3.2.3 Rapidez de un gas: Obtén la distribución de las rapideces (normas de las velocidades) en el ensamble canónico. Haz el cálculo completo, es decir, primero obtén la distribución gaussiana sobre las componentes de la velocidad y después usa eso para demostrar que la distribución de las rapideces sigue la distribución de Maxwell-Boltzmann.

La idea del gas ideal clásico es de partículas no interactuantes entre sí, de modo que cada partícula es ind.

No considera potencial externo (gravedad, campos eléctricos, etc), y sin colisiones la energía es puramente cinética.

$$H = \frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

Así el espacio fase de cada partícula esta dado por sus grados de libertad de velocidad.

En ensamble canónico, la proba de que un sistema se encuentre en un microestado x con energía $H(x)$ es:

$$P(E) \propto e^{-\beta E}, \text{con } \beta = \frac{1}{k_B T} \text{ la const. Boltzmann}$$

Tenemos un gas ideal en equilibrio térmico, por lo que las probas de microestados son dadas por el canónico.

La proba de que una partícula tenga una cierta velocidad queda por el factor de Boltzmann con su energía cinética.

$$P\left(v_x, v_y, v_z\right) \propto e^{-\beta \frac{1}{2} m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)} = e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2 - \beta \frac{1}{2} m v_y^2 - \beta \frac{1}{2} m v_z^2}$$

La cual es la distribución de velocidades de una partícula en el gas y vemos que cada componente de la velocidad se distribuye de forma independiente. $P(v_i) \propto e^{-A v_i^2},\ A = \frac{\beta m}{2}$

Ahora hay dos formas, podemos integrar normalizando y seguir los pasos que hicimos con las gaussianas o compararla con los resultados que ya tenemos de proba que es la función de densidad de la gaussiana:

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \mu = 0 \ \ y \ \ A = \frac{1}{2\sigma^2} \Rightarrow \frac{\beta m}{2} = \frac{1}{2\sigma^2} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{\beta m}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \therefore P(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\, e^{-\frac{m v_i^2}{2 k_B T}}$$

Distribución gaussiana centrada en cero, $\langle v_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_i P(v_i) dv_i$, donde v_i es función impar y $P(v_i)$ par positiva.

De modo que $v_i P(v_i)$ es impar, por ende, de $-\infty$ a ∞ $\langle v_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_i P(v_i) dv_i = 0, \therefore \langle v_i \rangle = 0.$

Como las componentes son independientes, la distribución conjunta es el producto de las tres:

$$P\left(v_x, v_y, v_z\right) = P(v_x) P\left(v_y\right) P(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2 k_B T}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2 k_B T} v^2}$$

Solo depende de $v^2 = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$. Para obtener la distribución de la rapidez, pasamos a coordenadas esféricas:

$$v_x = v \sin\theta \cos\phi\,, \qquad v_y = v \sin\theta \cos\phi\,, \qquad v_z = v\cos\theta\,, \qquad dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin\theta\, dv d\theta d\phi$$

Entonces la probabilidad de que la rapidez esté entre v y $v + dv$ es:

$$P(v)dv = \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} P(\bar{v})\, v^2 \sin\theta\, dv d\theta d\phi = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2 k_B T} v^2} v^2 dv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2 k_B T} v^2} v^2 dv (2\pi)(2) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m v^2}{2 k_B T}} dv \therefore P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m v^2}{2 k_B T}}$$

La cual es la distribución de Maxwell-Boltzmann de las rapideces de un gas en equilibrio térmico a temperatura T.