Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 23
Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez

sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

23. ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de n personas haya por lo menos dos que cumplan el mismo día considerando que hay años bisiestos?

Sol.

Considerando que, de cada 400 años, 303 años tienen 365 días y 97 años tienen 366 días. Es directo que la proposición de años bisiestos es $\frac{97}{400}$ lo que implica que de años normales será $\frac{303}{400}$.

Para calcular la proba de que tengamos una coincidencia, usamos el complemento:

$$P(C) = 1 - P(D)$$

Donde:

- $C =$ {Tenemos una coincidencia}
- $D =${Todos son distintos}

Vemos que podemos pensar este ejercicio en dos casos para D:

- $A =$ {Nadie nace el 29 de febrero}
- $B =$ {Una única persona nace el 29 de febrero}

Para ambos casos vemos que las demás personas cumplirán años en los 365 días del año.

Además, tengamos en mente que:

- La cantidad total de días que se consideran son: $365(303) + 366(97) = 146097$
- La cantidad total de días 29 de febrero es 97.
- La cantidad total de días sin el 29 de febrero es $146097 - 97 = 146000$

Caso 1. Nadie nace el 29 de febrero

Estamos seguros de que nadie nace el 29 de febrero, así, la proba de una persona de nacer sería:

$$\frac{400}{146000}$$

Pues son los 400 años entre los 146097 días totales. Y para n personas sería:

$$\left(\frac{400}{146000}\right)^n$$

Así que nos encontramos en el problema clásico visto en el problema 22, pues los cumpleaños se distribuyen uniformemente entre 365 días. Así, la probabilidad de que n personas tengan cumpleaños distintos:

$$P(A') = \frac{365}{365}\frac{364}{365}\dots\frac{365-(n-1)}{365} = \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$$

Así que para nuestro caso hay que agregar la contribución que ya teníamos, por lo que:

$$P(A) = \left(\frac{400}{146000}\right)^n \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$$

Caso 2. Una única persona nace el 29 de febrero.

La proba de que esa persona nazca el 29 de febrero es:

$$\frac{97}{146097}$$

Acá seguimos como en el caso anterior solo que con $n-1$ personas. Las otras personas cumplen en sus días con una proba de:

$$\left(\frac{400}{146000}\right)^{n-1}$$

Siguiendo la idea,

$$P(B) = \frac{365}{365}\frac{364}{365}\dots\frac{365-(n-1-1)}{365} = \frac{365!}{\big(365-(n-1)\big)!\,365^n}$$

Así que para nuestro caso hay que agregar las contribuciones que ya tenemos, por lo que:

$$P(B) = \frac{97}{146097}\left(\frac{400}{146000}\right)^{n-1} \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$$

Sumando ambas contribuciones de los dos casos:

$$P(D) = P(A) + P(B) = \left(\frac{400}{146000}\right)^n \frac{365!}{(365-n)!\,365^n} + \frac{97}{146097}\left(\frac{400}{146000}\right)^{n-1} \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$$

Se considera que $n \le 366$, pues para $n > 366$ sería imposible y la proba es 0.

Ahora si podemos calcular la proba de que en n personas al menos una pareja cumpla el mismo:

$$P(C) = 1 - \left[\left(\frac{400}{146000}\right)^n \frac{365!}{(365-n)!\,365^n} + \frac{97}{146097}\left(\frac{400}{146000}\right)^{n-1} \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}\right]$$