Лекция 6.

Детерминированные модели динамического программирования.

Задача о кратчайшем пути.

Предположим, что надо выбрать кратчайший путь между двумя городами. Сеть дорог представляет возможные маршруты между исходным городом, находящемся в узле 1, и конечным пунктом, который находится в узле 7. Маршруты проходят через промежуточные города, обозначенные на сети узлами с номерами 2-6.
Мы можем решить эту задачу посредством полного перебора всех маршрутов между узлами 1 и 7 (всего пять таких маршрутов). Однако в большой сети полный перебор является неэффективным с вычислительной точки зрения.
Чтобы решить эту задачу методом динамического программирования, сначала разделим ее на *этапы.*
Этап 1. *Итоговые результаты*

- Кратчайший путь к узлу 2 равен 7 милям (из узла 1)
- Кратчайший путь к узлу 3 равен 8 милям (из узла 1)
- Кратчайший путь к узлу 4 равен 5 милям (из узла 1)

Далее переходим ко второму этапу для вычисления кратчайших (накопленных) расстояний к узлам 5 и 6. Имеем

$$\begin{pmatrix}\text{Кратчайший путь}\\ \text{к узлу } 5\end{pmatrix} = \min_{i=2,3,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Кратчайший путь}\\ \text{к узлу } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Расстояние от}\\ \text{узла } i \text{ до узла } 5\end{pmatrix}\right\} =$$

$$\min\begin{Bmatrix}7+12=19\\ 8+8=16\\ 5+7=12\end{Bmatrix} = 12 \text{ (из узла 4).}$$

Аналогично для узла 6 имеем

$$\begin{pmatrix}\text{Кратчайший путь}\\ \text{к узлу } 6\end{pmatrix} = \min_{i=3,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Кратчайший путь}\\ \text{к узлу } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Расстояние от}\\ \text{узла } i \text{ до узла } 6\end{pmatrix}\right\} =$$

$$\min\begin{Bmatrix}8+9=17\\ 5+13=18\end{Bmatrix} = 17 \text{ (из узла 3).}$$

Этап 2. *Итоговые результаты*

- Кратчайший путь к узлу 5 равен 12 миль (из узла 4)
- Кратчайший путь к узлу 6 равен 17 миль (из узла 3)

Последним является третий этап.

$$\begin{pmatrix}\text{Кратчайший путь}\\ \text{к узлу 7}\end{pmatrix} = \min\begin{Bmatrix}12+9=21\\ 17+6=23\end{Bmatrix} = 21 \text{ (из узла 5).}$$

Этап 3. *Итоговые результаты*

- Кратчайший путь к узлу 7 равен 21 миле (из узла 5).

Приведенные вычисления показывают, что кратчайшее расстояние между узлами 1 и 7 равно 21 миле. Города, через которые проходит кратчайший маршрут, определяются следующим образом. Из итоговых результатов третьего этапа следует, что узел 7 связывается с узлом 5. Далее, из итоговых результатов второго этапа следует, что узел 4 связывается с узлом 5. Наконец, из итоговых результатов первого этапа следует, что узел 4 связывается с узлом 1. Следовательно, оптимальный маршрут $1 \to 4 \to 5 \to 7$.

Теперь покажем, как реуррентные вычисления динамического программирования можно выразить математически. Пусть $f_i(x_i)$ - кратчайшее расстояние до вершины x_i на этапе i, $d(x_{i-1}, x_i)$ – расстояние от узла x_{i-1} до узла x_i. Тогда f_i вычисляется из f_{i-1} с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{все допустимые}\\ (x_{i-1},x_i)\text{ маршруты}}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}, i = 1,2,3.$$

При $i = 0$ полагаем $f_0(x_0) = 0$.

Задача. Найти кратчайший маршрут в нашей задача для следующих данных:

$$d(1,2) = 5, d(1,3) = 9, d(1,4) = 8,$$

$$d(2,5) = 10, d(2,6) = 17,$$

$$d(3,5) = 4, d(3,6) = 10,$$

$$d(4,5) = 9, d(4,6) = 9,$$

$$d(5,7) = 8, d(6,7) = 9.$$

Приведенный алгоритм относится к алгоритмам ***прямой прогонки.*** Этот же пример может быть решен с помощью алгоритма ***обратной прогонки.***
Рекуррентное уравнение для алгоритма обратной прогонки в рассмотренном примере имеет вид

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{все допустимые}\\ (x_i,x_{i+1})\text{ маршруты}}} \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1,2,3,$$

где $f_4(x_4) = 0$ для $x_4 = 7$.

Этап 3

	$d(x_3, x_4)$	Оптимальное решение	
x_3	$x_4 = 7$	$f_3(x_3)$	x_4
5	9	9	7

6	6	6	7

Этап 2. Так как маршрута (2,6) не существует, соответствующая альтернатива не рассматривается.

	$d(x_2, x_3) + f_3(x_3)$		Оптимальное решение	
x_2	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_2(x_2)$	x_3
2	12+9=21	-	21	5
3	8+9=17	9+6=15	15	6
4	7+9=16	13+6=19	16	5

Оптимальное решение второго этапа означает следующее. Если вы находитесь в узле 2 или 4, то кратчайший путь к узлу 7 проходит через узел 5, а если находитесь в узле 3, кратчайший путь к узлу 7 проходит через узел 6.

Этап 1. Из узла 1 мы имеем три альтернативных маршрута: (1,2), (1,3) и (1,4). Используя значения $f_2(x_2)$, полученные на втором этапе, вычисляем данные следующей таблицы.

	$d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$		Оптимальное решение		
x_1	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_1(x_1)$	x_2
1	7+21=28	8+15=23	5+16=21	21	4

Оптимальное решение на первом этапе показывает, что кратчайший путь проходит через город 4. Далее из оптимального решения на втором этапе следует, что из города 4 необходимо двигаться в город 5. Наконец, из оптимального решения на третьем этапе следует, что город 5 связан с городом 7. Оптимальный маршрут $1 \to 4 \to 5 \to 7$, и его длина равна 21 миле.

Задача инвестирования.

Предположим, что в начале каждого из следующих n лет необходимо сделать инвестиции $P_1, P_2, \dots, P_n$ соответственно. Вы имеете возможность вложить капитал в два банка: первый банк выплачивает годовой сложный процент r_1, а второй r_2. Для поощрения депозитов оба банка выплачивают новым инвесторам премии в виде процента от вложенной суммы. Премиальные меняются от года к году и для i –го года равны q_{i1} и q_{i2} в первом и втором банках соответственно. Они выплачиваются в конце года, на протяжении которого сделан вклад, и могут быть инвестированы в один из двух банков на следующий год. Это значит, что лишь указанные проценты и новые деньги могут быть инвестированы в один из двух банков. Размещенный в банке вклад должен находиться там до конца рассматриваемого периода. Необходимо разработать стратегию инвестиций на следующие n лет.
Элементы модели динамического программирования следующие.

1. Этап i представляется порядковым номером года $i, i = 1,2, \dots, n$.
2. Вариантами решения на i - м этапе (для i - го года) являются суммы I_i и $\bar{I}_i$ инвестиций в первый и второй банк соответственно.
3. Состоянием x_i на i - м этапе является сумма денег на начало i - го года, которые могут быть инвестированы.

Заметим, что $I_i + \bar{I}_i = x_i$. Имеем

$$x_i = P_i + q_{i-1,1}I_{i-1} + q_{i-1,2}(x_{i-1} - I_{i-1}) = P_i + \left(q_{i-1,1} - q_{i-1,2}\right)I_{i-1} + q_{i-1,2}x_{i-1},$$

где $i = 2,3,\dots,n$, $x_1 = P_1$. То есть, сумма денег, которые могут быть инвестированы, включает лишь новые деньги и премиальные проценты за инвестиции, сделанные на протяжении $(i-1)-$го года.
Пусть $f_i(x_i)$ – оптимальная сумма инвестиций для интервала от i – го до n – го года при условии, что в начала i – го года имеется денежная сумма x_i. Далее обозначим через s_i накопленную сумму к концу n – го года при условии, что I_i и $x_i - I_i$ - объёмы инвестиций на протяжении i - го года в первый и второй банк соответственно. Обозначая $\alpha_i = (1 + r_i), i = 1,2,$ мы можем сформулировать задачу в следующем виде

$$\text{Максимизировать } z = s_1 + s_2 + \dots + s_n,$$

где

$$s_i = I_i\alpha_1^{n+1-i} + (x_i - I_i)\alpha_2^{n+1-i} = \left(\alpha_1^{n+1-i} - \alpha_2^{n+1-i}\right)I_i + \alpha_2^{n+1-i}x_i, i = 1,2,\dots,n-1.$$

$$s_n = (\alpha_1 - \alpha_2)I_n + \alpha_2x_2 + q_{n1}I_n + q_{n2}(x_n - I_n).$$

В данном случае рекуррентное соотношение для обратной прогонки в алгоритме динамического программирования имеет вид

$$f_i(x_i) = \max_{0\le I_i\le x_i}\{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1,2,\dots,n-1,$$

где x_{i+1} выражается через x_i в соответствии с вышеприведенной формулой, а $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Пример.

Предположим, что вы хотите инвестировать 4000 долларов сейчас и 2000 долларов в начале каждого года, от второго до четвертого, считая от текущего года. Первый банк выплачивает годовой сложный процент 8% и премиальные на протяжении следующих четырех лет в размере 1,8% ; 1,7% ; 2,1% ; 2,5% соответственно. Годовой сложный процент, предлагаемый вторым банком, на 0,2% ниже, чем предлагает первый банк, но его премиальные на 0,5% выше. Задача состоит в максимизации накопленного капитала к концу четвертого года.
Используя введенные выше обозначения, имеем следующее:

$$P_1 = \$4000, P_2 = P_3 = P_4 = \$2000,$$

$$\alpha_1 = (1 + r_1) = (1 + 0{,}08) = 1{,}08,$$

$$\alpha_2 = (1 + r_2) = (1 + 0{,}078) = 1{,}078,$$

$$q_{11} = 0{,}018;\ q_{21} = 0{,}017;\ q_{31} = 0{,}021;\ q_{41} = 0{,}025,$$

$$q_{12} = 0{,}023;\ q_{22} = 0{,}022;\ q_{32} = 0{,}026;\ q_{42} = 0{,}030.$$

Начинаем процесс обратной прогонки.

Этап 4.

$$f_4(x_4) = \max_{0 \le I_4 \le x_4} \{s_4\},$$

где

$$s_4 = \alpha_1 I_4 + \alpha_2(x_4 - I_4) + q_{41} I_4 + q_{42}(x_4 - I_4) = -0{,}003 I_4 + 1{,}108\, x_4.$$

Функция s_4 является линейной по I_4 в области $0 \le I_4 \le x_4$ и, следовательно, её максимум достигается при $I_4 = 0$ из-за отрицательности коэффициента при I_4. Следовательно, оптимальное решение для этапа 4 может быть представлено в следующем виде

Оптимальное решение

Состояние	$f_4(x_4)$	I_4^*
x_4	$1{,}108\, x_4$	0

Этап 3.

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{s_3 + f_4(x_4)\},$$

где

$$s_3 = I_3 \alpha_1^2 + (x_3 - I_3)\alpha_2^2 = 0{,}00432 I_3 + 1{,}162 x_3,$$

$$x_4 = 2000 - 0{,}005 I_3 + 0{,}026 x_3.$$

Следовательно,

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{0{,}00432 I_3 + 1{,}162 x_3 + 1{,}108(2000 - 0{,}005 I_3 + 0{,}026 x_3)\} =$$

$$\max_{0 \le I_3 \le x_3} \{2216 - 0{,}00122 I_3 + 1{,}1909 x_3\}.$$

Оптимальное решение

Состояние	$f_3(x_3)$	I_3^*
x_3	$2216 + 1{,}1909 x_3$	0

Этап 2.

$$f_2(x_2) = \max\nolimits_{0 \le I_2 \le x_2} \{s_2 + f_3(x_3)\},$$

где

$$s_2 = I_2\alpha_1^3 + (x_2 - I_2)\alpha_2^3 = 0{,}006985I_2 + 1{,}25273x_2,$$

$$x_3 = 2000 - 0{,}005I_2 + 0{,}022x_2.$$

Следовательно,

$$f_2(x_2) = \max_{0\le I_2\le x_2}\{0{,}006985I_2 + 1{,}25273x_2 + 2216 + 1{,}1909(2000 - 0{,}005I_2 + 0{,}022x_2)\} =$$

$$\max_{0\le I_2\le x_2}\{4597{,}8 + 0{,}0010305I_2 + 1{,}27893x_2\}.$$

Состояние	Оптимальное решение $f_2(x_2)$	I_2^*
x_2	$4597{,}8 + 1{,}27996x_2$	x_2

Этап 1.

$$f_1(x_1) = \max\nolimits_{0\le I_1\le x_1}\{s_1 + f_2(x_2)\},$$

где

$$s_1 = I_1\alpha_1^4 + (x_1 - I_1)\alpha_2^4 = 0{,}01005I_1 + 1{,}3504x_1,$$

$$x_2 = 2000 - 0{,}005I_1 + 0{,}023x_1.$$

Следовательно,

$$f_1(x_1) = \max_{0\le I_1\le x_1}\{0{,}01005I_1 + 1{,}3504x_1 + 4597{,}8 + 1{,}27996(2000 - 0{,}005I_1 + 0{,}023x_1)\} =$$

$$\max_{0\le I_1\le x_1}\{7157{,}7 + 0{,}00365I_1 + 1{,}37984x_1\}.$$

Состояние	Оптимальное решение $f_1(x_1)$	I_1^*
$x_1 = \$4000$	$7157{,}7 + 1{,}38349x_1$	\$4000

При вычислении в обратном направлении получаем следующее

$$x_2 = 2000 - 0{,}005 \times 4000 + 0{,}023 \times 4000 = \$2072,$$

$$x_3 = 2000 - 0{,}005 \times 2072 + 0{,}022 \times 2072 = \$2035{,}22,$$

$$x_4 = 2000 - 0{,}005 \times 0 + 0{,}026 \times 2035{,}22 = \$2052{,}92.$$

Оптимальное решение будет записано следующим образом:

Оптимальное решение	Решение, принимаемое инвестором
$I_1^* = x_1$	Инвестировать x_1 = \$4000 в первый банк
$I_2^* = x_2$	Инвестировать x_2 = \$2072 в первый банк
$I_3^* = 0$	Инвестировать x_3 = \$2035,22 во второй банк
$I_4^* = 0$	Инвестировать x_4 = \$2052,92 во второй банк

Домашнее задание.

Решите задачу из разобранного примера для следующих данных:

$$r_1 = 0{,}085;\ r_2 = 0{,}08;\ P_1 = \$5000;\ P_2 = \$4000;\ P_3 = \$3000;\ P_4 = \$2000.$$

Остальные данные те же, что и в разобранном примере.

Вероятностные модели динамического программирования.

Задача инвестирования.

Некто планирует инвестировать C тысяч долларов через фондовую биржу в течение последующих n лет. Инвестиционный план состоит в покупке акций в начале года и продаже их в конце года. Накопленные деньги затем могут быть снова инвестированы (все или их часть) в начале следующего года. Степень риска инвестиции представлена тем, что прибыль имеет вероятностный характер. Предположим, что изучение рынка свидетельствует о том, что прибыль от инвестиции зависит от m условий рынка (благоприятных или неблагоприятных). При этом условие i приводит к прибыли r_i с вероятностью $p_i, i = 1,2, \dots, m$. Как следует инвестировать C тысяч долларов для наибольшего накопления к концу n лет?
Обозначим

- x_i - сумма денежных средств, доступных для инвестирования в начале i – го года $(x_1 = C)$.
- y_i – сумма реальной инвестиции начале i – го года $(y_i \le x_i)$.

Элементы модели динамического программирования можно описать следующим образом:

1. *Этап* i представляет i - ый год инвестирования.
2. *Альтернативами* на этапе i являются величины y_i.
3. *Состояние* системы на этапе i описывается величиной x_i.

Пусть $f_i(x_i)$ – максимальная ожидаемая сумма инвестиций денежных средств для интервала от i – го до n – го года при условии, что в начала i – го года имеется денежная сумма x_i. Для k - го условия рынка имеем следующее:

$$x_{i+1} = (1 + r_k)y_i + (x_i - y_i) = r_k y_i + x_i, k = 1, \dots, m.$$

Так как вероятность k - го условия рынка равна p_k, рекуррентное уравнение динамического программирования имеет следующий вид

$$f_i(x_i) = \max_{0 \le y_i \le x_i} \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k f_{i+1}(x_{i+1}) \right\} = \max_{0 \le y_i \le x_i} \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k f_{i+1}(r_k y_i + x_i) \right\}, i = 1, \dots n-1,$$

Кроме того, $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1}$, так как после n - го года инвестиций нет. Отсюда следует, что

$$f_n(x_n) = \max_{0 \le y_n \le x_n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} p_k (x_n + r_k y_n) \right\} = x_n \sum_{k=1}^{m} p_k \, (1 + r_k) =$$

$$x_n(1 + p_1 r_1 + \dots + p_m r_m),$$

поскольку функция в фигурных скобках является линейной по y_n, и, следовательно, достигает своего максимума при $y_n = x_n$.

Домашнее задание.

Пусть в предыдущей модели инвестирования объем инвестиций составляет С = 10000 долларов на 4-х летний период. Существует 40 % - я вероятность того, что вы удвоите деньги, 20% - я – останетесь при своих деньгах и 40% - потеряете весь объем инвестиций. Необходимо разработать оптимальную стратегию инвестирования.
Данные задачи:

$$C = \$10000, n = 4, m = 3, p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}4, r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = -1.$$