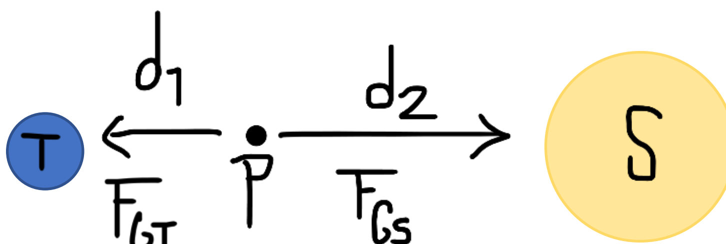
Mecánica Vectorial (2022-2)

Actividad 13

Sebastián González Juárez **Grupo 8110: Mirna Villavicencio Torres**

1. En algún lugar entre la Tierra y el Sol, hay un punto en el que la atracción gravitacional de la Tierra equilibra exactamente a la del Sol. ¿A qué fracción de la distancia Tierra-Sol ocurre esto?

Hagamos un diagrama, en el cual se muestre un punto entre la tierra y el sol donde hay equilibrio en atracción gravitacional.



$$F_{GT} = F_{GS}$$

$$G\frac{M_T m}{d_1^2} = G\frac{M_S m}{d_2^2}$$

$$\frac{M_T}{d_1^2} = \frac{M_S}{d_2^2}$$

Sabemos que la distancia de la tierra al sol es de $d = 150\,000\,000\ \,000\,m$

$$\Rightarrow d = d_1 + d_2 = 150\,000\,000\ \,000\,m$$

$$\Rightarrow d_1 = 150\,000\,000\ \,000\,m - d_2$$

La masa de la tierra es de $M_T = 5\,972\ \times 10^{24}\,kg$ y la masa del sol es de $M_S = 1\,989\ \times 10^{30}\,kg$.

Entonces,

$$\frac{M_T}{(d - d_2)^2} = \frac{M_S}{d_2^2}$$

$$d_2^2 M_T = (d - d_2)^2 M_S$$

$$d_2^2 M_T = (d^2 - 2dd_2 + d_2^2) M_S$$

$$d_2^2 M_T = d^2 M_S - 2dd_2 M_S + d_2^2 M_S$$

$$M_T d_2^2 - M_S d_2^2 = M_S d^2 - 2M_S dd_2$$

$$(M_T - M_S) d_2^2 = M_S d^2 - 2M_S dd_2$$

$$(M_T - M_S)d_2^2 + (2M_S d)d_2 - M_S d^2 = 0$$

$$d_2 = \frac{-(2M_S d) \pm \sqrt{(2M_S d)^2 - 4(M_T - M_S)(-M_S d^2)}}{2(M_T - M_S)}$$

$$d_2 = \frac{-\left(2(1\,989 \times 10^{30}\ kg)(150\,000\,000\ \ 000\ m)\right) \pm \sqrt{\left(2(1\,989 \times 10^{30}\ kg)(150\,000\,000\ \ 000\ m)\right)^2 - 4\left((5\,972 \times 10\text{^}24\ \ kg) - (1\,989 \times 10^{30}\ kg)\right)\left((-1\,989 \times 10^{30}\ kg)(150\,000\,000\ \ 000\ m)^2\right)}}{2\left((5\,972 \times 10\text{^}24\ \ kg) - (1\,989 \times 10^{30}\ kg)\right)}$$

$$\Rightarrow d_2 = 149\,740\,533\,147.8184\ m$$

Y como $d_1 = 150\,000\,000\ \ 000\ m - d_2$

$$\Rightarrow d_1 = 150\,000\,000\ \ 000\ m - 149\,740\,533\,147.8184\ m$$

$$\Rightarrow d_1 = 259\,466\,852.2\ m$$

La distancia donde se encontrará el equilibrio en la atracción gravitatoria es a los $259\,466\,852.2\ m$ desde la tierra.

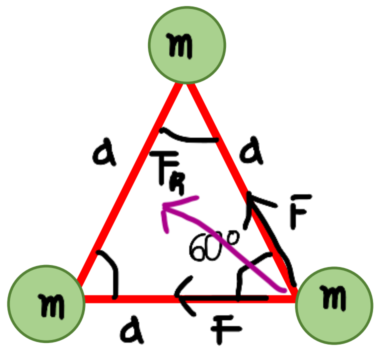
Para calcular la fracción de la distancia, basta con dividir la $\frac{d_1}{d}$,

$$\Rightarrow \frac{259\,466\,852.2\ m}{150\,000\,000\ \ 000\ m} = 1.729779\ \times 10^{-3}$$

La fracción de la distancia es $1.729779\ \times 10^{-3}$.

2. Tres masas iguales m están ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional neta sobre cada masa debida a las otras dos?

Dibujemos un esquema,



$$F = F_1 = F_2 = G\frac{mm}{a^2} = \frac{Gm^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 60°}$$

$$= \sqrt{F^2 + F^2 + 2FF\cos 60°}$$

$$= \sqrt{2F^2 + 2F^2\cos 60°}$$

$$= \sqrt{2F^2(1 + \cos 60°)}$$

$$= \sqrt{2F^2\left(2\cos^2\frac{60°}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{4F^2\cos^2 30°}$$

$$= 2F\cos 30°$$

$$= 2F\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}F$$

$$\Rightarrow F_R = \sqrt{3}\frac{Gm^2}{a^2}$$

Esa es la fuerza gravitacional neta sobre cada una de las masas.

3. Europa es una luna de Júpiter. Observaciones astronómicas muestran que esta luna está en una órbita circular con radio de $6.71x10^8$ m con un periodo de 3.55 días. A partir de estos datos deduce cuál es la masa de Júpiter.

Tomemos $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

Tenemos que la fuerza gravitatoria es igual a la fuerza centrípeta, $F_G = F_c$.

Sea m_J la masa de júpiter y m_L la masa de la luna

$$m_L\left(\frac{v^2}{r}\right) = G\frac{m_J m_L}{r^2}$$
$$v^2 = G\frac{m_J}{r}$$
$$(wr)^2 = G\frac{m_J}{r}$$
$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^2 = G\frac{m_J}{r}$$
$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3 = Gm_J$$
$$\Rightarrow m_J = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3}{G}$$

Sustituyamos valores,

$$T = 306\ 720\ s \quad y \quad r = 6.71 \times 10^8\ m$$

$$m_J = \frac{\left(\frac{2\pi}{306\ 720\ s}\right)^2 (6.71 \times 10^8\ m)^3}{6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2}$$
$$m_J = 1.900716182 \times 10^{27} kg$$

Vemos que nuestro calculo se aproximó bastante debido a que la masa de Júpiter, según Google, es de aproximadamente $1.898 \times 10^{27} kg$.

4. ¿Cuál es la energía cinética y cuál es la energía potencial gravitacional para el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol? ¿Cuál es su energía total?

Para calcular la energía la energía cinética se utilizará la siguiente expresión:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Donde v es la velocidad tangencial, entonces,

$$E_c = \frac{m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{2}$$

Sabemos que la masa de la tierra es de

$$m_t = 5.9722 \times 10^{24}\ kg$$

El periodo de orbita de la tierra alrededor del sol es de

$$T = 3.1536 \times 10^7\ s$$

Y el radio, que es la distancia de la tierra al sol, es de

$$r = 150\ 000\ 000\ \ 000\ m$$

Sustituyendo valores,

$$E_c = \frac{m_t\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{2} = \frac{(5.9722 \times 10^{24}\ kg)\left(\frac{2\pi(150\ 000\ 000\ \ 000\ m)}{3.1536 \times 10^7\ s}\right)^2}{2}$$

$$= 2.6670637 \times 10^{33}\ N$$

La energía cintica es de $2.6670637 \times 10^{33}\ N$.

Por otro lado, para calcular la energía potencial gravitacional se utilizará la siguiente expresión,

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

Ya habíamos dicho que la masa de la tierra es de

$$m_t = 5.9722 \times 10^{24}\ kg$$

Mientras que la masa del sol es de

$$m_s = 1.989 \times 10^{30}\ kg$$

Y el radio, que es la distancia de la tierra al sol, es de

$$r = 150\,000\,000\ \ 000\, m$$

Sustituyendo valores,

$$E_p = -G\,\frac{m_s m_t}{r} = -(6.67\ \times 10^{-11}\ \ Nm^2/kg^2)\,\frac{(1.989\ \times\ 10^{30}\ kg)(5.9722\ \times\ 10^{24}\ kg)}{150\,000\,000\ \ 000\, m}$$

$$= -5.282064512\ \times\ 10^{36}\ N$$

La energía potencial gravitatoria es de $-5.282064512\ \times\ 10^{33}\ N$.

Ahora sumemos las 2 energías para obtener la energía total,

$$E_T = E_c + E_p = 2.6670637\ \times\ 10^{33}\ N + (-5.282064512\ \times\ 10^{33}\ N)$$

$$= -2.615\ \times\ 10^{33}\ N$$

La energía total es de $-2.615\ \times\ 10^{33}\ N$.