



## Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México

Física Estadística

Tarea 3 – 2.3

**Profesores:**

Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano

Kraemer

**Alumno: Sebastián González Juárez**

sebastian\_gonzalezj@ciencias.unam.mx



**2.3. Demuestra que no se puede formar un condensado de Bose en un gas de bosones 2D. Para esto sigue los siguientes pasos:**

- Calcula la densidad de estados de un gas ideal en 2D.
- Escribe el número de partículas como la suma del promedio de las partículas en cada nivel energético.
- Separa las partículas en el estado base del resto en la suma. Escribe las del estado base en términos de la fugacidad.
- Aproxima el número de partículas que no estén en el estado base (la suma infinita) por una integral de la densidad de estados multiplicado por el número promedio de partículas en cada estado.
- Estima  $N_0/N$  usando directamente el cálculo de  $N_0$  (como función de la fugacidad) y usando el despeje de  $N_0 = N - N_{\text{otros}}$ . En este último paso, utiliza la integral con la que aproximaste  $N_{\text{otros}}$ .
- Calcula el punto de intersección entre ambas funciones y argumenta porque esos puntos implican que no hay condensado para  $T \neq 0$ .

**Sol.**

**a) Densidad de estados en 2D.**

La densidad de estados  $g(\epsilon)$  del gas en 2D se expresa como la relación de dispersión  $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . El número de estados con energía menor que  $\epsilon$  es proporcional al área en el espacio  $k$ , que es un círculo de radio  $k$ :

$$N(\epsilon) = \frac{A}{(2\pi)^2} \pi k^2 = \frac{A}{4\pi} \frac{2m\epsilon}{\hbar^2}$$

donde  $A$  es el área del sistema. La densidad de estados es la derivada de  $N(\epsilon)$  con respecto a  $\epsilon$ :

$$g(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{A}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} = \frac{mA}{2\pi\hbar^2}$$

Por lo que tenemos que  $g(\epsilon)$  es const. pues no depende de  $\epsilon$  en 2D.

**b) Número total de partículas.**

El número total de partículas  $N$  es la suma del número promedio de bosones en cada estado, dado por la distribución de Bose-Einstein:

$$N = \sum_{\epsilon} \langle n_{\epsilon} \rangle = \sum_{\epsilon} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

donde  $\beta = 1/(k_B T)$  y  $\mu$  es el potencial químico. Me parece que solo es poner la expresión y ya.

**c) Separar el estado base y escribirlo en términos de la fugacidad.**

Se nos pide que separemos las partículas en el estado base del resto:

$$\epsilon = 0, \quad k = 0$$

$$N = N_0 + \sum_{\epsilon > 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

donde  $N_0$  es el número de partículas en el estado base:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$$

Acá definimos la fugacidad  $z = e^{\beta\mu}$ , entonces:

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{1 - z}$$

Donde  $z \in (0,1)$  cuando  $\mu < 0$ , y  $z \rightarrow 1$  cuando  $\mu \rightarrow 0$ .

**d) Aproximar la suma por una integral.**

Para  $k \neq 0$ , reemplazamos la suma por una integral usando la densidad de estados:

$$\sum_{k \neq 0} \approx \int_0^{\infty} g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon$$

Usando  $g(\epsilon) = \frac{Am}{2\pi\hbar^2}$ :

$$N_{\text{otros}} = \frac{Am}{2\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon$$

Hacemos  $x = \beta\epsilon \Rightarrow d\epsilon = \frac{dx}{\beta}$ , y utilizando la fugacidad  $z = e^{\beta\mu}$ :

$$N_{\text{otros}} = \frac{Am}{2\pi\hbar^2\beta} \int_0^{\infty} \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} dx$$

Para  $\mu \leq 0 (z \leq 1)$ , la integral converge. La integral es:

$$\int_0^{\infty} \frac{z}{e^x - z} dx = -\ln(1 - z)$$

Por lo tanto:

$$N_{\text{otros}} = \frac{Am}{2\pi\hbar^2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{Am}{2\pi\hbar^2\beta} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

O bien,

$$N_{\text{otros}} = \frac{Am}{2\pi\hbar^2} k_B T \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

### e) Comportamiento de $N_0$ y $N_{\text{otros}}$

Por un lado, ya habíamos encontrado que el número de partículas en el estado base es:

$$N_0 = \frac{z}{1-z}, \quad z = e^{\beta\mu}$$

El número total de partículas  $N$  puede escribirse como:  $N = N_0 + N_{\text{otros}}$

Usando la aproximación de la integral del inciso anterior:

$$N_{\text{otros}} = \frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T (-\ln(1-z))$$

Por lo tanto:

$$N_0 = N - \frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T (-\ln(1-z))$$

Iguualamos las dos expresiones para  $N_0$ :

$$\frac{z}{1-z} = N - \frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T (-\ln(1-z)).$$

En el límite  $z \rightarrow 1^-$ ,  $\frac{z}{1-z} \approx \frac{1}{1-z}$ , y  $-\ln(1-z)$  diverge. Por lo tanto, para que  $N_0$  sea finito, necesitamos que:  $N \approx \frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T (-\ln(1-z))$

Esto implica que:  $-\ln(1-z) \approx \frac{2\pi\hbar^2 N}{mA k_B T}$

Sustituyendo de vuelta en  $N_0$ :  $N_0 = N - \frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T \left(\frac{2\pi\hbar^2 N}{mA k_B T}\right) = N - N = 0$

Es decir, en el límite  $z \rightarrow 1^-$ ,  $N_0 \rightarrow 0$ .

De la expresión anterior:  $\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_{\text{otros}}}{N} = 1 - \frac{\frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T (-\ln(1-z))}{N}$

Pero como  $-\ln(1-z) \approx \frac{2\pi\hbar^2 N}{mA k_B T}$ , sustituyendo:

$$\frac{N_0}{N} \approx 1 - \frac{\frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T \cdot \frac{2\pi\hbar^2 N}{mA k_B T}}{N} = 1 - 1 = 0$$

Por ende,  $\frac{N_0}{N} \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow 1^-$ , lo que significa que no hay acumulación macroscópica en el estado base.

**f) Intersección entre ambas funciones e implicación de que no hay condensado en  $T \neq 0$ .**

Resolvamos siguiendo lo realizado en el ejercicio anterior y resolviendo de forma muy análoga, igualamos ambas expresiones para encontrar el punto de intersección:

$$\frac{z}{1-z} + \lambda \ln(1-z) = N, \quad \lambda = \frac{mA}{2\pi\hbar^2} k_B T$$

Vemos que:

1. El término  $\frac{z}{1-z}$  diverge como  $\frac{1}{1-z}$ .
2. El término  $\ln(1-z)$  diverge hacia  $-\infty$ , pero al multiplicarse por  $\lambda > 0$ , contribuye negativamente.

Para que la igualdad se cumpla con  $N$  finito, la suma de los dos términos divergentes debe cancelarse exactamente, lo que solo es posible si:

$$\frac{1}{1-z} \approx -\lambda \ln(1-z)$$

Esto implica que  $N_0 = \frac{z}{1-z}$  debe ser compensado por  $N_{\text{otros}} = -\lambda \ln(1-z)$ , dejando  $N_0 \rightarrow 0$ .

Ahora supongamos que  $N_0$  es una fracción macroscópica de  $N$ , es decir,  $N_0 = cN$  con  $c > 0$ .

$$\begin{aligned} cN &= N - \lambda \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) \\ \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \frac{(1-c)N}{\lambda} \\ \frac{1}{1-z} &= e^{(1-c)N/\lambda} \end{aligned}$$

Esto implica que  $\frac{1}{1-z}$  crece exponencialmente con  $N$  y, por lo tanto,  $N_0 \approx \frac{1}{1-z}$  crecería más rápido que  $N$ , lo cual es físicamente imposible para un sistema con un número finito de partículas.

Así llegamos a la conclusión del rol crucial de la temperatura:

- $AT \neq 0$

El factor  $k_B T$  en  $N_{\text{otros}}$  permite que:

$$N_{\text{otros}} \approx N \quad \text{y} \quad N_0 \approx 0$$

Por lo que no hay acumulación macroscópica en el estado base

- A  $T = 0$ :

( $N_{\text{otros}} \rightarrow 0$ ) trivialmente

Por lo que todas las partículas en estado base  $N_0 = N$

No se puede formar un condensado de Bose en un gas de bosones 2D a temperaturas finitas. La condensación solo es posible en el límite  $T \rightarrow 0$ , donde todos los bosones ocupan el estado fundamental.