^2\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= kR\frac{1}{2}\left(-\frac{r^3(3r-2R)}{6}\right)\Bigg|_0^R\left(-\frac{3\sin(4\theta) - 8\sin(2\theta) + 4\theta}{32}\right)\Bigg|_0^\pi(\varphi)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= kR\frac{1}{2}\left(-\frac{R^3(3R-2R)}{6}\right)\left(-\frac{4\pi}{32}\right)(2\pi)$$

$$= kR\frac{1}{2}\left(\frac{R^4}{6}\right)\left(\frac{\pi}{8}\right)(2\pi)$$

Por lo tanto, consideraremos bueno aproximación para puntos lejanos al momento cuadripolar, esto debido a que los términos del monopolo y el dipolo fueron nulos.

$$\phi(\bar{r}) \approx \phi_{cua}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}kR\frac{R^4}{46}\pi^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{k\pi^2R^5}{48r^3}$$

Así que para puntos en el eje z,

$$\phi(\bar{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{k\pi^2R^5}{48z^3}$$