Mecánica Vectorial (2022-2)

Actividad 10

Sebastián González Juárez **Grupo 8110: Mirna Villavicencio Torres**

1. Un automóvil que viaja a *60 km/hr* golpea la parte trasera de otro que viaja a *55 km/hr* en la misma dirección. La masa del primer automóvil es de *1200 kg* y la del segundo es de *1000 kg*. Si el choque es elástico, encuentra las velocidades de ambos automóviles inmediatamente después de este choque.

Nos encontramos con un choque elástico, por lo que, por conservación de momento lineal, $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$

Donde,

$m_1 = 1200\ kg$, es la masa del automóvil 1

$m_2 = 1000\ kg$, es la masa del automóvil 2

$v_1 = 60\ \ km/hr$, es la velocidad del automóvil 1

$v_2 = 55\ \ km/hr$, es la velocidad del automóvil 2

v_{f1} es la velocidad final del automóvil 1

v_{f2} es la velocidad final del automóvil 2

Entonces,

$$m_1 v_1 - m_1 v_{f1} = m_2 v_2 - m_2 v_{f2}$$

$$m_1(v_1 - v_{f1}) = m_2(v_2 - v_{f2})$$

Además, por la conservación de energía cinética tenemos también que,

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Desarrollando obtenemos,

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_{f1}^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_{f2}^2)$$

$$m_1(v_1 + v_{f1})(v_1 - v_{f1}) = m_2(v_2 + v_{f2})(v_2 - v_{f2})$$

Notemos que tenemos las siguientes 2 igualdades:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_{f1}) = m_2(v_2 - v_{f2}) \\ m_1(v_1 + v_{f1})(v_1 - v_{f1}) = m_2(v_2 + v_{f2})(v_2 - v_{f2}) \end{cases}$$

Donde en amabas encontramos a $m_1(v_1 - v_{f1})$, por lo que podemos sustituirlo por un $m_2(v_2 - v_{f2})$, según la igualdad.

$$\Rightarrow m_2(v_1 + v_{f1})(v_2 - v_{f2}) = m_2(v_2 + v_{f2})(v_2 - v_{f2}) \Rightarrow (v_1 + v_{f1})(v_2 - v_{f2}) = (v_2 + v_{f2})(v_2 - v_{f2}) \Rightarrow v_1 + v_{f1} = v_2 + v_{f2}$$

Podemos despejar una de las velocidades, $v_{f1} = v_2 + v_{f2} - v_1$

Ahora solo queda sustituir el valor de v_{f1} en nuestra primera expresión,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_{f1} + m_2v_{f2}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1(v_2 + v_{f2} - v_1) + m_2v_{f2}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_2 + m_1v_{f2} - m_1v_1 + m_2v_{f2}$$

$$m_1v_1 + m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_2 + v_{f2}(m_1 + m_2)$$

$$2m_1v_1 + m_2v_2 - m_1v_2 = v_{f2}(m_1 + m_2)$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1v_1 + m_2v_2 - m_1v_2}{m_1 + m_2}$$

Notemos que logramos dejar a una de las velocidades en tordo a datos que ya conocemos, entones solo restaría sustituir,

$$v_{f2} = \frac{2(1200\ kg)(60\ \ km/hr) + (1000\ kg\ )(55\ \ km/hr) - (1200\ kg)(55\ \ km/hr)}{(1200\ kg) + (1000\ kg\ )}$$
$$= \frac{144000\ kg\ km/hr + 55000\ kg\ km/hr - 66000\ kg\ km/hr}{2200\ kg} = \frac{133000}{2200} km/hr$$
$$= \frac{665}{11} km/hr$$

$$v_{f2} \approx 60.4545\ \ km/hr$$

Ya encontramos la velocidad final del automóvil 2, ahora podemos sustituir en la expresión hallada para la velocidad del automóvil 1 y concluiremos.

$$v_{f1} = v_2 + v_{f2} - v_1 = 55\ \ km/hr + \frac{665}{11} km/hr - 60\ \ km/hr = \frac{610}{11} km/hr$$

$$v_{f1} \approx 55.4545\ \ km/hr$$

Por lo tanto, la velocidad de ambos automóviles después del choque es de,

Automóvil 1. Velocidad de $\frac{610}{11} km/hr$, aproximadamente $55.4545\ \ km/hr$.

Automóvil 1. Velocidad de $\frac{665}{11}$ km/hr, aproximadamente $60.4545\ km/hr$.

2. De acuerdo con un cuento dicho por el barón Münchhausen, en una ocasión, mientras se intercambiaban disparos de cañón entre una ciudad sitiada y el campamento enemigo, él saltó sobre una bala de cañón mientras se disparaba desde la ciudad. Viajó en la bala hacia el campamento enemigo y mientras estaba en el aire, a la mitad del camino, saltó sobre una bala de cañón enemiga y viajó de vuelta a la ciudad. El choque de Münchhausen y la bala de cañón enemiga debe de haber sido inelástico, pues él se mantuvo sobre ella. Suponiendo que su rapidez, justo antes de golpear a la bala enemiga era de *150 m/s* hacia el sur, que la rapidez de la bala enemiga era de *300 m/s* hacia el norte y que la masa de Münchhausen era de 90 kg y la de la bala de cañón era de 20 kg. ¿Cuál debió ser la rapidez justo después del choque?

Tenemos un choque inelástico y por conservación del momento lineal,

$$m_M v_M + m_E v_E = v(m_M + m_E)$$

Donde,

m_M es la masa de la bala de Munchhausen.

v_M es la velocidad de la bala de Munchhausen.

m_E es la masa de la bala enemiga.

m_E es la velocidad de la bala enemiga.

Queremos saber la velocidad final entonces:

$$v = \frac{m_M v_M + m_E v_E}{m_M + m_E}$$

Sustituyamos nuestros valores:

$$v = \frac{(90\ kg)(150\ m/s) + (20\ kg)(-300\ m/s)}{(90\ kg) + (20\ kg)} = \frac{13500 - 6000}{110}\ m/s = \frac{7500}{110}\ m/s$$

La rapidez después del choque es de $\frac{7500}{110}$ m/s.

3. Dos jugadores de hockey de *80 kg* de masa chocan mientras patinan a 7 m/s. El ángulo entre sus direcciones de movimiento iniciales era de *130°*. (a) Suponiendo que los jugadores permanecen entrelazados después del choque y que la colisión es totalmente inelástica. ¿Cuál es su velocidad después del choque? (b) Suponiendo que el choque dura 0.08 s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración promedio de cada jugador durante el choque?

Como la fuerza es inelástica, entonces el momento lineal se conserva,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = v_f(m_1 + m_2)$$

Notemos que $m_1 = m_2 = m = 80\ kg$, que es la masa de los jugadores.

$$mv_1 + mv_2 = 2v_f m \Rightarrow m(v_1 + v_2) = 2v_f m \Rightarrow v_1 + v_2 = 2v_f$$

Despejemos v_f, $\Rightarrow v_f = \frac{v_1+v_2}{2}$. Consideremos $v = 7\ m/s$

Si tomamos $v_1 = (v, 0)$, talque, el jugador solo se mueve en el eje x, entonces $v_2 = (v\cos\theta\,, v\sin\theta)$, donde $\theta = 130°$.

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{(v,0) + (v\cos\theta\,, v\sin\theta)}{2} = \frac{(7\ m/s\,, 0) + (7\ m/s\cos 130°\,, 7\ m/s\sin 130°)}{2} \\ &= \frac{(7 + 7\cos 130°\, m/s\,, 0 + 7\sin 130°\, m/s)}{2} \approx \frac{(2.5\ m/s\,, 5.36\ m/s)}{2} \\ &\approx (1.25\ m/s\,, 2.68\ m/s) \end{aligned}$$

$$|v_f| \approx \sqrt{(1.25\ m/s)^2 + (2.68\ m/s)^2} \approx 2.957\ m/s$$

a) **La velocidad final es de aproximadamente $v_f \approx (1.25\ m/s\,, 2.68\ m/s)$ y su magnitud de $2.957\ m/s$.**

Supongamos ahora que el choque duro $\Delta t = 0.08\, s$. Sabemos que la aceleración promedio está dada por:

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Para nuestros jugadores tenemos,

$a_1 = \frac{v_f - v_1}{\Delta t}$, para el jugador 1.

$a_2 = \frac{v_f - v_2}{\Delta t}$, para el jugador 2.

Para el jugador 1.

$$a_1 = \frac{v_f - v_1}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{(1.25\ m/s\,, 2.68\ m/s) - (7\ m/s\,, 0)}{0.08\ s} \\
&\approx \frac{(1.25 - 7\ m/s\,, 2.68\ m/s)}{0.08\ s} \\
&\approx \frac{(-5.75\ m/s\,, 2.68\ m/s)}{0.08\ s} \\
&\approx (-71.875\ m/s^2\,, 33.5\ m/s^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a_1| &\approx \sqrt{(-71.875\ m/s^2)^2 + (33.5\ m/s^2)^2} \\
&\approx 79.2985\ m/s^2
\end{aligned}$$

La aceleración del jugador 1 es de aproximadamente $(-71.875\ m/s^2\,, 33.5\ m/s^2)$ y su magnitud es de $79.2985\ m/s^2$.

Para el jugador 2.

$$a_2 = \frac{v_f - v_2}{\Delta t}$$

$$\approx \frac{(1.25\ m/s\,, 2.68\ m/s) - (7\ m/s \cos 130°\,, 7\ m/s \sin 130°)}{0.08\ s}$$

$$\approx \frac{(1.25 - 7\cos 130°\ m/s\,, 2.68 - 7\sin 130°\ m/s)}{0.08\ s}$$

$$\approx \frac{(5.75\ m/s\,, -2.68\ m/s)}{0.08\ s}$$

$$\approx (71.875\ m/s^2\,, -33.5\ m/s^2)$$

$$= -a_1$$

$$|a_2| = |-a_1| \approx 79.2985\ m/s^2$$

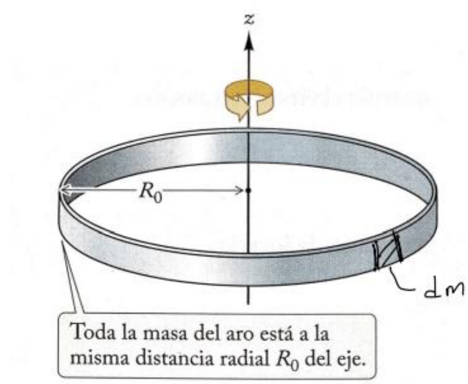
La aceleración del jugador 2 es de aproximadamente $(71.875\ m/s^2\,, -33.5\ m/s^2)$ y su magnitud es de $79.2985\ m/s^2$.

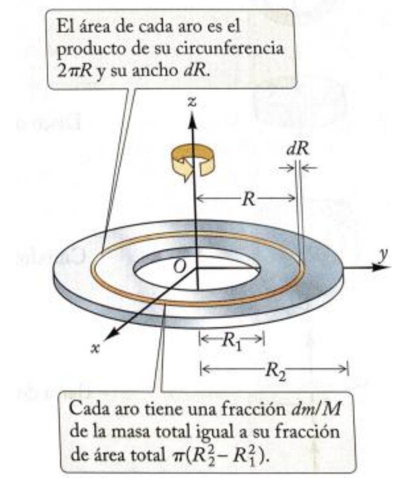
4. Tu maestra te entrega dos esferas. Ambas tienen la misma masa, el mismo radio y la misma superficie exterior. La maestra te dice que una es una esfera sólida y la otra está hueca. ¿Podrías decirle cuál es cual sin cortarlas para ver su interior? Si lo puedes hacer, ¿cómo lo harías? y si no ¿por qué?

Como vimos en clase, la energía cinética rotacional cambia dependiendo del cuerpo, vimos un ejemplo muy parecido a este caso ya que teníamos un disco y un anillo, en esta ocasión tenemos una esfera y la capa de la esfera.

Al hacerlas rotar en un eje, notaremos que la esfera hueca va a girar más despacio que la esfera que no se encuentra hueca.

Fotos de la clase:





Lo que hicimos fue jugar con la segunda imagen y vimos algo muy parecido a lo que pasaría con la esfera hueca y la que no lo está.

Por el momento no cuento con el material para poner esto en práctica, por lo que me tendré que quedar con la teoría.

5. ¿Cuál es la energía cinética de rotación de un disco de fonógrafo de *170 g* de masa y *15.2 cm* de radio que gira a *33.3* revoluciones por minuto? Para dar a este disco una energía cinética de traslación de la misma magnitud, ¿con que rapidez deberías lanzarlo?

La energía cinética de rotación del disco está dada por:

$$E_r = \frac{1}{2} I w^2$$

Donde $w = 33.3\ rev/min = 0.555\ \ 1/s$ y el momento de inercia de un disco está dado por:

$$I = \frac{m}{2} r^2$$

Donde $r = 15.2\ cm = 0.152\ metros$ y $m = 170\ g$.

$$\Rightarrow E_r = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2} r^2\right) w^2$$
$$\Rightarrow E_r = \frac{1}{4} m r^2 w^2$$
$$\Rightarrow E_r = \frac{1}{4} m (wr)^2$$

Con los valores:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4}(170\ g)\big((0.152\ metros\ )(0.555\ \ 1/s)\big)^2 \\ &= \frac{1}{4}(170)(0.08436)^2\ J \\ &= \frac{1}{4}(170)(7.1166096\ \times 10^{-3})\ J \\ &= \frac{1}{4}(1.209823632)\ J \\ &= 0.302455908\ J \end{aligned}$$

La energía cinética de rotación del disco es de $\mathbf{0.302455908}\ \boldsymbol{J}$.

Por otro lado, la energía cinética de translación de un disco está dada por:

$$E_t = \frac{1}{2} m v^2$$

Donde v es la rapidez.

Si queremos que $E_t = E_r$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}m(wr)^2$$
$$\Rightarrow v^2 = \frac{1}{2}(wr)^2$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{2}(wr)^2}$$
$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}wr$$

Con los valores:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0.152\ metros\ )(0.555\ \ 1/s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0.08436)\ \ m/s \\ &= 0.05965152806\ \ m/s \end{aligned}$$

Por lo tanto, para dar a este disco la misma energía de translación que la de rotación, debemos darle una velocidad de $\mathbf{0.05965152806}\ \ \boldsymbol{m/s}$.