Demuestra que no se puede formar un condensado de Bose en un gas de bosones 2D. Para esto sigue los siguientes pasos:

Primero hay que recordar que lo que nos interesa es que las partículas se acumulen en el estado base de energía cuando la temperatura se vuelve lo suficientemente baja, para tener el condensado.

a) Calcula la densidad de estados de un gas ideal en 2D.

$$g(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{A}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2} = \frac{mA}{2\pi\hbar^2}$$

Lo que nos dice es que en 2D, la densidad de estados $g(\epsilon)$ es constante, pues no depende de ϵ (la energía).

Y me parece que en la clase que vimos el 3D si había un "cuello de botella" en la cantidad de estados disponibles, lo que permitía que las partículas se "atascarán". En este caso se permite que las partículas se distribuyan en estados de mayor energía sin acumularse en el estado base, pero eso lo veremos más adelante.

b) Número total de partículas.

El número total de partículas N es la suma del número promedio de bosones en cada estado, dado por la distribución de Bose-Einstein:

$$N = \sum_{\epsilon} \langle n_\epsilon \rangle = \sum_{\epsilon} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

Con $\beta = 1/(k_B T)$ y μ el potencial químico.

Se describe el número promedio de bosones en un estado de energía ϵ.

c) Separar el estado base y escribirlo en términos de la fugacidad.

Al separar el estado base:

$$N = N_0 + \sum_{\epsilon>0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

Donde N_0 representa el número de partículas en el estado fundamental (ϵ=0).

Definimos la fugacidad $z = e^{\beta\mu}$, siendo este el parámetro que mide la tendencia de las partículas a escapar o permanecer en el sistema.

entonces:

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{1-z}$$

Si nos vamos recorriendo en la gráfica, vemos que $z \in (0,1)$ cuando $\mu < 0$,

Nos interesa cuando:

- Si $z \ll 1$: entonces N_0 es pequeño
- Si $z \to 1^-$: entonces $1 - z \to 0^+ \Rightarrow N_0 \to \infty$ lo que se refiere que diverge. Es el único escenario donde podríamos tener una acumulación importante en el estado base.

Sin embargo, aunque pareciera que se forma el condensado por tener gran N_0, al mismo tiempo debemos asegurarnos de que el número de partículas siga siendo finito, por lo que debemos revisar si el N_{otros} también diverge.

d) Aproximar la suma por una integral.

En este paso llegábamos para N_{otros} a:

$$N_{\text{otros}} = \frac{Am}{2\pi\hbar^2} k_B T \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

Este representa el número de partículas en estados excitados $\epsilon > 0$.

Y vemos que justamente diverge logarítmicamente cuando $z \to 1^-$.

Pues también afecta que la densidad de estados $g(\epsilon)$ es constante.

A diferencia del 3D donde vimos que la integral converge a un valor finito, lo cual permitía que N_0 forma el condensado.

En este caso surge el problema pues $N = N_0 + N_{\text{otros}} \to \infty$, lo cual no es posible, pues se supone que el número de partículas es fijo y finito.

e) Comportamiento de N_0 y N_{otros}

Además de describir todo lo que ya he dicho de ambos,

Todo el análisis nos lleva a que $N_0 = N - N_{otros} \approx 0$, cuando $z \to 1^-$, pues en este caso N_{otros} no tiene límite superior. Y pues, aunque ambos divergen individualmente, su diferencia tiende a 0.

O bien verlo como $\frac{N_0}{N} \to 0$ (sustituyendo lo comprobamos) cuando $z \to 1^-$, lo que significa que no hay acumulación macroscópica en el estado base.

Por más que bajemos la temperatura, podremos acomodar todas las partículas en los estados excitados sin que sea necesario llenar el estado base con una fracción macroscópica.

f) Intersección entre ambas funciones e implicación de que no hay condensado en $T \neq 0$.

Para los valores de $T \neq 0$, llegábamos a que no existe un valor de $z < 1$ que permita que la ocupación de los estados excitados alcance un máximo finito.

Por lo que no hay un punto de “saturación” que obligue a que se forme el condenado.

Esto significa que la función N_{otros} crece sin límite, y por tanto siempre puede adaptarse para representar el total N, sin requerir que N_0 sea distinto de cero.

No hay condensación.

Creo esto iba relacionado con el teorema de Mermin-Wargner, que establece que no puede haber ruptura espontánea de simetría continua (como la condensación de Bose) en sistemas 2D a T≠0.

Esto salía de que llegaba a que:

$$\frac{1}{1-z} = e^{(1-c)N/\lambda}$$

Esto implica que $\frac{1}{1-z}$ crece exponencialmente con N y, por lo tanto, $N_0 \approx \frac{1}{1-z}$ crecería más rápido que N, lo cual es físicamente imposible para un sistema con un número finito de partículas.

Solo en $T = 0$ todas las partículas ocupan el estado fundamental, pero esto no es un condensado en el sentido termodinámico (no hay transición de fase).