# Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 30
**Profesores:**
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
**Alumno: Sebastián González Juárez**
sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

**30. Calcula el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con distribución normal en todos los reales.**

**Sol.** (Nota. Agrego las demostraciones de las observaciones al final)

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, es decir, una variable aleatoria con distribución normal en todos los reales.

Su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Hay que calcular el valor esperado $E[X]$ y la varianza $Var(x)$.

- Valor esperado $E[X]$.

El valor esperado de $X$ se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Sustituyendo y resolviendo por cambio de variable,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \qquad u = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = u\sigma + \mu \Rightarrow dx = \sigma du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (u\sigma + \mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du = \int_{-\infty}^{\infty} (u\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

Obs.

- La primera integral es la esperanza de una norma estándar $N(0,1)$, que es igual a 0.
- La segunda integral es la integral de la función de densidad de una normal estándar $N(0,1)$, que es igual a 1.

Por ende, $E[X] = \sigma(0) + \mu(1) = \mu$

El valor esperado de una variable normal es $E[X] = \mu$.

- Varianza $Var(x)$.

La varianza de $X$ se define como:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Ya sabemos que $E[X] = \mu \Rightarrow (E[X])^2 = \mu^2$, falta ver quien es $E[X^2]$,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \qquad u = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = u\sigma + \mu \Rightarrow dx = \sigma du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (u\sigma + \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu^2 + 2\mu u\sigma + u^2\sigma^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_{-\infty}^{\infty} 2\mu u\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_{-\infty}^{\infty} u^2\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

Obs.

- La tercera integral es el segundo momento de una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0,1)$, que es igual a la varianza de la distribución y es igual a 1.

(agrego las demostraciones de dichas observaciones al final)

Por ende, $E[X^2] = \mu^2(1) + 2\mu\sigma(0) + \sigma^2(1) = \mu^2 + \sigma^2$

Ahora si calculemos la varianza: $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

La varianza de una variable normal es $Var(X) = \sigma^2$.

**Demostración de observaciones.** Vamos a demostrar explícitamente los siguientes resultados:

La integral de la función de densidad de una normal estándar $N(0,1)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1.$$

La esperanza matemática de una normal estándar $N(0,1)$, que es 0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 0$$

El segundo momento de una variable aleatoria con distribución normal estándar $N(0,1)$, que es igual a la varianza de la distribución y es igual a 1.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1.$$

**Demostración de la primera integral**

Queremos demostrar que:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1$$

Definimos la integral de Gauss:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz$$

Elevamos J al cuadrado y pasamos a coordenadas polares:

$$J^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2} dw\right)$$

Reescribimos en coordenadas polares, donde: $r^2 = z^2 + w^2, \quad dA = r\,dr\,d\theta$

La integral en coordenadas polares se convierte en:

$$J^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\ dr$$

Evaluamos la integral radial usando el cambio de variable $u = r^2/2$, es decir, $du = rdr$:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\ dr = \int_0^{\infty} e^{-u} du = 1$$

Como la integral angular es $\int_0^{2\pi} d\theta = 2$, tenemos: $J^2 = 2\pi$

Tomando raíz cuadrada: $J = \sqrt{2\pi}$

Por lo tanto, nuestra integral original es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$$

Finalmente, dividiendo por $\sqrt{2\pi}$, obtenemos:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

$$\blacksquare$$

**Demostración de la segunda integral**

Queremos demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 0$$

Llamemos a esta integral J:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

Observamos que el integrando es una función impar, es decir, satisface:

$$f(-z) = -f(z). f(-z) = -f(z).$$

Dado que la función $g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ es par (es simétrica respecto al eje y), y z es una función impar, el producto $zg(z)$ sigue siendo impar.

La integral de una función impar sobre un intervalo simétrico $(-\infty, \infty)$ siempre es cero: $J = 0$

■

**Demostración de la tercera integral**

Queremos demostrar que:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1.$$

Para resolverla, utilizaremos el método de integración por partes y algunas propiedades de la función Gamma.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Definimos: $u = z$, entonces $du = du = dz$, $dv = ze^{-z^2/2}dz$, entonces para hallar $v$, integramos:

$$v = \int z\, e^{-z^2/2} dz$$

Para resolver esta integral, usamos el cambio de variable: $w = \frac{z^2}{2} \Rightarrow dw = zdz$. Esto nos da:

$$v = \int e^{-w} dw = -e^{-w} = -e^{-z^2/2}$$

Volviendo a la fórmula de integración por partes:

$$\int z^2 e^{-z^2/2} dz = -ze^{-z^2/2} + \int e^{-z^2/2} dz$$

El primer término $ze^{-z^2/2}$ evaluado en los límites $-\infty\, a\, \infty$ es 0, porque $e^{-z^2/2}$ decrece rápidamente a 0 y $z$ cambia de signo simétricamente. Así que queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz.$$

Sabemos que la integral de Gauss es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}$$

Dividiendo por $\sqrt{2\pi}$ para obtener la forma estándar:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

$\blacksquare$