5.3. Gas ideal con partículas indistinguibles: Considera que tienes un recipiente cúbico que subdivides en “cajitas” cúbicas de mucho menor volumen, cuyo lado es de tamaño λ. Tienes N pelotitas que acomodarás en el recipiente.

a) Calcula el número de configuraciones en las que puedes acomodar las pelotitas, si las pelotitas son indistinguibles y sólo cabe una pelota por cada cajita.

Tenemos un cubo con volumen V y cada cajita con volumen λ^3, el núm. de cajitas que cabe es $M = \frac{V}{\lambda^3}$

Misión: Acomodar N pelotitas indistinguibles en M cajitas. Por lo que no importa el orden y solo cabe 1 por cajita.

Equivale a decir que tenemos N cajitas distintas y elegirlas de las M disponibles para colocar las pelotitas.

$$\binom{M}{N} = \frac{M!}{N!(M-N)!},\ \ M = \frac{V}{\lambda^3},$$ evidentemente $N \leq M$, si no no abría espacio para colocar las N pelotitas.

b) Ahora calcula el caso donde las pelotitas son indistinguibles y se pueden acomodar tantas pelotitas por cajita como se quiera.

Lo que cambia es que ahora tenemos combinaciones con repetición (estrellas y barras):

Si tenemos N pelotitas como las estrellas y las separaciones entre cajitas son las barras. Con M cajitas, necesito M–1 barras para dividirlas. Por ejemplo, para M=3 cajitas, una posible distribución podría ser: ⋆⋆ | ⋆ | ⋆⋆⋆

El número total de posiciones a llenar es N (estrellas) + M–1 (barras) = N+M–1.

Las formas de colocar las N estrellas en N+M–1 posiciones es: $\binom{N+M-1}{N} = \frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!},\ \ M = \frac{V}{\lambda^3}$

c) Demuestra que, en el límite de baja densidad, es decir, donde el número de cajitas M es mucho mayor que N, el número de configuraciones de los dos incisos anteriores es $\frac{M^N}{N!}$.

a) Caso con una pelotita por cajita (fermiones)

$$\Omega_a = \binom{M}{N} = \frac{M!}{N!\ (M-N)!} = \frac{M(M-1)(M-2)\dots(M-N+1)(M-N)!}{N!\ (M-N)!} = \frac{M(M-1)(M-2)\dots(M-N+1)}{N!}$$

Como $M \gg N$, cada término $(M-k) \approx M$. Por lo tanto: $\frac{M(M)(M)\dots(M)}{N!}$, con M n veces, por lo tanto, $\Omega_a = \frac{M^N}{N!}$

b) Caso con múltiples pelotitas por cajita (Bosones)

$$\Omega_b = \binom{N+M-1}{N} = \frac{(N+M-1)!}{N!\ (M-1)!} = \frac{(M-1)!\,M(M+1)\dots(M+N-1)}{N!\ (M-1)!} = \frac{M(M+1)\dots(M+N-1)}{N!}$$

Como $M \gg N$, cada término $(M+k) \approx M$. Por lo tanto: $\frac{M(M)(M)\dots(M)}{N!}$, con M n veces, por lo tanto, $\Omega_a = \frac{M^N}{N!}$

d) Obtén la entropía de los 3 sistemas (incluido el límite de baja densidad o termodinámico).

Recordar $S = k_B \ln \Omega$ y formula de Stirling $\ln x! \approx x \ln x - x$.

$$\Omega_a = \binom{M}{N} = \frac{M!}{N!\ (M-N)!}$$

$$\ln \Omega_a \approx M \ln M - M - N \ln N + N - (M-N)\ln(M-N) + (M-N) \approx M \ln M - N \ln N - (M-N)\ln(M-N)$$

$$\approx M\left[\ln M - \left(1 - \frac{N}{M}\right)\ln(M-N)\right] - N \ln N$$

Por lo tanto: $S_a = k_B \left[M\left[\ln M - \left(1 - \frac{N}{M}\right)\ln(M-N)\right] - N \ln N\right]$

$$\Omega_b = \binom{N+M-1}{N} \approx \binom{N+M}{N} = \frac{(N+M)!}{N!\,(M)!}, \qquad para\ M \gg 1$$

$$\ln \Omega_b \approx (N+M)\ln(N+M) - N\ln N - M\ln M \approx N\ln(N+M) - N\ln N + M\ln(N+M) - M\ln M$$
$$\approx N\ln\left(1+\frac{M}{N}\right) + M\ln\left(1+\frac{N}{M}\right)$$

Por lo tanto: $S_b = k_B\left[N\ln\left(1+\frac{M}{N}\right) + M\ln\left(1+\frac{N}{M}\right)\right]$

$$\Omega_c \approx \frac{M^N}{N!} \Rightarrow \ln\Omega_c \approx N\ln M - (N\ln N - N) = N\left(1+\ln\left(\frac{M}{N}\right)\right), \qquad M \gg N$$

$$S_c = k_B \ln\Omega \approx k_B N\left(1+\ln\left(\frac{M}{N}\right)\right)$$

Si definimos la densidad $\rho = \frac{N}{M}$ $(\rho \ll 1)$ en el límite de baja densidad:

$$\ln\Omega_1 \approx M\big[\ln M - (1-\rho)\ln\big(M(1-\rho)\big)\big] - N\ln N \approx M[\ln M - (1-\rho)(\ln M + \ln(1-\rho))] - N\ln N$$
$$\approx M[\ln M - \ln M - \ln(1-\rho) + \rho\ln M + \rho\ln(1-\rho)] - N\ln N \approx M[\rho + \rho\ln M - \rho^2] - N\ln N$$
$$\approx N + N\ln M - N\ln N = N\left(1+\ln\left(\frac{M}{N}\right)\right) \Rightarrow S_a = k_B\ln\Omega_1 \approx k_B N\left(1+\ln\left(\frac{M}{N}\right)\right)$$

$$\ln\Omega_2 \approx N\ln\left(1+\frac{M}{N}\right) + M\ln\left(1+\frac{N}{M}\right) \approx N\ln\left(\frac{M}{N}\right) + M\left(\frac{N}{M}\right) = N\ln\left(\frac{M}{N}\right) + N \Rightarrow S_b = k_B\ln\Omega_2 \approx k_B N\left(1+\ln\left(\frac{M}{N}\right)\right)$$

e) **Argumenta porque λ sería la longitud de onda térmica $\boldsymbol{\lambda = \sqrt{\frac{\beta h^2}{2\pi m}}}$ para el caso de un gas.**

Tenemos la Constante de Planck ($\hbar = h/2\pi$), la Masa de la partícula (m), $\beta = \frac{1}{k_B T}$

Para un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T, la energía cinética promedio por partícula está dada por equipartición: $\langle E\rangle = \frac{3}{2}k_B T$, de modo que en una sola dimensión: $\langle E_x\rangle = \frac{1}{2}k_B T$, con $E_x = \frac{p_x^2}{2m}$.

$$\left\langle\frac{p_x^2}{2m}\right\rangle = \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow \langle p_x^2\rangle = mk_B T \text{ El momento térmico típico es entonces: } p_T \approx \sqrt{\langle p_x^2\rangle} = \sqrt{mk_B T}$$

La longitud de onda de De Broglie para una partícula es: $\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{p} \Rightarrow$ la térmica es: $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{mk_B T}} = h\sqrt{\frac{\beta}{m}} = \sqrt{\frac{\beta h^2}{m}}$

f) **Lo que acabas de obtener es el límite termodinámico (o baja densidad) de la función de partición de un gas (por lo tanto, un gas ideal). Obtén con ello su energía y su ecuación de estado.**

Para un gas ideal clásico (sin efectos cuánticos), la función de partición para N partículas en un volumen V y temperatura T es: $Z(N,V,T) = \frac{(Z_1)^N}{N!}$. Donde: Z_1 es la función de partición de una sola partícula:

$Z_1 = V\left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2}\right)^{3/2} = V\lambda_T^{-3}$, con $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}}$ la longitud térmica de De Broglie y N! corrige la indistinguibilidad

Con aproximación de Stirling: $\ln Z = N\ln Z_1 - \ln N! \approx N\left(\ln\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right)+1\right) = N\ln V - N\ln N + N - \frac{3N}{2}\ln\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)$

Energía interna $U = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}\right)_{N,V} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{3N}{2}\ln\beta\right) = \frac{3N}{2}\frac{1}{\beta} = \frac{3}{2}Nk_B T$

La presión: $P = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\ln Z}{\partial V}\right)_{N,T}$ de $\ln Z \approx N\ln\left(\frac{V}{N\lambda_T^3}\right) + N$, $\frac{\partial\ln Z}{\partial V} = \frac{N}{V}$, entonces $P = \frac{1}{\beta}\frac{N}{V} = Nk_B T\frac{1}{V}$. Por lo tanto $PV = Nk_B T$