Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de México
Física Estadística
Tarea 1- 20

Profesores:
Dr. Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer
Alumno: Sebastián González Juárez
sebastian_gonzalezj@ciencias.unam.mx

20. Supón que tienes n urnas y b bolitas ¿Cuál es el número de combinaciones para acomodar esas bolitas en las n urnas si:

a) Se pueden acomodar tantas bolitas como se quiera (bosones) en cada urna y las bolitas son indistinguibles (partículas cuánticas)?

b) Se pueden acomodar tantas bolitas como se quiera en cada urna y las bolitas son distinguibles (partículas clásicas)?

c) Se pueden acomodar una bolita por urna (fermiones) y las bolitas son indistinguibles?

d) Se pueden acomodar una bolita por urna y las bolitas son distinguibles?

Sol.

a) Bolitas indistinguibles y urnas con capacidad ilimitada

Queremos contar de cuántas maneras se pueden distribuir b bolitas indistinguibles en n urnas cuando no hay restricciones en la cantidad de bolitas que puede recibir cada urna.

Así que hay que encontrar el número de soluciones de la ecuación: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b$

donde x_i representa la cantidad de bolitas en la urna i.

El planteamiento es a partir del método de estrellas y barras, que nos permite contar cómo se pueden distribuir b objetos idénticos en n categorías distintas.

Por ejemplo, representamos las b bolitas con estrellas (*) y usamos barras (|) para separar las urnas. Si b = 5 y n = 3, una posible distribución es: **|*|**

Que significa: Primera urna tiene 2 bolitas (**), Segunda urna tiene 1 bolita (*), Tercera urna tiene 2 bolitas (**)

Así, en general, la cantidad de símbolos en la secuencia siempre será de tamaño: $b + (n - 1)$

Entonces hay que contar de cuántas maneras se pueden colocar las $n - 1$ barras en una secuencia de $b + (n - 1)$ posiciones. Por lo tanto,

$$\binom{b+n-1}{n-1} = \frac{(b+n-1)!}{b!\,(n-1)!}.$$

b) Bolitas distinguibles y urnas con capacidad ilimitada

Queremos contar de cuántas maneras se pueden distribuir b bolitas distinguibles en n urnas cuando no hay restricciones en la cantidad de bolitas que puede recibir cada urna.

Cada bolita es distinguible, por lo que son únicas y cada bolita puede ser colocada en cualquiera de las n urnas.

Veamos que cada vez que asignemos cada bolita tenemos n urnas disponibles. Sin importar si ya tiene otras bolitas pues no hay restricción, por lo que son eventos independientes.

Para B_1 tenemos n opciones, para B_2 tenemos n opciones, …, para B_b tenemos n opciones.

Por lo tanto, el número total de asignaciones es: $(n)(n)\ldots(n) = n^b$

La clave yo diría es pensarlo en base a las bolitas y no a las urnas. Lo podemos ver como una función f que no necesariamente sea inyectiva i. e. puede haber 2 bolitas en la misma urna.

c) Bolitas indistinguibles y solo una bolita por urna

Queremos contar cuántas formas hay de distribuir b bolitas indistinguibles en n urnas, con la restricción de que cada urna puede contener como máximo una bolita.

Como solo podemos colocar una bolita en cada urna, lo que realmente estamos haciendo es seleccionar b urnas de un total de n.

La cantidad de maneras en que podemos elegir b urnas de un total de n se obtiene como:

$$\binom{n}{b} = \frac{n!}{b!\,(n-b)!}$$

d) Bolitas distinguibles y solo una bolita por urna

Queremos contar de cuántas maneras se pueden distribuir b bolitas distinguibles en n urnas, con la restricción de que cada urna puede contener como máximo una bolita.

Como cada bolita es única y debe ir a una urna distinta, hay que contar las formas de asignar b bolitas en n urnas sin repetir urnas.

Veamos que al distribuir las bolitas:

- La primera bolita tiene n opciones.
- La segunda bolita tiene $n - 1$ opciones.
- La última bolita tiene $n - b$ opciones.

El número total de formas de hacer esta distribución es el número de permutaciones parciales:

$$P(n, b) = \frac{n!}{(n-b)!}$$