Лекция 7. Принцип Беллмана. Примеры применения.

Пример 1. Замена автомобиля (пример задачи о замене обрудования).

Обозначим через $\{0,1,\dots,K\}$ состояния, в которых может быть автомобиль. Состояние 0 соответствует новой машине, номер состояния возрастает по мере старения машины. Состояние машины X_n в момент времени n является случайной величиной. Предположим, что ***эволюция марковская*** и положим

$$P(i,j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i), 0 \le i,j \le K.$$

Поддерживание «на ходу» старой машины требует технического обслуживания, т.е. требует затрат. Обозначим через $\alpha(i)$ – затраты на поддержание машины, находящейся в состоянии i. В каждый момент времени имеется также возможность заплатить сумму, равную R, и купить новую машину, т.е. перейти в состояние 0.

Задача. ***Описать оптимальную стратегию в интервале времени*** $[\mathbf{0},\boldsymbol{N}]$ ***и определить моменты времени, когда лучше всего покупать новую машину.*** Будем искать решение этой задачи, сформулировав её как задачу оптимального марковского управления. Рассмотрим управления, принимающие всего два значения: $u=0$, если оставляем старую машину, $u=1$, если покупаем новую машину. Положим

$$P^{(0)}(i,j) = P(i,j),$$

Поскольку при «нулевой» стратегии затраты производятся только на поддержание машины, то $P^{(0)}(i,j) = 0$ для $0 \le j < i$ (машина не может перейти в состояние с меньшим номером, так как он соответствует менее изношенной машине, в состояние 0 также нет перехода, так как при «нулевой» стратегии новая машина не покупается).

Тогда как при «единичной» стратегии

$$P^{(1)}(i,0) = 1, P^{(1)}(i,j) = 0, если\, j > 0.$$

Затраты $c(x,u)$ (для простоты считаем их не зависящими от n,т.е. не учитываем, например, изменение со временем цен на сервисные услуги) на поддержание или покупку машины в различных её состояниях равны соответственно

$$c(i,0) = \alpha(i), \qquad c(i,1) = R, \qquad \gamma(i) = \alpha(i).$$

Можно рассмотреть и другие финальные затраты $\gamma(i)$, это зависит от конкретной ситуации, которую мы хотим моделировать. Опишем алгоритм динамического программирования. Сначала $J_N(i) = \gamma(i) = \alpha(i)$, затем идем обратным ходом:

$$J_n(i) = \min_{u \in \{1,0\}} \left\{ c(i,u) + \left(P^{(u)} J_{n+1}\right)(i) \right\} =$$

$$\min\{R + \sum_{j=0}^{K} J_{n+1}(j) P^{(1)}(i,j),\ \ \alpha(i) + \sum_{j=0}^{K} J_{n+1}(j) P^{(0)}(i,j)\} =$$

$$\min\left\{ R + J_{n+1}(0), \alpha(i) + \sum_{j=0}^{K} J_{n+1}(j) P^{(0)}(i,j) \right\}. \qquad (6)$$

$n = N-1, N-2, \dots, 0$. Выбирая минимум из двух выражений в (6), найдем оптимальное управление (0 или 1) на $n-$м шаге. Двигаясь обратным ходом, найдем значение $J_0(i)$, которое, в соответствии с Теоремой 1 Лекции 5, дает минимальные средние затраты на всем интервале наблюдений (исходя из состояния i), а также оптимальное управление на каждом шаге. Эти формулы достаточно просто программировать. Предположим теперь, что $\alpha(i)$ и $P^{(0)}(i,[j,K]), j \geq i$, являются ***возрастающими функциями*** i, что отражает тот факт, что более изношенная машина требует больше вложений на её поддержание и возрастает вероятность её дальнейшего старения или покупки новой машины. Это предположение влечёт: если $f(i)$ возрастающая функция i, то $Pf(i) = \sum_{j=0}^{K} f(j) P^{(0)}(i,j)$ также возрастающая функция i. В самом деле,

$$Pf(i) = \sum_{j=0}^{K} \big(P(i,[j,K]) - P(i,[j+1,K])\big) f(j) =$$

$$P(i,[0,K]) f(0) + \sum_{j=1}^{K} \big(P(i,[j,K])(f(j) - f(j-1)\big).$$

Правая часть равенства, как сумма возрастающих по i функций, возрастает по i. Отсюда и из (6) получаем по индукции (двигаясь из конца в начало), что $J_n(i)$ возрастающая функция i для всех $0 \leq n \leq N$. Положим $\phi_{n+1}(i) = \alpha(i) + PJ_{n+1}(i)$. Как следует из наших предыдущих рассмотрений, эта фукция возрастает по i. Поэтому *в каждый момент* n можно определить «пороговое» состояние машины, т.е. такое состояние, когда покупка машины становится рентабельнее, чем её поддержание:

$$a_n = \inf\{i : R + J_{n+1}(0) \le \phi_{n+1}(i)\}.$$

Стратегия состоит в покупке новой машины в тот момент n, когда её состояние впервые превзойдёт пороговое, то есть станет $\ge a_n$. Значения a_n вычисляются на компьютере.

Пример 2. Управление запасами. Каждый вечер менеджер магазина должен заказывать некоторое количество товара, чтобы удовлетворить спрос завтрашних покупателей. Сформулирум основные предположения модели. Закупочная стоимость x единиц товара равна $a \cdot x$. Каждый клиент покупает ***одну*** единицу товара, поэтому ***спрос равен числу пришедших клиентов***. Спрос (= число пришедших клиентов) является *последовательностью независимых, одинаково распределённых с.в., пусть* μ *их общий закон распределения.* Стоимость хранения на складе одной единицы товара до конца дня равна h. Неудовлетворённый спрос (по причине отсутствия товара) стоит p за каждую единицу не выданного товара. Если накануне (вечером) запас товара равен s, на завтра заказано u единиц товара (буква u выбрана не случайно, это единственная контролируемая величина модели, она будет играть роль управления), а придут (завтра) w клиентов, то ***затраты к завтрашнему вечеру*** будут равны

$$C(s, w, u) = a \cdot u + p \cdot (w - s - u)^+ + h \cdot (s + u - w)^+$$

Функция x^+ равна x, если $x \ge 0$ и равна 0, если $x < 0$. Например, если $w < s + u$, то есть, если пришло клиентов меньше, чем количество товара в наличии, то платы за неудовлетворённый спрос нет, в противном случае она равна $p(w - s - u)$. Аналогично, если пришло клиентов больше, чем количесто товара в наличии, то есть если $s+u<w$, то плата за хранение отсутствует, в противном случае надо хранить $(s+u-w)$ единицы товара, и плата за это равна $h\cdot(s+u-w)$. Чтобы перейти к ***управляемой марковской модели***, поступим следующим образом. Обозначим через $\boldsymbol{S_k}$ ***размер запаса*** (со знаком, т.е. он может быть и отрицательным, что означает дефицит товара) ***к вечеру*** $\boldsymbol{k}$ ***- го дня,*** пусть W_k - число клиентов, пришедших ***на следующий,*** $(\boldsymbol{k+1})$ ***- ый день.*** Общие ***средние затраты за N дней*** функционирования магазина равны

$$C_N=E\left(\sum_{k=0}^{N-1}C(S_k,W_k,U_k)\right).$$

Перепишем эти затраты следующим образом:

$$C_N=\sum_{k=0}^{N-1}E\big(C(S_k,W_k,U_k)\big)=\sum_{k=0}^{N-1}E\left(\int C(S_k,w,U_k)d\mu(w)\right)=$$

$$E\left(\sum_{k=0}^{N-1}\int C(S_k,w,U_k)d\mu(w)\right).$$

Если теперь положим $X_k=S_k$ (оставшееся к вечеру k-го дня количство единиц товара) и $c(x,u)=\int C(x,w,u)d\mu(w),\gamma(x)=0,$ то получим марковскую модель с управлением (ср. с обозначениями Теоремы 1). Роль управления здесь играет с.в. U_k – количество единиц товара, которое надо дополнительно заказать вечером k-го дня. Возможно, более естественным было бы объявить состоянием вектор $X_k=(S_k,W_k)$, но тогда мы не были бы точно в рамках нашей управляемй модели, так как начальная точка была бы случайной (из-за

W_0). Нетрудно обобщить наши рассмотрения и на этот случай, но мы этого делать не будем. Для упрощения анализа мы будем рассматривать ситуацию ***«backlog»,*** т.е. когда ***необслуженные клиенты не уходят, а остаются в ожидании до получения товара (они приоритетно получат товар, когда он поступит).*** В этом случае

$$X_{n+1} = X_n + u - W_n,$$

где W_n- независимая с.в., имеющая закон распределения μ (если W_n велико, то X_{n+1} может быть и отрицательна). Напомним, что, по определению, W_n - число клиентов, пришедших на следующий**,** $n+1$-ый, день. Если бы мы хотели моделировать ситуацию, когда неудовлетворёные клиенты уходят, то надо было бы положить $X_{n+1} = (X_n + u - W_n)^+ \geq 0$.

Решение задачи. Используем алгоритм Беллмана, положим $J_N(x) = \gamma(x) = 0$. Затем рекуррентно, обратным ходом определяем

$$J_n(x) = \min_u [c(x,u) + E_w(J_{n+1}(x + u - W))], \qquad (7)$$

где W - с.в., имеющая закон распределения μ. Средние издержки (затраты) равны

$$c(x,u) = E_w[au + p(W - x - u)^+ + h(x + u - W)^+].$$

(м.о. берётся по распределению μ).

Предложение 6. *Предположим, что* $p, h \geq 0$ *и* $p > a > 0$. *Тогда можно определить последовательность* σ_n *такую, что оптимальное управление имеет вид* $u_n(x) = (\sigma_n - x)^+$.

Доказательство. Положим

$$g_n(z) = L(z) + E_w\big(J_{n+1}(z - W)\big), z \in R.$$

где

$$L(z) = a \cdot z + p \cdot E_w(W - z)^+ + h \cdot E_w(z - W)^+.$$

Заметим, что $J_{n+1} \geq 0$ (следует из (7), попятным движением, как минимум суммы неотрицательных функций). Кроме того,

$$\lim_{z \to \pm\infty} L(z) = +\infty.$$

Для $z \to +\infty$ это очевидно, для $z \to -\infty$ пользуемся тем, что

$$E_w(W - z)^+ = E_w\{(W - z)^+ \cdot 1(W < z) + (W - z)^+ \cdot 1(W \geq z)\} =$$
$$0 + E_w(W - z) \cdot 1(W \geq z) = E_w[W \cdot 1(W \geq z)] - z \cdot P(W \geq z).$$

Поэтому

$$a \cdot z + p \cdot E(W - z)^+ = a \cdot z + p \cdot E_w[W \cdot 1(W \geq z)] -$$
$$-z \cdot p \cdot P(W \geq z) \geq z(a - p).$$

Поскольку, по предположнию, $a - p < 0$, то $\lim_{z \to -\infty} z(a - p) = +\infty$. и, следовательно

$$\lim_{z \to -\infty} L(z) = +\infty.$$

Таким образом, и (т.к. $E_w\big(J_{n+1}(z - W)\big) \geq 0$),

$$\lim_{z \to \pm\infty} g_n(z) = +\infty.$$

Покажем теперь обратной индукцией, что для $n \leq N$ функция J_n выпуклая. Для J_N это очевидно, так как эта функция тождествено равна нулю. Предположим, что J_{n+1} выпуклая. Тогда и $E_w\big(J_{n+1}(z - W)\big)$ выпуклая. Функции x^+ и $(-x)^+$, очевидно, выпуклые, поэтому и функция $L(z)$, как сумма трёх выпуклых функций, выпуклая. Но тогда и $g_n(z)$ выпуклая. Имеем (см. (7))

$$J_n(x) = \min_{u \geq 0}[g_n(x+u) - ax].$$

(разность в квадратных скобках неотрицательна). Обозначим через $\boldsymbol{\sigma_n}$ ***(наименьшее) значение аргумента функции $\boldsymbol{g_n}$, при котором $\boldsymbol{g_n}$ (а значит и $\boldsymbol{J_n}$) достигает своего единственного минимума.*** Это значение существует и единственно, поскольку g_n - выпуклая функция и

$$\lim_{z \to \pm\infty} g_n(z) = +\infty.$$

Тогда

$$J_n(x) = g_n(\sigma_n) - ax \ \text{ и } \ u_n(x) = \sigma_n - x, \text{если } \ u_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sigma_n,$$

и

$$J_n(x) = g_n(x) - ax \ \text{ и } \ u_n(x) = 0, \text{если } \ x > \sigma_n.$$

(здесь $u_n(x)$ - ***неотрицательное*** управление, на котором достигается минимум). Эта функция J_n выпуклая (следует из её определения) и оптимальное управление дается формулой

$$u_n(x) = (\sigma_n - x)^+.$$

Оптимальная линейная фильтрация и управление.

Постановка задачи линейного управлеия.

Одной из наиболее часто используемых моделей является ***линейная модель с квадратичной функцией затрат и гауссовскими шумами.*** Расссмотрим систему:

$$X_{n+1} = AX_n + BU_n + W_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

где $X_n \in R^d$, $A -$ вещественная $d \times d$ – матрица, $U_n \in R^p$, B-вещественная $d \times p$ – матрица и $W_n \in R^d$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность независимых, одинаково распределённых гауссовских векторов $\mathcal{N}(0, V)$, то есть центрированных и имеющих матрицу ковариаций V. Рассматриваемые векторы всегда будут вектор-столбцами.

В задачах управления обычно рассматривают более слабые ограничения: достаточно предполагать, что W_n интегрируемы с квадратом, центрированы и некоррелированы и имеют одну и ту же матрицу ковариаций, то есть

$$EW_n = 0,$$

$$E(W_n W_n^*) = V, \qquad E(W_n W_m^*) = 0, если\ m \neq n.$$

В частности, V может равняться нулю. Тогда $W_n \equiv 0$ и тогда имеют дело ***с детерминированным*** линейным управлением. Функция затрат (издержек) имеет вид

$$E\left(\sum_{k=0}^{N-1} c(X_k, U_k) + \gamma(X_N)\right),$$

где c и γ - ***квадратичные формы*** вида

$$c(x, u) = x^* Q x + u^* R u,$$

$$\gamma(x) = x^* \Gamma x,$$

где Q и Γ - симметрические ***неотрицательно*** определённые $d \times d$ матрицы, а R - симметрическая ***положительно*** определённая $p \times p$ матрица.

Напомним кратко основные факты о симметрических матрицах, которые будут нам нужны.

Симметрические матрицы.

Определение 6. *Вещественная $d \times d$ матрица M называется симметрической, если она совпадает со своей транспонированной M^*. Она неотрицательно определена, если*

$$x^* M x \geq 0 \text{ для всех } x \in R^d$$

и положительно определена, если

$$x^* M x > 0 \text{ для всех } x \neq 0, x \in R^d.$$

Множество неотрицательно определённых матриц порядка d будем обозначать $\mathcal{P}_d$.

Всякая вещественная симметрическая матрица M порядка d ***диагонализуема:*** точнее, существует ортогональная матрица U (т.е. такая, что $U^* = U^{-1}$), и диагональная матрица D такие, что $M = UDU^*$ (говорят, что матрица M ***подобна диагональной матрице*** D). Диагональные элементы матрицы D вещественны, они называются ***собствеными значениями*** $\lambda_1, \dots \lambda_d$ матрицы M. Матрица M неотрицательно определена, если

$$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_d \geq 0,$$

и положительно определена, если

$$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_d > 0.$$

Таким образом, симметрическая неотрицательно определённая матрица является положительно определённой тогда и только тогда, когда она обратима. Нам понадобится

Лемма 3. *Пусть S – симметрическая положительно определённая матрица порядка p и вектор $y \in R^p$ фиксирован. Минимум по u квадратичной формы*

$$2u^* y + u^* S u$$

равен $-y^*S^{-1}y$ *и он достигается при* $u = -S^{-1}y$.

Доказательство. Имеем для любого $h \in R^p$

$$2y^*(u+h)+(u+h)^*S(u+h) =$$
$$2y^*u + u^*Su + h^*Sh + 2(Su+y)^*h.$$

(мы воспользовались тем, что $u^*Sh = h^*Su$ и $u^*y = y^*u$). Заменяя h на th, где t вещественное число, видим, что правая часть последнего равенства будет функцией h, достигающей минимума при $h = 0$, если для всех $t \in R$

$$t^2h^*Sh + 2t(Su+y)^*h \geq 0.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда $(Su+y)^*h = 0$ (доказывается от противного, рассматривая достаточно малые t). Это рассуждение верно для всех $h \in R^p$, поэтому равенство $(Su+y)^*h = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $Su + y = 0$, то есть $u = -S^{-1}y$. В этой точке минимум равен

$$2y^*u + u^*Su = -2y^*S^{-1}y + (S^{-1}y)^*S(S^{-1}y) = -y^*S^{-1}y.$$

Лемма 4

Если W *– центрированный вектор, имеющий матрицу ковариаций* V, *то*

$$E(W^*\Gamma W) = tr(\Gamma V).$$

Доказательство. Поскольку $W^*\Gamma W$ - вещественная с.в., она равна своему следу, поэтому (*пользуемся также тем, что* $tr(AB) = tr(BA)$)

$$E(W^*\Gamma W) = E\big(tr(W^*\Gamma \mathrm{W})\big) = E\big(tr(\Gamma WW^*)\big) = tr\big(\Gamma E(WW^*)\big)$$
$$= tr(\Gamma V).$$

Динамическое программирование для линейной модели с квадратичной функцией затрат.

Мы ищем

$$J(x) = \min_{\nu} E_x^{\nu}\left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k(X_k, U_k) + \gamma(X_N)\right),$$

где минимум берётся по всем стратегиям $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_{N-1})$.

Чтобы свести задачу к задаче динамического программирования, обозначим через $P^{(u)}(x, \cdot)$ закон распределения с.в. $Ax + Bu + W$, где $W \sim N(0, V)$. В этой ситуации ***алгоритм допускает явное решение.*** В самом деле,

$$J_N(x) = \gamma(x) = x^*\Gamma x = x^*\Gamma_N x, \tag{9}$$

где мы положили $\Gamma = \Gamma_N$.

Далее, для модели (8) имеем с учётом (9), Леммы 3 и Леммы 4 и того, что $W \sim N(0, V)$, имеем

$$J_{N-1}(x) = \min_u \left\{x^*Qx + u^*Ru + \int J_N(y)P^{(u)}(x, dy)\right\} =$$

$$\min_u \left\{x^*Qx + u^*Ru + E_w\big(J_N(Ax + Bu + W_{N-1})\big)\right\} =$$

$$\min_u \{x^*Qx + u^*Ru + (Ax + Bu)^*\Gamma_N(Ax + Bu) + tr(\Gamma_N V)\} =$$

$$\min_u \{x^*(Q + A^*\Gamma_N A)x + u^*(R + B^*\Gamma_N B)u + 2x^*A^*\Gamma_N Bu + tr(\Gamma_N V)\} =$$

$$x^*(Q + A^*\Gamma_N A)x + tr(\Gamma_N V) + \min_u \{u^*(R + B^*\Gamma_N B)u + 2x^*A^*\Gamma_N Bu\}.$$

Применяя Лемму 3 с $S = (R + B^*\Gamma_N B)$ и $y = B^*\Gamma_N Ax$, видим, что

$$J_{N-1}(x) = x^*\Gamma_{N-1}x + tr(\Gamma_N V), \qquad (10)$$

где

$$\Gamma_{N-1} = Q + A^*\Gamma_N A - (A^*\Gamma_N B)(R + B^*\Gamma_N B)^{-1}(B^*\Gamma_N A)$$

и достигается этот минимум в точке

$$u = -S^{-1}y = K_{N-1}x,$$

где

$$K_{N-1} = -(R + B^*\Gamma_N B)^{-1}(B^*\Gamma_N A).$$

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что Γ_{N-1} можно переписать в следующем виде

$$\Gamma_{N-1} = Q + K_{N-1}^* R K_{N-1} + (A + BK_{N-1})^*\Gamma_N(A + BK_{N-1}).$$

С точностью до слагаемого $(tr(\Gamma_N V))$ выражение (10) для $J_{N-1}(x)$ имеет тот же вид, что и выражение (9) для $J_N(x)$, поэтому можно повторить те же вычисления, чтобы получить $J_{N-2}(x)$ и.т.д. В результате получим следующий замечательный результат.

Теорема 3. *Положим (преобразование Риккати)*

$$\rho(\Gamma) = Q + A^*\Gamma A - (A^*\Gamma B)(R + B^*\Gamma B)^{-1}(B^*\Gamma A).$$

Рассмотрим последовательность матриц, определённых последовательно уравнениями: $\Gamma_N = \Gamma$, *затем для* $n < N$ *полагаем*

$$\Gamma_n = \rho(\Gamma_{n+1}).$$

Тогда

$$J_n(x) = x^*\Gamma_n x + \sum_{n+1}^{N} tr(\Gamma_k V)$$

и оптимальное управление (марковское, линейое по X*) имеет вид*

$$U_n = K_n X_n,\ где\ K_n = -(R + B^*\Gamma_{n+1}B)^{-1}(\mathrm{B}^*\Gamma_{n+1}A).$$

Пусть, например, $d = p = 1$, то есть рассматривается ***одномерная модель***

$$X_{n+1} = aX_n + bU_n + W_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

где $W_n,\ n \in \mathbb{N}$, последовательность независимых, одинаково распределённых гауссовских с.в. $\mathcal{N}(0, V)$, то есть центрированных и имеющих дисперсию V. Тогда оптимальное управление U_n даётся формулами для всех $0 \leq n < N$

$$U_n = -\frac{ba\Gamma_{n+1}}{R + b^2\Gamma_{n+1}}X_n, \qquad J_n(x) = \Gamma_n x^2 + \sum_{k=n+1}^{N} \Gamma_k V,$$

где Γ_n находится из рекуррентного соотгошения

$$\Gamma_n = \frac{QR + (b^2Q + Ra^2)\Gamma_{n+1}}{R + b^2\Gamma_{n+1}}, \qquad 0 \leq n < N. \tag{11}$$

Отметим появление дробно-линейного преобразования (11) с положительными коэффициентами.

Обобщения.

Коэффициенты, зависящие от времени.

Можно предположить, что матрицы A, B, Q, R, V зависят от n.

Получим результат того же типа с тем же самым доказательством.

Достаточно заменить уравнение $\Gamma_n = \rho(\Gamma_{n+1})$ на $\Gamma_n = \rho_n(\Gamma_{n+1})$, где

$$\rho_n(\Gamma) = Q_n + A_n^*\Gamma A_n - (A_n^*\Gamma B_n)(R_n + B_{\text{n}}^*\Gamma B_n)^{-1}(B_{\text{n}}^*\Gamma A_n)$$

и каждое слагаемое $tr(\Gamma_n V)$ на $tr(\Gamma_n V_{n-1})$.

Корректировка траектории.

Другое полезное обобщение состоит в следующем. Предположим, что мы хотим, чтобы наша траектория X_n была близка к некоторому вектору ξ_n, *известному заранее*. В этом случае мы стремимся сделать малой разность $X_n - \xi_n$, то есть минимизировать критерий

$$E(\sum_{k=0}^{N-1} c_k(X_k, U_k) + \gamma(X_N - \xi_N)),$$

где $c_k(x,u) = (x - \xi_k)^* Q(x - \xi_k) + u^* R u.$ Хотим свести эту ситуацию к уже рассмотренной. Для этого положим $\bar{X}_k = X_k - \xi_k$. Критерий тогда запишется

$$E(\sum_{k=0}^{N-1} c_k(\bar{X}_k, U_k) + \gamma(\bar{X}_N)),$$

Но теперь наша модель (8) запишется

$$\bar{X}_{n+1} = A\bar{X}_n + BU_n + W_n + A\xi_n - \xi_{n+1}.$$

Увеличим на единицу размерность пространства состояний, полагая $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ 1 \end{pmatrix}$. Введём также матрицы

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} A & v_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \widetilde{W}_n = \begin{pmatrix} W_n \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $v_n = A\xi_n - \xi_{n+1}$. Тогда уравнение запишется

$$\tilde{X}_{n+1} = \tilde{A}_n \tilde{X}_n + \widetilde{B}\, U_n + \widetilde{W}_n,$$

и мы свели исходную модель к уже рассмотренной модели, при этом на единицу возросла размерность задачи.