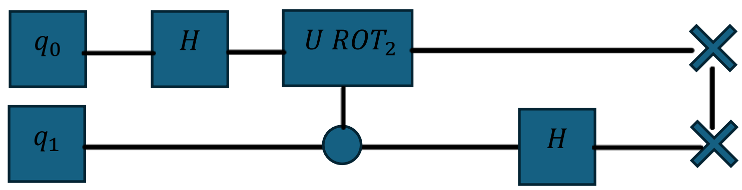
Universidad Nacional Autónoma de México
Temas selectos de Ingeniería en Computación III
(Introducción a la Computación Cuántica)

Profesora: Lic. Naomi Itzel Reyes Granados
Alumno: Sebastián González Juárez

Transformada cuántica de Fourier

1. Dibuja el circuito de 2 qubits. (define de forma explícita las compuertas $\boldsymbol{UROT_k}$ que ocupes, es decir escribe la matriz de la compuerta.)



Con $U\ ROT_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{pmatrix} \Rightarrow U\ ROT_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/2k} \end{pmatrix}$.

2. Aplica el circuito a los estados:

2.1. $|00\rangle$

$$\psi_1 = (H \otimes I)|00\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$
$$\psi_2 = CROT_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$
$$\psi_3 = (I \otimes H)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + |1\rangle\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$
$$\psi_4 = SWAP\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$$

2.2. $|11\rangle$

$$\psi_1 = (H \otimes I)|11\rangle = \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$
$$\psi_2 = CROT_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - i|11\rangle)$$
$$\psi_3 = (I \otimes H)\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - i|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} - i|1\rangle\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - i|10\rangle + i|11\rangle)$$
$$\psi_4 = SWAP\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - i|10\rangle + i|11\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |10\rangle - i|01\rangle + i|11\rangle)$$

2.3. $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\psi_1 = (H \otimes I)\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |11\rangle]$$
$$\psi_2 = CROT_2\left[\frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |11\rangle]\right] = \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - i|11\rangle]$$

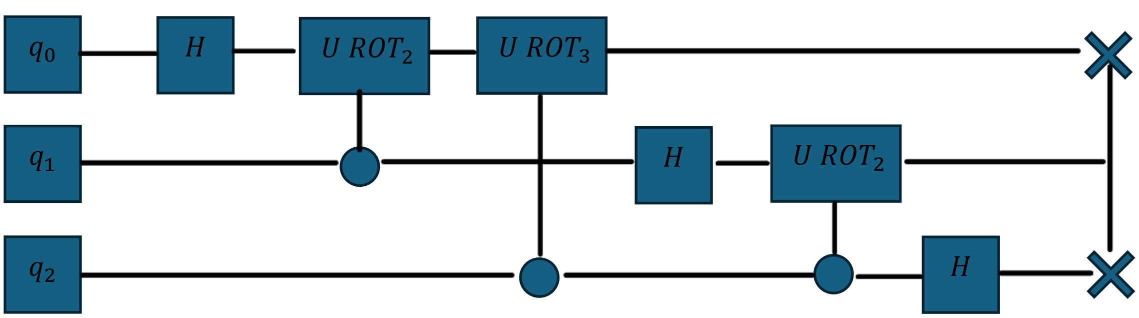
$$\psi_3 = (I \otimes H)\frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - i|11\rangle] = \frac{1}{2}\left[\frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|00\rangle - |01\rangle}{\sqrt{2}} - i\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+1)|00\rangle + (1-1)|01\rangle + (1-i)|10\rangle + (1+i)|11\rangle] = \frac{1}{2\sqrt{2}}[2|00\rangle + (1-i)|10\rangle + (1+i)|11\rangle]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|11\rangle$$
$$\psi_4 = SWAP\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|11\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|11\rangle$$

3. Busca dos algoritmos cuánticos que utilicen la transformada cuántica de Fourier; explica que resuelven.

Presento el resultado en una tabla:

Algoritmo Cuántico	Uso de la Transformada Cuántica de Fourier (QFT)	Problema que resuelve
Algoritmo de Shor (1994)	Utiliza la QFT para encontrar el período de una función modular, lo que permite descubrir el orden de un número módulo *N*. Este paso es esencial para factorizar números enteros grandes.	Resuelve el problema de factorización de enteros en tiempo polinomial, algo que los algoritmos clásicos no pueden hacer eficientemente. Tiene impacto directo en la criptografía RSA, ya que rompería su seguridad.
Algoritmo de Estimación de Fase Cuántica (QPE)	La QFT convierte fases cuánticas acumuladas en amplitudes medibles. Permite extraer el valor de una fase ϕ asociada al autovalor $e^{2\pi i\phi}$ de un operador unitario.	Resuelve el problema de estimar autovalores de operadores unitarios. Es un bloque fundamental en muchos otros algoritmos cuánticos, como el de Simon, Shor, y la estimación de energía en química cuántica.

4. Dibuja el circuito de 3 qubits. (Define de forma explícita las compuertas $\boldsymbol{UROT_k}$ que ocupes, es decir escribe la matriz de la compuerta.)



Con $U\ ROT_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{pmatrix} \Rightarrow U\ ROT_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/2k} \end{pmatrix},\ U\ ROT_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pi i/4} \end{pmatrix}$.