Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 26
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

26. En un grupo de N personas, cada una pone su llave (celular) en una caja. Después, un repartidor reparte aleatoriamente las llaves, una llave a cada persona.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona específica tenga su llave?

¿Cuál es la probabilidad de que n personas específicas tengan su llave?

¿Cuál es la probabilidad de que al menos una persona tenga su llave?

Sol. (Tuve que buscar el problema en internet para ver que es conocido como "hat check problem probability" en el cual usan desarreglos.)

¿Cuál es la probabilidad de que una persona específica tenga su llave?

Cada persona del grupo tiene la misma probabilidad de que le den su llave y dado que son un total de N y solo un caso favorable:

$$P(A) = \frac{1}{N}$$

¿Cuál es la probabilidad de que n personas específicas tengan su llave?

Vimos en la pregunta anterior la proba de una persona, así para n personas sería:

$$P(B) = \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right)\dots\left(\frac{1}{N}\right) = \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^n}$$

¿Cuál es la probabilidad de que al menos una persona tenga su llave?

En este caso no tenemos casos específicos, por lo que no podemos seguir usando los mismos argumentos que en las preguntas anteriores.

En el problema del sombrero se realiza una pregunta similar, en la cual se propone buscar la proba donde nadie se quedó con su sombrero. En dicho problema se usan los desarreglos.

La probabilidad de que al menos una persona reciba su propia llave es el complemento de la probabilidad de que ninguna persona reciba su propia llave.

Por lo que este ejercicio fue planeado para no usar directamente lo que se tiene en el problema del sombrero. De modo que, la proba de que al menos una persona reciba su propia llave es:

$$P(C) = 1 - P(D)$$

El numero de desarreglos (ninguna persona recibe su propia llave) para N personas es:

$$D(N) = N!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^N \frac{1}{N!}\right) = N! \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}$$

También encontré que a $D(N)$ se le conoce como $!N$.

De modo que la proba de estos desarreglos es:

$$P(D) = \frac{D(N)}{N!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^N \frac{1}{N!}$$

Donde justo $P(D)$ lo podemos ver como la serie de Taylor que converge a $\frac{1}{e}$.

Por ende,

- Si se busca para una N no tan grande:

$$P(C) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^N \frac{1}{N!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots - (-1)^N \frac{1}{N!}$$

- Si se busca para una N grande.

$$P(C) = 1 - \frac{1}{e}$$