Mecánica Vectorial (2022-2)

Actividad 2

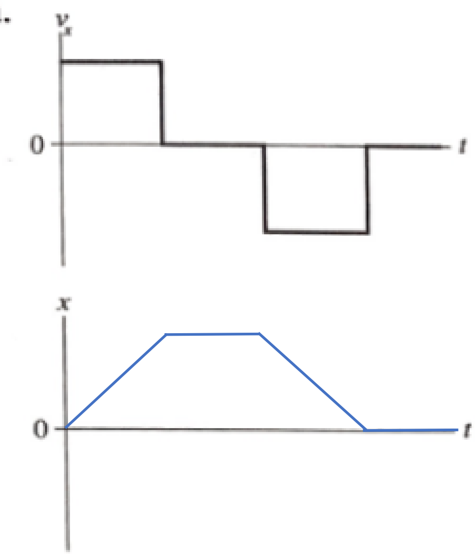
Sebastián González Juárez **Grupo 8110: Mirna Villavicencio Torres**

1. A continuación, se muestran cuatro gráficas de velocidad contra tiempo. Para cada una de ellas:

- Dibuja la correspondiente gráfica posición contra tiempo.
- Describe el movimiento.

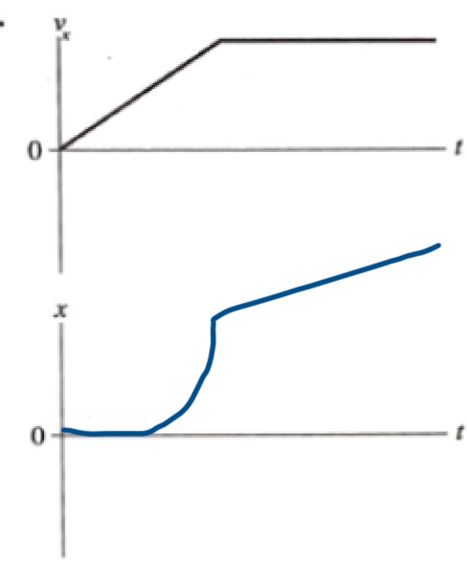
Considera que el movimiento es unidimensional, se realiza sobre el eje x y que $x_0 = 0$

a.



Primero la velocidad es constante y positiva, lo que implica que la función posición sea una recta con pendiente positiva constante. Después la velocidad sigue siendo constante pero ahora es igual a 0, entonces en la función posición será una recta con pendiente igual a 0. Luego la velocidad permanece constante pero ahora negativa, entonces la función posición es una recta con pendiente negativa constante. Para finalizar, la velocidad vuelve a vale la constante igual a 0, entonces en la función posición será una recta con pendiente igual a 0.

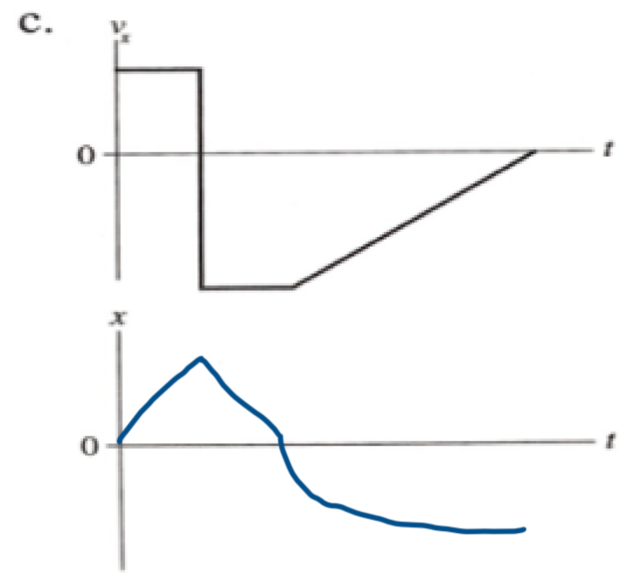
b.



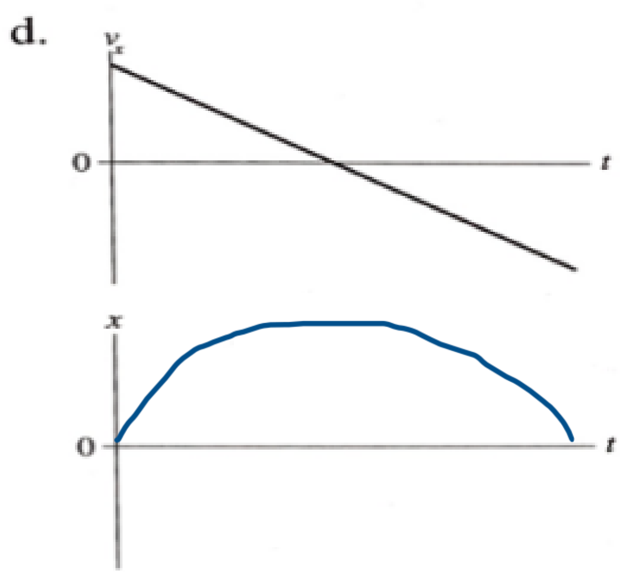
Esta grafica la podemos dividir en 2 partes.

En la primera parte, la velocidad es una recta con pendiente positiva, lo cual implica que la función posición tome forma de una parábola, la cual en esos intervalos su pendiente va creciendo.

En la segunda parte, la velocidad es constante



Al inicio vemos una velocidad constante positiva, lo que implica que en la gráfica de posición veamos una recta con pendiente positiva. Luego vemos que la velocidad pasa a ser constante pero ahora negativa, entonces la posición tomara forma de una recta con pendiente negativa. Para finalizar, la velocidad ahora es una recta con pendiente positiva, pero en el eje “y” se ubica en la parte negativa y eso provoca que en la velocidad veamos una concavidad y veamos que al final se debe terminar esta concavidad ya que la derivada que es la velocidad toca el 0.



En esta gráfica tenemos que la velocidad es una recta con pendiente negativa, que primero inicia en la parte positiva del eje “y” luego pasa por el 0 y se pasa a la parte negativa. En la posición veremos que se debe formar una parábola que empiece a crecer, luego se frena formándose un punto crítico y la parábola descenderá.

2. Una partícula se mueve con una trayectoria descrita por las componentes del vector de posición:

$$x = 5 + 3t - t^2,$$

$$y = 2t + 4t^2,$$

$$z = 4,$$

donde las constantes tienen las unidades adecuadas de forma que x, y y z se miden en metros y t, en segundos.

a) ¿Cuál es la posición de la partícula en *t=2 s*?

Nos están dando las coordenadas para un tiempo t para ubicar la posición de la partícula conforme a metros, por lo que solo resta sustituir 2 segundos y ubicar el vector que tiene forma $\vec{r} = (x, y, z)$.

$$\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) = \left((5 + 3(2) - (2)^2), (2(2) + 4(2)^2), (4)\right) = (7{,}20{,}4)$$

Por lo tanto, la posición de la partícula en $\boldsymbol{t = 2\ s}$ se encuentra descrita por el vector $\boldsymbol{\vec{r} = (7, 20, 4)}$.

b) ¿Cuál es la *velocidad instantánea* de la partícula en ese instante de tiempo?

Debemos derivar la posición de la partícula, ya que el significado físico de la derivada es la velocidad instantánea.

Tenemos que nuestro vector de posición esta descrito como:

$$\vec{r} = (x, y, z) = (5 + 3t - t^2, 2t + 4t^2, 4)$$

Y sabemos que: $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$

Entonces la derivada queda del siguiente modo.

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \left(\frac{d}{dt}x, \frac{d}{dt}y, \frac{d}{dt}z\right)$$

También lo podemos ver como: $\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$

Regresando a la notación anterior, sustituimos nuestros valores de x, y, z.

$$\vec{v} = \left(\frac{d}{dt}(5 + 3t - t^2), \frac{d}{dt}(2t + 4t^2), \frac{d}{dt}(4)\right) = (3 - 2t, 2 + 8t, 0)$$

Tenemos que el vector velocidad está dado por: $\vec{v} = (3 - 2t, 2 + 8t, 0)$

Toca sustituir nuestro tiempo: $\vec{v}_2 = (3 - 2(2), 2 + 8(2), 0) = (-1{,}18{,}0)$

Por lo tanto, la velocidad de la partícula en $\boldsymbol{t = 2\ s}$ se encuentra descrita por el vector $\boldsymbol{\vec{v} = (-1, 18, 0)}$.

Ahora calculemos la magnitud de la velocidad instantánea:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (18)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + 324 + 0} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

La magnitud de la velocidad de la partícula a los 2 segundos es de $\boldsymbol{5\sqrt{13}\ m/s}$.

c) ¿Cuál es la *aceleración instantánea* en ese tiempo?

Debemos volver a derivar, ya que el significado físico de la segunda derivada es la aceleración instantánea.

Tenemos que nuestro vector de velocidad esta descrito como: $\vec{v} = (3 - 2t, 2 + 8t, 0)$

Y sabemos que: $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$

Entonces la derivada de la velocidad queda del siguiente modo.

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \left(\frac{d}{dt}v_x, \frac{d}{dt}v_y, \frac{d}{dt}v_z\right)$$

También lo podemos ver como: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

Regresando a la notación anterior, sustituimos nuestros valores de v_x, v_y, v_z.

$$\vec{a} = \left(\frac{d}{dt}(3 - 2t), \frac{d}{dt}(2 + 8t), \frac{d}{dt}(0)\right) = (-2,8,0)$$

Tenemos que el vector aceleración está dado por: $\vec{a} = (-2,8,0)$

Notemos que tenemos una aceleración constante, entonces en nuestro tiempo deseado tenemos la misma aceleración que en los otros puntos. $\vec{a}_2 = (-2,8,0)$

Por lo tanto, la velocidad de la partícula en $t = 2\ s$ se encuentra descrita por el vector $\vec{a}_2 = (-2, 8, 0)$.

Ahora calculemos la magnitud de la aceleración instantánea:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (8)^2 + (0)^2} = \sqrt{4 + 64 + 0} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

La magnitud de la aceleración de la partícula a los 2 segundos es de $2\sqrt{17}\ m/s^2$.

d) Ahora, considera el intervalo de tiempo entre $t = 0s$ y $t = 2s$. Determina el vector de desplazamiento, la *velocidad promedio* y la *aceleración promedio* en este intervalo.

Para calcular un promedio basta con ver el cambio que existe de uno a uno talque, por ejemplo:

$$m = \frac{f(t_f) - f(t_i)}{t_f - t_i}$$

Vector desplazamiento. $\vec{r} = \Delta\vec{r}$

$$\vec{r} = \left(5 + 3t_f - {t_f}^2, 2t_f + 4{t_f}^2, 4\right) - \left(5 + 3t_i - {t_i}^2, 2t_i + 4{t_i}^2, 4\right)$$

$$\vec{r} = (5 + 3(2) - (2)^2), (2(2) + 4(2)^2), (4) - (5 + 3(0) - (0)^2), (2(0) + 4(0)^2), (4)$$
$$= (7,20,4) - (5,0,4) = (2,20,0)$$

Por lo tanto, el vector desplazamiento en el intervalo $\boldsymbol{t = 0\ s}$ y $\boldsymbol{t = 2\ s}$ es: $\boldsymbol{\vec{r} = (2, 20, 0)}$

Ahora calculemos la magnitud del desplazamiento:

$$r = \sqrt{(2)^2 + (20)^2 + (0)^2} = \sqrt{404} = 2\sqrt{101}$$

La magnitud del desplazamiento de la partícula es de $\boldsymbol{2\sqrt{101}\ m/s}$.

Vector velocidad promedio. $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$\vec{v} = \frac{\left(5 + 3t_f - {t_f}^2, 2t_f + 4{t_f}^2, 4\right) - \left(5 + 3t_i - {t_i}^2, 2t_i + 4{t_i}^2, 4\right)}{2 - 0}$$
$$= \frac{(5 + 3(2) - (2)^2), (2(2) + 4(2)^2), (4) - (5 + 3(0) - (0)^2), (2(0) + 4(0)^2), (4)}{2}$$
$$= \frac{(7,20,4) - (5,0,4)}{2} = \frac{(2,20,0)}{2} = (1,10,0)$$

Por lo tanto, el vector velocidad promedio en el intervalo $\boldsymbol{t = 0\ s}$ y $\boldsymbol{t = 2\ s}$ es:

$$\boldsymbol{\vec{v} = (1, 10, 0)}$$

Ahora calculemos la magnitud de la velocidad:

$$v = \sqrt{(1)^2 + (10)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + 100 + 0} = \sqrt{101}$$

La magnitud de la velocidad de la partícula es de $\boldsymbol{\sqrt{101}\ m/s}$.

Aceleración promedio.

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{\left(3 - 2t_f, 2 + 8t_f, 0\right) - \left(3 - 2t_i, 2 + 8t_i, 0\right)}{2 - 0}$$
$$= \frac{(3 - 2(2), 2 + 8(2), 0) - (3 - 2(0), 2 + 8(0), 0)}{2} = \frac{(-1,18,0) - (3,2,0)}{2}$$
$$= \frac{(-4,16,0)}{2} = (-2,8,0)$$

Por lo tanto, el vector aceleración promedio en el intervalo $\boldsymbol{t = 0\ s}$ y $\boldsymbol{t = 2\ s}$ es:

$$\boldsymbol{\vec{a} = (-2, 8, 0)}$$

Ahora calculemos la magnitud de la aceleración:

$$a = \sqrt{(-2)^2 + (8)^2 + (0)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

La magnitud de la aceleración de la partícula es de $2\sqrt{17}\ m/s$.

3. Investiga cómo fue que Galileo Galilei llegó a la conclusión de que en la caída libre todos los cuerpos caen con la misma aceleración. ¿Podrías repetir sus experimentos? Si crees que sí, inténtalo y reporta tus observaciones.

Investigando llegue al famoso experimento de Galileo Galilei donde dejo caer esferas de diferentes masas desde lo alto de la torre de Pisa, esto frente a gran público con curiosidad. Sin embargo, Galileo jamás publico nada relacionado a este experimento en sus escritos. La única fuente de información es una cita en una biografía escrita en el año 1654 (doce años después de la muerte de Galileo y más de sesenta tras el supuesto experimento) por Vincenzio Viviani (1622-1703), su asistente personal durante sus tres últimos años de vida. Esta no fue publicada hasta el año 1717:

"[...] demostrándolo mediante repetidos experimentos desde lo alto de la torre de Pisa (Campanile di Pisa) en presencia de otros profesores, filósofos y los estudiantes."

No se sabe con certeza si este famoso experimento realmente ocurrió, pero es una bonita forma en la que todos lo hemos visto, no precisamente en la torre de Pisa, pero si con objetos a la mano y a una menor altura.

El experimento fue posteriormente replicado en el vacío y sorprendentemente en la luna por misiones Apolo, donde se llego al resultado esperado y de manera más satisfactoria al quitar varias incertidumbres que se crean al hacerlo al aire libre en la tierra.

A continuación, agrego la narración del astronauta David Scott, comandante del Apolo 15, y un video de la NASA subido a You Tube: https://youtu.be/oYEgdZ3iEKA

"En mi mano izquierda tengo una pluma, en mi mano derecha tengo un martillo. Supongo que una de las razones por las que hemos podido llegar aquí es gracia a que un caballero llamado Galileo hizo un descubrimiento muy significativo sobre la caída de objetos en campos gravitatorios, y qué mejor lugar para confirmar sus hallazgos que en la Luna."

"Así que pensamos en demostrarlo aquí para vosotros [el público] (y la pluma tenía que ser de halcón, por nuestro Falcon [uno de los módulos de la misión]). Los voy a soltar desde aquí arriba y, con suerte, caerán al suelo al mismo tiempo [los deja caer]. ¿Qué os parece? Galileo tenía razón".

Este experimento creo que la mayoría lo llego a hacer en la clase de física en la secundaria, donde se dejan caer 2 objetos con diferentes masas dese alguno de los pisos superiores hasta el suelo. Es verdad que no se podrá ver en su totalidad, esto debido a las imperfecciones de los objetos, la dinámica, la fricción del aire y cualquier otra incertidumbre; pero se puede contemplar como 2 objetos totalmente deferentes, incluyendo su masa, llegan al suelo al mismo tiempo.

4. En el momento en que se enciende la luz verde del semáforo el conductor de un automóvil lo arranca con una **aceleración constante** de *2.2 m/s²*. Un camión pasa a su lado con una **rapidez constante** de *9.5 m/s*. ¿A qué distancia el automóvil alcanza al camión? ¿Con qué rapidez se desplazará el automóvil en ese instante? (Hint: te conviene que hagas una gráfica cualitativa de *x* en función de *t* para cada vehículo).

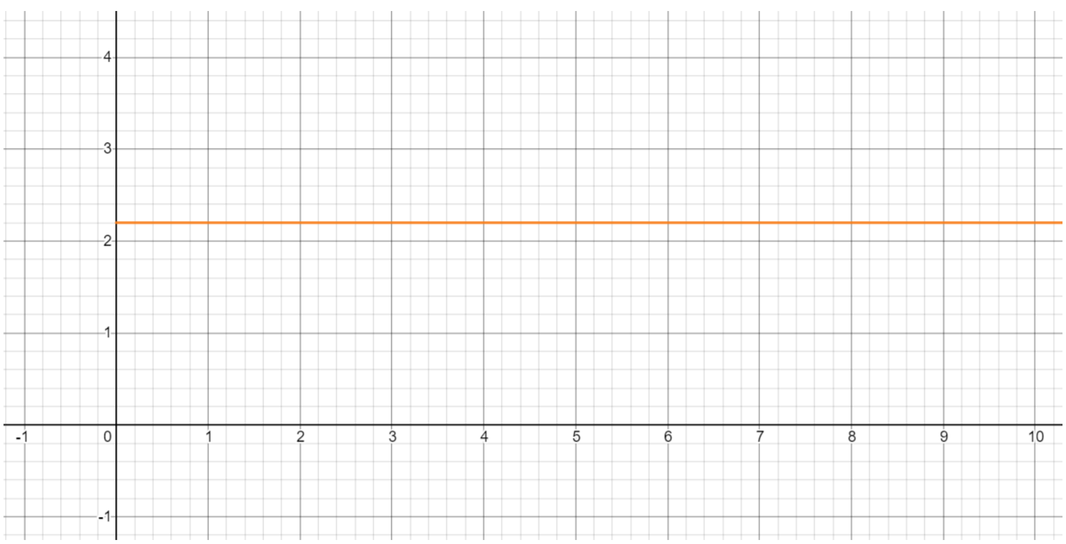
Haremos caso al Hint, lo primero que haremos será analizar el comportamiento que nos dan en cada vehículo y de ahí buscar una función que nos dé el desplazamiento.

Automóvil.

El problema nos indica que el carro arranca con una aceleración constante de 2.2 m/s^2, donde no solo nos da el dato de la aceleración, si no también que parte del reposo, lo cual nos será útil más adelante.

Tenemos que la aceleración del vehículo la podemos representar mediante la siguiente función:

$$a_a(t) = 2.2$$



Como es sabido, al integrar la función, podemos obtener la función rapidez del automóvil:

$$\Rightarrow v_a(t) = \int 2.2\, dt = 2.2t + C$$

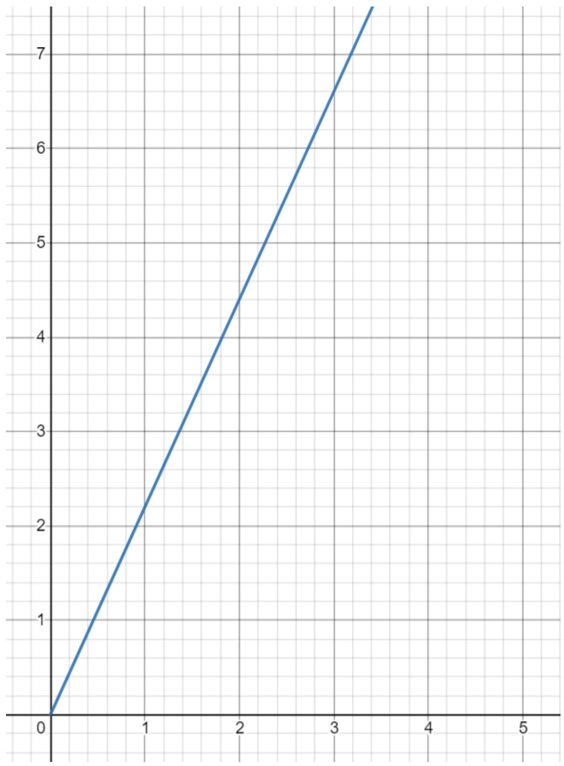
Vemos que tenemos la constante de integración, busquemos el valor de esta con lo que nos dio el problema. Como el automóvil parte del reposo, implica que:

$$v_a(0) = 0$$

Y, por otra parte,

$$v_a(0) = 2.2(0) + C = C \Rightarrow C = 0$$

Entonces la función de rapidez del automóvil está dada por: $v_a(t) = 2.2t$



Ahora bien, al integrar la función de rapidez obtendremos la función de posición del automóvil.

$$\Rightarrow s_a(t) = \int 2.2t\, dt = 1.1t^2 + C$$

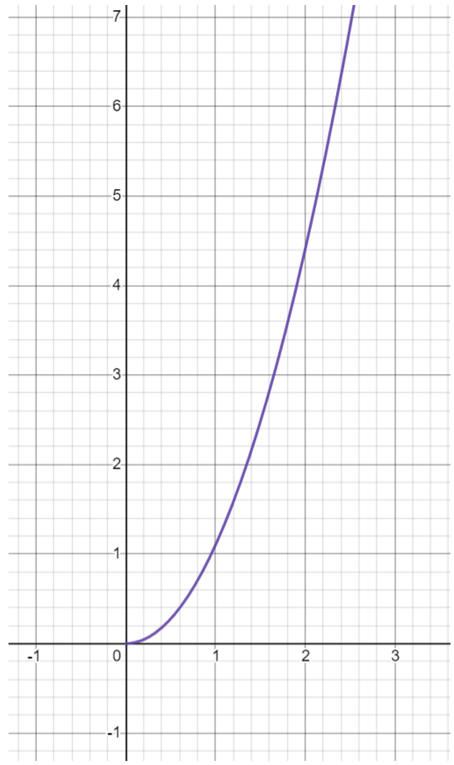
Notemos que tenemos nuevamente una constante de integración, busquemos el valor de esta con lo que nos dio el problema. Como el automóvil parte del reposo, implica que:

$$s_a(0) = 0$$

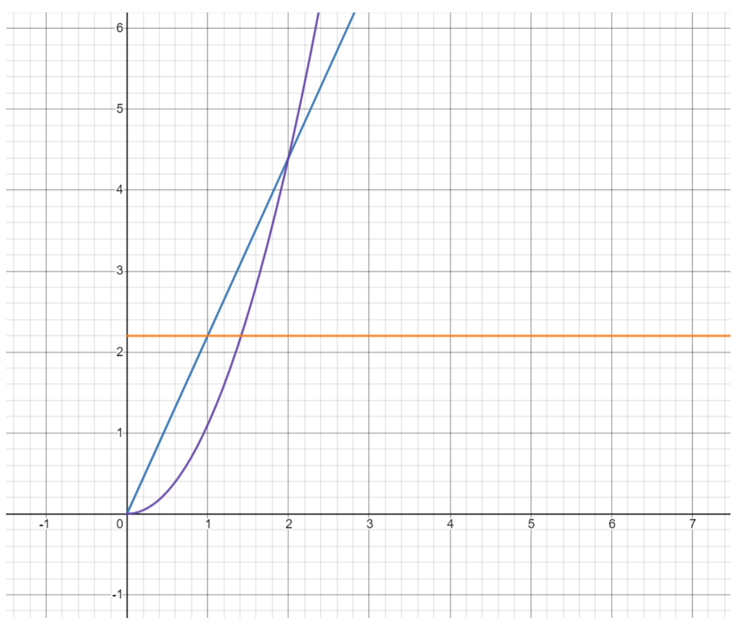
Y, por otra parte,

$$s_a(0) = 1.1(0)^2 + C = C \Rightarrow C = 0$$

Entonces la función de posición del automóvil está dada por: $s_a(t) = 1.1t^2$



Entonces las funciones de movimiento del automóvil, juntas, quedan del siguiente modo:

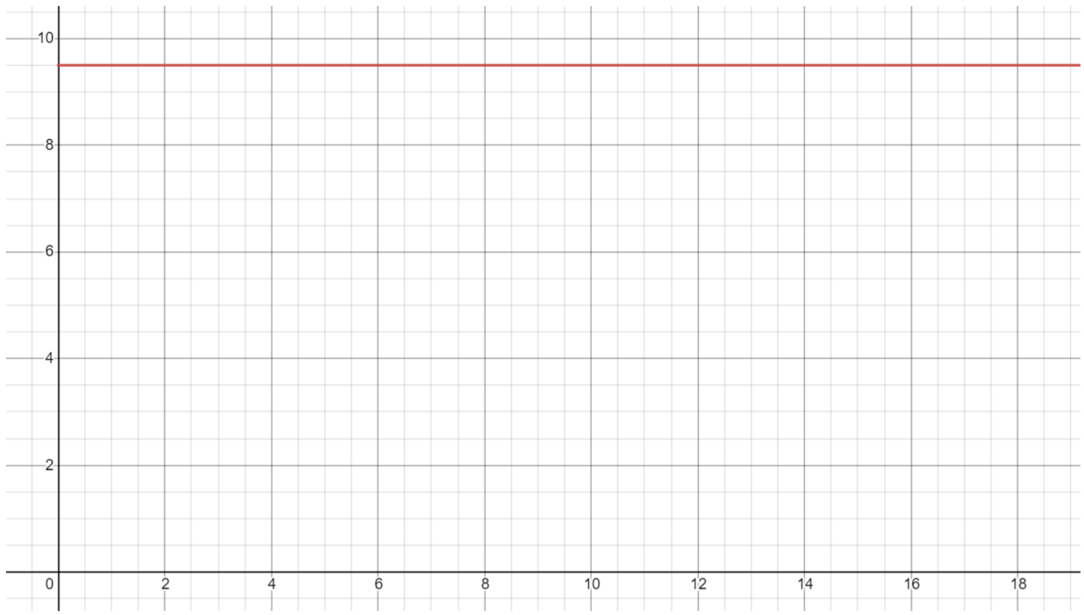


(Los colores de que tenían las funciones se conservan e indican que función es cada una)

Camión.

El problema nos indica que el camión va a una rapidez constante de 9.5 m/s.

Tenemos que la rapidez del vehículo la podemos representar mediante la siguiente función: $v_c(t) = 9.5$



Como es sabido, al integrar la función, podemos obtener la función posición del automóvil:

$$\Rightarrow s_c(t) = \int 9.5\,dt = 9.5t + C$$

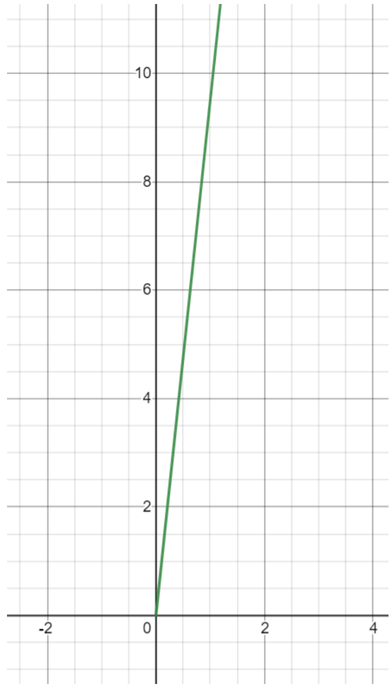
Vemos que tenemos la constante de integración, pero como estamos tomando en cuenta desde que el camión pasa al carro que en la posición 0 en el tiempo 0 s, entonces:

$$s_c(0) = 0$$

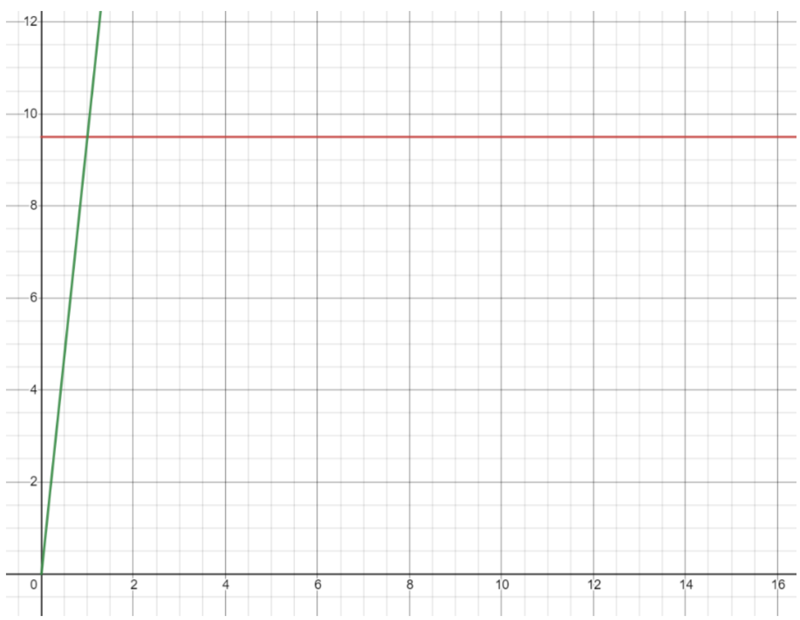
Y, por otra parte,

$$s_c(0) = 9.5t + C = C \Rightarrow C = 0$$

Entonces la función de posición del automóvil está dada por: $s_c(t) = 9.5t$



Entonces las funciones de movimiento del automóvil, juntas, quedan del siguiente modo:



(Los colores de que tenían las funciones se conservan e indican que función es cada una)

Una vez terminado nuestro análisis, veamos cuando se interceptan las funciones de posición, esto para responder a que distancia se vuelven a encontrar los vehículos.

$$s_a(t) = s_c(t)$$

$$\Rightarrow 1.1t^2 = 9.5t$$

$$\Rightarrow 1.1t = 9.5$$

$$\Rightarrow t = \frac{9.5}{1.1}$$

$$\Rightarrow t = \frac{95}{11}$$

$$\Rightarrow t \cong 8636$$

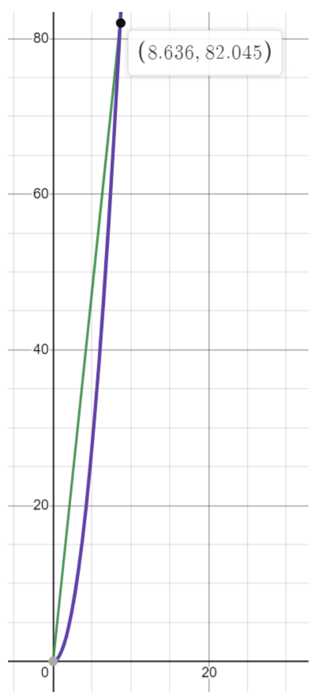
Tenemos que los automóviles se volverán a encontrar en el tiempo $\frac{95}{11}$ s. Hay que sustituir para encontrar la distancia.

$$s_a\left(\frac{95}{11}\right) = 1.1\left(\frac{95}{11}\right)^2 = \frac{1805}{22}\ m \cong 82.045\ m$$

$$s_c\left(\frac{95}{11}\right) = 9.5\left(\frac{95}{11}\right) = \frac{1805}{22}\ m \cong 82.045\ m$$

El automóvil se volverá a encontrar con el camión a la distancia de $\frac{1805}{22}$, o bien, aproximadamente a $82.045\ m$.

También podemos corroborar con la gráfica. (Se mantiene la misma idea de los colores)

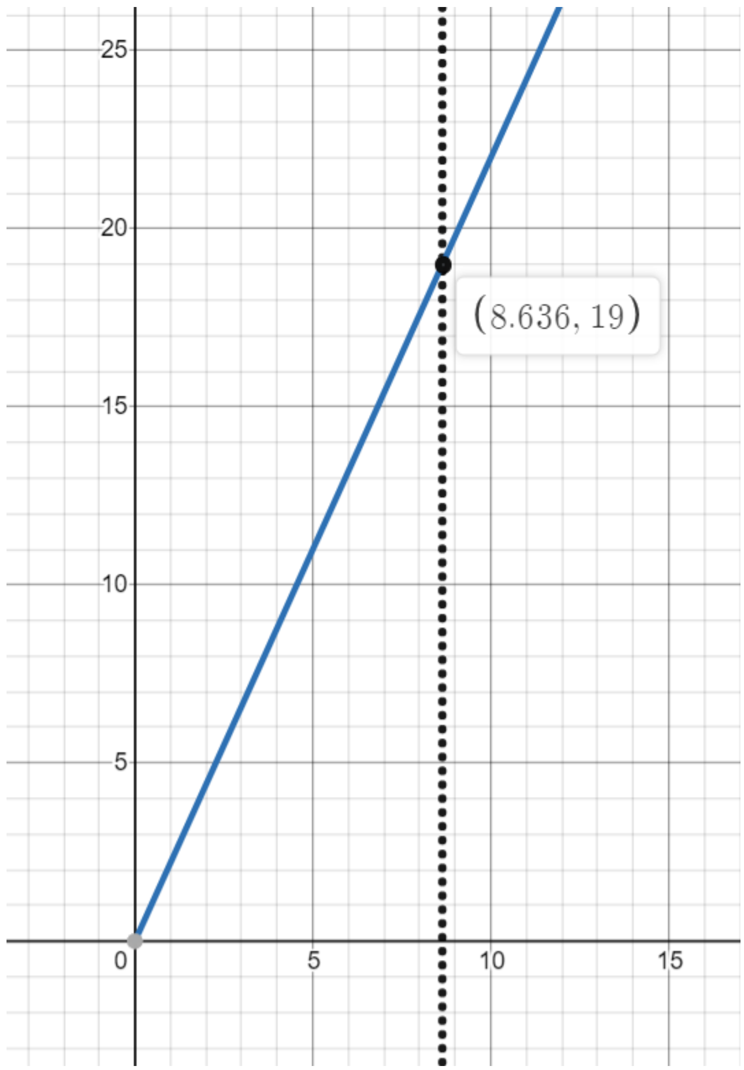


Faltaría por responder la rapidez del automóvil en ese instante de tiempo, solo es sustituir el tiempo encontrando en la función de rapidez de este.

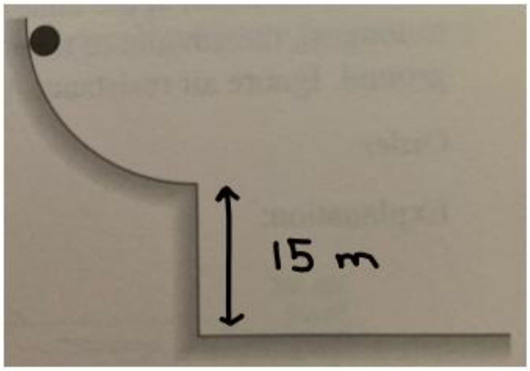
$$v_a\left(\frac{95}{11}\right) = 2.2\left(\frac{95}{11}\right) = 19\ m/s$$

El automóvil tendrá una rapidez de 19 m/s al encontrarse con el camión.

Corroboremos con la gráfica. (Se mantiene la misma idea de los colores)

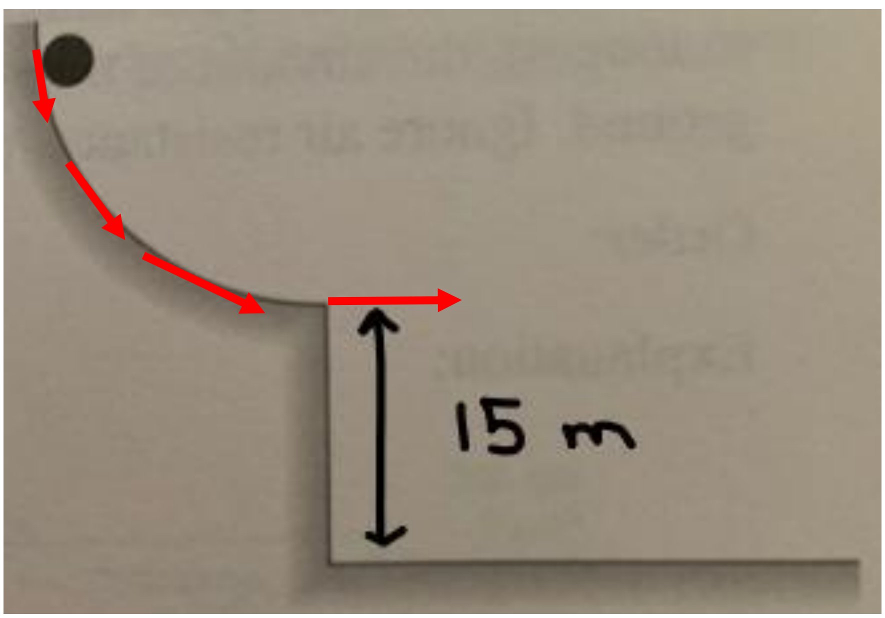


5. Una pelota se desliza, con una rapidez constante, por una rampa que tiene forma de un cuarto de círculo y cae hacia un precipicio que tiene una altura de 15 metros. (a) Dibuja el vector velocidad para la pelota mientras va deslizándose por la rampa (basta con que dibujes el vector en tres puntos). (b) Considera que cuando se separa de la rampa, la pelota tiene una rapidez de *10 m/s*. Dibuja la trayectoria que sigue la pelota desde el instante en que abandona la rampa hasta que choca con el fondo del precipicio. ¿Qué distancia a lo largo de la línea horizontal habrá recorrido desde el borde de la rampa hasta que toca el piso? ¿Cuál será su tiempo de vuelo en el precipicio?



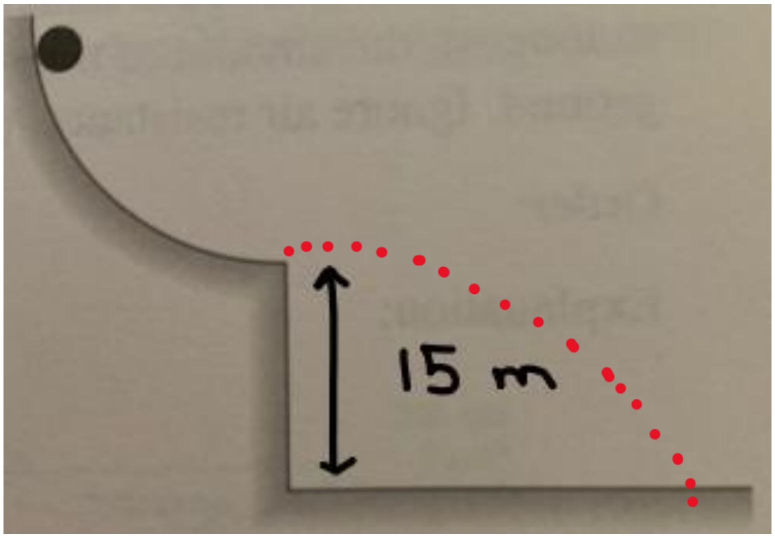
a)

El vector rapidez es tangente a la curva de posición, por lo que podemos dibujar los 3 vectores del siguiente modo:



b)

Una vez que la pelota se separe de la rampa, esta experimentara su rapidez constante en el eje “x” y una caída libre en el eje “y”, por lo que se formara una parábola.



Sabemos que la rapidez en el eje “x” es contante, pero llegara un momento en el que la pelota choque con el fondo. Vemos que podemos encontrar ese tiempo final ya que conocemos como encontrarlo a partir de la caída libre que tendremos en el movimiento, una vez calculado ese tiempo solo bastara con sustituirlo en una función de trayectoria que nos indique el desplazamiento sobre el eje “x”.

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Sustituimos nuestros datos y considerare $g = 9.8\ m/s^2$.

$$t_f = \sqrt{\frac{2(15)}{(9.8)}} = \frac{5\sqrt{6}}{7} \cong 1.749\ s$$

Ahora sustituir ese tiempo en nuestra función de posición.

$$x = vt$$

$$x = (10)\left(\frac{5\sqrt{6}}{7}\right) = \frac{50\sqrt{6}}{7}\ m \cong 17.496\ m$$

Por lo tanto, la distancia recorrida de la pelota horizontalmente, antes de chocar con el fondo, es de $\frac{50\sqrt{6}}{7}\ m$ o aproximadamente $17.496\ m$.