Лекция 2. Необходимые сведения из теории вероятностей (продолжение).

В этой лекции мы докажем сформулированную в предыдущей лекции лемму Дуба-Дынкина и напомним основные понятия и теоремы теории вероятностей, необходимые нам в дальнейшем.

Лемма 2.1. (лемма Дуба-Дынкина). *Пусть* $X = (X_1, \dots, X_n)^*: \Omega \to R^n$. *Тогда* Y *является* $\sigma(X)$ *– измеримой (где* $\sigma(X) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$*) тогда и только тогда, когда* $Y = h \circ X \equiv h(X)$ *для некоторой измеримой по Борелю (или, кратко, борелевской) функции* $h: R^n \to R$.

Обозначения: Совокупность борелевских множеств в R^n будем обозначать $\mathcal{B}(R^n)$. Будем говорить, что «B борелевское», имея ввиду, что $B \in \mathcal{B}(R^n)$. Мы также будем называть функции борелевскими, если они измеримы по Борелю.

Мы докажем лемму для случая $n = 1$, доказательство в случае $n > 1$ почти идентично. Начнём со вспомогательного утверждения, представляющего самостоятельный интерес.

Лемма 2.2. $\sigma(X) = \{X^{-1}(B): B \in \mathcal{B}(R)\}$.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{C}_1 = \{X^{-1}(B) | \, B \in \mathcal{B}(R)\}.$$

Тогда $\mathcal{C}_1$ является **$\boldsymbol{\sigma}$- алгеброй в Ω** (свойства i)-iii) определения σ - алгебры легко проверяются). Поскольку

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq a\} = X^{-1}\big((-\infty, a]\big) \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow \sigma(X) \subseteq \mathcal{C}_1.$$

Положим

$$\mathcal{C}_2 = \{B \subseteq R: X^{-1}(B) \in \sigma(X)\}.$$

Тогда $\mathcal{C}_2$ является **$\boldsymbol{\sigma}$- алгеброй в $\boldsymbol{R}$**. Но $(-\infty, a] \in \mathcal{C}_2$ для всех $a \in R$ (это следует из определения $\sigma(X)$).

Поэтому $\mathcal{B}(R) \subset \mathcal{C}_2$. Иначе говоря, если $B \in \mathcal{B}(R)$, то $X^{-1}(B) \in \sigma(X)$, и поэтому $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(X)$. Следовательно, $\sigma(X) = \mathcal{C}_1$.

Пример. Пусть $X = I(A)$, где A – собственное подмножество Ω (то есть $A \neq \Omega$). Тогда $\sigma(X) = \{A, \Omega \backslash A, \emptyset, \Omega\}$. В этом случае с.в. Y является $\sigma(X)$ - измеримой тогда и только тогда, когда она постоянна на A и $\Omega \backslash A$. В самом деле, предположим, что Y принимает два разных значения $a < b$ на A. Пусть $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Пусть $\omega_1 \in A$ и $Y(\omega_1) = a, \omega_2 \in A$ и $Y(\omega_2) = b$. Тогда множество $A \cap \{\omega \in \Omega: Y(\omega) \leq c\}$ не пусто, так как оно содержит ω_1, и не совпадает со всем A, так как оно не содержит ω_2. Поэтому $A \cap \{\omega \in \Omega: Y(\omega) \leq c\} \notin \sigma(X)$. Следовательно, и множество $\{\omega \in \Omega: Y(\omega) \leq c\} \notin \sigma(X)$ (если бы это множество принадлежало $\sigma(X)$, то и его пересечение с A принадлежало бы $\sigma(X)$). Поэтому Y не является $\sigma(X)$ - измеримой. Полученное противоречие показывает, что Y должна быть постоянной на A. Аналогичное рассуждение показывает, что Y принимает одно и то же значение на $\Omega \backslash A$.

Доказательство Леммы 2.1. Рассмотрим ряд случаев в порядке возрастания их общности.

i) Пусть сначала $Y = I(A), A \in \sigma(X)$. По Лемме 2.2 найдется $B \in \mathcal{B}(R)$ такое, что $A = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\}$. Определим $h_A: R \to R$, где
$$h_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B \\ 0, & \text{если } x \notin B. \end{cases}$$
Очевидно, $h_A\big(X(\omega)\big) = Y(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

ii) Пусть теперь $Y \geq 0$ и Y - простая $\sigma(X)$ - измеримая случайная величина, т.е. $Y = \sum_{i=1}^{n} c_i I(A_i)$, где $c_i \geq 0$, $A_i \in \sigma(X)$, непересекаются и в объединении дают всё

Ω. Без ограничения общности можем считать все c_i различными (почему ?). По Лемме 2.2 $A_i = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B_i, B_i \in \mathcal{B}(R)\}$. Положим $h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_{A_i}(x)$, где $h_{A_i}(x)$ строятся как в п. i). Тогда $Y(\omega) = h\big(X(\omega)\big)$.

iii) Y - произвольная неотрицательная $\sigma(X)$ - измеримая случайная величина. Как было показано в Лекции 1, существует последовательность $Y_n \uparrow Y$, где Y_n – простые с.в. вида, рассмотренного в ii), и $\sigma(X)$ – измеримые. По доказанному в ii) $Y_n(\omega) = h_n\big(X(\omega)\big)$, где h_n – ступенчатые борелевские функции. Также $h_{n+1}\big(X(\omega)\big) \geq h_n\big(X(\omega)\big)$, поскольку Y_n возрастающая последовательность. Пусть

$$B_1 = \{x \in R: \lim_{n\to\infty} h_n(x) \text{ существует}\}.$$

Задача 3. Доказать, что $B_1 \in \mathcal{B}(R)$. Доказательство провести в три этапа. Доказать, что

1. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(x)$ измерим
2. $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(x)$ измерим
3. Использовать то, что
$$B_1 = \{x \in R: \overline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, h_n(x)\}.$$

Из возрастания последовательности $\{h_n(x)\}$ следует, что (измеримый, в силу Леммы 2.2) образ B всего пространства Ω при отображении $X(\omega)$ содержится в множестве B_1:

$$B := \{X(\omega): \omega \in \Omega\} \subset B_1, B \in \mathcal{B}(R).$$

Положим

$$h(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x), & x \in B_1 \\ 0\,, & x \in B_1^c \end{cases}$$

Тогда h - борелевская функция (как предел последовательности измеримых функций $h_n(x)$ на измеримом множестве $B_1 \subset R$) и $h\big(X(\omega)\big) = Y(\omega)$.

(iv) $Y \le 0$ - произвольная неположительная $\sigma(X)$ - измеримая случайная величина. Этот случай сводится к предыдущему рассмотрением $-Y$.

(v) Y - произвольная $\sigma(X)$ - измеримая случайная величина. Представим $Y = Y_1 + Y_2$, где, используя (iii) и (iv), получим

$$Y_1 = Y \cdot I[Y \ge 0] = h_1 \circ X, h_1 \text{ борелевская,}$$

$$Y_2 = Y \cdot I[Y < 0] = h_2 \circ X, h_2 \text{ борелевская.}$$

Положим $h = h_1 \cdot I(B_1) + h_2 \cdot I(B_2)$, где

$B_1 = X(\omega\colon Y \ge 0), B_2 = X(\omega\colon Y < 0), B_1 \cap B_2 = \emptyset,$

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}(R)$. Тогда $Y(\omega) = h\big(X(\omega)\big)$, h - борелевская функция.

Обратное утверждение:

Случайная величина $Y(\omega) = h\big(X(\omega)\big)$, где h - борелевская функция, является $\sigma(X)$ – измеримой.

Доказательство простое. В самом деле, по Лемме 2.2
$\{\omega \in \Omega\colon h(X(\omega)) \le \alpha\ \} = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\} \in \sigma(X)$,
поскольку $B\colon = \{x \in R\colon h(x) \le \alpha\}$ - борелевское множество в R.

Краткий обзор основных понятий и теорем теории вероятостей.

Приведённый ниже обзор не претендует на полноту. Выбор материала обусловлен потребностями данного курса.

Математическое ожидание и дисперсия с.в.

Для каждой неотрицательной с.в. X можно определить математическое ожидание или среднее значение $E(X)$. Это либо неотрицательное число, либо $+\infty$. Если X – вещественная случайная величина, принимающая значения произвольного знака, то $E(X)$ конечно, если $E|X| < \infty$, при этом $E(X)$ может принимать значения любого знака. В случае, когда $E|X| < \infty$ говорят, что X абсолютно интегрируема или что X принадлежит пространству L^1. Математическое ожидание – это линейный оператор, определённый на векторном пространстве интегрируемых функций (функций из L^1) со значениями в R. Математическое ожидание случайного вектора определяется покомпонентно, т.е. это вектор, компоненты которого равны математическим ожиданиям компонент. При исследовании вопросов, связанных со сходимостью случайных величин, часто используют следующие результаты:

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости:

Пусть (X_n) *– последовательность интегрируемых с.в. таких, что:*

1) $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *для всех* $\omega \in \Omega$.
2) *существует интегрируемая вещественнозначная случайная величина.* Z *такая, что* $|X_n(\omega)| \leq Z(\omega)$.

Тогда

i) X *является случайной величиной.*
ii) $\lim_{n\to\infty} EX_n(\omega) = EX(\omega)$.

Теорема Леви о монотонной сходимости:

Пусть последовательность измеримых функций является почти наверное неубывающей, то есть

$$f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \cdots \leq f_n(\omega) \leq \cdots$$

почти наверное. Предположим, что интегралы ограничены:

$$\int_\Omega f_n(\omega) d\mu \leq K, \; n = 1,2 \ldots$$

Тогда почти наверное существует конечный предел

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega),$$

функция f *интегрируема, и*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Лемма Фату:

Если $f_n(\omega)$ *последовательность неотрицательных измеримых функций, то*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\mu \leq \infty.$$

Про с.в. X говорят, что она *интегрируема с квадратом* или, что она принадлежит пространству L^2, если $EX^2 < \infty$. В этом случае определена *дисперсия* с.в. X: $VarX = E(|X - EX|^2)$. Из этого определения следует, что: $VarX = EX^2 - (EX)^2$.

Следующие два вероятностных неравенства и лемма широко используются:

Лемма Бореля - Кантелли:

Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ *последовательность событий таких, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) < \infty,$$

то P - почти наверное каждая точка Ω принадлежит только конечному числу событий A_k.

Если все события $A_1, \dots, A_n, \dots$ совместно независимы и

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = \infty,$$

то P - почти наверное каждая точка Ω принадлежит бесконечному числу событий A_k.

Неравенство Маркова.

Если X – интегрируемая с.в. и $\lambda > 0$, то $P(|X| > \lambda) \le \frac{E|X|}{\lambda}$.

Неравенство Чебышева.

Если X – интегрируемая с квадратом с.в. и $\lambda > 0$, то $P(|X - EX| > \lambda) \le \frac{VarX}{\lambda^2}$.

Формула перехода, плотность.

Говорят, что m – мерная случайная величина X имеет плотность f_X, если существует функция $f_X: R^m \to [0, \infty)$ такая, что для каждого борелевского множества $B \in R^m$ имеет место равенство

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Эквивалентное определение (для $m = 1$ эта эквивалентность доказана в Предложении 1.1): для любой ограниченной непрерывной функции $\varphi: R^m \to R$

$$E(\varphi(X)) = \int \varphi(x) f_X(x) dx, \quad x \in R^m \qquad (1)$$

Формула (1) - это и есть ***формула перехода.*** Она позволяет переходить от исходного пространства элементарных событий Ω к пространству значений X, в данном случае это пространство R^m, и вычислять математическое ожидание не в исходном пространстве, а в пространстве R^m, используя плотность распределения $f_X(x)$. Если случайная величина X ***дискретна,*** то есть принимает значения в конечном или счётном множестве $D \subset R$, то формула перехода имеет следующий вид

$$E\big(\varphi(X)\big) = \sum_{e \in D} \varphi(e) P(X = e).$$

Из того, что вектор $X = (X_1, \dots, X_m)$ имеет плотность, следует, что каждая компонента X_i этого вектора также имеет плотность $f_i(x_i)$, называемую $i -$ ой ***маргинальной плотностью.*** Эта плотность вычисляется по следующей формуле:

$$f_i(x_i) = \int \dots \int f_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_m.$$

Производящие функции, характеристические функции.

Пусть X – с.в., принимающая значения в подмножестве E множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}$, $X: \Omega \to E \subset \mathbb{N}$. Производящей функцией (п.ф.) $\Phi_X(t)$ с.в. X называется сумма ряда, определённого для $0 \le t \le 1$ формулой

$$\Phi_X(t) = \sum_{k \ge 0} P(X = k) \cdot t^k.$$

С помощью п.ф. можно вычислять моменты с.в. X (напомним, что k - ый момент с.в. X равен, по определению, EX^k) . В частности,

$$EX = \lim_{t \to 1_-} \Phi'_{\mathrm{X}}(t), \ E[X(X-1)] = \lim_{t \to 1_-} \Phi''_{\mathrm{X}}(t).$$

Пусть теперь X – с.в., принимающая вещественные значения, $X: \Omega \to R$. Характеристической функцией $\Psi_X(t)$ с.в. X называется следующая (вообще говоря, комплекснозначная) функция

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX})$$

(здесь $i = \sqrt{-1}$, «мнимая единица»). В случае, когда X имеет плотность распределения f_X, х.ф. является преобразованием Фурье этой плотности, то есть

$$\Psi_X(t) = \int e^{itX} \cdot f_X(x) dx.$$

Характеристическая функция с.в. X полностью определяет закон распределения этой с.в., точнее: ***две с. в. имеют тот же самый закон распределения тогда и только тогда, когда их х.ф. совпадают.***

Независимость.

Про последовательность с.в. (X_n) говорят, что это ***последовательность независимых случайных величин*** *(н.с.в.)*, если для любого n и для любой системы интервалов $I_1, \dots, I_n$

$$P(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = \boldsymbol{P}(X_1 \in I_1) \times \dots \times \boldsymbol{P}(X_n \in I_n). \qquad (2)$$

Аналогично определяется ***последовательность независимых случайных векторов,*** в этом случае $I_1, \dots, I_n$ - произвольная система параллелепипедов в R^m. Заметим, что если в этом определении заменить интервалы $I_1, \dots, I_n$ произвольными борелевскими множествами $A_1, \dots, A_n$, то полученное определение будет эквивалентно исходному. В одну сторону это очевидно (интервалы – частный случай борелевских множеств), но и в другую сторону это нетрудно доказать, аппроксимируя произвольное борелевское множество объединениями интервалов. Подчеркнём, что в определении независимости соотношение (2) должно выполняться для любого n. Кроме того, из (2) следует, что для любого подмножества $(i_1, \dots, i_k)$ множества индексов $(1,2, \dots, n)$

$$P\left(X_{i_1} \in I_{i_1}, \dots, X_{i_k} \in I_{i_k}\right) = P\left(X_{i_1} \in I_{i_1}\right) \times \dots \times P\left(X_{i_k} \in I_{i_k}\right).$$

Для с.в. $\{X_i\}$, $i = 1, \dots, m$, имеющих плотности, можно сформулировать следующее утверждение:

Пусть случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_m)$ имеет плотность распределения. Тогда эта плотность равна произведению маргинальных плотностей (плотностей X_i) тогда и только тогда, когда $X_1, \dots, X_m$ независимы.

Напомним также следующие хорошо известные предложения, связанные с понятием независимости:

1. Если $X_1, \dots, X_n$ независимы и интегрируемы, то $E(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = EX_1 \cdot \dots \cdot EX_n$.
2. Если $X_1, \dots, X_n$ независимы и интегрируемы с квадратом (то есть $EX_i^2 < \infty, i = 1, \dots, n$), то $Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$.
3. $X_1, \dots, X_n$ независимы тогда и только тогда, когда для любых вещественных чисел $t_1, \dots t_n$

$$E\exp\{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)\} = E\exp(it_1 X_1) \cdot \dots \cdot E\exp(it_n X_n).$$

Сходимость случайных величин.

Говорят, что последовательность с.в. $X_1, \dots, X_n$ сходится ***почти наверное*** *(п.н.)* к случайной величине X, если P - почти наверное на Ω

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Эта последовательность сходится ***по распределению*** (говорят также ***слабо сходится***), если для любой ***непрерывной ограниченной*** функции $\varphi: R \to R$ имеет место сходимость

$$E\varphi(X_n(\omega)) = E\varphi(X(\omega)).$$

Существует два других эквивалентных определения сходимости по распределению (слабой сходимости). Первое формулируется в терминах функций распределения:
Последовательность с.в. $\{X_i\}$, $i = 1,2, \dots$ *сходится по распределению к с.в. X, если для любой* ***точки непрерывности*** $t \in R$ *функции распределения* $F_X(t) = \boldsymbol{P}(X \le t)$ *имеет место сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_i}(t) = F_X(t).$$

Второе определение формулируется в терминах характеристических функций :
Последовательность с.в. $\{X_i\},\ i = 1,2, \ldots$ *сходится по распределению к с.в. X, если* ***для любой точки*** $t \in R$ *последовательность х.ф.* $\Phi_{X_i}(t)$ *сходится к х.ф.* $\Phi_X(t)$ *при* $i \to \infty$.
Сведём различные виды сходимости в таблицу и укажем взаимосвязь между ними.

1. Почти наверное (почти всюду):

$$P\left(\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

2. По вероятности:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\{\omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \to 0, n \to \infty.$$

3. В среднем порядка $r > 0$:

$$E|X_n(\omega) - X(\omega)|^r \to 0, n \to \infty.$$

4. По распределению:

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x), n \to \infty$$

в точках непрерывности $F(x)$.

5. Слабая сходимость: для любой ***непрерывной ограниченной*** функции $\varphi\colon R \to R$

$$E\varphi(X_n) \to E\varphi(X), n \to \infty.$$

Взаимосвязи между различными типами сходимости:

$$1 \Rightarrow 2$$

$$3 \Rightarrow 2$$

$$2 \Rightarrow (5 \Leftrightarrow 4).$$

Классические примеры законов распределения.

Распределение Бернулли с параметром p.
Это закон распределения с.в., принимающей два значения: 0 и 1. Распределение полностью определяется одним параметром $p = P(X = 1)$. Стандартная модель, в которой возникает распределение Бернулли, это бросание монеты («орёл» или «решка»). Положим $X = 1$, если выпала «решка» и $X = 0$, если выпал «орёл». Для симметричной монеты $p = 1/2$, для несимметричной монеты $p \neq 1/2$. В этом случае $E(X) = p$, $Var(X) = p(1 - p)$. Заметим также, что в этом случае пространство элементарных исходов Ω состоит из двух «точек» $\{O\}$ – «орёл» и $\{P\}$ – «решка», $P(\{O\}) = P(X = 0) = 1 - p$, $P(\{P\}) = P(\{X = 1\}) = p$.

Биномиальное распределение с параметрами $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$.
Это закон распределения с.в., принимающей значения во множестве $\{0,1, \dots, n\}$ с вероятностями

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (3)$$

Стандартная модель биномиального распределения - это n независимых бросаний монеты с одинаковой вероятностью p выпадения «решки» при каждом бросании, а X - ***общее число*** выпадений «решки» («успехов») в n бросаниях. Очевидно, что X принимает значения от 0 до n и вероятность того, что $X = k$ даётся формулой (3) (докажите). Заметим, что пространство элементарных событий Ω в этом случае состоит их 2^n «слов» длины n вида {О,Р,Р,О,Р,О,О…,Р}, О - «орёл», Р - «решка», и вероятность «точки» {О,Р,Р,О,Р,О,О…,Р}, в которой ровно k букв P, стоящих ***на фиксированных местах***, даётся формулой $p^k(1 - p)^{n-k}$.

Геометрическое распределение с параметром $\alpha, 0 \le \alpha < 1$.

Это закон распределения с.в. X, принимающей значения в множестве $N = \{0,1,\dots\}$ с вероятностями $P(X = k) = (1-\alpha)\alpha^k$. В этом случае $EX = \frac{\alpha}{1-\alpha}, VarX = \alpha/(1-\alpha)^2$.

Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$.

Это закон распределения с.в. X, принимающей значения в множестве $N = \{0,1,2,\dots\}$ с вероятностями $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. В этом случае $EX = \lambda, VarX = \lambda$. Если $np_n \to \lambda$, то последовательность биномиальных распределений с параметрами (n, p_n) слабо сходится при $n \to \infty$ к распределению Пуассона с параметром λ.

Равномерное распределение на отрезке [a,b].

Это закон распределения с.в. X со значениями на отрезке [a,b], имеющей плотность распределения $f(x) = 1_{[a,b]}(x)/(b-a)$. В этом случае $EX = (a+b)/2, VarX = (b-a)^2/12$.

Экспоненциальное распределение с параметром θ.

Это закон распределения с.в. X со значениями в $[0,\infty)$ и имеющей плотность $f(x) = \theta e^{-\theta x} 1_{[0,\infty)}(x)$. В этом случае $EX = 1/\theta, VarX = 1/\theta^2$.

Нормальное распределение $N(\mu,\sigma^2)$.

Это закон распределения с.в. X со значениями в R, имеющей плотность $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$. В случае нормального распределения $EX = \mu, VarX = \sigma^2$. Нормальное распределение с параметрами $\mu = 0, \sigma = 1$ называется ***стандартным*** нормальным распределением. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение тогда и только тогда, когда $\sigma X + \mu$ имеет распределение $N(\mu, \sigma^2)$.

Усиленный закон больших чисел (у.з.б.ч.):
Если (X_n) *последовательность независимых, одинаково распределённых, интегрируемых с.в., то средние арифметические* $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ *сходятся* P *–* ***почти наверное*** *к константе* EX_1.

Центральная предельная теорема:

Если (X_n) *последовательность независимых одинаково распределённых, интегрируемых с квадратом с.в., то последовательность нормированных сумм*

$$\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} \cdot [\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - EX_1]$$

где $\sigma^2 = VarX_1$, *сходится по распределению к стандартному нормальному закону.*

Простое случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}$**.**
Простое случайное блуждание является математическим описанием одномерного движения частицы. Рассмотрим одномерную целочисленную решётку $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Предположим, что в момент времени $n = 0$ частица находится в положении $S_0 = 0$. Затем производится бросание симметричной монеты, и, в зависимости от результата бросания, частица перемещается на один шаг вправо или влево. Так как монета симметрична, вероятности каждого перемещения равны ½. Пусть S_1 обозначает полученное таким образом положение частицы в момент 1. Затем повторяют процесс, то есть снова бросают монету, чтобы определить положение частицы в момент 2, и.т.д. Предполагается, что каждое бросание монеты не зависит от результатов всех предыдущих бросаний. Результатом таких экспериментов является случайный процесс $S = \{S_n\}_{n\geq 0}$. Очевидно, имеет место представление $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, где $\{X_i\}_{i\geq 1}$ – последовательность независимых одинаково

распределённых с.в., $P(X_1 = +1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

Следующие факты о простом случайном блуждании хорошо известны:

1. $ES_n = 0, VarS_n = n, ES_n^4 = 3n^2 - 2n$.
2. *Усиленный закон больших чисел Колмогорова:*
$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right\} = 1$$
3. *Центральная предельная теорема:*
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$