Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 2 – 3.2.3

Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez
sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

3.2.3 Rapidez de un gas: Obtén la distribución de las rapideces (normas de las velocidades) en el ensamble canónico. Haz el cálculo completo, es decir, primero obtén la distribución gaussiana sobre las componentes de la velocidad y después usa eso para demostrar que la distribución de las rapideces sigue la distribución de Maxwell-Boltzmann.

El primero en entregar en PDF/LaTeX la solución de este problema, se libra de 1 ejercicio en el examen.

Sol.

Consideremos un gas ideal clásico compuesto por N partículas idénticas de masa m en equilibrio térmico a temperatura T. El sistema está descrito por el ensamble canónico, donde la probabilidad de un microestado viene dada por el factor de Boltzmann.

Para una partícula individual, la energía cinética en términos de las componentes de velocidad (v_x, v_y, v_z) es:

$$H = \frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

Por otro lado, como se comentó, en el ensamble canónico, la distribución de probabilidad para la velocidad está dada por el factor de Boltzmann: $P(v_x, v_y, v_z) \propto e^{-\beta H} = e^{-\beta \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$.

Siendo $\beta = \frac{1}{k_B T}$, con k_B la constante de Boltzmann. Las componentes (v_x, v_y, v_z) son variables aleatorias independientes y tenemos una distribución gaussiana por lo que la media es 0 ($\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$) y varianza $\sigma^2 = \frac{k_B T}{m}$. Tenemos las siguientes distribuciones de probabilidad para cada componente $v_i (i = x, y, z)$:

$$P(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{m v_i^2}{2 k_B T}}$$

Como las componentes son independientes, la distribución conjunta es el producto de las tres:

$$P(v_x, v_y, v_z) = P(v_x) P(v_y) P(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2 k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2 k_B T} v^2}$$

Esta función solo depende de v^2 y no de la dirección $\left(v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)$. Para obtener la distribución de la rapidez, pasamos a coordenadas esféricas:

$$v_x = v \sin\theta \cos\phi\,, \qquad v_y = v \sin\theta \cos\phi\,, \qquad v_z = v \cos\theta$$

Así recordamos que el volumen en coordenadas esféricas es: $dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin\theta \, dv d\theta d\phi$.

Entonces la probabilidad de que la rapidez esté entre v y $v + dv$ es:

$$\begin{aligned} P(v)dv &= \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} P(\bar{v})\, v^2 \sin\theta \, dv d\theta d\phi \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_{BT}}v^2} v^2 dv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_{BT}}v^2} v^2 dv (2\pi)(2) \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_{BT}}} dv \end{aligned}$$

Por ende,

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_{BT}}}$$

La cual es la distribución de Maxwell-Boltzmann de las rapideces de un gas en equilibrio térmico a temperatura T.