Estrategias de Resolución

Conceptos

- **Cláusula de Horn**: disyunción de literales con un máximo de un solo literal positivo

$$(a \land b \land c) \rightarrow x$$
$$\equiv$$
$$\neg(a \land b \land c) \lor x \quad \equiv \quad \neg a \lor \neg b \lor \neg c \lor x$$

Se suele representar al revés

$$x \leftarrow (a, b, c)$$

  - **Objetivo**, **pregunta**, **meta** o **cláusula sin cabeza**: aquellas que no tienen literal positivo:

  $$\leftarrow (a, b, c)$$

  - **Hecho**: aquellas que son solo literal positivo:

  $$x \leftarrow$$

  - **Regla**: aquellas con literal positivo y negativo. Engloban a todos los demás (regla sin positivos, regla sin negativos, regla sin positivos ni negativos):

  $$x \leftarrow (a, b, c)$$

  - **Éxito**: aquellas con el cuerpo y cabeza vacíos. En ICon se interpreta como cláusula vacía:

  $$\leftarrow \; \equiv \; \square$$

- **Resolución SLD** (**S**election-rule driven **L**inear resolution for **D**efinite clauses): consiste en eliminar cláusulas positivas (izquierda de la flecha) con las negativas (derecha de la flecha).

```
a ←                    ← a
|                        |
-----------------------------
             |
             □
```

- **Sustitución**: en lógica de primer orden, cambiar la variable por otra variable o constante en todas las partes de una fórmula bien formada. En clase se suele representar cada sustitución con el símbolo θ.

```
P(x) ∧ Q(x)
     |  θ={y/x}  -> y sustituye a x, y es lo que era x,
P(y) ∧ Q(y)                  y donde había x
```

- **FNC** (entre nosotros, **F**orma **N**o **C**ompleja): descomposición de todos los axiomas de forma que solo queden en él los símbolos ∧, ∨ y ¬.

- **LPO** (**L**ógica de **P**rimer **O**rden): conjunto de fórmulas en que los símbolos son del tipo P(x). No valen ni del tipo x (a solas) ni del tipo P(P(x)).
- Una **estrategia** es **completa** si garantiza que encontrará la cláusula vacía en un conjunto de cláusulas inconsistente. Se dice que la regla de resolución es completa para la refutación.
- Una **estrategia** es **eficiente** si garantiza que encontrará la cláusula vacía en el menor número de pasos posible.
- **Resolvente de X e Y**: resultado de combinar X e Y.
- **FNP** (**F**orma **N**ormal **P**renexa): En lógica de primer orden, una fórmula bien formada tiene forma normal prenexa si está escrita encabezada por una cadena de cuantificadores existenciales o universales, seguidos por una fórmula sin cuantificadores lógicos, designada como matriz.

Refutación por resolución

Para probar que **Ω⇒$\boldsymbol{\alpha}$**, demostrar que no se cumple **Ω⇐$\boldsymbol{\alpha}$** mediante la forma

Ω ∨ ¬$\boldsymbol{\alpha}$.

donde Ω es nuestro conjunto de cláusulas del tipo FNC al que llamaremos “teoría sólida” (como lo llama en los apuntes).

Al negar α lo transformamos a FNC, y todas las cláusulas obtenidas las añadimos al conjunto S, en el que se encontrarán también las cláusulas del conjunto Ω.

A partir de aquí, construiremos un árbol en que se vayan eliminando elementos negativos con sus equivalentes positivos. Suponiendo que el conjunto S nos ha quedado como S={¬P(x) ∨ Q(x) ,   P(A) ,   ¬Q(A)} el árbol de resolución sería:

```
¬P(x) ∨ Q(x)                P(A)                 ¬Q(A)
     | θ={A/x}               |                      |
     --------------------------                     |
                |                                   |
              Q(A)                                  |
                |                                   |
                -------------------------------------
                                  |
                                  □
```

Aclaración: si se tiene por un lado ¬ y por otro ¬*p* ∨ *q*, se obtienen dos cláusulas:
p ∨ ¬*p* y ¬*q* ∨ *q*.

Estrategias de resolución

Estrategia de dirección

- **Saturación por niveles**: tomando como conjunto de partida el conjunto $S^0=S$, la saturación por niveles combina todas las cláusulas de los anteriores niveles para obtener las del siguiente nivel. Esto es, si *S0={a, b}* y se obtiene *S1={c}*, para obtener *S2* habrá que combinar *a* con *c* y *b* con *c* y así sucesivamente hasta obtener la cláusula vacía. Es **completa** e **ineficiente**.

Estrategias de simplificación

- **Eliminación de literales puros**: siendo un literal puro del conjunto S un literal (por ejemplo P(x) o p) que no tiene complementario, esta estrategia consiste simplemente en eliminar la cláusula entera. Es **completa**. Ejemplo de eliminación de literales puros:

$$S=\{a, a \vee b, \neg b, b\}$$

a es un literal puro, así que se puede eliminar las cláusulas en las que aparece:

$$S=\{\neg b, b\}$$

Conviene decir que esto solo se puede hacer si no se puede obtener dicho literal mediante una sustitución de variables (en LPO).

- **Eliminación de tautologías**: eliminación de aquellas cláusulas que den como resultado una tautología (por ejemplo, $a \vee \neg a$). Es **completa**.
- **Eliminación de cláusulas subsumidas**: eliminación de cláusulas al obtener una cláusula que sea parte de la primera o equivalente. Por ejemplo:

  1- $p \vee q$

  2- p

  como 2 es una parte de 1, la subsume a.k.a. la elimina. Existen dos tipos:
  - Eliminación hacia delante: descartar una cláusula recién obtenida por tener una más simple anteriormente obtenida.
  - Eliminación hacia atrás: descartar una cláusula anterior al obtener una cláusula más simple.

  Completa con saturación por niveles, incompleta con alguna estrategia de restricción (¿?), **eficiente**.

- **Asociación de procedimientos**: dados unos literales básicos o unas funciones conocidas, la asociación de procedimientos consiste en evaluar (es decir, resolver) dichos elementos para simplificar las cláusulas. Por ejemplo, teniendo *+(1, 2)*, podríamos simplificarlo como *3* (solo si forma parte del dominio). En estos casos se debe aclarar con qué procedimiento hemos asociado la función, porque dependiendo de cómo lo hayamos interpretado (interpretación parcial), puede concluir en uno u otro resultado. **No es completa**.

- **Asociación de funciones**: Asociar un símbolo de función con un procedimiento cuya evaluación (resolución) **devuelva un elemento del dominio**. Por ejemplo (de los apuntes):

  Q(suma(3,5), y)

  ≡

  Q(8, y) (con la interpretación habitual de la suma)

- **Asociación de literales**: De manera similar a la anterior, se asocia un símbolo de (esta vez) predicado cuya evaluación **devuelva verdadero o falso** en este caso. Por ejemplo (de los apuntes):

  MAYOR(3,5)

  ≡

  Falso (asumiendo que la evaluación (V) de *MAYOR(3,5) = F*)

Estrategias de restricción

- **Conjunto soporte**: considerando el conjunto ya mencionado S y un subconjunto (estrictamente menor, es decir, no puede ser igual que S) T diferente del conjunto vacío, denominaremos a este T como conjunto soporte de S.
  - Este conjunto soporte original lo llamaremos conjunto soporte de nivel 0 o T_0.
  - Los siguientes niveles (conjuntos i-ésimos) los obtendremos combinando las cláusulas k_T del nivel anterior (que queramos) con las cláusulas k_S de S, sin necesidad de que sean de distinto grupo ni de hacer todas las combinaciones (es decir, podemos combinar k_T+k_T, k_S+k_T (y viceversa) y k_S+k_S).
  - En ningún caso se puede, para obtener T_i, utilizar una cláusula que no pertenezca a S o a T_{i-1}.

  Dicho esto, la estrategia del conjunto soporte utiliza un conjunto soporte y sus sucesivos niveles para llegar a la cláusula vacía.

  Para formar S, hay que añadir a la teoría (las cláusulas con las que se quiere demostrar algo) el teorema negado (lo que se quiere demostrar, negado) como se ha hecho hasta ahora.

  Para formar T (según los apuntes), se recomienda coger solo las cláusulas que provienen de la negación del teorema (tomado de la solución de los ejercicios de teoría, en los apuntes viene mal).

- **Resolución lineal**: en cierto modo similar al conjunto soporte. Teniendo el conjunto S, elegimos una de sus cláusulas como cláusula central (y la llamaremos C_0). Obligatoriamente combinaremos esta cláusula con otra, cuyo resultado llamaremos C_1.
    - C_i será lo que llamaremos cláusula central (de nivel) i.
    - Las cláusulas de S que no sean C_0 las llamaremos cláusulas laterales o B
    - Cualquier combinación que hagamos será necesariamente de la última cláusula central C_i con otra cláusula central $C_{j<i}$ o una cláusula lateral B hasta llegar al conjunto vacío.

  Para elegir la cláusula inicial, se escoge la cláusula del teorema negado (suponiendo que solo da una cláusula. En caso contrario, habría que usar conjunto soporte).
    - Teorema de complitud: si S sin la cláusula k es consistente, pero al añadir dicha cláusula se genera una inconsistencia, se garantiza que si se usa esa cláusula k como cláusula central C_0 se alcanzará la cláusula vacía.
- **Resolución por entradas**: llamando cláusulas de entrada E a aquellas cláusulas pertenecientes al conjunto S, y resolventes de entrada R a aquellas cláusulas formadas como resultado de combinar una cláusula cualquiera con una E, la resolución por entradas es aquella que se obtiene únicamente a partir de cláusulas R. Dado que una cláusula R puede tener como padres una R y una E, esta resolución engloba también a la resolución lineal. **No es completa**.
- **Resolución unitaria**: llamando resolvente unitario U a aquellas cláusulas que tienen al menos un padre unitario (es decir, solo es un elemento sin ninguna disyunción $\vee$), la resolución unitaria es aquella que solo nos permite combinar cláusulas que den como resolvente una cláusula U. **No es completa**.
    - Teorema de equivalencia de las resoluciones unitaria y por entradas: si con una estrategia se puede llegar al conjunto vacío, con la otra también se puede.
    - Teorema de complitud: si todas las cláusulas de S son cláusulas de Horn y, mediante la resolución unitaria o por entradas, se llega a la cláusula vacía, se deduce que S es inconsistente.

Procedimiento de extracción de respuesta

Proceso de encontrar los elementos del dominio que hacen cierto el teorema a demostrar, mediante una prueba de refutación por resolución. Está formado por axiomas, <<preguntas>> y <<literales respuesta>>:

- **Axiomas**: cláusulas inicialmente representadas en LPO que representan los <<conocimientos que tenemos del dominio>>.

- **Preguntas**: sentencias en FNP que usan solo cuantificadores existenciales (∃) y cuyas matrices son conjunciones (∧) de literales. Esto se hace por dos razones:
    - Al negar los prefijos existenciales, se obtiene una sola cláusula de disyunciones (∨). Ej.:

Preguntamos: $(\exists x)(Dragon(x) \wedge Vuela(x))$

Negamos el prefijo: $\neg(\exists x)(Dragon(x) \wedge Vuela(x))$

$(\forall x)\neg(Dragon(x) \wedge Vuela(x))$

$(\forall x)(\neg Dragon(x) \vee \neg Vuela(x))$

Eliminamos el cuant.: $\neg Dragon(x) \vee \neg Vuela(x)$

-
    - Es más fácil de leer: ¿Existe algo que sea un dragón y vuele?
- **Literal respuesta**: literal único representado como $RESP(x_1, x_2...)$ que contiene todas las variables contenidas en la pregunta (si la pregunta no tiene variables, RESP tampoco. Las constantes no cuentan como variables). Este literal irá junto a la pregunta (por ejemplo, $(\exists x)(Dragon(x) \wedge Vuela(x) \wedge RESP(x))$) y, en este tipo de problemas, buscaremos aislar el literal respuesta (en vez de buscar el conjunto vacío). Cuando quede aislado, nos dirá si la respuesta es una constante o es una variable (es decir, cualquier respuesta).

Ejemplo de extracción de respuesta:

$\neg H(x) \vee M(x)$ $H(Socrates)$ $\neg M(y) \vee RES(y)$

| $\theta_1=\{Socrates/x\}$ | |

-- |

| |

$M(Socrates)$ |

| $\theta_2=\{Socrates/y\}$ |

|

$RES(Socrates)$

Se puede producir más de un literal respuesta, y se pueden producir varias respuestas (dependiendo de las sustituciones que se hagan).

Demostración de teoremas

Supuestamente no entra

Bibliografía

- [Asignatura de “Lógica” de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Informática de Oviedo]()