Лекция 3. Условные математические ожидания. Первые примеры моделирования.

Литература

- А.Н. Ширяев. Вероятность. Изд-во «Наука», 1980.

Условное математическое ожидание относительно $\boldsymbol{\sigma}$ - алгебры.

Определение 3.1. Пусть X - случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\mathcal{G}$ – σ-алгебра подмножеств $\mathcal{F}$ и $E[|X|] < \infty$. Мы скажем, что Y является условным математическим ожиданием (у.м.о.) с.в. X относительно σ- алгебры $\mathcal{G}$, обзначается

$$Y = E[X|\mathcal{G}],$$

если выполнены два свойства:

1. Y является $\mathcal{G}$ – измеримой
2. $E[I(A) \cdot Y] = E[I(A) \cdot X]$ для всех $A \in \mathcal{G}$.

Существование и единственность (почти наверное) условного математического ожидания интегрируемой с.в. X являются прямым следствием теоремы Радона-Никодима (см. А.Н. Ширяев, стр. 213).

Свойства условных математических ожиданий.

1) $Y = E[X|\mathcal{G}] \Rightarrow E[X] = E[Y]$.

Для доказательства достаточно в п. 2 Определения 3.1 взять $A = \Omega$.

2) $X = C \Rightarrow E[C|\mathcal{G}] = C$.

Если положить $E[C|\mathcal{G}] = C,$ то свойства 1 и 2 Определения 3.1 легко проверяются. Далее надо воспользоваться единственностью у.м.о.

3) $X_1 \leq X_2$ п. н. $\Rightarrow E[X_1|\mathcal{G}] \leq E[X_2|\mathcal{G}]$ п. н.

Пример: $X \geq 0 \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] \geq E[0|\mathcal{G}] = 0$.

Для доказательства обозгачим $Y_i = E[X_i|\mathcal{G}], i = 1,2.$ Пусть $A = \{\omega \in \Omega: Y_1(\omega) - Y_2(\omega) > 0\} \in \mathcal{G}$. Тогда

$$0 \le E[(Y_1 - Y_2) \cdot I(A)] = E[(X_1 - X_2) \cdot I(A)] \le 0.$$

Отсюда $E[(Y_1 - Y_2) \cdot I(A)] = 0, (Y_1 - Y_2) \cdot I(A) \ge 0$, и, по доказанному в Лекции 1, $(Y_1 - Y_2) \cdot I(A) = 0$ п. н. Таким образом $I(A) = 0$ п. н. $\Rightarrow P(A) = 0$.

4) Для с.в. X_1, X_2 и $a, b \in R$

$$E[(aX_1 + bX_2)|\mathcal{G}] = aE[X_1|\mathcal{G}] + bE[X_2|\mathcal{G}]$$

Следует из линейности математического ожидания и почти наверное единственности у.м.о.

5) $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = E[X]$.

Доказывается прямой проверкой свойств 1 и 2 Определения 3.1

6) $\mathcal{G} = \mathcal{F} \Rightarrow E[X|\mathcal{G}] = X$.

Следует из определения и единственности у.м.о.

7) Пусть случайные величины X и $X \cdot Y$ интегрируемы и Y является $\mathcal{G}$ - измеримой. Тогда

$$E[X \cdot Y|\mathcal{G}] = Y \cdot E[X|\mathcal{G}] \text{ почти наверное.}$$

Доказательство достаточно длинное (см. А.Н. Ширяев 1980, стр.233). Мы дадим набросок доказательства. Покажем справедливость свойства 7) в простейшем случае: $Y = 1_A$, $A \in \mathcal{G}$. В этом случае $\forall B \in \mathcal{G}$, пользуясь свойством 2) Определения 3.1, получим

$$E\big[1_B \cdot E[X \cdot 1_A|\mathcal{G}]\big] = E[1_B \cdot 1_A X] = E[1_{A\cap B} \cdot X] =$$

$$E\big[1_{A\cap B} \cdot E[X|\mathcal{G}]\big] = E[1_B \cdot (1_A \cdot E[X|\mathcal{G}])],$$

Откуда следует, что $E[X \cdot 1_A|\mathcal{G}] = 1_A \cdot E[X|\mathcal{G}]$ почти наверное. Таким образом, свойство 7) доказано для индикаторов событий $Y = 1_A,\ A \in \mathcal{G}$. По линейности свойство 7) распространяется на простые случайные величины. Для неотрицательных с.в. следует воспользоваться тем, что они являются монотонными пределами простых случайных величин (см. Лекция 1) и применить теорему Леви о монотонной сходимости (см. Лекция 2). Наконец, для перехода к произвольной интегрируемой случайной величине Y следует воспользоваться представлением $Y = Y^+ - Y^-$.

8) Если X не зависит от $\mathcal{G}$, то $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$.
   Замечание. X называется не зависящей от $\mathcal{G}$ если $\sigma(X)$ и $\mathcal{G}$ независимы. Независимость σ - алгебр $\sigma(X)$ и $\mathcal{G}$ может быть выражена тремя эквивалентными способами, а именно, $\sigma(X)$ и $\mathcal{G}$ независимы если:

   a) $P(A \cap B) = P(A)P(B), \forall\, A \in \sigma(X), \forall B \in \mathcal{G}$
   b) X и Y независимы, где Y произвольная $\mathcal{G}$- измеримая случайная величина.
   c) $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$ для любых g, h борелевских, ограниченных, Y произвольная $\mathcal{G}$-измеримая случайная величина.

Свойство 8) следует теперь из единственности у.м.о., Определения 3.1 и независимости X и $I(B), B \in \mathcal{G}$.

9) Неравенство Йенсена для у.м.о.: Пусть $g: R \to R$ выпуклая (вниз) функция, X - случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с $E[|g(X)|] < \infty$ и $E[|X|] < \infty$. Пусть $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Тогда

$$g(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[g(X)|\mathcal{G}] \text{ п. н.}$$

Заметим, что g - непрерывная функция. Это следут из свойства выпуклых функций, которое мы приведем здесь без доказательства.

Первое свойство выпуклых функций. Выпуклая (вниз) функция непрерывна в любой точке x, в которой $g(x) > -\infty$. Напомним, что выпуклость означает, что $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$ для всех $0 \leq \lambda \leq 1$.

Второе свойство выпуклых функций. Для выпуклой функции $g(x)$ найдутся последовательности вещественных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $g(x) = \sup_n\{a_n x + b_n\}$ для всех $x \in R$.

Отсюда следует, что

$$g(X) \geq a_n X + b_n$$

для всех n, поэтому

$$E[g(X)|\mathcal{G}] \geq a_n E[X|\mathcal{G}] + b_n$$

для всех n. Таким образом,

$$E[g(X)|\mathcal{G}] \geq \sup_n\{a_n E[X|\mathcal{G}] + b_n\} = g(E[X|\mathcal{G}]).$$

Пример: $g(x) = x^2$, $(E[X|\mathcal{G}])^2 \leq E[X^2|\mathcal{G}]$ п.н.

10) Пусть X - случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $E[|X|] < \infty$.

Пусть $\mathcal{H}, \mathcal{G} - \sigma$ - алгебры с $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Тогда

$$E[X|\mathcal{H}] = E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]. \qquad (1)$$

и

$$E[X|\mathcal{H}] = E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}]. \qquad (2)$$

Равенство (2) следует из свойств 2) и7). Докажем (1). Пусть $H \in \mathcal{H}$. Тогда $H \in \mathcal{G}$ и

$$E\left[1_H \cdot E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]\right] = E\left[1_H \cdot E[X|\mathcal{G}]\right] =$$

$$E\left[E[1_H \cdot X|\mathcal{G}]\right] = E[1_H \cdot X] = E\left[1_H \cdot E[X|\mathcal{H}]\right],$$

В силу произвольности $H \in \mathcal{H}$, отсюда следует равенство (1).

11) Пусть событие $B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$. Тогда $\sigma(B)$ - наименьшая сигма-алгебра, содержащая B, состоит из четырёх подмножеств $\sigma(B) = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$ (докажите). Пусть X – интегрируемая случайная величина. Тогда $E[X|\sigma(B)](\omega)$ - ступенчатая функция, принимающая два значения:

$$E[X|\sigma(B)](\omega) = \begin{cases} \frac{1}{P(B)} \cdot E[1_B \cdot X], \text{ если } \omega \in B \\ \frac{1}{P(B^c)} \cdot E[1_{B^c} \cdot X], \text{если } \omega \in B^c \end{cases} \qquad (3)$$

Равенства (3) проверяются непосредственно, исходя из определния у.м.о. и п.н. единственности у.м.о. Если с.в. X в (3) принимает конечное или счётное число значений

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{A_k},$$

то $1_B \cdot X = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{B \cap A_k}$, $E[1_B \cdot X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P(B \cap A_k)$, и

$$\frac{1}{P(B)} \cdot E[1_B \cdot X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P(A_k|B). \qquad (4)$$

Аналогично

$$\frac{1}{P(B^c)} \cdot E[1_{B^c} \cdot X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P(A_k|B^c) \qquad (5)$$

Сумму (4) иногда обозначают $E[X|B]$ и называют ***условным математическим ожиданием с.в. X при условии, что произошло событие B***

$$E[X|B] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P(X = a_k|B),$$

а набор условных вероятностей $P(X = a_k|B), k = 1,2, \dots$, $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = a_k|B) = 1$, называют ***условным законом распределения X при условии, что произошло событие B***.

Обобщение на случай конечного или счётного разбиения

$B_1, B_2, \dots, B_r, \dots$ пространства Ω, $P(B_i) > 0, i = 1,2, \dots, \bigcup_i B_i = \Omega, B_i \cap$

$B_j = \emptyset, i \neq j,$ очевидно. Рассмотрим наименьшую $\sigma -$ алгебру $\mathcal{F}$, содержащую множества $B_1, B_2, \ldots$. Её обычно обозначают $\sigma(B_1, \ldots, B_r, \ldots)$.

Задача 1. Доказать, что $\mathcal{F} = \sigma(B_1, \ldots B_r, \ldots)$ является множеством всевозможных объединений элементов разбиения B_i, то есть

$$\mathcal{F} = \{\bigcup_{i \in J} B_i : J \subseteq \{1, \ldots, r, \ldots\}\}.$$

Пусть $X: \Omega \to R$ случайная величина. Определим условное математическое ожидание $X, E|X| < \infty,$ относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}$ как случайную величину $E(X|\mathcal{F}), \Omega \to R,$ принимающую значение $E(X|B_k)$ на множестве B_k:

$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X|B_k) \cdot 1_{B_k}.$$

Таким образом, $E(X|\mathcal{F})$ является ступенчатой функцией на Ω, на множестве B_k она принимает постоянное значение $E(X|B_k) = \frac{1}{P(B_k)} \cdot E\left[1_{B_k} \cdot X\right]$.

12) Рассматривают также математическое ожидание ***одной случайной величины относительно другой случайной величины.*** По определению

$$E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)]$$

По лемме Дуба-Дынкина

$$E[X|\sigma(Y)](\omega) = h\big(Y(\omega)\big).$$

для некоторой борелевской функции $h: R \to R$. Если Y принимает конечное или счётное число значений

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 1_{B_k},$$

то, как мы видели,

$$E[X|\sigma(Y)] = \sum_{k=1}^{\infty} E(X|Y = b_k) \cdot 1_{B_k}. \qquad (6)$$

Задача 2. Найти борелевскую функцию $h(x), x \in R,$ в представлении Дуба-Дынкина, соответствующую у.м.о. в левой части (6).

Если X также принимает конечное или счётное число значений:

$$X = \sum_{l=1}^{\infty} a_l 1_{A_l},$$

то

$$E(X|Y = b_k) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l E[1_{A_l}|\, Y = b_k] = \sum_{l=1}^{\infty} a_l P(X = a_l|\, Y = b_k),$$

и, подставляя в (6), получим

$$E[X|\sigma(Y)](\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_l P(X = a_l|\, Y = b_k) \cdot 1_{B_k}(\omega). \qquad (7)$$

Условные вероятности в (7) иногда обозначают $p_{X|Y}(a_l|b_k)$.

Задача 3. Доказать, что если X и Y – случайные величины, принимающие конечное число значений: $X = a_1, \dots, a_r, Y = b_1, \dots, b_m,$ а функция $f(x,y)$ такова, что $f(x, b_i) \neq f(x, b_j)$ если $b_i \neq b_j$, то

$$E(f(X,Y)|X)(\omega) = h(X(\omega)),$$

где

$$h(x) = \begin{cases} E(f(X,Y)|X = a_k) = \sum_{l=1}^{m} f(a_k, b_l) p_{Y|X}(b_l|a_k), & x = a_k \\ 0, & x \neq a_1, \dots, a_r \end{cases}$$

$k = 1, \dots, r.$

Замечание. Функция $h(x)$ является функцией в представлении Дуба-Дынкина для $E(f(X,Y)|X)$.

Решение. Случайная величина $Z = f(X,Y)$ принимает конечное число значений $z_{kl} = f(a_k, b_l), k = 1, \dots, r, l = 1, \dots, m$. Согласно (7)

$$E(f(X,Y)|X)(\omega) = h(a_k)1_{\{X=a_k\}}(\omega),$$

где

$$h(a_k) = E(Z|X = a_k) = \sum_{l=1}^{m} z_{kl} P(Z = z_{kl}|X = a_k) =$$

$$\sum_{l=1}^{m} f(a_k, b_l) \cdot p_{Y|X}(b_l|a_k).$$

Последнее равенство следует из того, что

$$P(Z = z_{kl}|X = a_k) = \frac{P(Z = z_{kl}, X = a_k)}{P(X = a_k)} =$$

$$\frac{P(f(X,Y) = f(a_k, b_l), X = a_k)}{P(X = a_k)} = \frac{P(f(a_k, Y) = f(a_k, b_l), X = a_k)}{P(X = a_k)} =$$

$$\frac{P(Y = b_l, X = a_k)}{P(X = x_k)} = p_{Y|X}(b_l|a_k).$$

Проведенные рассуждения легко обобщается на случай счетного числа значений $a_1, \dots, a_r, \dots$ и $b_1, \dots, b_m, \dots$

Задача 4. Пусть X и Y – две независимые с.в., имеющие распределение Пуассона с параметрами λ и μ. Пусть $S = X + Y$.

1. Найти закон распределения S.
   Из независимости X и Y получим

$$P(S = k) =$$

$$\sum_{l=0}^{k} P(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^{k} P(X = l) \cdot P(Y = k - l) =$$

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} \cdot \frac{\mu^{k-l} e^{-\mu}}{(k-l)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \lambda^l \mu^{k-l} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k.$$

Таким образом, S распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda + \mu$.

2. Вычислить условное математическое ожидание $E(X|S)$. Воспользуемся результатом Задачи 3. Имеем:

$$E(X|S)(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \cdot 1_{\{S=k\}}(\omega),$$

где

$$h(k) = E(X|S=k) =$$

$$\sum_{l=0}^{k} l \cdot P(X=l|S=k) = \sum_{l=0}^{k} l \cdot \frac{P(X=l) \cdot P(Y=k-l)}{P(S=k)} =$$

$$\sum_{l=0}^{k} l \cdot \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} \cdot \frac{\mu^{k-l} e^{-\mu}}{(k-l)!} \cdot \frac{k!}{(\lambda+\mu)^k e^{-(\lambda+\mu)}} = \frac{\lambda k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot$$

$$\sum_{l=1}^{k} \frac{\lambda^{l-1} \mu^{\left((k-1)-(l-1)\right)} (k-1)!}{(l-1)!\left((k-1)-(l-1)\right)!} =$$

$$= \frac{\lambda k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda^m \mu^{\left((k-1)-m\right)} (k-1)!}{m!\left((k-1)-m\right)!} = \frac{\lambda k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot (\lambda+\mu)^{k-1} =$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot k.$$

Таким образом, $h(k) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot k$ и, в соответствии с задачей 3, $h(S) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot S$. Функция Дуба-Дынкина оказывается линейной по S.

13) Пусть заданы две с.в. X и Y такие, что пара (X, Y) имеет совместную плотность $f_{X,Y}(x, y)$. Тогда маргинальные плотности X и Y равны соответственно

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx\,.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что плотность $f_X(x) > 0$ при $x \in R$. Следующие определения являются непрерывными аналогами рассмотренных выше условных распределений для дискретных случайных величин.

Определение 3.2. *Условной плотностью распределения Y при условии $X = x$ назовём функцию $f_{Y|X}(y|x)$, определённую формулой*

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Определение 3.3. *Условным математическим ожиданием с.в. Y при условии $X = x$ называется следующая функция $x \in R$*

$$E(Y|X = x) = \int_R y \cdot f_{Y|X}(y|x)dy.$$

Определение 3.4. *Условным математическим ожиданием $E(Y|X)$ называется с.в. $h(X)$, где*

$$h(x) = E(Y|X = x).$$

Задача 5. Пусть X, Y две с.в. такие, что пара (X, Y) имеет плотность распределения, равную

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x} \cdot 1_T(x, y),$$

где T – треугольник, $T = \{0 < y < x < 1\}$. Найти $E(Y|X)$.

Решение. Интегрируя по $y \in R$, получим маргинальную плотность X

$$f_X(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{x} dy = 1_{]0,1[}(x),$$

и, следовательно, поскольку $1_T(x,y) = 1_{[0,x]}(y) \cdot 1_{]0,1[}(x)$, получим при $x \in]0,1[$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x} \cdot 1_{]0,x[}(y).$$

Отсюда находим

$$h(x) = E(Y|X = x) = \int_0^1 y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_0^1 \frac{y}{x} \cdot 1_{]0,x[}(y) dy =$$

$$\frac{1}{x} \int\limits_0^x y dy = \frac{x}{2}.$$

Отсюда, пользуясь леммой Дуба-Дынкина, получим

$$E(Y|X) = h(X) = X/2.$$

На практике часто приходится вычислять математические ожидания случайных величин вида $Z = f(X,Y)$, где X и Y – независимые случайные величины. Удобно проводить это вычисление в два этапа:

i) Сначала рассматривают с.в. $E(Z|X) = E(f(X,Y)|X)$;
ii) Затем используют тождество $EZ = E\big(E(Z|X)\big)$.

На этапе i) используют следующее предложение:

Предложение 3.1. *Пусть X и Y две **независимые** с.в. Для* $x \in R$ *обозначим через* Y_x *случайную величину* $Y_x = f(x,Y)$ *(то есть измеримое отображение* $\Omega \to R$ *такое, что* $Y_x(\omega) = f(x, Y(\omega))$*), и пусть h: R → R функция, определённая формулой*

$$h(x) = E\big(f(x,Y)\big) = EY_x(\omega).$$

Тогда

$$E(f(X,Y)|X)(\omega) = h(X(\omega)).$$

Замечание. Функция $h(x)$, выписываемая здесь явно, является функцией, о которой говорится в представлении Дуба-Дынкина.

Доказательство. Мы проведём доказательство в непрерывном случае, доказательство в дискретном случае аналогично.
Обозначим $Z = f(X,Y)$. В силу независимости X и Y, $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$, откуда

$$E(Z|X = x) = \int_R f(x,y) f_{Y|X}(y|x) dy = \int_R f(x,y) f_Y(y) dy =$$

$$E(Y_x) = h(x).$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть $\mathcal{N}, X_1, \dots, X_n, \dots$ последовательность ***независимых*** одинаково распределённых с.в., интегрируемых, со значениями в $\mathbb{N} = 1,2, \dots$. Пусть S – случайная величина

$$S = \sum_{1 \le i \le \mathcal{N}} X_i,$$

т.е.сумма содержит ***случайное число слагаемых*** $\boldsymbol{\mathcal{N}}$**.** Вычислить $E(S)$.

Решение. Найдём сначала $E(S|\mathcal{N})$, для этого вычислим $h(n) = E(S|\mathcal{N} = n)$. Пользуясь независимостью X_i и $\mathcal{N}$, получим

$$E(S|\mathcal{N} = n) = \sum_{1 \le i \le n} E(X_i|\mathcal{N} = n) = \sum_{1 \le i \le n} E(X_i) = n \cdot E(X_1).$$

Таким образом, в силу Предложения 3.1 (можно сослаться также на лемму Дуба-Дынкина)

$$E(S|\mathcal{N}) = \mathcal{N} \cdot E(X_1).$$

Используя соотношение $E(S) = E(E(S|\mathcal{N}))$, получим

$$E(S) = E\big(\mathcal{N} \cdot E(X_1)\big) = E(X_1) \cdot E(\mathcal{N}).$$

Первые примеры моделирования.

Исходное предположение: *имеется последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке [0,1].*

Начнём с простейших примеров.

1. *Моделирование дискретной с.в. X, принимающей два значения:* $+1$ *и* -1 *с равными вероятностями.*

Ключевое наблюдение состоит в том, что если с.в. U равномерно распределена на отрезке [0,1], то $P\left(U \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Определим с.в. X равенством: $X = +1$, если $U \le 1/2$ и $X = -1$, если $U > 1/2$. Тогда $P(X = +1) = P\left(U \le \frac{1}{2}\right) = 1/2$ и $P(X = -1) = P\left(U > \frac{1}{2}\right) = 1/2$.

2. *Моделирование дискретной с.в. X, имеющей распределение Бернулли с заданным параметром p.*

Простой способ моделирования такой с.в. состоит в следующем. Разделим интервал $[0,1]$ на два интервала I_0 и I_1, длины которых соответственно равны $1 - p$ и p. Например, можно положить $I_0 = [0,1-p]$ и $I_1 = \{1-p, 1]$, но можно также положить $I_0 = [p, 1]$ и $I_1 = [0, p]$. Поскольку с.в. U_1 равномерно распределена на [0,1] (напомним, что исходным «материалом» для нас является последовательность независимых случайных величин $U_1, \dots, U_n, \dots$, равномерно распределённых на [0,1]), имеем

$$P(U_1 \in I_0) = 1 - p, \qquad P(U_1 \in I_1) = p.$$

Если определить с.в. $X_1(\omega)$ равенствами

$$X_1(\omega) = 1, если\ U_1 \in I_1\ и\ X_1(\omega) = 0, если\ U_1 \in I_0,$$

то легко видеть, что X_1 имеет распределение Бернулли с заданным параметром p. Итак, $X_1 = 1_{I_1} \circ U_1$ имеет распределение Бернулли с параметром p. Для генерирования *последовательности* одинаково распределённых независимых с.в., имеющих распределение Бернулли с параметром p, достаточно взять $X_k = 1_{I_1} \circ U_k$.

3. *Моделирование непрерывной с.в. X, имеющей равномерное распределение на отрезке* $[0, a], 0 < a < 1$.

1-ый метод. По определению равномерного распределения на отрезке $[0, a]$, для любого интервала I имеет место равенство: $P(X \in I) = \frac{|I \cap [0,a]|}{a}$. Здесь $|I|$ означает длину интервала I. Легко проверить, что с.в. $X = a \cdot U$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, a]$ (проверьте!) и, следовательно, $X_k = aU_k, k = 1,2, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределённых с.в., каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[0, a]$.

2-ой метод. Этот метод сложнее, но он интересен тем, что связан с ***методом выборки с отклонением***, который мы будем рассматривать позже. Определим случайную величину $Y(\omega)$ как значение первой U_k из нашей последовательности $U_1, U_2, \ldots$, которая попадает в $[0, a] \subset [0,1]$. А именно, пусть $Y(\omega) = U_{\nu(\omega)}$, где $\nu(\omega) = \inf\{k \geq 1 : U_k(\omega) \in [0, a]\}$. Нетрудно доказать, что случайная величина $Y(\omega)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, a]$ (позднее мы докажем более общее утверждение). Для того, чтобы получить ***последовательность*** независимых и одинаково распределённых с.в., имеющих равномерное на $[0, a]$ распределение, поступают следующим образом. Как и ранее, находят $\nu_1(\omega) = \inf\{k \geq 1: U_k(\omega) \in [0, a]\}$ и далее полагают $\nu_r(\omega) = \inf\ \{k > \nu_{r-1}(\omega): U_k(\omega) \in [0, a]\}$. Затем полагают $Y_i(\omega) = U_{\nu_i}(\omega)$. Последовательность $Y_i(\omega)$ и является искомой последовательностью независимых и одинаково распределённых с.в., каждая из которых имеет равномерное распределение на $[0, a]$ (докажем позже при изучении метода выборки с отклонением).

Моделирование с помощью функции распределения.

Дискретные распределения. Пусть с.в. $X: \Omega \to \{a_1, \dots, a_r\}$ принимает конечное число r возможных значений. Закон распределения X определяется заданием вероятностей $p_i = P(X = a_i)$. Заметим, что $p_i \in [0,1]$ и $p_1 + \cdots + p_r = 1$. Пусть $I_1, \dots, I_r$ разбиение интервала [0,1] на интервалы длины $p_1, \dots, p_r$ соответственно. Можно, например, положить

$$I_1 = [0, p_1[,\ I_2 = [p_1, p_1 + p_2[, \dots,$$

$$I_s = [p_1 + \cdots + p_{s-1}, p_1 + \cdots + \ p_s[\ (3 \leq s < r),$$

$$I_r = [p_1 + \cdots + p_{r-1}, 1].$$

Определим с.в. X равенством $X(\omega) = a_i$, если $U_1 \in I_i$, иначе говоря

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot (1_{I_i} \circ U_1)$$

Легко видеть, что $P(X = a_i) = P(U_1 \in I_i) = p_i$. Чтобы генерировать ***последовательность*** независимых с.в. X_k, имеющих такое же распределение, как X, достаточно положить

$$X_k(\omega) = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot (1_{I_i} \circ U_k)$$

Очевидно, что X_k независимы (поскольку U_k независимы) и $P(X_k = a_i) = P(U_k \in I_i) = p_i$.

Задача 6. Обобщите предыдущий результат на случай, когда X принимает ***счётное*** число значений $X\colon \Omega \to \{\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_r, \dots\}$.

Применение: моделирование биномиальных законов.

По определению, с.в. X имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p), если она принимает значения в множестве $\{0,1, \dots n\}$ и $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, 0 \le k \le n$. Простой способ моделирования биномиального распределения основан на следующем утверждении:

Если $Z_1, \dots, Z_n$ последовательность независимых одинаково распределённых с.в., имеющих распределение Бернулли с параметром p (то есть $P(Z_k = 1) = p$, $P(Z_k = 0) = 1 - p$), то с.в. $X = Z_1 + \cdots + Z_n$ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p).

Задача 7. Доказать предыдущее утверждение.

Чтобы получить ***последовательность*** $X_1, X_2, \dots$ независимых с.в., имеющих одно и то же биномиальное распределение с параметрами (n, p), достаточно положить

$$X_k(\omega) = \sum_{i=(k-1)n+1}^{(k-1)n+n} 1_{[0,p]} \circ U_i(\omega).$$

Задача 8. Докажите, что так построенная последовательность $X_1, X_2, \dots$ является последовательностью независимых с.в., имеющих одно и то же биномиальное распределение с параметрами (n, p).