Facultad de Ciencias

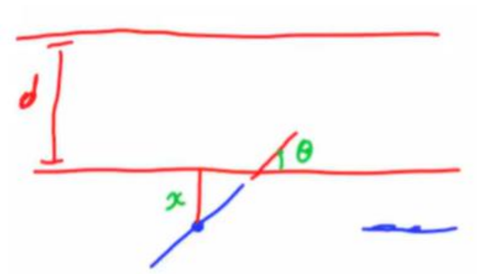
Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 09
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

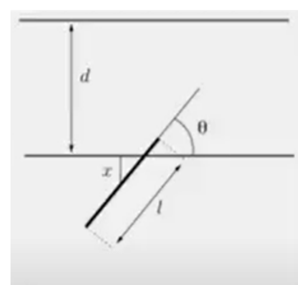
9. Aguja de Buffon. En el piso se trazan líneas paralelas que distan L y se lanza una aguja (infinitesimalmente delgada) de longitud l al aire. ¿cuál es la probabilidad de que la aguja cruce una de las líneas paralelas del piso? El problema tiene que considerar ambas posibilidades, L < l y L > l.

Sol.



Primero considere que la aguja después de ser lanzada al aire queda determinada por dos variables aleatorias:

- x: la distancia del centro de la aguja a la línea más cercana.
- θ: el ángulo de inclinación de la aguja con respecto a las líneas paralelas.



Veamos que el centro de la aguja puede caer dentro de una franja de ancho $L/2$ y la aguja puede orientarse en las direcciones entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, así, nuestro espacio muestral es:

$$\Omega = \left\{(x, \theta) \mid 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \ , \ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ahora veamos el espacio del evento, la aguja cruza una línea cuando la proyección perpendicular de la mitad de la aguja es mayor o igual a la distancia del centro a la línea más cercana, es decir: $x \leq \frac{l}{2} \sin\theta$

Por lo tanto, el espacio del evento es:

$$E = \left\{(x, \theta) \mid 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \ \ , \ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ \ , \ \ x \leq \frac{l}{2} \sin\theta\right\}$$

Obs. En clase se realizó con el coseno

La probabilidad de que la aguja cruce una línea se calcula como el cociente entre el área del evento E y el área total del espacio muestral Ω:

$$P(E) = \frac{Área\ de\ E}{Área\ de\ \Omega} = \frac{\iint_E dxd\theta}{\iint_\Omega dxd\theta}$$

Caso 1. $L \geq l$

La máx. distancia del centro de la aguja a una línea es $\frac{L}{2}$, y la condición de cruce es:

$$x \leq \frac{l}{2}\sin\theta$$

Por lo tanto, considerando los límites de integración la proba queda como:

$$\iint_\Omega dxd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{L}{2}} dxd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{L}{2}d\theta = \frac{L}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{L\pi}{4}$$

$$\iint_E dxd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{l}{2}\sin\theta} dxd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{l}{2}\sin\theta\,d\theta = -\frac{l}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right] = -\frac{l}{2}[0-1] = \frac{l}{2}$$

Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{L\pi}{4}} = \frac{2l}{L\pi}$$

Caso 2. $L < l$

Hay una región donde la aguja siempre cruza una línea. Esto ocurre cuando:

$$\frac{l}{2}\sin\theta \geq \frac{L}{2} \Rightarrow \sin\theta \geq \frac{L}{l} \Rightarrow \theta \geq \arcsin\left(\frac{L}{l}\right)$$

Definamos un ángulo mínimo o critico: $\theta_c = \arcsin\left(\frac{L}{l}\right)$

Ahora hay que ver que sucede en las secciones $0 \leq \theta \leq \theta_c$ y $\theta_c \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

- Para $0 \leq \theta \leq \theta_c$ (Cuando la aguja no siempre cruza)

$$\int_0^{\theta_c}\int_0^{\frac{l}{2}\sin\theta} dxd\theta = \int_0^{\theta_c}\frac{l}{2}\sin\theta\,d\theta = -\frac{l}{2}(\cos\theta_c - \cos 0) = -\frac{l}{2}\left[\cos\left(\arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right) - 1\right]$$
$$= \frac{l}{2}\left[1 - \cos\left(\arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right)\right]$$

- Para $\theta_c \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (Cuando la aguja siempre cruza i.e. $x \in \left[0, \frac{L}{2}\right]$)

$$\int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{L}{2}} dxd\theta = \int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}}\frac{L}{2}d\theta = \frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_c\right) = \frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right)$$

Sumaremos ambas contribuciones. También ya sabíamos que:

$$\iint_{\Omega} dx\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{L}{2}} dx\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L}{2}\,d\theta = \frac{L}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{L\pi}{4}$$

Por lo tanto,

$$P(E) = \frac{\frac{l}{2}\left[1 - \cos\left(\arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right)\right] + \frac{L}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right)}{\frac{L\pi}{4}}$$
$$= \frac{2l}{L\pi}\left[1 - \cos\left(\arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right)\right] + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right)$$
$$= 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{L}{l}\right) + \frac{2l}{L\pi}\left[1 - \cos\left(\arcsin\left(\frac{L}{l}\right)\right)\right]$$

Lo cual coincide con lo de Luis rincón:

$$\frac{2\ell}{\pi L} - \frac{2}{\pi L}\left(\sqrt{\ell^2 - L^2} + L \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{L}{\ell}\right)\right) + 1.$$

28. El problema de la aguja de Buffón. Considere un conjunto infinito de líneas horizontales paralelas sobre una superficie plana como se muestra en la Figura 1.9. La distancia entre una línea y otra es L. Se deja caer una aguja de longitud ℓ sobre la superficie. Suponga $\ell \leqslant L$. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja cruce alguna línea?

Respuesta: $\frac{2\ell}{\pi L}$.

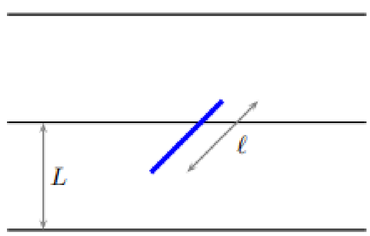


Figura 1.9

Como una simplificación suponga el caso $\ell = L$ y sea A el evento que ocurre cuando la aguja toca alguna de las líneas. Si se efectúa este experimento n veces y n_A denota el número de ocurrencias del evento A, entonces el cociente n_A/n es cercano a $P(A)$. Así, tenemos la aproximación

$$\frac{2}{\pi} \approx \frac{n_A}{n},$$

de donde puede obtenerse una aproximación para π, a partir del experimento simple de lanzar agujas en una superficie de líneas paralelas:

$$\pi \approx \frac{2n}{n_A}.$$

Suponga ahora $\ell \geqslant L$. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja cruce alguna línea?

Respuesta: $1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen}(\frac{L}{\ell}) + \frac{2\ell}{\pi L}(1 - \cos(\operatorname{arc\,sen}(\frac{L}{\ell})))$.

Usando la identidad $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, la respuesta anterior se puede escribir también como sigue:

$$\frac{2\ell}{\pi L} - \frac{2}{\pi L}(\sqrt{\ell^2 - L^2} + L \operatorname{arc\,sen}(\frac{L}{\ell})) + 1.$$