Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México

Electromagnetismo II – Tarea 9

Profesores:

Dr. Alejandro Reyes Coronado

Ayud. Daniel Espinosa González

Ayud. Atzin López Tercero

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

Nota. Perdón por la calidad de la tarea, es final del semestre y no le pude dedicar mucho tiempo como a las anteriores.

1.- Problema: (25pts) Una partícula de carga q se mueve en un círculo de radio a con una velocidad angular ω constante. Considera que el círculo está en el plano XY, centrado en el origen, y al tiempo $t = 0$ la carga está en el punto $(a, 0)$, sobre el eje positivo de $\hat{e}_x$. Calcula los potenciales de Liénard-Wiechert para puntos sobre el eje z.

Se nos dice que la partícula se mueve en circulo de radio a en el plano XY, y esta centrado en el origen, propongo su ecuación de posición como:

$$\bar{r}_q(t) = a[\cos(\omega t)\,\hat{x} + \sin(\omega t)\,\hat{y}]$$

Derivemos para hallar la velocidad,

$$\bar{v}(t) = a\omega[-\sin(\omega t)\,\hat{x} + \cos(\omega t)\,\hat{y}]$$

Mientras que para puntos sobre el eje z, la posición del punto de observación es $z\hat{z}$, nos lleva a la expresión parala posición para una partícula retardada:

$$\bar{r} = z\hat{z} - a[\cos(\omega t_r)\,\hat{x} + \sin(\omega t_r)\,\hat{y}] \Rightarrow r = \sqrt{z^2 + a^2}$$

La relación entre la posición retardada y la velocidad lineal.

$$\hat{r}\cdot\bar{v} = \frac{1}{r}(\bar{r}\cdot\bar{v}) = \frac{1}{r}(z\hat{z} - a[\cos(\omega t_r)\,\hat{x} + \sin(\omega t_r)\,\hat{y}])\cdot a\omega[-\sin(\omega t_r)\,\hat{x} + \cos(\omega t_r)\,\hat{y}]$$

$$= -\frac{a^2\omega}{r}(-\cos(\omega t_r)\sin(\omega t_r) + \sin(\omega t_r)\cos(\omega t_r)) = -\frac{a^2\omega}{r}(0) = 0$$

La expresión para los potenciales de Lienard-Wiechert para una partícula en movimiento es:

$$V(z,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{rc - \hat{r}\cdot\bar{v}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{rc} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$\bar{A}(z,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\bar{v}}{(rc - \hat{r}\cdot\bar{v})} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\bar{v}}{(rc - 0)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\bar{v}}{r} = \frac{\mu_0 qa\omega}{4\pi}\frac{-\sin(\omega t_r)\,\hat{x} + \cos(\omega t_r)\,\hat{y}}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

2.- Problema: (25pts) Muestra que el potencial escalar de una carga puntual que se mueve con velocidad constante, dado por

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}},$$

se puede escribir de forma compacta como

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R\sqrt{1 - v^2\sin^2\theta/c^2}},$$

donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$ es el vector posición desde la posición *presente* de la partícula al punto donde se quiere calcular el potencial , $\vec{r}$, y θ es el ángulo entre $\vec{R}$ y $\vec{v}$. Nota que para velocidades no relativistas ($v^2 \ll c^2$) se cumple que

$$\phi(\vec{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}.$$

Partamos de la expresión para el potencial escalar en términos de tiempo retardado.

$$\phi(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \bar{r}\cdot\bar{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

Como $\bar{R} = \bar{r} - \bar{v}t \Rightarrow \bar{v}t = \bar{r} - \bar{R}$,

$$(c^2t - \bar{r}\cdot\bar{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)$$

$$\begin{aligned}
&= c^4t^2 + (\bar{r}\cdot\bar{v})^2 - 2c^2t(\bar{r}\cdot\bar{v}) + c^2r^2 - c^4t^2 - v^2r^2 + v^2c^2t^2 \\
&= (\bar{r}\cdot\bar{v})^2 + (c^2 - v^2)r^2 + c^2(\bar{v}t)^2 - 2c^2(\bar{r}\cdot\bar{v}t) \\
&= (\bar{r}\cdot\bar{v})^2 + (c^2 - v^2)r^2 + c^2(\bar{r} - \bar{R})^2 - 2c^2\big(\bar{r}\cdot(\bar{r} - \bar{R})\big) \\
&= (\bar{r}\cdot\bar{v})^2 + c^2r^2 - v^2r^2 + c^2(r^2 + R^2 - 2rR) - 2c^2(r^2 - rR) \\
&= (\bar{r}\cdot\bar{v})^2 + 2c^2r^2 - v^2r^2 + c^2R^2 - 2c^2rR - 2c^2r^2 + 2c^2rR \\
&= (\bar{r}\cdot\bar{v})^2 - v^2r^2 + c^2R^2 \\
&= \big((\bar{R} + \bar{v}t)v\big)^2 - (\bar{R} + \bar{v}t)^2v^2 + c^2R^2 \\
&= (\bar{R}\cdot\bar{v})^2 + v^4t^2 + 2\big((\bar{R}\cdot\bar{v})v^2t\big) - (R^2v^2)^2 - v^4t^2 - 2(\bar{R}\cdot\bar{v})tv^2 + c^2R^2 \\
&= (\bar{R}\cdot\bar{v})^2 - R^2v^2(\bar{R}\cdot\bar{v})^2 + c^2R^2 \\
&= R^2v^2\cos^2\theta - R^2v^2 + c^2R^2 \\
&= R^2v^2(\cos^2\theta - 1)(\bar{r}\cdot\bar{v})^2 - r^2v^2 + c^2R^2 \\
&= R^2v^2(\cos^2\theta - 1)(\bar{r}\cdot\bar{v})^2 - r^2v^2 + c^2R^2 \\
&= -R^2v^2\sin^2\theta + c^2R^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi(\bar{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{-R^2v^2\sin^2\theta + c^2R^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{cR\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}}$$

3.- Problema: (25pts) Calcula los campos eléctrico y magnético de una carga puntual moviéndose a velocidad constante, y haz un dibujo de las líneas de campo.

Tenemos las ecuaciones para los campos de una carga puntual en movimiento:

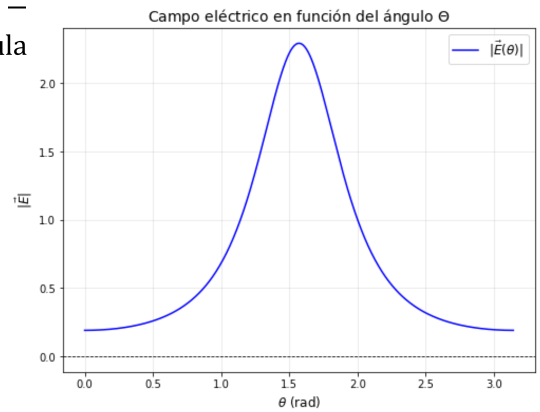
$$\bar{E}(\bar{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{r}}{(\bar{\mathrm{r}}\cdot\bar{u})^3}[(c^2-v^2)\bar{u}+\bar{\mathrm{r}}\times(\bar{u}\times\bar{a})], \qquad \bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\bar{\mathrm{r}}\times\bar{E}(\bar{r},t)$$

Colocamos $\bar{a} = \bar{0} \Rightarrow \bar{E}(\bar{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{r}}{(\bar{\mathrm{r}}\cdot\bar{u})^3}[(c^2-v^2)\bar{u}]$

Tomando $\bar{w} = \bar{v}t \Rightarrow \mathrm{r}\bar{u} = c\bar{\mathrm{r}} - \mathrm{r}\bar{v} = c(\bar{\mathrm{r}}-\bar{v}t_r) - c(t-t_r)\bar{v} = c(\bar{\mathrm{r}}-\bar{v}t)$

Donde $\mathrm{r}c - \bar{\mathrm{r}}\cdot\bar{u} = \sqrt{(c^2t-\bar{\mathrm{r}}\cdot\bar{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$

Con el radical $Rc\sqrt{1-v^2\sin^2\theta/c^2}$, donde $\bar{R} \equiv \bar{\mathrm{r}} - \bar{v}t$, es el vector desde la posición actual de la partícula hasta $\bar{\mathrm{r}}$, y θ es el ángulo entre $\bar{R}$ y $\bar{v}$.



$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{(1-v^2\sin^2\theta/c^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{r}}{(\bar{\mathrm{r}}\cdot\bar{u})^3}\frac{\hat{R}}{R^2}$$

De modo que: $\bar{B}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\bar{\mathrm{r}}\times\bar{E}(\bar{r},t)$

$$\bar{B} = \frac{1}{c}\bar{\mathrm{r}}\times\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{(1-v^2\sin^2\theta/c^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{r}}{(\bar{\mathrm{r}}\cdot\bar{u})^3}\frac{\hat{R}}{R^2}\right)$$