

## Численное дифференцирование

Написать программу для численного дифференцирования на отрезке  $[a, b]$ .

1. Задать функции для вычисления  $y = f(x)$  и  $dy/dx = f'(x)$ ; производная вычисляется аналитически («на бумаге»).
2. Задать координаты концов отрезка  $[a, b]$ .
3. Задать количество узлов  $M$  сетки на отрезке  $[a, b]$  и построить равномерную сетку с шагом  $h$ .
4. Вычислить производную функции в узлах сетки, используя формулы численного дифференцирования второго порядка точности.
5. Вдвое измельчить сетку, т.е. построить равномерную сетку с шагом  $h/2$ , и повторить вычисления производной.
6. Применить метод Рунге-Ромберга (Калиткин, стр. 75). Используя первую формулу Рунге, вычислить в каждом узле сетки главный член погрешности. Используя вторую формулу Рунге уточнить приближенное решение.
7. Для каждого приближенного решения (на сетке с шагом  $h$ , на сетке с шагом  $h/2$  и уточненного по Рунге) вычислить абсолютную и относительную погрешности, используя нормы векторов  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  и  $\|\cdot\|_\infty$  (построить таблицу).
8. Сравнить нормы вычисленного в п.6 главного члена погрешности с нормами абсолютных погрешностей на соответствующих сетках (построить таблицу).
9. Визуализировать одном рисунке четыре графика: производной функции  $dy/dx = f'(x)$ , вычисленной аналитически (сплошная линия, количество точек  $M_{viz}$ ); приближения производной на сетке с шагом  $h$  (точки – значения в узлах сетки); приближения производной на сетке с шагом  $h/2$  (точки – значения в узлах сетки); приближения производной, уточненного по Рунге (точки – значения в узлах сетки).