2.1 Utiliza que la distribución binomial tiende a la distribución normal en el límite de n tiros tendiendo a infinito para mostrar que la distribución de probabilidad de encontrar un Caminante aleatorio en una dimensión con probabilidad p de moverse una distancia de exactamente l a la izquierda y q = 1−p de moverse l a la derecha es una distribución normal. ¿Qué valor esperado tiene y qué desviación estándar?

Cada paso X_i, es: $X_i = \begin{cases} -l, & con\, proba\, p \\ l, & con\, proba\, q = 1 - p \end{cases}$ .Después de n pasos es $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Para un solo paso:

$$\mu_X = E[X_i] = (-l)p + lq = l(q-p)$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = E\left[X_i^2\right] - (E[X_i])^2 &= [(-l)^2 p + l^2 q][l(q-p)]^2 = [l^2(p+q)][l(q-p)]^2 = l^2 - [l(q-p)]^2 = l^2 - l^2(q-p)^2 \\ &= l^2[1-(q-p)^2] = l^2[1-(1-2p)^2] = l^2[1-(1-4p+4p^2)] = l^2(4p-4p^2) = 4l^2p(1-p) \\ &= 4l^2pq\end{aligned}$$

Para S_n: $\mu_n = E[S_n] = nE[X_i] = nl(q-p)$ y $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_i) = n4l^2pq = 4nl^2pq \Rightarrow \sigma_\mathrm{n} = 2l\sqrt{npq}$

2.2 ¿Cómo se modifica el resultado anterior si p+q < 1? es decir, si hay una probabilidad 1−p−q de que el caminante se quede en la misma posición. Demuestra que también tiende a una distribución normal y calcula su respectivo valor esperado y desviación estándar

Cada paso X_i, es: $X_i = \begin{cases} -l, & con\, proba\, p \\ l, & con\, proba\, q = 1 - p \\ 0, & con\, proba\, r = 1 - p - q \end{cases}$ .Después de n pasos es $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Para un solo paso:

$$\mu_X = E[X_i] = (-l)p + l\,q + (0)r = l(q-p)$$

$$E\left[X_i^2\right] = (-l)^2p + l^2q + 0^2r = l^2(p+q)$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = E\left[X_i^2\right] - (E[X_i])^2 &= [(-l)^2p + l^2q + 0^2r] - l^2(q-p)^2 = l^2(p+q) - l^2(q-p)^2 \\ &= l^2[(p+q)-(q-p)^2] \\ &= l^2[(p+q)-(q^2-2pq+p^2)] = l^2[p+q-q^2+2pq-p^2] = l^2[(p-p^2)+(q-q^2)+2pq] \\ &= l^2[(1-r)-(q^2+p^2-2pq)] = l^2[1-r-((1-r)^2-2pq)+2pq] = l^2[1-r-1+2r-r^2+4pq] \\ &= l^2[r-r^2+4pq]\end{aligned}$$

Para S_n:

$$\mu_n = E[S_n] = nE[X_i] = nl(q-p) \text{ NO CAMBIA}$$

$$\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_i) = nl^2[r-r^2+4pq] \Rightarrow \sigma_\mathrm{n} = l\sqrt{n[r-r^2+4pq]} \text{ SI CAMBIA}$$

Para demostrar que tiende a una normal, aplicamos el Teorema del Límite Central (TLC): como $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ es la suma de n variables independientes e idénticamente distribuidas, con:

$$E[S_n] = nl(q-p), \qquad \sigma_\mathrm{n} = l\sqrt{n[r-r^2+4pq]}$$

entonces, para $n \to \infty$, S_n converge a $\mathcal{N}\big(nl(q-p),\, nl^2(r-r^2+4pq)\big)$, donde la normalidad surge de que S_n es una suma de términos independientes con media y varianza finitas.