



Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 2 - 3.1.1
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano
Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez
sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx



3.1.1 Entropía de Shannon. Vimos que esta entropía mide cuán rápido se pierde la información. Supón que tienes una variable aleatoria X con n valores posibles y con una probabilidad de masa $PX(x)$. La entropía de Shannon se define como sigue:

$$S(X) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_b(P(x_i))$$

a) Calcula la entropía de Shannon para un tiro de Bernoulli (volado) con probabilidad p de ganar.

La entropía es:

$$S(X) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_b(P(x_i)) = -p \log(p) - (1-p) \log(1-p)$$

b) ¿Para qué valores de p la entropía es máxima?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} S(p) &= \frac{d}{dp} [-p \log(p) - (1-p) \log(1-p)] \\ &= -\frac{d}{dp} [p \log(p)] - \frac{d}{dp} [\log(1-p)] + \frac{d}{dp} p \log(1-p) \\ &= -\left[\log(p) + p \frac{1}{p}\right] - \left[-\frac{1}{1-p}\right] + \left[\log(1-p) + p \frac{1}{1-p}(-1)\right] \\ &= -\log(p) - 1 + \frac{1}{1-p} + \log(1-p) - \frac{p}{1-p} \\ &= \log(1-p) - \log(p) \\ &= \log\left(\frac{1-p}{p}\right) \end{aligned}$$

Busquemos el máximo,

$$\log\left(\frac{1-p}{p}\right) = 0 \Rightarrow e^{\log\left(\frac{1-p}{p}\right)} = e^0 \Rightarrow \frac{1-p}{p} = 1 \Rightarrow 1-p = p \Rightarrow 1 = 2p \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

Obtenemos lo que se esperaba, la entropía es máxima cuando las probabilidades son equiprobables.

c) ¿Para qué valores de p la entropía es mínima? ¿Corresponde con lo que esperarías si la entropía mide la pérdida de información? ¡Argumenta!

Sabemos que la entropía será mínima cuando se tenga un 0 de incertidumbre, lo que sucede cuando $p = 0, 1$. Comprobemos:

$$p = 0 \Rightarrow S(X) = -0 \log(0) - (1 - 0) \log(1 - 0) = 0 - \log(1) = 0$$

$$p = 1 \Rightarrow S(X) = -1 \log(1) - (1 - 1) \log(1 - 1) = -1(0) - (0) \log(0) = 0$$

Pues justamente sería lo esperado, se perdería información cuando tenemos duda en la probabilidad, en este caso no hay ninguna duda.

d) **Calcula la entropía de Shannon para n tiros.**

El número total de éxitos en N tiros sigue una distribución binomial:

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n}$$

La entropía es:

$$S(X) = - \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n} \log_b \left(\binom{N}{n} p^n (1 - p)^{N-n} \right)$$