Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez
sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

10. Consideremos el problema del empleado suertudo. Supongamos que una empresa quiere contratar a un empleado basado en sus habilidades, digamos, en su conocimiento en física estadística. Para ello prepara un examen con el que seleccionará al mejor para el puesto. No puede hacer una evaluación de absolutamente todos los temas y tampoco puede hacer un proceso de selección donde se asegure que todos durmieron igual de bien el día anterior, etc. Así que hay algún grado de suerte en cómo les irá durante el examen de selección. Idealicemos, y pensemos que cada participante obtendrá una calificación que es la suma de dos números, uno relacionado a su conocimiento/habilidades y otro relacionado a la suerte que tuvo. Hay 2 concursantes, ambos con una calificación de entre 0,9 y 1 y su suerte será un número entre 0 y 0,05. ¿Con qué probabilidad se contratará al mejor? Con qué probabilidad si x1 + y1 > x2 + y2, entonces x1 > x2, con xi ∈ [0,9, 1] y yi ∈ [0, 0,05]

Sol.

Resumen porque es mucho texto:

- A cada candidato se le asigna una puntuación total $P_i = x_i + y_i$
- x_i es la habilidad, se distribuye uniformemente en [0.9,1].
- y_i representa la "suerte" y se distribuye uniformemente en [0,0.05].

El mejor es aquel que tiene un x_i mayor. Sin embargo, al sumar la suerte, es posible que el candidato con menor habilidad supere al otro.

Hay que hallar la proba de que, cuando se contrate al que obtiene $S_i > S_2$, se tenga además que $x_1 > x_2$ y calcular la probabilidad de que, pese al azar, se cumpla $x_1 + y_1 > x_2 + y_2$

El candidato 1 que consideramos en este caso que es el que tiene mejor habilidad gana cando:

$$x_1 + y_1 > x_2 + y_2 \Rightarrow y_1 - y_2 > -(x_1 - x_2) = -d, \qquad t.q. \;\; d = x_1 - x_2$$

Queremos calcular la probabilidad de que esto ocurra dado que $x_1 > x_2$, es decir,

$$P(y_1 - y_2 > -d) \;\; t.q. \; x_1 > x_2$$

Veamos que x_1 y x_2 son ind. y están en [0.9,1], dado que $x_1 > x_2$. Por lo que,

- El valor mínimo de d ocurre cuando $x_1 = x_2$, lo que da $d = 0$.

- El valor máximo de d ocurre cuando $x_1 = 1$ y $x_2 = 0.9$, lo que da $d = 0.1$.
- $d \in [0{,}0{,}1]$

Ahora consideremos $z = y_1 - y_2$ hagamos lo análogo para estas variables. Por lo que,

- El valor mínimo ocurre cuando $y_1 = 0$ y $y_2 = 0.05$, lo que da $z = -0.05$.
- El valor máximo ocurre cuando $y_1 = 0.05$ y $y_2 = 0$, lo que da $z = 0.05$.
- $z \in [-0.05{,}0.05]$

La distribución de b es la de la diferencia de dos variables aleatorias uniformes en el mismo intervalo es un triángulo de la forma:

$$f_z(z) = \frac{a - |\mathrm{b}|}{a^2}, \quad z \in [-a, a] \Rightarrow f_z(z) = \frac{0.05 - |z|}{0.0025}, \quad z \in [-0.05{,}0.05]$$

Dado que $b = y_1 - y_2$, la probabilidad condicional de que el mejor candidato gane es:

$$P(z > -d) = \int_{-d}^{0.05} f_z(z)\ dz$$

- Para $-d\ \leq z \leq 0$, la densidad es:

$$f_z(z) = \frac{0.05 + z}{0.0025}, \quad -0.05 \leq z \leq 0.05$$

La integral en este rango es:

$$I_1 = \int_{-d}^{0} \frac{0.05 + z}{0.0025} dz$$

- Para $0 \leq z\ \leq 0.05$, la densidad es:

$$f_z(z) = \frac{0.05 - z}{0.0025}$$

La integral en este rango es:

$$I_2 = \int_{0}^{0.05} \frac{0.05 - z}{0.0025} dz$$

Toca calcular ambas integrales.

$$I_1 = \int_{-d}^{0} \frac{0.05 + z}{0.0025} dz = \frac{1}{0.0025} \int_{-d}^{0} (0.05 + z) dz = \int (0.05 + z) dz = 0.05z + \frac{z^2}{2}$$

$$\left[0.05z + \frac{z^2}{2}\right]_{-d}^{0} = (0 - 0) - \left(0.05(-d) + \frac{(-d)^2}{2}\right). = 0.05d - d22. = 0.05d - \frac{d^2}{2}$$

$$I_1 = 400\left(0.05d - \frac{d^2}{2}\right) = 20d - 200d^2$$

$$I_2 = \int_0^{0.05} \frac{0.05 - z}{0.0025} dz = \frac{1}{0.0025} \int_0^{0.05} (0.05 - z) dz = \int (0.05 - z) dz = 0.05z - \frac{z^2}{2}$$

$$\left[0.05z - \frac{z^2}{2}\right]_0^{0.05} = \left(0.05(0.05) - \frac{(0.05)^2}{2}\right) - (0 - 0) = 0.0025 - \frac{0.0025}{2} = 0.0025 - 0.00125$$
$$= 0.00125$$

$$I_2 = 400(0.00125) = 0.5$$

Sumamos ambas partes: $P(z > -d) = I_1 + I_2 = (20d - 200d^2) + 0.5$

Ahora integramos sobre d, que tiene la densidad: $f_d(d) = 200(0.1 - d), \quad d \in (0,0.1]$

Queremos calcular:

$$P(\text{mejor}) = \int_0^{0.05} (20d - 200d^2 + 0.5) \cdot 200(0.1 - d)\, dd + \int_{0.05}^{0.1} 1 \cdot 200(0.1 - d)\, dd$$

Dividimos en dos integrales:

$$I_A = \int_0^{0.05} (20d - 200d^2 + 0.5)200(0.1 - d)\ dd$$

$$I_B = \int_{0.05}^{0.1} 1 \cdot 200(0.1 - d)\, dd$$

Otra vez a calcular:

$$I_A = 200 \int_0^{0.05} (20d - 200d^2 + 0.5)(0.1 - d)\ dd$$

Expandimos:

$$(20d - 200d^2 + 0.5)(0.1 - d) = 2d - 20d^2 + 0.05 - 0.1d - 0.5d^2 + 200d^3.$$
$$= 2d - 0.1d - 20d^2 - 0.5d^2 + 200d^3 + 0.05 = 1.9d - 20.5d^2 + 200d^3 + 0.05$$

Integrando término a término:

$$\int_0^{0.05} 1.9d\ dd = 0.002375.$$

$$\int_0^{0.05} (-20.5d^2)\ dd = -0.0008542$$

$$\int_0^{0.05} 200d^3\ dd = 0.0003125$$

$$\int_0^{0.05} 0.05\ dd = 0.0025.$$

Sumamos los términos:

$$0.002375 - 0.0008542 + 0.0003125 + 0.0025 = 0.0043333$$

$$I_A = 200(0.0043333) = 0.86667$$

$$I_B = \int_{0.05}^{0.1} 200(0.1 - d)\ dd = 200\int_{0.05}^{0.1} (0.1 - d)\ dd = 200\left[0.1d - \frac{d^2}{2}\right]_{0.05}^{0.1}$$

$$\left(0.1(0.1) - \frac{0.1^2}{2}\right) - \left(0.1(0.05) - \frac{0.05^2}{2}\right)$$

$$(0.01 - 0.005) - (0.005 - 0.00125) = 0.005 - 0.00375 = 0.00125$$

$$I_B = 0.25$$

Concluyendo que:

$$P(\text{mejor contratado}) = I_A + I_B = 0.86667 + 0.25 = 0.85417.$$

La probabilidad final es 85.4%.