Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Mecánica Analítica

Tarea 4

Profesores:
Dra. Rosa María Méndez Vargas

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

1.- (5.1) **a)** Demostrar que una fuerza que se puede expresar por el gradiente negativo de la función escalar $U(x,y,z)$, $\vec{F} = -\nabla U(x,y,z)$, de fuerzas generalizadas expresadas por

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

y que las ecuaciones del movimiento generalizadas son, por tanto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

b) Demostrar que para tales fuerzas $dW = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = -\Delta U$ y, en consecuencia, $dT = d[(m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = -dU$, o sea, $T + U = cte.$

a)

Considere la función escalar $U(x, y, z)$, donde la fuerza asociada la expresaremos tal que

$$\bar{F} = -\nabla U(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Donde Q_i en términos para q_i que son las coordenadas generalizadas. En el caso de coordenadas cartesianas, q_i son z, y, z por lo que Q_i se puede escribir como:

$$Q_i = \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Por lo tanto, las fuerzas generalizadas expresadas tal que, $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$

Por otra parte, las ecuaciones de movimiento generalizadas son los productos de las ecuaciones de Newton, demostramos en temas anteriores que:

$$a_i = \bar{a} \cdot \bar{b}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Tal que para Q_i: $Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$

Donde $T = \frac{1}{2}mv^2$, implicando que: $Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$

La cual como se indico es la ecuación de movimiento generalizada. Finalmente igualando las expresiones de Q_i obtenemos el desarrollo de la ecuación de movimiento generalizada:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

■

b)

Ahora, consideremos el trabajo realizado por la fuerza generalizada a lo largo de un desplazamiento $d\bar{s}$: $dW = \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Donde: $d\bar{s} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_i} dq_i$.

De este modo, $dW = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial z}{\partial q_i} dq_i\right) = \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i = -dU$

Por lo tanto, $dW = -\Delta U$. Ahora probemos que $dT = d\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = -dU$. Partamos te la expresión dada para la energía cinética: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Procedamos con las ecuaciones del movimiento generalizadas (inciso a)), tenemos: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$. Sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right)}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_i{}^2\right)\right)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_i{}^2\right)\right)}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt}(m\dot{q}_i) - 0 \\ &= m\ddot{q}_i \end{aligned}$$

De este modo podemos integrar dicha igualdad, pero antes multipliquemos por $\dot{q}_i$, pues no simplificara algunos cálculos:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_i &= -\frac{\partial U}{\partial q_i} \\ m\dot{q}_i\ddot{q}_i &= -\frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i \\ \int m\dot{q}_i\ddot{q}_i\,dt &= \int -\frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i\,dt \\ m\int d\left(\frac{1}{2}\dot{q}_i^2\right) &= -\int dU \\ \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2 &= -U + C \\ \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) &= -U + C \\ T &= -U + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T + U = C$ con $C = cte$ ■

2.- (5.2) Utilizar el siguiente resultado

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_1}, \qquad Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{1}$$

para hallar las ecuaciones de Lagrange de una partícula cuya energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b\dot{q}_2^2, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

y cuya energía potencial escalar es

$$U = \frac{1}{2}k_1(q_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Hint: Considerar que $q_i = q_i(t), \ \forall i$.

Tenemos la expresión $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$, con, $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$.

Calculemos las derivadas las derivadas temporales de $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, las parciales de T y la energía potencial U:

1. Para T

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a\dot{q}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = a\ddot{q}_1$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = b\dot{q}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = b\ddot{q}_2$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

2. Para U:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = k_1(q_1 + q_2) + k_2(q_1 - q_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = k_1(q_1 + q_2) - k_2(q_1 - q_2)$$

Sustituyendo estas expresiones, obtenemos:

$$a\ddot{q}_1 + k_1(q_1 + q_2) + k_2(q_1 - q_2) = 0$$

$$b\ddot{q}_2 + k_1(q_1 + q_2) - k_2(q_1 - q_2) = 0$$

3.- (5.5) El punto de soporte de un péndulo simple se mueve en una circunferencia vertical de radio R con una velocidad constante v, como se indica en la figura. Hallar la ecuación de movimiento de Lagrange para el péndulo si $U = mgR\sin\phi - mgl\cos\theta$.

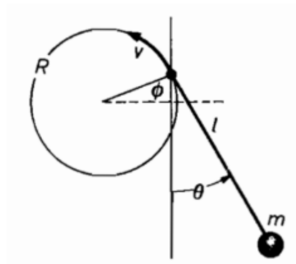


FIG. 5-9

El Hauser considera $\phi = \left(\frac{v}{a}\right)t$, la cual es la velocidad angular cambiando $a = R$.

Expresemos la función de posición: $\bar{x} = (R\cos\phi + l\sin\theta)\hat{\imath} + (R\sin\phi - l\cos\theta)\hat{\jmath}$

Lo que se hizo fue sumar las funciones de posición de cada movimiento, el del péndulo y el de la circunferencia. Derivemos para hallar la velocidad,

$$\bar{v} = \left(-\left(\frac{v}{R}\right)R\sin\phi + \dot{\theta}l\cos\theta\right)\hat{\imath} + \left(\left(\frac{v}{R}\right)R\cos\phi + \dot{\theta}l\sin\theta\right)\hat{\jmath}$$

$$= \left(-v\sin\phi + \dot{\theta}l\cos\theta\right)\hat{\imath} + \left(v\cos\phi + \dot{\theta}l\sin\theta\right)\hat{\jmath}$$

Calculemos $v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(-v\sin\phi + \dot{\theta}l\cos\theta\right)^2 + \left(v\cos\phi + \dot{\theta}l\sin\theta\right)^2 \\ &= v^2\sin^2\phi - 2v\sin\phi\,\dot{\theta}l\cos\theta + \dot{\theta}^2l^2\cos^2\theta + v^2\cos^2\phi + 2v\cos\phi\,\dot{\theta}l\sin\theta + \dot{\theta}^2l^2\sin^2\theta \\ &= v^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \dot{\theta}^2l^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2v\dot{\theta}l(\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta) \\ &= v^2 + \dot{\theta}^2l^2 + 2v\dot{\theta}l\sin(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Calculemos la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v^2 + \dot{\theta}^2l^2 + 2v\dot{\theta}l\sin(\theta - \phi)\right)$$

Calculemos la energía potencial

$$V = mgy = mg(R\sin\phi - l\cos\theta) = mgR\sin\phi - mgl\cos\theta$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(v^2 + \dot{\theta}^2l^2 + 2v\dot{\theta}l\sin(\theta - \phi)\right) - mgR\sin\phi + mgl\cos\theta$$

Antes de continuar consideremos que $v = R\dot{\phi}$, como es que se definió inicialmente.

Coloquemos todo términos de θ y ϕ y recordemos que $\ddot{\phi} = 0$, será de utilidad.

$$L = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2l^2 + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}l\sin(\theta - \phi)\right) - mgR\sin\phi + mgl\cos\theta$$

La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Pues se trata de una fuerza conservativa, homogénea.

Para ϕ es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}\left(\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}l\sin(\theta-\phi)\right) - mgR\sin\phi + mgl\cos\theta\right)\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}l\sin(\theta-\phi)\right) - mgR\sin\phi + mgl\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\left(2R^2\dot{\phi} + 2R\dot{\theta}l\sin(\theta-\phi)\right) - \left(-\frac{1}{2}m2R\dot{\phi}\dot{\theta}l\cos(\theta-\phi) - mgR\cos\phi\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi} + R\dot{\theta}l\sin(\theta-\phi)\right) + R\dot{\phi}\dot{\theta}l\cos(\theta-\phi) + gR\cos\phi = 0$$

$$R^2\ddot{\phi} + R\ddot{\theta}l\sin(\theta-\phi) + R\dot{\theta}l\cos(\theta-\phi)\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right) + R\dot{\phi}\dot{\theta}l\cos(\theta-\phi) + gR\cos\phi = 0$$

$$\ddot{\theta}l\sin(\theta-\phi) + \dot{\theta}^2 l\cos(\theta-\phi) + g\cos\phi = 0$$

Para θ es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}l\sin(\theta-\phi)\right) - mgR\sin\phi + mgl\cos\theta\right)\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}l\sin(\theta-\phi)\right) - mgR\sin\phi + mgl\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(2\dot{\theta}l^2 + 2R\dot{\phi}l\sin(\theta-\phi)\right)\right) - \frac{1}{2}m\left(2R\dot{\phi}\dot{\theta}l\cos(\theta-\phi)\right) - mgl\sin\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\theta}l^2 + mR\dot{\phi}l\sin(\theta-\phi)\right) - R\dot{\phi}m\dot{\theta}l\cos(\theta-\phi) - mgl\sin\theta = 0$$

$$m\ddot{\theta}l^2 + mR\dot{\phi}l\cos(\theta-\phi)\left(\dot{\theta}-\dot{\phi}\right) - R\dot{\phi}m\dot{\theta}l\cos(\theta-\phi) - mgl\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta}l - \dot{\phi}^2 R\cos(\theta-\phi) - g\sin\theta = 0$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula son:

$$\ddot{\theta}l\sin(\theta-\phi) + \dot{\theta}^2 l\cos(\theta-\phi) + g\cos\phi = 0$$

$$\ddot{\theta}l - \dot{\phi}^2 R\cos(\theta-\phi) - g\sin\theta = 0$$

4.- (5.9) Una partícula de masa m se desliza, bajo la acción de la gravedad, en la superficie interior lisa del cono invertido de la figura, cuya ecuación es

$$\rho = z \tan \alpha. \tag{4}$$

a) Establecer las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula.

b) Demostrar que son posibles órbitas circulares, y hallar la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo.

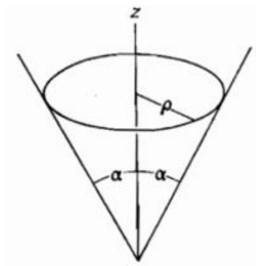
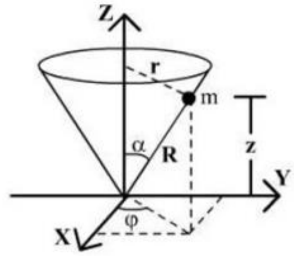


Fig. 5-11



a)

El segundo diagrama fue colocado para ayudar más en la idea. Describamos el movimiento de la partícula haciendo uso de coordenadas generalizadas, $q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi$:

$$x = \rho \cos \varphi\,, \qquad y = \rho \sin \varphi\,, \qquad z = \rho \cot \alpha$$

Obtengamos la velocidad derivando:

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho\dot{\varphi} \sin \varphi\,, \qquad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho\dot{\varphi} \cos \varphi\,, \qquad \dot{z} = \dot{\rho} \cot \alpha$$

Expresemos la energía cinética:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m v^2 \\
&= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{1}{2} m((\dot{\rho} \cos \varphi - \rho\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{\rho} \cot \alpha)^2) \\
&= \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 \cos^2 \varphi - 2\dot{\rho} \cos \varphi\, \rho\dot{\varphi} \sin \varphi + \rho^2\dot{\varphi} \sin^2 \varphi + \dot{\rho}^2 \sin^2 \varphi + 2\dot{\rho} \cos \varphi\, \rho\dot{\varphi} \sin \varphi \\
&\qquad + \dot{\rho}^2\dot{\varphi} \sin^2 \varphi + \rho^2\dot{\varphi} \cos^2 \varphi + \cot^2 \alpha) \\
&= \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + (\rho^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) + \dot{\rho}^2 \cot^2 \alpha) \\
&= \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2(1 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \cot^2 \alpha) + \rho^2\dot{\varphi}^2) \\
&= \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 \csc^2 \alpha + \rho^2\dot{\varphi}^2)
\end{aligned}$$

Expresemos la energía potencial: $U = mgz = mg\rho \cot \alpha$

Así el Lagrangiano queda como:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 \csc^2 \alpha + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\rho \cot \alpha$$

La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Pues se trata de una fuerza conservativa, homogénea.

Para φ es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\rho\cot\alpha\right)\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\rho\cot\alpha\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m2\rho^2\dot{\varphi}\right) - 0 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + m\rho^2\ddot{\varphi} = 0$$

$$2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0$$

Para ρ es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\rho}_i}\left(\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\rho\cot\alpha\right)\right) - \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 \csc^2\alpha + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\rho\cot\alpha\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m2\dot{\rho}\csc^2\alpha\right) - \left(\frac{1}{2}2m\rho\dot{\varphi}^2 - mg\cot\alpha\right) = 0$$

$$m\ddot{\rho}\csc^2\alpha - m\rho\dot{\varphi}^2 + mg\cot\alpha = 0$$

$$\ddot{\rho}\csc^2\alpha - \rho\dot{\varphi}^2 + g\cot\alpha = 0$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula son:

$$2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\rho}\csc^2\alpha - \rho\dot{\varphi}^2 + g\cot\alpha = 0$$

b)

En términos de ρ y φ, la ecuación de una órbita circular es simplemente $\rho = \rho_0$, lo que indica que la distancia radial desde el origen es constante en todo momento. Esto implica que la partícula se mueve en un círculo perfecto con radio ρ_0. La coordenada φ representa el ángulo azimutal o angular, que aumenta linealmente con el tiempo a una tasa constante $\varphi = w_0 t$. Esto significa que la partícula completa una revolución completa alrededor del origen en un tiempo $2\pi/w_0$.

De este modo propongamos las soluciones para una órbita circular de la forma: $\rho = \rho_0,\ \varphi = w_0 t$

Veamos que sucede para que se satisfagan ambas ecuaciones de Lagrange.

Vamos con la primera ecuación de movimiento:

$$2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0$$

Sustituyamos $\rho = \rho_0,\ \varphi = w_0 t$:

$$2\rho_0\dot{\rho_0}\dot{w_0 t} + {\rho_0}^2\ddot{w_0 t} = 2\rho_0(0)w_0 + {\rho_0}^2(0) = 0 + 0 = 0$$

Vamos con la segunda ecuación de movimiento:

$$\ddot{\rho}\csc^2\alpha - \rho\dot{\varphi}^2 + g\cot\alpha = 0$$

Sustituyamos $\rho = \rho_0,\ \varphi = w_0 t$:

$$\ddot{\rho_0}\csc^2\alpha - \rho_0\dot{w_0 t}^2 + g\cot\alpha = (0)\csc^2\alpha - \rho_0 w_0^2 + g\cot\alpha = -\rho_0 w_0^2 + g\cot\alpha = 0$$

De modo que se debe cumplir la restricción:

$$w_0^2 = \frac{g\cot\alpha}{\rho_0}$$

Para encontrar la velocidad de la partícula en una órbita circular, utilizamos la relación para la velocidad en coordenadas polares: $\bar{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$

Sin embargo, en una órbita circular, la velocidad radial $\dot{\rho}$ es cero porque la distancia radial ρ_0 es constante. Entonces, la velocidad de la partícula se reduce a: $\bar{v} = \rho\dot{\phi}\hat{\phi}$

Sustituyendo: $\bar{v} = \rho_0\dot{w_0 t}\hat{\phi} = \rho_0 w_0\hat{\phi}$

Entonces, la magnitud de la velocidad de la partícula en una órbita circular es $(v = \rho_0 w_0)$, y su dirección es tangencial a la órbita, es decir, en la dirección del movimiento angular.

Por lo tanto, la velocidad de la partícula en esta orbita es: $v^2 = \rho_0^2 w_0^2$

$$v = \sqrt{\rho_0^2\left(\frac{g\cot\alpha}{\rho_0}\right)} = \sqrt{\rho_0 g\cot\alpha}$$

De este modo concluyendo que la velocidad de la partícula en una órbita de este tipo es:

$$v = \sqrt{gz}$$

Otra forma que se me ocurre a la que podemos llegar a esa misma solución es pensar con que velocidad para la componente z es anulada con el peso de la partícula, es decir buscar la fuerza normal y también la fuerza en dirección radial.

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{Nz} - W = 0 \Rightarrow F_N = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

$$\sum F_\rho = -ma \Rightarrow -F_{N\rho} = -ma \Rightarrow F_N = \frac{ma}{\cos\alpha}, \qquad a = \frac{v^2}{\rho}$$

De modo que se satisface

$$\frac{mg}{\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{mv^2}{z\tan\alpha} \Rightarrow g = \frac{v^2}{z} \Rightarrow v = \sqrt{gz}$$

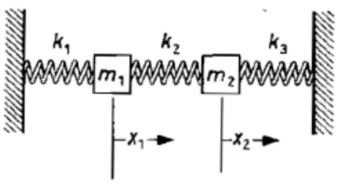
5.- (5.10) Considerando el sistema de partículas mostrado en la figura: **a)** Escribir las ecuaciones de movimiento de newton para cada una de las partículas, en función de las variables de desplazamiento, a partir del equilibrio, x_1 y x_2. **b)** Demostrar que para cualesquiera desplazamientos arbitrarios de las dos partíuculas, la energía potencial acumulada en los resortes está dada por

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2. \tag{5}$$

c) Empleando la expresión

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2, \tag{6}$$

para la energía cinética, demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para las variables x_1 y x_2, a partir de esta T y U de la parte *b*), concuerdan con las ecuaciones de Newton halladas en la parte *a*). ¿Cuáles supone usted que son las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas?



Hint: Un error que se suele cometer en este ejercicio es sumar tres energías potenciales argumentando que son debido a los tres resortes, pero ésto es un error debido a que el sistema únicamente posee dos masas. Cada maasa experimenta fuerzas resultantes debido a los resortes. Si empleamos que la fuerza es conservativa, entonces podemos usar que ésta puede ser derivada de un potencial escalar. Al calcular las DOS fuerzas podemos sumarlas e integrar para obtener la ecuación (5). Veremos este problema a detalle en la ayudantía.

Figura 1: Diagrama del problema

Empecemos mencionando algunas condiciones físicas del problema, esta es que las masas no se ven afectadas por la gravedad, por fricción del medio y que solo se mueven en una dimensión. Además, tendremos 2 ecuaciones de movimiento. Necesitamos recordar la ley de Hooke:

$$\bar{F} = -k\Delta\bar{x}$$

Destinemos $\bar{F}_{m_1k_i}$ para describir la fuerza en la masa m_1 respecto al resorte de k_1 y k_2,

$$\bar{F}_{m_1k_1} = -k_1x_1\hat{\imath}, \qquad \bar{F}_{m_1k_2} = k_2(x_2 - x_1)\hat{\imath}$$

De modo que la suma de fuerzas queda como:

$$\sum \bar{F}_{m_1} = \bar{F}_{m_1k_1} + \bar{F}_{m_1k_2} = (k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1)\hat{\imath}$$

Con la otra masa se tiene $\bar{F}_{m_2k_i}$ para describir la fuerza en la masa m_2 respecto al resorte de k_2 y k_3,

$$\bar{F}_{m_2k_2} = -k_2(x_2 - x_1)\hat{\imath}, \qquad \bar{F}_{m_2k_3} = k_3x_2\hat{\imath}$$

De modo que la suma de fuerzas queda como:

$$\sum \bar{F}_{m_2} = \bar{F}_{m_2k_2} + \bar{F}_{m_2k_3} = (-k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2)\hat{\imath}$$

Por lo tanto, a)

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)\,\hat{\imath}, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1)\,\hat{\imath}$$

Acá tenemos 2 formas de proceder, la primera que es usando una expresión para calcular la energía potencial elástica y la segunda es más extensa que consistiría en usar la relación $\bar{F}_i = -\frac{d}{dx_i}U$, de modo que $U = -\int \bar{F} \cdot d\bar{s}$, como lo menciona en el Hint. Sin embargo, nunca se especificó que método usar y cual era necesario seguir para la realización de este problema. Así que se optó por desarrollar la primera idea.

Veamos y desarrollemos la primera idea, para calcular la energía potencial elástica donde Δx_i es el cambio en la longitud de cada resorte o elemento elástico con constante k_i, se usa la fórmula:

$$U = \sum \frac{1}{2} k_i (\Delta x_i)^2$$

Analicemos las deformaciones de los resortes a partir de la ley de Hooke:

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k_1}, \qquad \Delta x_2 = \frac{F_2}{k_2}, \qquad \Delta x_3 = \frac{F_3}{k_3}$$

De modo que las U_i queda como:

$$U_1 = \frac{1}{2} k_1 \frac{(-k_1 x_1)^2}{k_1^2} = \frac{1}{2} k_1 \frac{k_1^2 x_1^2}{k_1^2} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2$$
$$U_2 = \frac{1}{2} k_2 \frac{\left(\pm k_2 (x_2 - x_1)\right)^2}{k_2^2} = \frac{1}{2} k_2 \frac{k_2^2 (x_2 - x_1)^2}{k_2^2} = \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$
$$U_3 = \frac{1}{2} k_3 \frac{(-k_3 x_2)^2}{k_3^2} = \frac{1}{2} k_3 \frac{k_3^2 x_2^2}{k_3^2} = \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

De este modo b):

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

La energía cinética se calcula del siguiente modo:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2)$$

Ya que contamos con ambas energías podemos calcular el Lagrangiano: $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 x_2^2)$$

La ecuación de movimiento de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Pues se trata de una fuerza conservativa, homogénea.

c)

Para x_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x_1}}\left(\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \left(\frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3x_2^2)\right)\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \left(\frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3x_2^2)\right)\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(2m_1\dot{x}_1) + \frac{1}{2}\big(2k_1x_1 + 2k_2(x_2 - x_1)(-1)\big) = 0$$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Queda igual como se planteó en a): $m\ddot{x_1} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$

Para x_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x_2}}\left(\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \left(\frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3x_2^2)\right)\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \left(\frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3x_2^2)\right)\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(2m_2\dot{x}_2) + \frac{1}{2}(2k_2(x_2 - x_1) + 2k_3x_2) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 = 0$$

Queda igual como se planteó en a): $m\ddot{x_2} = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1)$

Respecto a la formulación de las ecuaciones de Lagrange para un sistema de n partículas, es la misma fórmula utilizada en este ejercicio,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Esta describe ecuación describe el movimiento de un sistema de n partículas en R^k y necesitaremos $n \cdot k$ coordenadas generalizadas.

Donde la energía cinética y potencial son, respectivamente:

$$T = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\,, \qquad U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Claro, todo esto en el caso de un sistema conservativo, como lo es este ejercicio.

6.- (5.11) **a)** Hállese la energía cinética total del péndulo doble representado en la figura. **b)** Utilizando la energía cinéetica encontrada en la parte a) y la energía potenciial

$$U = -m_1 l_1 g \cos\theta - m_2 g(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2), \tag{7}$$

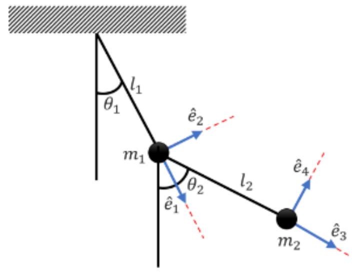
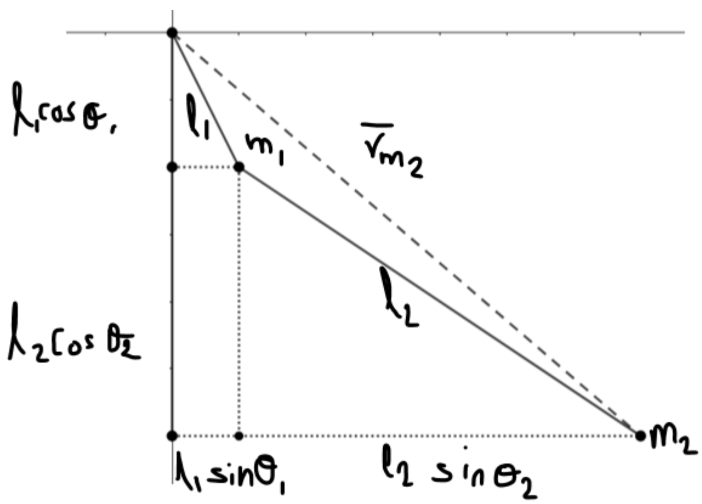


Figura 2: Diagrama del péndulo doble para el problema 6

demostrar que las ecuaciones de Lagrange así obtenidas para θ_1 y θ_2 concuerdan con las componentes de las ecuaciones de Newton sobre $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_4$. Tómese las componentes de las ecuaciones de Newton a lo largo de $\hat{e}_2$ para ambas partículas.

Nota: Este problema lo veremos muy a detalle en la ayudantía. Para avanzar en la argumentación les recomiendo leer la sección 4.2 del segundo libro de Fermín, página 250, *Marcos de Referencia Acelerados.*

Consideremos que este sistema compuesto de 2 masas invariantes por el tiempo, no se ve afectado por la fricción y no afectan las masas de las cuerdas. Utilicemos el siguiente diagrama para analizar la función de posición:



De acá podemos plantear las funciones de posición para cada una de las masas. La primera masa no tiene más problema, pues ya la hemos trabajado y planteado tanto en esta tarea como en anteriores.

$$\bar{r}_{m1} = l_1 \sin\theta_1 \,\hat{\imath} - l_1 \cos\theta_1 \,\hat{\jmath}$$

Y utilizando el diagrama podemos analizar que la función para la segunda masa corresponde a:

$$\bar{r}_{m2} = (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2)\hat{\imath} - (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)\hat{\jmath}$$

Derivemos para hallar las velocidades:

$$\bar{v}_{m1} = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1\,\hat{\imath} + l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1\,\hat{\jmath}$$
$$\bar{v}_{m2} = \left(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)\hat{\imath} + \left(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)\hat{\jmath}$$

Calculemos la energía cinética del sistema. $T = T_1 + T_2$.

Para m_1:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1 v_{m1}^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1\left[\left(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\right)^2 + \left(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\,\hat{\jmath}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2[\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1] \\
&= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2
\end{aligned}$$

Para m_2:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m_2 v_{m2}^2 \\
&= \frac{1}{2}m_2\left[\left(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)^2 + \left(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}m_2\big[l_1^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + 2l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\, l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 \\
&\qquad + 2l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\, l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2\big] \\
&= \frac{1}{2}m_2\big[l_1^2\dot{\theta}_1^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + l_2^2\dot{\theta}_2^2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2) \\
&\qquad + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)\big] \\
&= \frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética queda como:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$T = \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2\left(l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right)\right]$$

Ahora calculemos la energía potencial del sistema. $U = U_1 + U_2$

Para m_1: $U_1 = m_1 g y_1 = -m_1 g l_1\cos\theta_1$

Para m_2: $U_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$

Por lo tanto, la energía potencial queda como:

$$U = -m_1 g l_1\cos\theta_1 - m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$
$$U = -(m_1 + m_2)g l_1\cos\theta_1 - m_2 g l_2\cos\theta_2$$

La ecuación de movimiento de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

Pues se trata de una fuerza conservativa, homogénea.

$$L=T-U=\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2\left(l_2^2\dot{\theta}_2^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\right]+(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2$$

Calculemos para θ_1:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_1}\left(\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2\left(l_2^2\dot{\theta}_2^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\right]+(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2\left(l_2^2\dot{\theta}_2^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\right] + (m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1+m_2gl_2\cos\theta_2\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(2(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1+2m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right) - \left(-\frac{1}{2}2m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)-(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1\right)=0$$

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_2\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\sin(\theta_1-\theta_2)\right] + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)+(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1=0$$

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right]+(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1=0$$

Calculemos para θ_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_2}\left(\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2\left(l_2^2\dot{\theta}_2^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\right]+(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2\left(l_2^2\dot{\theta}_2^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\right] + (m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1+m_2gl_2\cos\theta_2\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(2m_2l_2^2\dot{\theta}_2+2m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right)-\frac{1}{2}\left(2m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)\right)+m_2gl_2\sin\theta_2=0$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2\right)\sin(\theta_1-\theta_2)\right]-m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2gl_2\sin\theta_2=0$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right]+m_2gl_2\sin\theta_2=0$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de Lagrange se expresan como:

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right]+(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1=0$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right]+m_2gl_2\sin\theta_2=0$$

Ahora busquemos las equivalencias de las ecuaciones de movimiento, pero con newton.

Calculemos la aceleración para obtener la fuerza que no será de utilidad más adelante para comparar las ecuaciones de movimiento.

$$\begin{aligned}\bar{a}_{m1\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}}&=l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)\hat{\imath}+l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right)\hat{\jmath}\\ \bar{a}_{m2\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}}&=\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\cos\theta_2-\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2\right)\right]\hat{\imath}\\ &\quad+\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\sin\theta_2+\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Donde sabemos que se cumple la relación para nuestro problema:

$$\sum\bar{F}_{m\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}}\equiv\sum\bar{F}_{m\{\hat{e}_a,\hat{e}_b\}}$$

Empecemos analizando a la masa m_2 utilizando el diagrama y las leyes de Newton.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\imath}&=\sin\theta_2\,\hat{e}_3+\cos\theta_2\,\hat{e}_4\\ \hat{\jmath}&=-\cos\theta_2\,\hat{e}_3+\sin\theta_2\,\hat{e}_4\end{aligned}$$

De modo que analizando las fuerzas el sistema $\{\hat{e}_3,\hat{e}_4\}$ se tiene que:

$$\sum\bar{F}_{m2\{\hat{e}_3,\hat{e}_4\}}=-T_2\hat{e}_3+mg\cos\theta_2\,\hat{e}_3-mg\sin\theta_2\,\hat{e}_4$$

Así,

$$\begin{aligned}\bar{a}_{m2\{\hat{e}_3,\hat{e}_4\}}&=\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\cos\theta_2-\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2\right)\right](\sin\theta_2\,\hat{e}_3+\cos\theta_2\,\hat{e}_4)\\ &\quad+\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\sin\theta_2+\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right](-\cos\theta_2\,\hat{e}_3+\sin\theta_2\,\hat{e}_4)\\ &=\Big(\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\cos\theta_2-\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2\right)\right]\sin\theta_2\\ &\quad-\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\sin\theta_2+\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right]\cos\theta_2\Big)\hat{e}_3\\ &\quad+\Big(\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\cos\theta_2-\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2\right)\right]\cos\theta_2\\ &\quad-\left[l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right)+l_2\left(\ddot{\theta}_2\sin\theta_2+\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2\right)\right]\sin\theta_2\Big)\hat{e}_4\\ &=\left(l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1)-l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1)-l_2\dot{\theta}_2^2\right)\hat{e}_3\\ &\quad+\left(l_1\ddot{\theta}\cos(\theta_2-\theta_1)+l_1\,\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1)+l_2\ddot{\theta}_2\right)\hat{e}_4\end{aligned}$$

De este modo se cumplen las ecuaciones:

De $\hat{e}_3$:

$$-T_2+m_2g\cos\theta_2=m_2l_1\ddot{\theta}_1\sin(\theta_2-\theta_1)-m_2l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1)-m_2l_2\dot{\theta}_2^2$$

De $\hat{e}_4$:

$$-m_2g\sin\theta_2=m_2l_1\ddot{\theta}\cos(\theta_2-\theta_1)+m_2l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1)+m_2l_2\ddot{\theta}_2$$

En esta última haremos el hincapié, pues:

$$l_1\ddot{\theta}\cos(\theta_2-\theta_1)+l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1)+l_2\ddot{\theta}_2+g\sin\theta_2=0$$

Tal como habíamos encontrado con Lagrange.

$$\begin{aligned}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right]+m_2gl_2\sin\theta_2&=0\\ l_2\ddot{\theta}_2+l_1\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right]+g\sin\theta_2&=0\\ l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)+l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2-\theta_1)+l_2\ddot{\theta}_2+g\sin\theta_2&=0\end{aligned}$$

Las cuales son las mismas.

Ahora analicemos a la masa m_1 utilizando el diagrama, tomando en cuenta las componentes de la masa m_2 y las leyes de Newton.

Tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\imath}&=\sin\theta_1\,\hat{e}_1+\cos\theta_1\,\hat{e}_2\\ \hat{\jmath}&=-\cos\theta_1\,\hat{e}_1+\sin\theta_1\,\hat{e}_2\end{aligned}$$

De modo que analizando las fuerzas el sistema $\{\hat{e}_3,\hat{e}_4\}$ se tiene que:

$$\sum\bar{F}_{m\{\hat{e}_3,\hat{e}_4\}}=T_2\cos(\theta_2-\theta_1)\,\hat{e}_1-T_1\hat{e}_1+m_2g\cos\theta_1\,\hat{e}_1+T_2\sin(\theta_2-\theta_1)\,\hat{e}_2-m_1g\sin\theta_1\,\hat{e}_2$$

Así,

$$\begin{aligned}\bar{a}_{m1\{\hat{e}_1,\hat{e}_2\}}&=l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)\hat{\imath}+l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right)\hat{\jmath}\\ &=l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\right)(\sin\theta_1\,\hat{e}_1+\cos\theta_1\,\hat{e}_2)\\ &\quad+l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\right)(-\cos\theta_1\,\hat{e}_1+\sin\theta_1\,\hat{e}_2)\\ &=l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1\sin\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\sin\theta_1\right)\hat{e}_1+l_1\left(\ddot{\theta}_1\cos\theta_1\cos\theta_1-\dot{\theta}_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1\right)\hat{e}_2\\ &\quad-l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1\cos\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\cos\theta_1\right)\hat{e}_1\\ &\quad+l_1\left(\ddot{\theta}_1\sin\theta_1\sin\theta_1+\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\sin\theta_1\right)\hat{e}_2\\ &=-l_1\dot{\theta}_1^2\hat{e}_1+l_1\ddot{\theta}_1\hat{e}_2\end{aligned}$$

De este modo se cumplen las ecuaciones:

De $\hat{e}_1$:

$$T_2\cos(\theta_2-\theta_1)-T_1+m_2g\cos\theta_1=-m_1l_1\dot{\theta}_1^2$$

De $\hat{e}_2$:

$$T_2\sin(\theta_2-\theta_1)-m_1g\sin\theta_1=m_1l_1\ddot{\theta}_1$$

Ahora hay que buscar donde y como sustituir ese valor de T_2, para ellos nótese que:

$$\hat{e}_3=\cos(\theta_2-\theta_1)\,\hat{e}_1+\sin(\theta_2-\theta_1)\,\hat{e}_2,\qquad \hat{e}_4=-\sin(\theta_2-\theta_1)\,\hat{e}_1+\cos(\theta_2-\theta_1)\,\hat{e}_2$$

Lo que nos implica que:

$$\sum\bar{F}_{m2\{\hat{e}_3,\hat{e}_4\}}=m_2\bar{a}_2=(m_2g\cos\theta_2-T_2)\hat{e}_3+(-m_2g\sin\theta_2)\hat{e}_4$$

$$= m_2\big[\big(-l_2\dot\theta_2^2 - l_1\dot\theta_1^2\cos(\theta_1-\theta_2) - l_1\ddot\theta_1\sin(\theta_1-\theta_2)\big)\hat e_3 \\ + \big(l_2\ddot\theta_2 - l_1\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + l_1\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)\big)\hat e_4\big]$$

De modo que se cumple la relación:

$$(m_2 g\cos\theta_2 - T_2)(\cos(\theta_2-\theta_1)\,\hat e_1 + \sin(\theta_2-\theta_1)\,\hat e_2) \\ + (-m_2 g\sin\theta_2)(-\sin(\theta_2-\theta_1)\hat e_1 + \cos(\theta_2-\theta_1)\hat e_2) \\ = m_2\big[\big(-l_2\dot\theta_2^2 - l_1\dot\theta_1^2\cos(\theta_1-\theta_2) - l_1\ddot\theta_1\sin(\theta_1-\theta_2)\big)(\cos(\theta_2-\theta_1)\,\hat e_1 \\ + \sin(\theta_2-\theta_1)\,\hat e_2) \\ + \big(l_2\ddot\theta_2 - l_1\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + l_1\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)\big)(-\sin(\theta_2-\theta_1)\,\hat e_1 \\ + \cos(\theta_2-\theta_1)\,\hat e_2)\big]$$

Simplificando y desarrollando

$$[m_2 g(\cos\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \sin\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - T_2\cos(\theta_2-\theta_1))]\hat e_1 \\ + [m_2 g(\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) + \sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) - T_2\sin(\theta_2-\theta_1))]\hat e_2 \\ = m_2\big[-l_1\dot\theta_1^2 - l_2\dot\theta_2^2\cos(\theta_2-\theta_1) - l_2\ddot\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)\big]\hat e_1 \\ + m_2\big[l_1\ddot\theta_1 + l_2\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) - l_2\dot\theta_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\big]\hat e_2$$

Luego,

$$m_2 g[\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - \sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)] - T_2\sin(\theta_2-\theta_1) \\ = m_2\big[l_1\ddot\theta_1 + l_2\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) - l_2\dot\theta_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\big]$$

Implicando que,

$$T_2\sin(\theta_2-\theta_1) = m_2 g(\cos\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1) - \sin\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)) \\ - m_2\big(l_1\ddot\theta_1 + l_2\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1)\big)$$

$$= m_2 g[\cos\theta_2\sin\theta_2\cos\theta_1 - \cos^2\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin^2\theta_2\sin\theta_1] - m_2 l_1\ddot\theta_1 \\ - m_2 l_2\big(\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \dot\theta_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\big)$$

$$= -m_2 g\sin\theta_1 - m_2 l_1\ddot\theta_1 - m_2 l_2\big(\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \dot\theta_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\big)$$

Finalmente:

$$\sum \bar F_{m1\{\hat e_2\}} = T_2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_1 g\sin\theta_1 = m_1 l_1\ddot\theta_1$$

$$-m_2 g\sin\theta_1 - m_2 l_1\ddot\theta_1 - m_2 l_2\big(\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \dot\theta_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\big) - m_1 g\sin\theta_1 = m_1 l_1\ddot\theta_1$$

Por lo tanto,

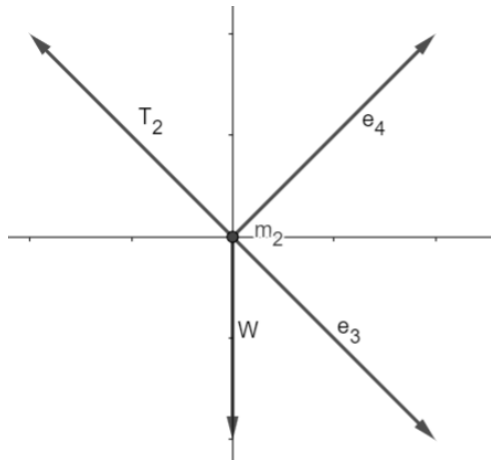
$$(m_1+m_2)l_1\ddot\theta_1 + m_2 l_2\big(\ddot\theta_2\cos(\theta_2-\theta_1) + \dot\theta_2^2\sin(\theta_2-\theta_1)\big) + (m_1+m_2)g\sin\theta_1 = 0$$

Tal como habíamos encontrado con Lagrange.

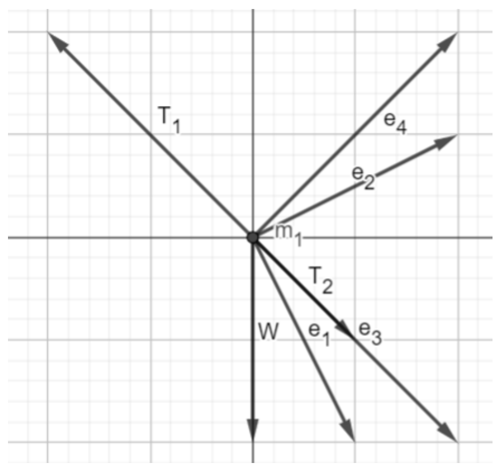
$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2\big[\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot\theta_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\big] + (m_1+m_2)g l_1\sin\theta_1 = 0$$

Las cuales son las mismas.

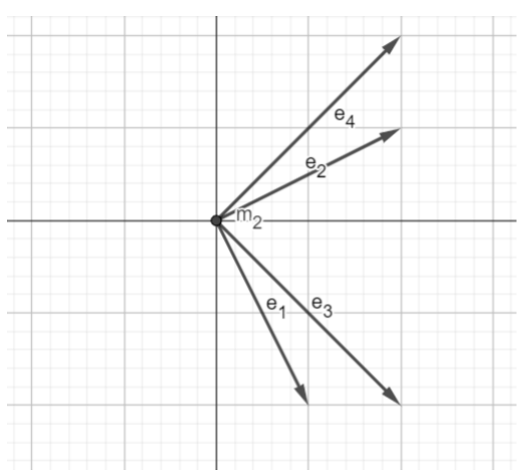
Diagramas de masas:



Masa 2 (A)



Masa 1



Masa 2 (B)

7.- (6.2) Encontrar las fuerzas conservativas para las que las siguientes son las funciones de energía potencial escalares:

$$U(r,\theta,\phi) = \frac{e^{-kr}}{r},$$
$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2\right).$$

i) Para $U(r,\theta,\phi) = \frac{e^{-kr}}{r}$

$$\bar{F} = -\nabla U(r,\theta,\phi) = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{\phi}\right)$$

Sustituyamos.

$$\begin{aligned}\bar{F} &= -\left(\frac{\partial\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)}{\partial \phi}\hat{\phi}\right)\\ &= -\left(\left(\frac{-ke^{-kr}r - e^{-kr}}{r^2}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}(0)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}(0)\hat{\phi}\right)\\ &= \left(\frac{ke^{-kr}}{r} + \frac{e^{-kr}}{r^2}\right)\hat{r}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{F} = \left(\frac{ke^{-kr}}{r} + \frac{e^{-kr}}{r^2}\right)\hat{r}$$

ii) Para $U(x,y,z) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)$

$$\bar{F} = -\nabla U(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right)$$

Sustituyamos.

$$\begin{aligned}\bar{F} &= -\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)\right)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)\right)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)\right)}{\partial z}\hat{k}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(2k_1x\hat{\imath} + 2k_2y\hat{\jmath} + 2k_3z\hat{k}\right)\\ &= -\left(k_1x\hat{\imath} + k_2y\hat{\jmath} + k_3z\hat{k}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{F} = -\left(k_1x\hat{\imath} + k_2y\hat{\jmath} + k_3z\hat{k}\right)$$

8.- (6.3) Calcular el trabajo realizado por la siguientes fuerza a lo largo de la trayectoria indicada.

$$\vec{F} = 4xz\hat{\imath} + 3z^2\hat{\jmath} + y^2\hat{k}, \text{ a lo largo de la recta } x = 2y = 4z$$

desde el origen hasta el punto (4,2,1).

En general, el trabajo realizado por una fuerza depende de la trayectoria a lo largo de la cual se evalúa, es fuerza se realiza a lo largo de 2 trayectorias diferentes que unen los 2 puntos $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Esto en las rectas de la forma $x = y = z$

$$W_{\bar{a}\bar{b}} = \int \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

Para $\bar{F} = 4xz\hat{\imath} + 3z^2\hat{\jmath} + y^2\hat{k}$, a lo largo de la recta $x = 2y = 4z$, desde el origen hasta el punto (4,2,1).

$$\begin{aligned}
W &= \int_{(0,0,0)}^{(4,2,1)} (4xz\ dx + 3z^2\ dy + y^2 dz) \\
&= \int_0^4 4xz\ dx + \int_0^2 3z^2\ dy + \int_0^1 y^2 dz \\
&= \int_0^4 4x\left(\frac{x}{4}\right)\ dx + \int_0^2 3\left(\frac{y}{2}\right)^2\ dy + \int_0^1 (2z)^2 dz \\
&= \int_0^4 x^2\ dx + \frac{3}{4}\int_0^2 y^2\ dy + 4\int_0^1 z^2 dz \\
&= \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 + \frac{3}{4}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + 4\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(\frac{4^3}{3} - 0\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{2^3}{3} - 0\right) + 4\left(\frac{1^3}{3} - 0\right) \\
&= \left(\frac{64}{3}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{8}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{64}{3} + \frac{8}{4} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{74}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $W = \frac{74}{3}$ de unidad de trabajo