Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 12
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

12. Una amiba se divide en dos o muere cada segundo con probabilidades r y 1—r respectivamente.

a) Comenzando con una sola amiba, determina la probabilidad de una eventual extinción.

b) ¿Cuál es la probabilidad de extinción si se comienza con n amibas?

Sol.

Esto es un proceso de ramificación (Galton-Watson) donde una población de amibas se reproduce o muere en cada unidad de tiempo. Nuestro objetivo es determinar la probabilidad de eventual extinción de la población. Definamos la dinámica del proceso:

- La amiba se divide en 2 con probabilidad r
- La amiba muere con probabilidad $1 - r$

El número de descendientes X de una amiba en la siguiente generación sigue la distribución:

$$P(X = 2) = r, \qquad P(X = 0) = 1 - r$$

En este tipo de proceso, la probabilidad de extinción cumple una ecuación en términos de la función generadora de probabilidad de X.

La función generadora de una variable aleatoria X discreta se define como:

$$f(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k$$

De modo que para nuestro problema:

$$f(s) = P(X = 0)s^0 + P(X = 2)s^2 = (1 - r) + rs^2$$

Considerando la probabilidad de extinción q es la solución en $[0,1]$ de la ecuación:

$$q = f(q) = (1 - r) + rq^2$$

Resolviendo la ecuación:

$$rq^2 - q + (1 - r) = 0$$

$$q = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4r(1-r)}}{2r} = \frac{1 \pm |1-2r|}{2r}$$

La probabilidad de extinción debe estar en el intervalo [0,1],

- Si $r \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |1-2r| = 1-2r$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{1+(1-2r)}{2r} = \dfrac{2-2r}{2r} = \dfrac{1-r}{r} \geq 1, \qquad \textit{no válida para } r \leq \dfrac{1}{2} \\ q_2 = \dfrac{1-(1-2r)}{2r} = \dfrac{2r}{2r} = 1, \qquad \text{válida } \textit{para } r \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

i. e. la extinción ocurre con certeza.

- Si $r > \frac{1}{2} \Rightarrow |1-2r| = 2r-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{1+(2r-1)}{2r} = \dfrac{2r}{2r} = 1, \qquad \textit{no válida para } r > \dfrac{1}{2}, \textit{por ser el caso de arriba} \\ q_2 = \dfrac{1-(2r-1)}{2r} = \dfrac{2-2r}{2r} = \dfrac{1-r}{r}, \qquad \text{válida} \end{cases}$$

Por lo tanto, la probabilidad de extinción empezando con una sola amiba es:

$$q = \begin{cases} 1, & r \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-r}{r}, & r > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Una vez determinado la probabilidad de extinción cuando se inicia con una sola amiba, veamos qué pasa si empieza con n amibas independientes, la extinción ocurre cuando todas las n amibas se extinguen.

Como cada una se extingue de manera independiente con probabilidad q, la probabilidad de que todas las n amibas se extingan es simplemente el producto de las probabilidades individuales,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Con eso en mente, definamos $q_n = q^n$ y, por lo tanto, la probabilidad de extinción empezando con n amiba es:

$$q_n = \begin{cases} 1^{\mathrm{n}}, & r \leq \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{1-r}{r}\right)^n, & r > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$