



## Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México  
Electromagnetismo II – Tarea 2

### Profesores:

Dr. Alejandro Reyes Coronado

Ayud. Daniel Espinosa González

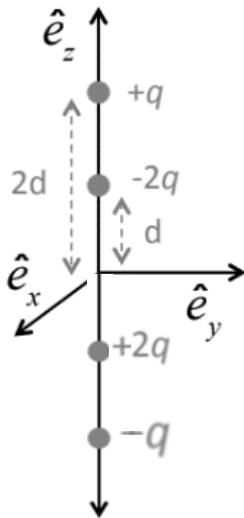
Ayud. Atzin López Tercero

**Alumno: Sebastián González Juárez**

sebastian\_gonzalezj@ciencias.unam.mx



**1.- Problema: (20pts)** Calcula la fuerza sobre la carga  $-2q$  de la figura que se muestra a continuación. El plano  $XY$  representa un plano conductor aterrizado.



Modifique la imagen para ajustarla al planteamiento del método de imágenes, de modo que planteó una carga imagen para cada pareja respetando la simetría con sus respectivas distancias.

Para calcular la fuerza solo faltaría recordar la Ley de Coulomb y el principio de super posición, resultando en que tenemos 3 fuerzas interactuando con nuestra carga  $-2q$ , sumándolas encontraríamos la fuerza total ejercida.

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2q)(q)}{d^2} (-\hat{e}_z), & \bar{F}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2q)(2q)}{(2d)^2} \hat{e}_z, \\ \bar{F}_3 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2q)(-q)}{(3d)^2} \hat{e}_z\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2q)(q)}{d^2} (-\hat{e}_z) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2q)(2q)}{(2d)^2} \hat{e}_z + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2q)(-q)}{(3d)^2} \hat{e}_z \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2q^2}{d^2} - \frac{4q^2}{(2d)^2} + \frac{2q^2}{(3d)^2} \right] \hat{e}_z \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2q^2 - q^2 + \frac{2}{9}q^2}{d^2} \right] \hat{e}_z \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{11}{9} \left( \frac{q}{d} \right)^2 \hat{e}_z\end{aligned}$$

La fuerza sobre la carga  $-2q$  es:

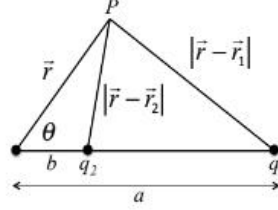
$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{11}{9} \left( \frac{q}{d} \right)^2 \hat{e}_z$$

**2. Problema: (20pts)**

- (a) Usando la ley de cosenos, muestra que el potencial dado por la siguiente expresión es cero sobre una esfera de radio  $r = R$ :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right),$$

basándote en la siguiente figura



y haciendo uso de

$$q_2 = -\frac{R}{a}q_1 \quad \text{and} \quad b = \frac{R^2}{a},$$

Dem.

Veamos quienes son las normas de  $|\vec{r} - \vec{r}_1|$  y  $|\vec{r} - \vec{r}_2|$ ,

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}, \quad |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}$$

Obtengamos el potencial y sustituyendo nuestra información hallada y dada por el problema,

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{a}q_1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{a} \cos \theta}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{R}{a} \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{a} \cos \theta}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{q_1}{\sqrt{\left(\frac{ar}{R}\right)^2 + R^2 - 2Ra \cos \theta}} \right) \end{aligned}$$

Si  $r = R$ ,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}} - \frac{q_1}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2Ra \cos \theta}} \right) = 0$$

Vemos que  $\phi = 0$  cuando  $r = R$ .

(b) Calcula la densidad de carga superficial inducida en la esfera, como función del ángulo  $\theta$ . Integra esta expresión para obtener la carga total inducida.

Con respecto a nuestro problema, la densidad de carga está dada por la relación,  $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}$

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \left( -\frac{1}{2} \frac{2r - 2a \cos \theta}{(r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{2a^2 r}{R^2} - 2a \cos \theta}{\left(\left(\frac{ar}{R}\right)^2 + R^2 - 2ra \cos \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Como se pide la densidad de carga superficial, consideremos  $r = R$ ,

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= -\frac{q_1}{4\pi} \left( -\frac{R - a \cos \theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{a^2}{R} - a \cos \theta}{(a^2 + R^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= -\frac{q_1}{4\pi} \left( -R + a \cos \theta + \frac{a^2}{R} - a \cos \theta \right) \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{q_1}{4\pi R} (R^2 - a^2) \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Así hemos obtenido la densidad de carga superficial, procedamos a integrar para obtener la carga total inducida sobre la esfera,

$$\begin{aligned} q_i &= \int \sigma d\bar{a} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q_1}{4\pi} (R^2 - a^2) \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{q_1}{4\pi R} (R^2 - a^2) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{q_1}{4\pi R} (R^2 - a^2) 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Aplicamos cambio de variable,  $u = \cos \theta$ ,

$$\begin{aligned} &= \frac{q_1}{2R} (R^2 - a^2) R^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Rau)^{\frac{3}{2}}} du \\ &= \frac{q_1}{2R} (R^2 - a^2) R^2 \left( -\frac{1}{Ra \sqrt{R^2 + a^2 - 2Rau}} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{q_1}{2a} (a^2 - R^2) \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{q_1}{2a} (a^2 - R^2) \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra}} \right) \end{aligned}$$

Considerando  $a > R$ , pues si no la carga estaría afuera, podemos aproximar

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra} &= a + R, & \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra} &= a - R \\ \Rightarrow q_i &= \frac{q_1}{2a} (a^2 - R^2) \left( \frac{1}{a + R} - \frac{1}{a - R} \right) = \frac{q_1}{2a} ((a + R) - (a - R)) = \frac{q_1}{2a} (-2R) = -\frac{qR}{a} = q_2 \end{aligned}$$

Hemos encontrado la carga total inducida la cual es  $q_2$ .

**3. Problema: (20pts)** Una línea infinita con densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$  se coloca a una distancia  $d$  sobre un plano conductor aterrizado. La línea es paralela al eje  $x$  y el plano conductor está localizado en el plano  $XY$ .

(a) Calcula el potencial en la región superior del plano conductor.

(b) Calcula la densidad de carga inducida en el plano conductor.

Primero observemos que podemos encerrar la línea infinita de carga uniforme por una superficie gaussiana, de modo que al estar encerrada podemos utilizar la ley de gauss y calcular el campo eléctrico.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \Rightarrow E \cdot 2\pi s \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{s} \hat{s}$$

Con podemos obtener el potencial a una cierta distancia, de nuestra densidad de carga uniforme,  $\nabla\phi = \vec{E}$ , para eso consideremos el método de imágenes, pero antes veamos el potencial de una sola densidad de carga tomando como referencia una distancia  $a$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(s) &= - \int_a^s \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{s} ds = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \int_a^s \frac{1}{s} ds = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda (\ln s) \Big|_a^s = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \left( \ln \frac{s}{a} \right) \\ \Rightarrow \phi(s) &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{s^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

De modo que al considerar los potenciales de la densidad de carga y la de la imagen tenemos,

$$\phi_+(s) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{s_+^2}{a^2} \right), \quad \phi_-(s) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{s_-^2}{a^2} \right)$$

Y, por principio de superposición, el potencial total es la suma de los potenciales individuales:

$$\phi(s) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{s_+^2}{a^2} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{s_-^2}{a^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( - \ln \frac{s_+^2}{a^2} + \ln \frac{s_-^2}{a^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{\frac{s_-^2}{a^2}}{\frac{s_+^2}{a^2}} \right)$$

Por lo tanto, el potencial debido a dos distribuciones lineales de carga de signos opuestos en un punto específico en el espacio es,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{s_-^2}{s_+^2} \right)$$

Observemos que, por construcción,  $s_+ = \sqrt{y^2 + (z-d)^2}$  y  $s_- = \sqrt{y^2 + (z+d)^2}$ ,

$$\therefore \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left( \ln \frac{\left( \sqrt{y^2 + (z+d)^2} \right)^2}{\left( \sqrt{y^2 + (z-d)^2} \right)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \ln \frac{y^2 + (z+d)^2}{y^2 + (z-d)^2}$$

Calculemos la densidad de carga inducida en el plano del conductor,  $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial n}$

Obsérvese que nos interesa cuando  $z = 0$ , además toda la carga va dirigida de forma perpendicular a el eje  $z$ , así que  $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial z}$ . Obtengamos la derivada,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\frac{y^2 + (z+d)^2}{y^2 + (z-d)^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{y^2 + (z+d)^2}{y^2 + (z-d)^2} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y^2 + (z+d)^2}{y^2 + (z-d)^2} \right) \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{(y^2 + (z-d)^2)2(z+d) - (y^2 + (z+d)^2)2(z-d)}{(y^2 + (z-d)^2)^2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2[(z+d)(y^2 + z^2 - 2zd + d^2) - (z-d)(y^2 + z^2 + 2zd + d^2)]}{(y^2 + (z-d)^2)^2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2[y^2(z+d-z+d) + z^3 + zd^2 - 2zd(z+d) - y^2(z-d+z+d) - z^3 - zd^2 + 2zd(z-d)]}{(y^2 + (z-d)^2)^2}
\end{aligned}$$

Evaluemos en  $z = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d(y^2 + d^2) + 2d(y^2 + d^2)}{(y^2 + d^2)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{4d(y^2 + d^2)}{(y^2 + d^2)^2} = \frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0(y^2 + d^2)}$$

Por lo tanto, la densidad de carga superficial inducida es,

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\lambda d}{\pi\epsilon_0(y^2 + d^2)} = -\frac{\lambda d}{\pi(y^2 + d^2)}$$

**Problema: (20pts)** Para el caso de una carga puntual  $q$  localizada cerca de la interfaz entre dos medios semi-infinitos dieléctricos lineales, homogéneos e isotrópicos, no absorbentes, como se muestra en la figura a continuación, muestra que el potencial escalar dado por

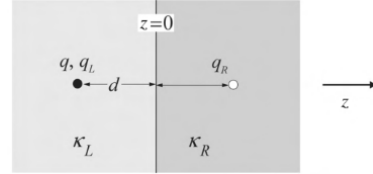
$$\phi_L(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_L} \left[ \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} + \frac{q_R}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} \right] \quad \phi_R(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_R} \left[ \frac{q_L}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} \right]$$

satisface las condiciones de contorno para el potencial, dadas por:  $\phi_L(\vec{r}_S) = \phi_R(\vec{r}_S)$

$$\kappa_L \frac{\partial \phi_L}{\partial n} \Big|_S = \kappa_R \frac{\partial \phi_R}{\partial n} \Big|_S$$

si se cumple que

$$q_R = \frac{\kappa_L - \kappa_R}{\kappa_L + \kappa_R} q \quad \text{y} \quad q_L = \frac{2\kappa_R}{\kappa_L + \kappa_R} q.$$



Tenemos que encontrar 2 ecuaciones que nos relacionen las cargas, para poder hacer un sistema de ecuaciones.

Para la primera condición evaluemos la continuidad del potencial. De modo que hay que ver que sucede para ambos potenciales en  $z = 0$ , donde ambos teóricamente deberían valer lo mismo por continuidad,

$$\phi_L|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_L} \left[ \frac{q}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q_R}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right], \quad \phi_R|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_R} \left[ \frac{q_L}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Lo que nos lleva a la siguiente igualdad,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_L} \frac{q + q_R}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_R} \frac{q_L}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{q + q_R}{\epsilon_L} = \frac{q_L}{\epsilon_R} \Rightarrow k_R(q + q_R) = k_L q_L$$

Para la segunda condición, evaluemos la continuidad del desplazamiento eléctrico normal, para eso, obtengamos las parciales, en este caso solo interactuamos con el eje  $z$ , así que,

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_L} \left[ -\frac{q(z+d)}{(\rho^2 + (z+d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q_R(z-d)}{(\rho^2 + (z-d)^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad \frac{\partial \phi_R}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_R} \left[ -\frac{q_L(z+d)}{(\rho^2 + (z+d)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Con esto tenemos que cuando  $z = 0$ , es decir, en el contorno,

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_L} \frac{d(q - q_R)}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial \phi_R}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_R} \frac{dq_L}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Tenemos que se cumple en el contorno que,

$$-k_L \frac{1}{4\pi k_L} \frac{d(q - q_R)}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = -k_R \frac{1}{4\pi k_R} \frac{dq_L}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow (q - q_R) = q_L$$

Llegamos a 2 ecuaciones,

$$k_R(q + q_R) = k_L q_L$$

$$(q - q_R) = q_L$$

Ahora lo que pide el problema es verificar que se satisfagan si se cumple que

$$q_R = \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} q, \quad q_L = \frac{2k_R}{k_L + k_R} q$$

Las cuales son las soluciones propuestas,

De la primera igualdad,

$$\begin{aligned} k_R(q + q_R) &= k_L q_L \\ k_R \left( q + \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} q \right) &= k_L \frac{2k_R}{k_L + k_R} q \\ \left( 1 + \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} \right) &= k_L \frac{2}{k_L + k_R} \\ k_L + k_R \left( 1 + \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} \right) &= 2k_L \\ \left( k_L + k_R + (k_L + k_R) \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} \right) &= 2k_L \\ (k_L + k_R + k_L - k_R) &= 2k_L \\ 2k_L &= 2k_L \end{aligned}$$

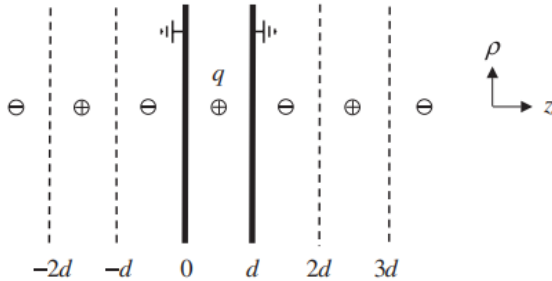
Por lo tanto, se cumple con esa solución propuesta,

De la segunda igualdad,

$$\begin{aligned} (q - q_R) &= q_L \\ \left( q - \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} q \right) &= \frac{2k_R}{k_L + k_R} q \\ \left( 1 - \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} \right) &= \frac{2k_R}{k_L + k_R} \\ \left( (k_L + k_R) - \frac{k_L - k_R}{k_L + k_R} (k_L + k_R) \right) &= 2k_R \\ (k_L + k_R - k_L + k_R) &= 2k_R \\ 2k_R &= 2k_R \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple con esa solución propuesta,

**5.- Problema: (20pts)** Considera el problema de una carga puntual  $q$  localizada en medio de dos placas planas infinitas, metálicas y aterrizadas, separadas por una distancia  $d$ . Empleando el método de imágenes, calcula el potencial escalar de manera aproximada para regiones alejadas de la partícula puntual (expresiones válidas para distancias mayores a  $d$  de la carga puntual, entre las dos placas). Una vez obtenido el potencial escalar, calcula el campo eléctrico entre las placas metálicas. Grafica tanto el potencial como el campo eléctrico entre las placas.



Colocamos las cargas imágenes como se indican en la imagen de junto. Todas a una distancia  $d$ .

Observemos que las cargas positivas se ubicaran en  $z = 2dm + \frac{d}{2}$  y las negativas en  $z = 2dm - \frac{d}{2}$ , con  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ahora podemos percatarnos que podemos expresar este problema con coordenadas cilíndricas, en donde tenemos simétrica alrededor del eje  $z$ , y, podemos utilizar la ecuación de Laplace si nos alejamos de este eje. Pues podemos aproximar de buena forma y dar con una solución utilizando separación de variables.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \approx \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Esta aproximación se da cuando  $\rho \gg d$ , ahora si apliquemos separación de variables. Por el momento utilicemos notación cartesiana para seguir como se realizó en clase y que siga con los apuntes. Proponemos una solución en forma de producto para separar variables,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 &\Rightarrow \phi(x, z) = X(x)Z(z) \Rightarrow \frac{\partial_x^2 X(x)Z(z) + \partial_z^2 X(x)Z(z)}{X(x)Z(z)} = 0 \\ \Rightarrow C_1 = \frac{1}{X(x)} \partial_x^2 X(x) &= -\frac{1}{Z(z)} \partial_z^2 Z(z) = -C_2 \Rightarrow \partial_x^2 X(x) = C_1 X(x) \quad y \quad \partial_z^2 Z(z) = -C_2 Z(z) \end{aligned}$$

De este modo sus soluciones son:  $X(x) = Ae^{cx} + Be^{-cx}$ ,  $Z(z) = C \sin(ez) + D \cos(ez)$

Consideramos la periodicidad  $L = 2d$ , de modo que la solución será dominada por el término  $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ , pues  $\rho \gg d$ . Por lo que el valor aproximado para el potencial, haciendo separación de variables es,

$$\phi(\rho, z) \sim \frac{q}{\epsilon_0 d} \exp(-\pi\rho/d) \sin(\pi z/d) \quad \rho \gg d, \quad 0 \leq z \leq d.$$

Para obtener el campo eléctrico a partir del potencial escalar, podemos utilizar la relación:

$$\vec{E}(\rho, z) = -\nabla \phi(\rho, z)$$

Dado que el potencial está en coordenadas cilíndricas, la expresión del gradiente en estas coordenadas es:  $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z}$

Entonces, para el potencial dado:  $\phi(\rho, z) = \frac{q}{\epsilon_0 d} \exp\left(-\frac{\pi\rho}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)$

El campo eléctrico en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{E}(\rho, z) = \frac{\pi q}{\epsilon_0 d^2} \exp\left(-\frac{\pi\rho}{d}\right) \left[ \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right) \hat{\rho} - \cos\left(\frac{\pi z}{d}\right) \hat{z} \right]$$



Ahora si grafiquemos,

```
(*Definir constantes*) q = 1; (*Carga en unidades arbitrarias*)
epsilon0 = 8.854 * 10^-12; (*Permitividad del vacío en F/m*)
d = 1; (*Distancia entre las placas en metros*)
pi = Pi;
    |número pi

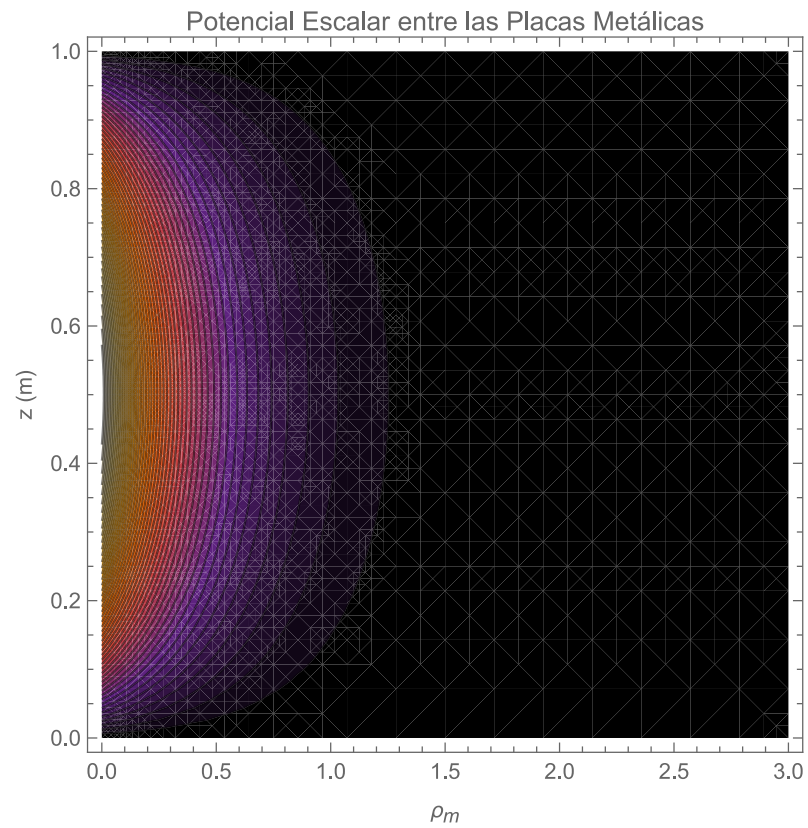
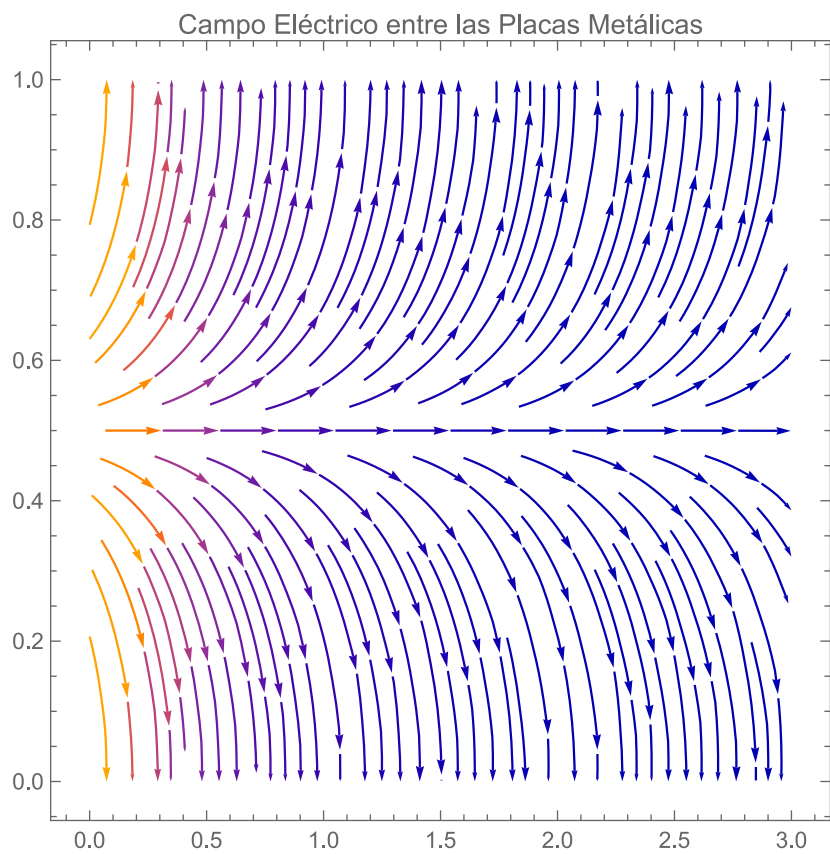
(*Expresión del potencial escalar phi*)
phi[rho_, z_] := (q / (epsilon0 * d)) * Exp[-pi * rho / d] * Sin[pi * z / d]
    |exponencial          |seno

(*Campo eléctrico como el gradiente negativo del potencial*)
Erho = D[phi[rho, z], rho];
    |deriva
Ez = D[phi[rho, z], z];
    |deriva
Efield[rho_, z_] := {-Erho, -Ez};

(*Graficar el campo eléctrico como campo de líneas*)
StreamPlot[Efield[rho, z], {rho, 0, 3 * d}, {z, 0, d}, StreamPoints → Fine,
    |representación de flujo          |puntos de flujo    |fino
    StreamStyle → Blue, PlotRange → All,
    |estilo de flujo    |azul    |rango de rep... |todo
    AxesLabel → {"!\(\(*SubscriptBox[\(\rho\), \(\m\)]\)\"", "z (m)"} ,
    |etiqueta de ejes
    PlotLabel → "Campo Eléctrico entre las Placas Metálicas"]
    |etiqueta de representación

(*Graficar el potencial escalar usando ContourPlot*)
ContourPlot[phi[rho, z], {rho, 0, 3 * d}, {z, 0, d}, Contours → 50,
    |representación de contornos          |contornos
    ColorFunction → "SunsetColors", PlotRange → All,
    |función de color          |rango de rep... |todo
    FrameLabel → {"!\(\(*SubscriptBox[\(\rho\), \(\m\)]\)\"", "z (m)"} ,
    |etiqueta de marco
    PlotLabel → "Potencial Escalar entre las Placas Metálicas",
    |etiqueta de representación
    ColorFunctionScaling → True]
    |reescala argumentos de la fu... |verdadero
```

En las gráficas podemos ver como efectivamente el equipotencial cumple con la geometría de las placas para el eje z, además el potencial se realizó de esa forma para diferencia por colores.

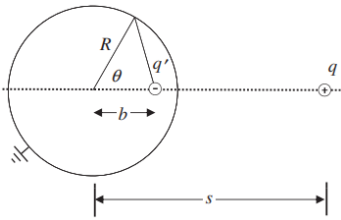


**6.- Problema TORITO: (20pts)** Una carga puntual  $q$  se coloca a una distancia  $2R$  del centro de una esfera conductora aislada de radio  $R$ . Se observa que la fuerza sobre la carga  $q$  es cero en esa posición. Ahora se mueve la carga a una distancia  $3R$  de centro de la esfera. Muestra que la fuerza sobre  $q$  en esa nueva posición es repulsiva y con magnitud dada por:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{173}{5,184} \right) \frac{q^2}{R^2}.$$

*Hint: Una superficie equipotencial esférica permanece como equipotencial si una carga puntual imagen se coloca en su centro.*

Dem. Tenemos que la esfera es conductora, pues vemos como existe esa atracción, si no la fuerza sobre la carga  $q$  a una distancia de  $2R$  de centro sería distinta de 0. Procedemos a poner una carga imagen,  $q' = -\frac{qR}{s}$ , que como se ve en la imagen,  $s$  se considera la distancia entre el centro de la esfera y la carga  $q$ ,  $R$  es evidente que es el radio de la esfera. La imagen se encontrará a una distancia  $d = \frac{R^2}{s}$  desde el centro. Proponemos una segunda carga imagen cargada tal que  $q'' = Q - q'$  ubicada en el entro de la esfera. Por la ley de Gauss, la carga total en la esfera ahora es  $Q$  y el límite de la esfera sigue siendo equipotencial.



Así debemos plantear nuestro sistema de ecuaciones con superposición, el cual satisfaga que para cierta carga  $Q$ , se logre en la fuerza 0, recordando que la fuerza está dada por:

$$\mathbf{F} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (s-b)^2} \hat{\mathbf{s}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rs}{(s^2 - R^2)^2}.$$

De este modo,  $F = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qq'}{(s-d)^2} + \frac{qq''}{s^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-\frac{qR}{s}}{(s-d)^2} + \frac{Q - q'}{s^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-\frac{qR}{\frac{R^2}{s}}}{\left(2R - \frac{R^2}{s}\right)^2} + \frac{Q - \left(-\frac{qR}{s}\right)}{(2R)^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-\frac{q}{2}}{\left(2R - \frac{R}{2}\right)^2} + \frac{Q + \frac{q}{2}}{(2R)^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{q}{\left(2R - \frac{R}{2}\right)^2} + \frac{Q + \frac{q}{2}}{(2R)^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{-\frac{q}{2}(2R)^2 + \left(2R - \frac{R}{2}\right)^2 \left(Q + \frac{q}{2}\right)}{(2R)^2 \left(2R - \frac{R}{2}\right)^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -2qR^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 \left(Q + \frac{q}{2}\right) = 0 \\
&\Rightarrow -2qR^2 + \frac{9}{4}R^2 \left(Q + \frac{q}{2}\right) = 0 \\
&\Rightarrow -2q + \frac{9}{4}\left(Q + \frac{q}{2}\right) = 0 \\
&\Rightarrow Q + \frac{q}{2} = \frac{4}{9}2q \\
&\Rightarrow Q = \frac{8}{9}q - \frac{q}{2} \\
&\Rightarrow Q = \frac{7}{18}q
\end{aligned}$$

Bien, entonces llegamos a que  $Q = \frac{7}{18}q$ , ahora veamos cuando movemos la carga  $q$  para la posición  $s = 3R$ , también esto mueve las cargas imágenes, de modo que  $q' = -\frac{q}{3}$  y  $q'' = Q + \frac{q}{2}$ ,

Calculemos la fuerza,

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{qq'}{(s-d)^2} + \frac{qq''}{s^2} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{3} \frac{q}{\left(3R - \frac{R^2}{3R}\right)^2} + \frac{Q + \frac{q}{2}}{9R^2} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{3} \frac{q}{\left(3R - \frac{R}{3}\right)^2} + \frac{\frac{7}{18}q + \frac{q}{2}}{9R^2} \right) \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{8}{3}R\right)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{9R^2} + \frac{7}{18} \frac{1}{9R^2} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} \left( -\frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} + \frac{1}{27} + \frac{7}{18} \frac{1}{9} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{173}{5184} \frac{q^2}{R^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que si estará dada por la magnitud que indicaba el problema, al cual indica que es repulsiva.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{173}{5184} \frac{q^2}{R^2} \quad \blacksquare$$