Mecánica Vectorial (2022-2)

Actividad 11

Sebastián González Juárez **Grupo 8110: Mirna Villavicencio Torres**

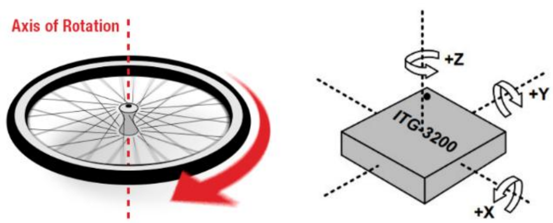
1. ¿Qué es un giroscopio y cómo funciona?

¿Qué es?

Los giroscopios son dispositivos que miden o mantienen el movimiento de rotación. MEMS (sistemas microelectromecánicos) giroscopios son pequeños sensores, de bajo costo para medir la velocidad angular. Las unidades de velocidad angular son medidas en revoluciones por segundo (RPS) o grados por segundo (° / s). La velocidad angular es una medida de la velocidad de rotación.

¿Cómo funciona?

Cuando un objeto gira alrededor de un eje obtiene algo llamado velocidad angular.



Tenga en cuenta que el eje z del giroscopio a abajo se alinea con el eje de rotación en la rueda.

Al conectar el sensor a la rueda que se muestra más arriba, podemos medir la velocidad angular del eje z del giróscopo. Los otros dos ejes no son capaces de medir esa velocidad. Un giroscopio MEMS de 3 ejes puede medir la rotación en torno a tres ejes: X, Y, y Z.

Los giroscopios se utilizan a menudo en los objetos que no están girando muy rápido del todo. Las aeronaves (con suerte) no giran, en su lugar giran unos pocos grados en cada eje. Mediante la detección de estos pequeños cambios los giroscopios ayudan a estabilizar el vuelo de la aeronave. Además, tenga en cuenta que la aceleración o la velocidad lineal de la aeronave no afecta a la medición del giróscopo. Los giroscopios sólo miden la velocidad angular.

El sensor MEMS dentro de un giroscopio es muy pequeño (entre 1 a 100 micrómetros, el tamaño de un cabello humano). Cuando se hace girar el giroscopio, una pequeña masa de resonancia se desplaza con los cambios de velocidad angular. Este movimiento se convierte en señales eléctricas de muy bajas corrientes que se pueden amplificar para ser leídas por un microcontrolador.

2. La Luna se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular (aproximada) de *3.8×10^8 m* de radio en *27.3 días*. Calcula la magnitud del momento angular de la Luna. Supón que el origen de tu sistema de coordenadas se encuentra en el centro de la Tierra.

Para calcular la magnitud del momento angular usamos: $L = I\omega$

Donde,

L es la magnitud del momento angular

I es el momento de inercia, tal que, $I = mr^2$

ω es la velocidad angular, tal que, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Entonces, $L = mr^2\omega$

Consideremos la masa de la luna $m = 7.349 \times 10^{22}\ kg$.

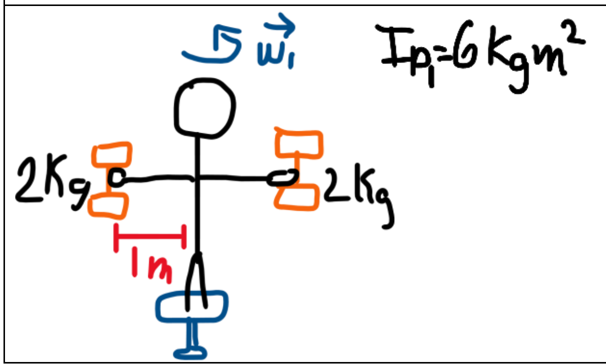
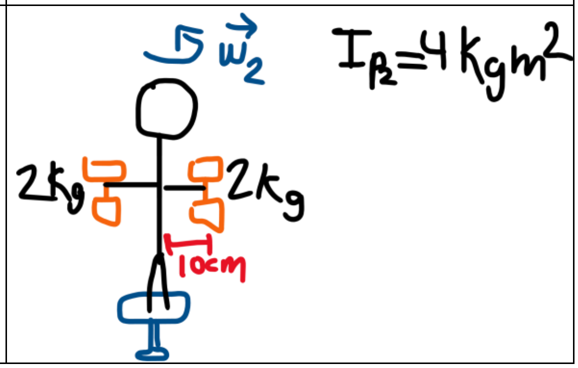
El radio es de $r = 3.8 \times 10^8\ m$.

La velocidad es de $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{27.3\ d} = \frac{2\pi}{2358720\ s}$.

$$\Rightarrow L = (7.349 \times 10^{22}\ kg)(3.8 \times 10^8\ m)^2 \left(\frac{2\pi}{2358720\ s}\right)$$
$$= 2.826824974 \times 10^{34}\ kgm^2/s$$

3. En una demostración muy popular, el profesor de la clase gira sobre un banco a *0.5 rev/s* y sostiene dos masas de *2.0 kg*, cada una a *1.0 m* del eje de rotación. Si jala los pesos hacia adentro hasta que están a *10 cm* del eje, ¿cuál es la nueva frecuencia de rotación? Sin los pesos, el profesor y el banco tienen un momento de inercia de *6 kgm²* con los brazos extendidos y *4.0 kgm²* con los brazos hacia adentro.

Veamos los 2 casos,

<table>
<tr><td>Caso 1, brazos extendidos</td><td>Caso 2, brazos hacia dentro</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Caso 1.

Sea,

L_1 el momento angular

I_{tot} el momento de inercia total del sistema

I_{m1} el momento de inercia de la mancuerna 1

I_{m2} el momento de inercia de la mancuerna 2

ω_1 la velocidad angular del sistema

Entonces,

$$L_1 = I_{tot}\omega_1$$

$$I_{tot} = I_{p1} + I_{m1} + I_{m2}$$

El momento de inercia se puede calcular como:

$$I = mr^2 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = 2mr_1^2$$

Donde m_1, m_2 son las masas y r_1, r_2 son los radios

Por lo tanto,

$$L_1 = \left(I_{p1} + 2mr_1^2\right)\omega_1$$

Caso 2.

Sea,

L_2 el momento angular

I_{tot2} el momento de inercia total del sistema

I_{m1} el momento de inercia de la mancuerna 1

I_{m2} el momento de inercia de la mancuerna 2

ω_2 la velocidad angular del sistema

Entonces,

$$L_2 = I_{tot2}\omega_2$$

$$I_{tot2} = I_{p2} + 2mr_2^2$$

Por lo tanto,

$$L_2 = \left(I_{p2} + 2mr_2^2\right)\omega_2$$

Ahora bien, como las fuerzas externas son $\vec{F}_{ext} = 0$, también las torcas externas son $\vec{\tau}_{ext} = 0, \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow \left|\vec{L}\right| = cte.$

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

$$\left(I_{p1} + 2mr_1^2\right)\omega_1 = \left(I_{p2} + 2mr_1^2\right)\omega_2$$

Despejemos ω_2,

$$\omega_2 = \frac{I_{p1} + 2mr_1^2}{I_{p2} + 2mr_2^2}\omega_1 = \frac{6 + 2(2)(1)}{4 + 2(2)(0.01)}(0.5)\ rev/s \approx (2.47)(0.5)\ rev/s \approx 1.23\ rev/s$$

La nueva frecuencia de rotación es de aproximadamente de $\mathbf{1.23}\ \boldsymbol{rev/s}$.

4. Una tornamesa fonográfica impulsada por un motor eléctrico acelera a una rapidez constante desde *0* hasta *33.3* revoluciones por minuto en un tiempo de *2.0 s*. La tornamesa es un disco uniforme de metal, de *1.2 kg* de masa y *15 cm* de radio ¿Qué torca se requiere para producir esta aceleración? Si la rueda impulsora hace contacto con la tornamesa en su borde exterior, ¿qué fuerza debe ejercer?

La velocidad angular pasa de ser de $w_0 = 0$ a $w_1 = 33.3\,rev/min = 3.487\ rad/s$ en un tiempo de $\Delta t = 2\ s$.

Calculemos la aceleración angular promedio.

$$\Delta a = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{w_1 - w_0}{\Delta t} = \frac{w_1}{\Delta t}$$

Calculemos el momento de inercia,

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

Como

$$I|\vec{a}| = |\vec{\tau}_{ext}|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{w_1}{\Delta t}\right) = \vec{\tau}_{ext}$$

Solo faltaría sustituir,

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{1}{2}(1.2\ kg)(0.15\ m)^2 \left(\frac{3.487\ rad/s}{2\ s}\right) = 0.0235\ Nm$$

Se requiere de una torca de $\mathbf{0.0235}\ \boldsymbol{Nm}$ para producir esa aceleración

Por otro lado, como,

$$|\vec{\tau}_{ext}| = |r|\left|\vec{F}_{ext}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{ext}\right| = \frac{|\vec{\tau}_{ext}|}{r}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{F}_{ext}\right| = \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{w_1}{\Delta t}\right)\frac{1}{r} = \frac{1}{2} m r \left(\frac{w_1}{\Delta t}\right)$$

Solo faltaría sustituir,

$$\left|\vec{F}_{ext}\right| = \frac{1}{2}(1.2\ kg)(0.15\ m)\left(\frac{3.487\ rad/s}{2\ s}\right) = 0.157\ N$$

La fuerza que se de ejercer es de $\mathbf{0.157}$