Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 3 – 2.2
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

2. 2. Ondas sobre un líquido:

Para las ondas en la superficie de un líquido, la relación de dispersión es: $\boldsymbol{\omega^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho}}$, donde σ es la superficie del líquido y ρ su densidad.

a) Obtén la densidad de frecuencias para estas ondas. Recuerda que estas se mueven sobre una superficie, es decir, se trata de un problema 2D.
b) Supón que estas ondas siguen la estadística de Bose. Usa esto para calcular la energía promedio de un líquido a bajas temperaturas. Para esto puedes usar que la energía promedio de una onda en el estado excitado es $E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega$, es decir, que la energía está cuantizada (lo cual es justificable).
c) Calcula el calor específico en el límite de bajas y altas temperaturas

Sol.

a) **Densidad de frecuencias $\boldsymbol{g(\omega)}$**

Partamos de la relación de dispersión dada: $\omega^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho}$. Donde: ω es la frecuencia angular, k el núm. de onda, σ es la tensión superficial y ρ es la densidad. En un sistema 2D, la densidad de estados en el espacio k es:

$$g(k)\,dk = \frac{A}{(2\pi)^2} 2\pi k\,dk = \frac{A}{2\pi} k\,dk$$

donde A es el área de la superficie.

Queremos encontrar la densidad de frecuencias $g(\omega)$, tal que: $g(\omega)\,d\omega = g(k)\,dk$

Por lo tanto: $g(\omega) = g(k)\left|\frac{dk}{d\omega}\right|$

De la relación de dispersión: $\omega^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}\, k^{3/2}$

Despejamos k: $k = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/3} \omega^{2/3}$

Calculemos $\frac{dk}{d\omega}$: $\frac{dk}{d\omega} = \frac{2}{3}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/3} \omega^{-1/3}$

Sustituimos en $g(\omega)$:

$$g(\omega) = \frac{A}{2\pi} k \left|\frac{dk}{d\omega}\right| = \frac{A}{2\pi}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/3} \omega^{2/3} \frac{2}{3}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/3} \omega^{-1/3} = \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3} \omega^{1/3}$$

Por lo tanto,

$$g(\omega) = \frac{A}{3\pi}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3} \omega^{1/3}$$

b) Energía promedio a bajas temperaturas

La energía promedio de un modo de frecuencia ω es:

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar$$

Con n el número de ocupación de Bose-Einstein:

$$n = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

La energía total del sistema es la suma sobre todos los modos:

$$E = \int_0^\infty E(\omega) g(\omega)\, d\omega$$

donde $E(\omega)$ es la energía promedio por modo de frecuencia ω:

$$E(\omega) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Veamos que el primer término es la energía del punto cero y no depende de la temperatura. El segundo término es la energía térmica:

$$E_{\mathrm{t}} = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} g(\omega)\, d\omega$$

Sustituyendo:

$$E_{\mathrm{t}} = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \frac{A}{3\pi}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3} \omega^{1/3}\, d\omega = \frac{A\hbar}{3\pi}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3} \int_0^\infty \frac{\omega^{4/3}}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\, d\omega$$

Hacemos un cambio de variable:

$$x = \beta\hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{x}{\beta\hbar}, \quad d\omega = \frac{dx}{\beta\hbar} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\left(\frac{x}{\beta\hbar}\right)^{4/3}}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{\beta\hbar} = \left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^{7/3} \int_0^\infty \frac{x^{4/3}}{e^x - 1}\, dx$$

Usamos:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mathrm{s}}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma(\mathrm{s} + 1)\zeta(s + 1) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{4/3}}{e^x - 1}\, dx = \Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\zeta\left(\frac{7}{3}\right)$$

donde Γ es la función gamma y ζ es la función zeta de Riemann.

Por lo tanto:

$$E_{\mathrm{t}} = \frac{A\hbar}{3\pi}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{\beta\hbar}\right)^{7/3}\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\zeta\left(\frac{7}{3}\right)$$

O si queremos simplificar más:

$$E_{\mathrm{t}} = \frac{A}{3\pi}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2/3}(k_B T)^{7/3}(\hbar)^{-4/3}\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\zeta\left(\frac{7}{3}\right)$$

c) Calor específico

El calor específico se define como: $C = \frac{\partial E}{\partial T}$, con esto podemos encontrar las proporciones más fácil y rápido.

Para bajas temperaturas ($T \to 0$): La energía térmica E_{t} depende de $T^{7/3}$:

$$E_{\mathrm{t}} \propto T^{7/3} \Rightarrow C \propto \frac{7}{3}T^{4/3}$$

Para altas temperaturas ($T \to \infty$): En el límite clásico, cada modo tiene energía $k_B T$ (por equipartición). El número de modos es finito (cortado por algún k_{max}), por lo que:

$$E \propto T \Rightarrow C \propto \text{constante}$$

Por lo tanto,

$$C(T) \propto \begin{cases} T^{4/3} & T \to 0 \\ constante & T \to \infty \end{cases}$$