Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Mecánica Analítica

Tarea 2

Profesores:
Dra. Rosa María Méndez Vargas

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- **(2.5)** Hállese los vectores base $\vec{b}_i$ y sus recíprocos $\vec{\mathbf{b}}_i$, para las coordenadas cilíndricas elípticas definidas por

$$x = \frac{1}{2}a\cosh q_1 \cos q_2,$$
$$y = \frac{1}{2}a\sinh q_1 \sin q_2,$$
$$z = z$$

o

$$\frac{1}{2}a(\cosh q_1 + \cos q_2) = \sqrt{(x+\frac{1}{2}a)^2 + y^2}$$

y

$$\frac{1}{2}a(\cosh q_1 - \cos q_2) = \sqrt{(x-\frac{1}{2}a)^2 + y^2}.$$

Simplifica tu respuestas utilizando: $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

Calculemos los vectores base

$$\bar{b}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} = \left(\frac{1}{2}a\cos q_2 \sinh q_1\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}a\sin q_2 \cos q_1\right)\hat{\jmath}$$
$$\bar{b}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} = \left(-\frac{1}{2}a\cosh q_1 \sin q_2\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}a\sinh q_1 \sin q_2\right)\hat{\jmath}$$
$$\bar{b}_3 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \hat{k}$$

Los factores de escala están dados por:

$$\mathrm{h}_i = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial i}\right|$$

De este modo,

$$\mathrm{h}_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\cos q_2 \sinh q_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\sin q_2 \cos q_1\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a}{2}\sqrt{\cos^2 q_2 \sinh^2 q_1 + \sin^2 q_2 \cos^2 q_1} \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{\sinh^2 q_1 + \sin^2 q_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_2 &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}a\cosh q_1 \sin q_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\sinh q_1 \sin q_2\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}a\sqrt{\cosh^2 q_1 \sin^2 q_2 + \sinh^2 q_1 \sin^2 q_2} \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{\sinh^2 q_1 + \sin^2 q_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_3 &= \sqrt{1^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

De este modo los recíprocos, $\bar{c}_i = \frac{1}{h_i^2}\bar{b}_i$:

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_1 &= \frac{\left(\frac{1}{2}a\cos q_2 \sinh q_1\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}a\sin q_2 \cos q_1\right)\hat{\jmath}}{\sinh^2 q_1 + \sin^2 q_2} \\
\bar{c}_2 &= \frac{\left(-\frac{1}{2}a\cosh q_1 \sin q_2\right)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}a\sinh q_1 \sin q_2\right)\hat{\jmath}}{\sinh^2 q_1 + \sin^2 q_2} \\
\bar{c}_3 &= \hat{k}
\end{aligned}
$$

2.- (**2.8**) Si el cuadrado de la velocidad de una partícula se expresa en función de las coordenadas generalizadas, $q_1 = \theta$, $q_2 = \phi$, por

$$v^2 = a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + c\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

obténganse las componentes covariantes generalizadas de la velocidad y la aceleración de la partícula.

Las componentes covariantes se obtienen a partir de la expresión:

$$v_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Se tiene que $v^2 = a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + c\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}$, así

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}b\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\phi}\dot{\theta}$$

Para $q_1 = \theta$,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}b\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2a\dot{\theta} + 0 + 2c\dot{\theta}\sin^2\theta + d\dot{\phi}\right) \\ &= a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\phi} \end{aligned}$$

Para $q_2 = \phi$,

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}b\dot{\phi}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\phi}\dot{\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + 2b\dot{\phi}\cos^2\theta + 0 + d\dot{\theta}\right) \\ &= b\dot{\phi}\cos^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\theta} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las componentes covariantes de la velocidad son:

$$v_1 = a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\phi}, \qquad v_2 = b\dot{\phi}\cos^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\theta}$$

Procedamos a calcular las componentes covariantes de la aceleración, la cual está dada por:

$$a_i = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}v_i - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Veamos quienes son $\frac{\partial}{\partial t}v_1$ y $\frac{\partial}{\partial t}v_2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v_1 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(a\dot{\theta} + c\dot{\theta}\sin^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\phi}\right) = a\ddot{\theta} + c\left(\ddot{\theta}\sin^2\theta + \sin 2\theta\,\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}d\ddot{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial t}v_2 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(b\dot{\phi}\cos^2\theta + \frac{1}{2}d\dot{\theta}\right) = b\left(\ddot{\phi}\cos^2\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}d\dot{\theta} \end{aligned}$$

Mientras que,

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}\left(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-b\dot{\phi}^2\sin 2\theta + c\dot{\theta}^2\sin 2\theta\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial q_\phi}\left(\frac{1}{2}\left(a\dot{\theta}^2 + b\dot{\phi}^2\cos^2\theta + c\dot{\theta}^2\sin^2\theta + d\dot{\phi}\dot{\theta}\right)\right) = 0$$

Finalmente, las componentes covariantes de la aceleración son:

$$a_1 = a\ddot{\theta} + c\left(\ddot{\theta}\sin^2\theta + \sin 2\theta\,\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}d\ddot{\phi} - \frac{1}{2}\left(-b\dot{\phi}^2\sin 2\theta + c\dot{\theta}^2\sin 2\theta\right)$$

$$a_2 = b\left(\ddot{\phi}\cos^2\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}d\dot{\theta}$$

3.- (2.9) Utilizando la ecuación

$$a_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

hállese las expresiones de la aceleración de una partícula en coordenadas esféricas.

Se trata de coordenadas esféricas: $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$.

Con $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$.

Tenemos que la velocidad al cuadrado está dada por:

$$v^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 (\dot{q}_i)^2$$

Así,

$$v^2 = h_1^2\dot{q}_1^2 + h_2^2\dot{q}_2^2 + h_3^2\dot{q}_3^2 = (1)^2(\dot{r})^2 + (r)^2(\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta)^2(\dot{\phi})^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$

Esto implica que,

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$

Calcularemos las parciales respecto a $\dot{q}_i$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2}2\dot{r} = \dot{r}$$
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2}2r^2\dot{\theta} = r^2\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2}2r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$$

Ahora calculémosles sus derivadas respecto al tiempo,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right)$$

Tenemos que,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\dot{r}) = \ddot{r}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 2r\dot{r}\sin^2\theta\,\dot{\phi} + r^2\left(\dot{\theta}\sin^2 2\theta\,\dot{\phi} + \sin^2\theta\,\ddot{\phi}\right)$$

Por otra parte, tenemos que calcular los $\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$,

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2r\dot{\theta}^2 + 2r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$
$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(r^2\sin 2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\,\dot{\phi}^2$$
$$\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$$

Luego sustituyendo, las expresiones de la aceleración de la partícula en coordenadas esféricas están dadas por:

$$a_1 = \ddot{r} - \left(r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$
$$a_2 = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$
$$a_3 = 2r\dot{r}\sin^2\theta\,\dot{\phi} + r^2\left(\dot{\theta}\sin^2 2\theta\,\dot{\phi} + \sin^2\theta\,\ddot{\phi}\right) - \left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right)$$

Ahora utilizaremos la siguiente expresión para la aceleración:

$$a = \sum_{i=1}^{3} a_i c_i$$

Con $c_i = \frac{1}{h_i}\hat{e}_i$, calculémoslos

$$c_1 = \frac{1}{h_1}\hat{e}_r = \hat{e}_r, \qquad c_2 = \frac{1}{h_2}\hat{e}_\theta = \frac{1}{r}\hat{e}_\theta, \qquad c_3 = \frac{1}{h_3}\hat{e}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\hat{e}_\phi$$

Por lo tanto,

$$a = a_1c_1 + a_2c_1 + a_3c_1$$

$$a = \left(\ddot{r} - \left(r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)\right)\hat{e}_r + \left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\,\dot{\phi}^2\right)\right)\frac{1}{r}\hat{e}_\theta$$
$$+ \left(2r\dot{r}\sin^2\theta\,\dot{\phi} + r^2\left(\dot{\theta}\sin^2 2\theta\,\dot{\phi} + \sin^2\theta\,\ddot{\phi}\right) - \left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right)\right)\frac{1}{r\sin\theta}\hat{e}_\phi$$

4.- (**2.10**) Determinar el gradiente de la función escalar Ψ en a) coordenadas cilíndricas y b) coordenadas esféricas. Calcula explícitamente los seis factores de escala.

Para calcular el determinante del gradiente de una función escalar se utilizará la siguiente expresión:

$$\nabla\Psi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{d\Psi}{\mathrm{dq_i}}\hat{e}_i$$

a) Coordenadas cilíndricas

$$\Psi(r,\theta,z)$$

En coordenadas cilíndricas, los vectores de base son:

- $\hat{e}_r$ apunta en la dirección del vector posición desde el origen al punto.
- $\hat{e}_\theta$ apunta en la dirección tangencial al círculo de latitud.
- $\hat{e}_z$ es paralelo al eje de simetría cilíndrica.

Calculemos los factores de escala

$$\bar{r} = r\cos(\theta)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\,\hat{e}_\theta + z\hat{e}_z$$

- Para $\mathrm{h_r}$:

$$h_r = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial r}(r\cos(\theta)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\,\hat{e}_\theta + z\hat{e}_z)\right| = |\cos(\theta)\,\hat{e}_r + \sin(\theta)\,\hat{e}_r| = 1$$

- Para h_θ:

$$\mathrm{h}_\theta = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos(\theta)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\,\hat{e}_\theta + z\hat{e}_z)\right| = |-r\sin(\theta)\,\hat{e}_r + r\cos(\theta)\,\hat{e}_r|$$
$$= |r(-\sin(\theta)\,\hat{e}_r + \cos(\theta)\,\hat{e}_r)| = |r||-\sin(\theta)\,\hat{e}_r + \cos(\theta)\,\hat{e}_r| = r$$

- Para h_z:

$$\mathrm{h}_z = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial z}(r\cos(\theta)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\,\hat{e}_\theta + z\hat{e}_z)\right| = |\hat{e}_z| = 1$$

Entonces, el gradiente de Ψ en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\hat{e}_z$$

b) Coordenadas esféricas

$$\Psi = \Psi(r, \theta, \phi)$$

En coordenadas esféricas, los vectores de base son:

- $\hat{e}_r$ apunta en la dirección del vector posición desde el origen al punto.
- $\hat{e}_\theta$ apunta en la dirección de la longitud.
- $\hat{e}_\phi$ apunta en la dirección de la latitud.

Calculemos los factores de escala

$$\bar{r} = r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{e}_\theta + r\cos(\theta)\,\hat{e}_\phi$$

- Para $\mathrm{h_r}$:

$$\begin{aligned} h_r &= \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial r}\big(r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{e}_\theta + r\cos(\theta)\,\hat{e}_\phi\big)\right| \\ &= |\sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\theta)| \\ &= \sqrt{(\sin(\theta)\cos(\phi))^2 + (\sin(\theta)\sin(\phi))^2 + (\cos(\theta))^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + \cos^2(\theta)} \\ &= \sqrt{\sin^2(\theta)\,(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + \cos^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1 \end{aligned}$$

- Para h_θ:

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_\theta &= \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial\theta}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial r}\big(r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{e}_\theta + r\cos(\theta)\,\hat{e}_\phi\big)\right| \\ &= \big|r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\hat{e}_r + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{e}_\theta - r\sin(\theta)\,\hat{e}_\phi\big| \\ &= \sqrt{(r\cos(\theta)\cos(\phi))^2 + (r\cos(\theta)\sin(\phi))^2 + (-r\sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) + \cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2(\cos^2(\theta)\,(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + \sin^2(\theta))} = \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{r^2} = r \end{aligned}$$

Para h_ϕ:

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_\phi &= \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial\phi}\big(r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{e}_\theta + r\cos(\theta)\,\hat{e}_\phi\big)\right| \\ &= |-r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{e}_r + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{e}_\theta| = \sqrt{(-r\sin(\theta)\sin(\phi))^2 + (r\sin(\theta)\cos(\phi))^2} \\ &= \sqrt{r^2(\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\phi))} = \sqrt{r^2\big(\sin^2(\theta)\,(\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi))\big)} \\ &= \sqrt{r^2\sin^2(\theta)} = r\sin(\theta) \end{aligned}$$

Entonces, el gradiente de Ψ en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi$$

5.- (**2.11**) **Radio de Curvatura**† Expresar el radio de curvatura de una curva plana en coordenadas polares.

Nota: el procedimiento que se calificará es el visto en clase, cualquier otro se hará sobre la mitad de la calificación del ejercicio.

Considérese $C \in \mathbb{R}^2$, $r: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que sea derivable e inyectiva en el intervalo.

Donde le radio de curvatura esta dado por:

$$\left\|\frac{d^2 r}{ds^2}\right\| = \frac{1}{\rho}$$

Un vector en coordenadas esféricas esta dado por: $\bar{r} = |\bar{r}|\hat{e}_r$

Al introducir una parametrización, esta dependerá del ángulo.

$$\Rightarrow \varphi(s) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

El ángulo este partido por otra curva.

Así, $\bar{r}$ depende de esta nueva curva, t. q., $\bar{r} = |\bar{r}|\hat{e}_r = r(\varphi(s))\hat{e}_r\varphi(s)$, el vector posición se convierte en esta función.

Donde, $\hat{e}_r\varphi(s) = \cos\varphi(s)\,\hat{\imath} + \sin\varphi(s)\,\hat{\jmath}$, $\hat{e}_\varphi\varphi(s) = -\sin(\varphi(s))\,\hat{\imath} + \cos\varphi(s)\,\hat{\jmath}$

Obtengamos la derivada de $\bar{r}$,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{r}(\varphi(s))}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(r(\varphi(s))\hat{e}_r\varphi(s)\right) \\ &= \frac{dr}{ds}(\varphi(s))\hat{e}_r + r(\varphi(s))\frac{d\hat{e}_r}{ds} \\ &= \frac{d\varphi(s)}{ds}\left[\frac{dr\varphi(s)}{d\varphi(s)}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r\varphi(s)}{d\varphi(s)}\right]\end{aligned}$$

Necesitamos conseguir la siguiente expresión:

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{2} h_i \Delta q_i\,\hat{e}_i$$

La variación de la longitud de arco. De este modo tenemos que:

$$\|\Delta s\|^2 = \Delta s \Delta s = \left(\sum_i h_i \Delta q_i\,\hat{e}_i\right)\left(\sum_j h_j \Delta q_j\,\hat{e}_j\right) = \sum_i h_i^2 \Delta q_i^2\,, donde\ i = j$$

Y tomamos limite cuando tiende a 0,

$$(ds)^2 = \sum_i h_j^2 \Delta q_j^2$$

Donde, $h_r = 1$ y $h_\varphi = r$. $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$. Tenemos que, $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}}$

Así,

$$\frac{d\bar{r}}{d\varphi(s)} = \left[\frac{dr}{d\varphi}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{d\varphi}\right]\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}}$$

Calculemos

$$\frac{d^2r}{ds^2}$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \left(\frac{d}{ds}\right)\left(\frac{dr\varphi(s)}{d\varphi}\hat{e}_r\right) + \left(r\varphi(s)\frac{d\hat{e}_r\varphi(s)}{d\varphi}\right)\left(\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) + \left[\left(\frac{dr\varphi(s)}{d\varphi}\hat{e}_r + r\varphi(s)\frac{d\hat{e}_r}{d\varphi}\right)\frac{d}{ds}\left(\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Trabajemos con $\frac{d}{ds}\left(\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d}{ds}\left(\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left[\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right]^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{ds}\left(\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right)$$

Donde,

$$\frac{d}{ds}\left(\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{d}{ds}r^2 = 2\frac{dr}{d\varphi}\frac{d}{ds}\frac{dr\varphi(s)}{d\varphi} + 2r\frac{dr}{ds}$$

Toma $f(\varphi(s)) = \left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2$, $g = \left(\left[\frac{dr}{d\varphi}\right]^2 + r^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, así

$$\frac{d}{ds}f(\varphi(s)) = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{df(\varphi(s))}{d\varphi(s)}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{2}g(\varphi(s))^{-\frac{3}{2}}\frac{dg}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}$$
$$= -\left[\left(\frac{dr\varphi}{d\varphi}\right)^2 + (r\varphi)^2\right]^{-2}\left[\frac{dr}{d\varphi}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + r\frac{dr}{d\varphi}\right]$$

De este modo y cambiando un poco la notación:

$$\frac{d}{ds}\left[r'^2 + r^2\right]^{-\frac{1}{2}} = -[r'^2 + r^2]^{-2}[r'r'' + rr']$$

Ahora por otra parte,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left[\frac{dr}{d\varphi}\hat{e}_r + r\hat{e}_\varphi\right] &= \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\hat{e}_r + \frac{d\hat{e}_r}{ds}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) + \frac{dr}{ds}\hat{e}_\varphi + r\frac{d\hat{e}_\varphi}{ds} \\ &= \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr\varphi(s)}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{ds}\right]\hat{e}_r\varphi(s) + \frac{dr}{d\varphi}\left[\frac{d\hat{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\right] + \left[\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\right]\hat{e}_\varphi + r\frac{d\hat{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} \\ &= \left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\hat{e}_r + \frac{dr}{d\varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\hat{e}_\varphi - r\hat{e}_r\right)\frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}$$

Ahora a sustituir en la expresión inicial.

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \left[r'^2 + r^2\right]^{-1}\left((r'' - r)\hat{e}_r + 2r\hat{e}_\varphi - \left(r'\hat{e}_r + r\hat{e}_\varphi\right)\left[r'^2 + r^2\right]^{-2}\left[r'^2 + r^2\right]^{-2}(r'r'' + rr')\right)$$

Tras desarrollar y simplificar se llega a que,

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \left(2r'^2 - rr'' + r^2\right)\left(r'^2 + r^2\right)^{-2}\left(-r'\hat{e}_r + r\hat{e}_\varphi\right)$$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{d^2r}{ds^2}\right\| = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{\left(r'^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho}$$

6.- **(2.12)** Obtener las componentes tangencial y normal de las velocidades y las aceleraciones de las partículas cuyo vector de posición está dado por

$$\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 4t\hat{\jmath} + (t^2 + 3)\hat{k}.$$

Sea $\bar{r} = 3t\hat{\imath} - 4t\hat{\jmath} + (t^2 + 3)\hat{k}$, para hallar la velocidad y la aceleración usaremos las siguientes expresiones:

$$\bar{v} = \dot{s}\hat{e}_s, \qquad \bar{a} = \ddot{s}\hat{e}_s - \frac{\dot{s}}{\rho}\hat{e}_n = \ddot{s}\hat{e}_s - \dot{s}\dot{\hat{e}}_s$$

En las cuales se evidencian sus competentes. También tenemos que,

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2t\hat{k}$$

Mientras que,

$$ds = |d\bar{r}| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt,$$

$$\dot{s} = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 16 + 4t^2} = \sqrt{4t^2 + 25}$$

De este modo, la componente tangencial de la velocidad está dada por:

$$\bar{v} = \bar{v}_T = \left(\sqrt{4t^2 + 25}\right)\frac{3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2t\hat{k}}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

Con,

$$\hat{e}_s = \frac{3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2t\hat{k}}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

También nótese que, al tratarse de la velocidad, esta no contara con componente normal.

Ahora pasemos con la de la aceleración,

$$\bar{a} = \ddot{s}\hat{e}_s - \dot{s}\dot{\hat{e}}_s$$

Donde,

$$\ddot{s} = \frac{d}{dt}\sqrt{4t^2 + 25} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

Entonces

$$\bar{a} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 25}}\left(\frac{3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2t\hat{k}}{\sqrt{4t^2 + 25}}\right) - \dot{s}\dot{\hat{e}}_s$$

Y pues como tangencial de la aclaración es:

$$\bar{a}_T = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 25}}\left(\frac{3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2t\hat{k}}{\sqrt{4t^2 + 25}}\right)$$

Nuevamente con,

$$\hat{e}_s = \frac{3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2t\hat{k}}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

Calculemos ahora $\dot{\hat{e}}_s$

$$\dot{\hat{e}}_s = \frac{\left(2\hat{k}\right)(4t^2 + 25) - (4t^2 + 25)\left(3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} + 2t\hat{k}\right)}{4t^2 + 25}$$

$$= \frac{(16\hat{\jmath} - 12\hat{\imath})t + 50\hat{k}}{(4t^2 + 25)^{\frac{3}{2}}}$$

Como la aceleración normal es $\bar{a}_N = \dot{s}\dot{\hat{e}}_s$

$$\bar{a}_N = \left(\sqrt{4t^2 + 25}\right)\frac{(16\hat{\jmath} - 12\hat{\imath})t + 50\hat{k}}{(4t^2 + 25)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(16\hat{\jmath} - 12\hat{\imath})t + 50\hat{k}}{4t^2 + 25}$$

Por lo tanto,

$$\bar{a}_N = \frac{(16\hat{\jmath} - 12\hat{\imath})t + 50\hat{k}}{4t^2 + 25}$$

7.- **(2.15)** En el punto (2,1,1), obtener el vector unidad tangente a las superficies

$$\phi_1(x,y,z) = x^2 + 2xy - y^2 + yz + z^2 = 9,$$
$$\phi_2(x,y,z) = 3x^2 - xy + y^2 = 11.$$

Graficar ambas superficies, la intersección entre ellas, y el vector tangente unidad calculado.

Primero debemos calcular los gradientes de las funciones ϕ_1 y ϕ_2, para luego evaluarlos en el punto dado y obtener el vector tangente.

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

Para ϕ_1:

$$\nabla\phi_1 = (2x + 2y, 2x - 2y + z, y + 2z)$$

$$\nabla\phi_1(2,1,1) = (4 + 2, 4 - 2 + 1, 1 + 2) = (6,3,3)$$

Para ϕ_2:

$$\nabla\phi_2 = (6x - y, -x + 2y, 0)$$

$$\nabla\phi_2(2,1,1) = (12 - 1, -2 + 2, 0) = (11,0,0)$$

Procedamos a obtener el producto vectorial para hallar el vector ortogonal.

$$\nabla\phi_1 \times \nabla\phi_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 3 & 3 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0)\hat{\imath} - (-33)\hat{\jmath} + (-33)\hat{k} = 33\hat{\jmath} - 33\hat{k}$$

Así el vector tangencial es

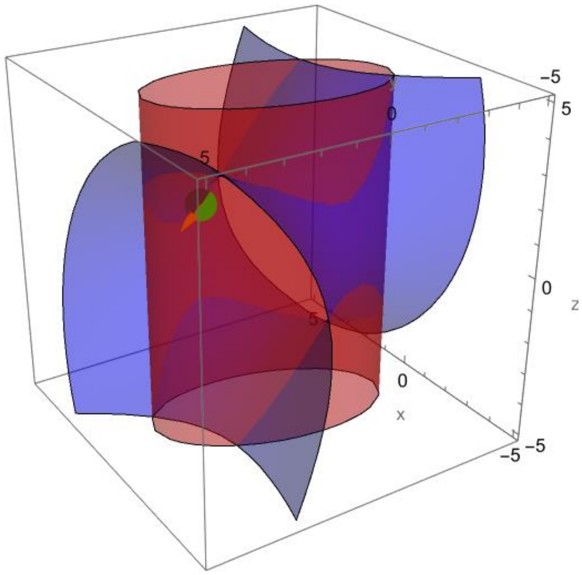
$$\bar{T} = 0\hat{\imath} + 33\hat{\jmath} - 33\hat{k}$$

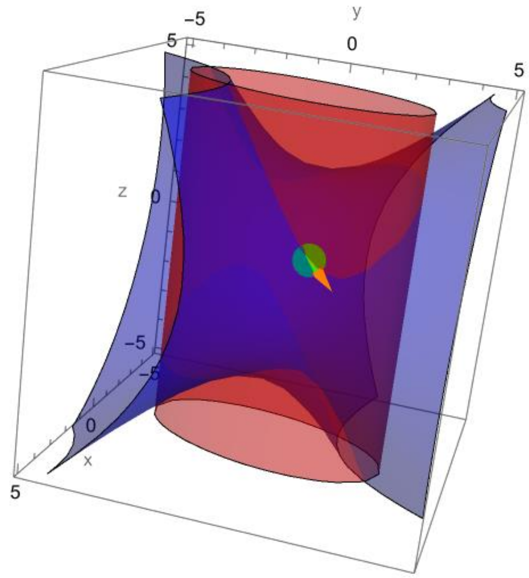
Ahora lo normalizamos,

$$\|\bar{T}\| = \sqrt{0^2 + 33^2 + (-33)^2} = \sqrt{2(1089)} = 33\sqrt{2}$$

Entonces, el vector tangente unitario para T es:

$$\hat{T} = \frac{\bar{T}}{\|\bar{T}\|} = \frac{0\hat{\imath} + 33\hat{\jmath} - 33\hat{k}}{33\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\jmath} - \hat{k})$$





Observamos al punto de interés en verde, el vector en naranja y las curvas (azul-1, rojo-2).

Wolfram:

```
(* Definir las funciones phi1 y phi2 *)
phi1[x_, y_, z_] := x^2 + 2 x y - y^2 + y z + z^2 - 9
phi2[x_, y_, z_] := 3 x^2 - x y + y^2 - 11
(* Graficar las curvas phi1=0 y phi2=0 con transparencia *)
plot1 = ContourPlot3D[{phi1[x, y, z] == 0, phi2[x, y, z] == 0}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {z, -5, 5},
  ContourStyle -> {Directive[Blue, Opacity[0.5]], Directive[Red, Opacity[0.5]]}, Mesh -> None,
  PlotLegends -> {"Phi1=0", "Phi2=0"}];
(* Graficar el punto (2,1,1) *)
point = Graphics3D[{Green, PointSize[0.05], Point[{2, 1, 1}]}];
(* Graficar el vector (1/√2)(ĵ-k̂) sin transparencia y de color naranja *)
vector = Graphics3D[{Orange, Opacity[1], Arrow[{{2, 1, 1}, {2, 1 + 1/Sqrt[2], 1 - 1/Sqrt[2]}}]}];
(* Mostrar todo en un mismo gráfico *)
Show[plot1, point, vector, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  PlotLabel -> "Gráfico de las Curvas con el Punto y el Vector"]
```

8.- (3.1) **Movimiento de tralación relativo**.

Un helicóptero aterriza con viento cruzado en un barco en movimiento, desde el cual se observa que desciende verticalmente a 10 nudos[1] Si el barco tiene una velocidad de avance de 20 nudos y el viento cruzado está soplando perpendicularmente al curso del barco a 20 nudos, encontrar la velocidad del helicóptero a través del aire.

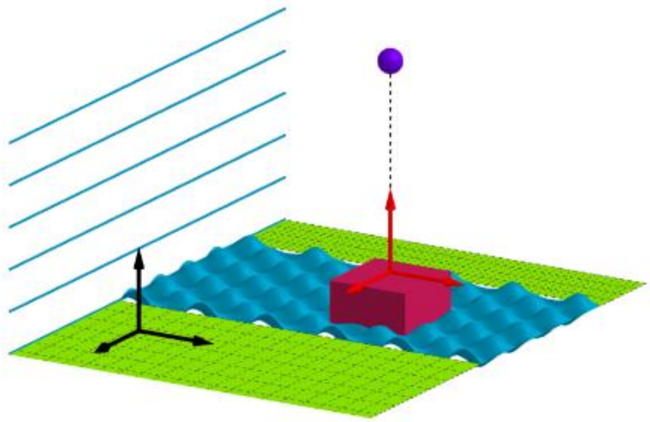


Figura 1: Diagrama sugerido para el problema 3.1.

Este problema debe resolverse planteando **vectorialmente** el vector de posición desde el sistema del barco (caja roja) y el sistema fijo en tierra (ejes negros). Recuerden que al hablar de *velocidad* se está tratando de un vector, no de su magnitud.

Primero veamos las distintas velocidades a considerar:

- $\bar{v}_h = -10\ n\ \hat{k}$: Helicóptero
- $\bar{v}_b = 20\ n\ \hat{\jmath}$: Barco
- $\bar{v}_w = 20\ n\ \hat{\imath}$: Viento

Buscamos como se mueve el helicóptero a través del aire, $\bar{v}$. Esta será la suma vectorial de las velocidades que influyen en el helicóptero para aterrizar y se puede expresar como:

$$\bar{v} = \bar{v}_h + \bar{v}_b - \bar{v}_w$$

Sustituyendo,

$$\bar{v} = \left(-10\ n\ \hat{k}\right) + (20\ n\ \hat{\jmath}) - (20\ n\ \hat{\imath})$$

Por lo tanto,

$$\bar{v} = -20\ n\ \hat{\imath} + 20\ n\ \hat{\jmath} - 10\ n\ \hat{k}$$

En palabras, el helicóptero de mueve en dirección $\hat{k}$ descendiendo, mientras que se mueve en dirección al barco $\hat{\jmath}$ para alcanzarlo y pelea contra el viento en dirección $\hat{\imath}$.