## Формула Леви-Хинчина

$X_t$ — пр. Леви

$$\Phi_{X_t}(u) = \exp\{t\cdot(iu\mu - \tfrac{1}{2}u^2c^2 + \int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1-iuxI\{|x|<1\})\nu(dx)\}$$

$\mu\in\mathbb{R}, c\geq 0$

$\nu$: $\int_{|x|>1}\nu(dx)$ $\int_{|x|<1}x^2\nu(dx)<\infty$

мера Леви

$$\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1-iuxI\{|x|<1\})\nu(dx) = \overset{I_1}{\int_{|x|<1}(e^{iux}-1-iux)\nu(dx)} + \overset{I_2}{\int_{|x|>1}(e^{iux}-1)\nu(dx)}$$

$I_1$: $e^{iux}$ = в ряд Тейлора $= 1+iux+\frac{(iux)^2}{2}+\dots$

$$e^{iux}-1-iux = O(x^2)$$

$$|\quad|\leq Cx^2$$

$$|I_1|\leq\int_{|x|<1}|\quad|\nu(dx)\leq C\int_{|x|<1}x^2\nu(dx)<\infty$$

(т.к. м. Леви)

$I_1$ всегда конечен

$I_2$: $|e^{iux} - 1| \le 2$ ?

$$|I_2| \le 2 \cdot \int_{|x|>1} \nu(dx) < \infty$$

В форм. Леви-Хинч. вместо $iux\,\mathbb{I}\{\dots\}$ можно подставить люб.

$h(x)$: $h(x) = 1 + O(x)$, $x \to 0$ (о больш.)

$h(x) = \underline{O}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to \infty$ (о мал.)

$h(x)$ - ф-ия урез. (trunc. function)

(Часто $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

$(\mu, c, \nu) \Leftrightarrow \mathbb{I}(|x| < 1)$

$(\check{\mu}, c, \nu) \Leftrightarrow h(x)$

$$iu\mu - \int_{\mathbb{R}} iux\, I\{|x|<1\}\, \nu(dx) -$$

$$- iu\check{\mu} - \int iux\, h(x)\, \nu(dx)$$

$$\check{\mu} = \mu + \int (h(x) - I\{|x|<1\})\, x\, \nu(dx)$$

Каким дост. усл. чтобы тот интегр. $\exists$?

Частные случ.:

① $X_t$ - огр. вариац. $[a, b]$

$a \quad t_1 \dots \quad b = t_n$

$t=0$

$\sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}| \to$ ? ∃ли $\max|t_i - t_{i-1}| \to 0$

если такой предел ∃, то это проц. с огр. вариацией

Теорема: Пр. Леви имеет огр. вариац. если: $\begin{cases} c = 0 \\ \int_{|x|<1} |x| \nu(dx) < \infty \end{cases}$ т.е. $BG \le 1$

$\to \int_{|x|\ge 1} iux\, \nu(dx)$ конечен $=$

$= iu\left(\int_{|x|>1} x \nu dx + \underbrace{\int_{|x|>1} x\, \nu(dx)}_{\text{кон.}}\right)$

мажор. $x \le x^2$

$\to$ тоже кон.

$\phi(u) = \exp\{t \cdot (iu\mu + \int (e^{iux} - 1)\} \nu(dx))$

$- iu \int_{|x|\le 1} x\, \nu(dx)) =$

$= \exp\{t \cdot (iu\bar{\mu} + \int (e^{iux} - 1)\, \nu(dx))$

$\bar{\mu} = \mu - \int_{|x|<1} x\, \nu(dx)$

② $X_t$ — CPP

$\Updownarrow$

$c=0$, $\overbrace{\int \nu(dx)}^{\nu(\mathbb{R})} < \infty$

$$\int_{|x|<1} |x| \nu(dx) < \int_{|x|<1} \nu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} \nu(dx) < \infty$$

③ Субординатор

$X_t$ - суборд. если он $\geq$ ~~п.н.~~ $0$ п.н.

т.е. п.н. $X_t \geq X_s$ $\forall t \geq s$

$(X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t-s} \quad \forall t \geq s)$

$\Rightarrow X_t - X_s \geq 0 \Rightarrow X_{t-s} \geq 0$

и наоборот

$X_t$ - суборд $\Leftrightarrow$ $c=0$ $\mu \geq 0$ $\int_0^1 x \nu(dx) < \infty$

$\nu(\mathbb{R}_-) = 0$

(пол. на $|x|$

1) Пусть $X_t$ – проц. Леви

$\psi$ – характ. экспон.

(т.е. $\phi_{X_t}(u) = e^{t \cdot \psi(u)}$)

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{\psi(u) + \psi(-u)}{2} \text{ – симметриз.}$$

$\tilde{\psi}(u)$ – симметр. характ. экспон.

i) Покажите

$X_t$ – CPP, $\to \tilde{\psi}(u)$ огран.

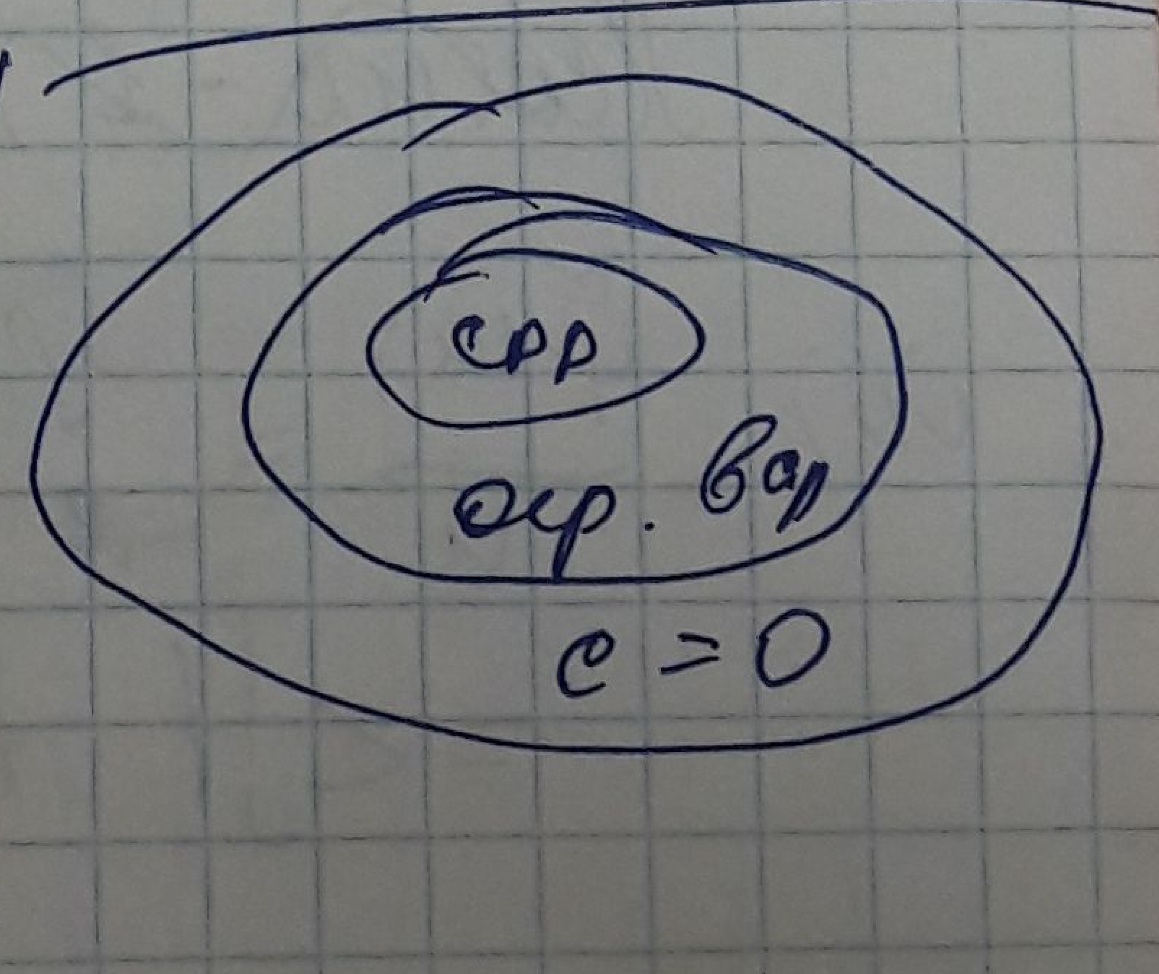
ii) $X_t$ – имеет огр. вар., то

$$\frac{\tilde{\psi}(u)}{u} \xrightarrow[u \to \infty]{} 0$$

iii) Если $X_t$ не им. гаус. части ($c=0$)

$$\to \frac{\tilde{\psi}(u)}{u^2} \xrightarrow[u \to \infty]{} 0$$

23




i) $\tilde{\psi}(u) = \frac{1}{2}\Big(iu\mu - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \cdot I\{|x|<1\})\,\nu(dx) -$

$-iu\mu - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_R (e^{-iux} - 1 +$

$iux I\{|x|<1\}) \nu(dx) =$

$= \frac{1}{2}(-c^2u^2 + \int_R (e^{iux} + e^{-iux} - 2)) \nu(dx))$

$= \frac{1}{2}(-c^2u^2 + 2\int_R ((\cos ux - 1)\nu(dx)$

$e^{iux} = \cos ux + \sin ux$

$e^{-iux} = \cos ux - \sin ux$

$X_t \in PP \Leftrightarrow c = 0 \quad \int_R \nu(dx) = \nu(R) \leq \infty$

~~$\nu(B) \in \mathbb{R}$~~

$\tilde{\varphi}(u) = \int_R \cos ux \cdot \nu(dx) - \int_R \nu(dx)$

$|\int| \leq \int||$

$|\tilde{\varphi}(u)| \leq \underbrace{\int_R \underbrace{|\cos(ux)}_{\leq 1} \nu(dx)}_{\leq \lambda} + \lambda \leq 2\lambda$

$\to$ огран.

~~$\int(\cos ux - 1)\nu(x) = \cos$~~

ii) $\frac{\tilde{\varphi}(u)}{u} = \int_R \frac{\cos(ux) - 1}{u} \nu(dx) =$

$= < \int| \quad | \leq \frac{2}{u} \int_R \nu(dx) =$

↑ может быть беск

...во-во мер : $\nu$ : $\int\limits_{R} \nu\,dx = \nu(R)$ $\quad \int x^2 \nu(dx) < \infty$

$$= \underbrace{\int\limits_{|x|\geq 1} \frac{\cos(ux)-1}{u}\,\nu(dx)}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{|x|<1} \frac{\cos(ux)-1}{u}\,\nu(dx)}_{I_2}$$

$$|I_1| \leq \int\limits_{|x|\geq 1} \frac{|\cos(ux)-1|}{u}\,\nu(dx) = \{\, |\cos(ux)-1| \leq 2 \,\}$$

$$\leq \frac{2}{u}\int \nu(dx) \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$$

$I_2$.

Нужна теор. Лебега о мажор. сход :

$$\lim_{u\to\dots} \int f(u,x)\,\nu(dx) \to = \int \lim_{u\to} f(u,x)\,\nu(dx)$$

если найд. $M$ незав от $u$ : $|f(u,x)| \leq M(x)$ $\forall u$

и $M(x)$ явл. инт.

Нужно придум. эту $M$

$$\left|\frac{\cos(ux)-1}{u}\right| \quad |\cos y - 1| \leq y$$

$$\cos(ux)' \leq |ux| \qquad 1-\cos y \leq y$$

$$\to \left|\frac{\cos(ux)-1}{u}\right| \leq |x|$$

Догатси что верно $1 - \cos y$

$f(x)\quad 1 - \cos y - y \le 0$

$f'(x)\quad + \sin y - 1 \le 0$

$f(0) = 0 \qquad f'(x) < 0$

$\to$ ф-ия меньше 0

$\to$ $I_2$ конечен

$\forall \quad \lim \int \frac{\cos(ux)-1}{u} \nu(dx) =$

$= \int\limits_{|x|<1} \lim\limits_{u\to\infty} \frac{\cos(ux)-1}{u} \nu\, dx.$

② $E, Var, k$ хр. Леви через тройку Леви

$\varphi_{X_t}(u) = \exp\{ t( iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2$

$+ \int\limits_{R} (e^{iux} - 1 - iux\, I\{|x| \le 1\}) \nu(dx) \}$

$\varphi^k(0) = i^k E\xi^k$

$E\xi^k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$

$$\phi'_{X_t}(u) = \phi_{X_t}(u)\,t\,(i\mu - uc^2 +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} (ix e^{iux} - ix\, I\{|x| \le 1\})\,\nu(dx))$$

$$\phi'_{X_t}(0) = \underbrace{\phi_{X_t}(0)}_{=1} \cdot t\,(i\mu + \int_{\mathbb{R}} (ix -$$

$$- ix\, I\{|x| \le 1\})\,\nu(dx)) =$$

$$= ti\mu + ti \int_{|x|>1} x\,\nu(dx)$$

$$E X_t = t(\mu + \int_{|x|>1} x\,\nu(dx)) = t \cdot \varphi'(0)$$

$$\phi''_{X_t}(u) = \cancel{\phi_{X_t}(u)\,t\,(i\mu - uc^2} =$$

$$= t\,(-c^2 + \int_{\mathbb{R}} (ix)^2 e^{iux})\,\nu\,dx \cdot \phi_{X_t}(u) +$$

$$+ (\phi'_{X_t}(u))^2\, \phi'_u(t)$$

$$\phi''_{X_t}(0) = t(-c^2 - \int_{\mathbb{R}} x^2\,\nu(dx)) +$$

$$+ \phi'(u)\,\varphi'(x)\,t$$

$$\mathrm{var}(X_t) = E(X_t^2) - (E(X_t))^2 =$$

$$\Rightarrow \left\{ \varphi'(0)\psi'(0)t = \varphi'(0)\psi'(0)t + \psi'(0)^2 t^2 \right. \overset{?}{=} 0$$

$$= EX_t^2 - \left(\frac{t\psi'(0)}{i}\right) = t\left(c^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx)\right)$$

$$K(t,s) = \mathrm{Var}\, X_{\min(t,s)} =$$

$$= \min(t,s) \cdot \left(c^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx)\right)$$

3 Гамма proc. это пр. Леви

$$X_t \sim \Gamma(t; \alpha, \beta)$$

$$\Gamma(\alpha, \beta) : p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \; x > 0$$

$$\varphi(u) = \left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

Найти тройку Леви

$$\varphi_{X_t}(u) = \exp\{t \cdot (iu\lambda - \frac{1}{2}u^2c^2 +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\, I\{|x|<1\})\nu(dx)\}$$

Надо вы. ХФ и подобрать вид этого для. что есть это

$$\phi(u) = \exp\left(-\alpha t \ln\left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)\right)$$

Теор. Фруллани:

Если $f$ - непр. дифф., $a, b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx =$$

$$= (f(0) - f(\infty)) \ln \frac{b}{a}$$

Можно расшир. на компл. если

$\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0$

→ Т. обр. и ln можно получить интеграл

$$f(x) = e^{-x} \to \begin{matrix} b = \beta - iu \\ a = \beta \end{matrix}$$

$$\phi(u) = \exp\left(-\alpha t \left(\underbrace{(1 - 0)}_{f(0) - f(\infty)} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-(\beta x)} - e^{-(\beta - iu)x}}{x}\right) dx\right)$$

$\exp(\cancel{+\alpha t \int e^{\dots}}$

$= \exp\left(\alpha t \cdot \int (e^{iux} - 1) \frac{e^{-\beta x}}{x} dx\right) =$

$= \exp\left(t \cdot \int (e^{iux} - 1) \frac{e^{-\beta x} \cdot \alpha}{x} dx\right)$

$c = 0$, $\mu = 0$

$s(x) = \frac{\alpha e^{-\beta(x)}}{x}$ – плотн. меры Леви

Надо пров: $\to$ тогда плотн. меры Л

$\int_1^\infty s(x) dx < \infty$ $\int_0^1 x\, s(x) dx < \infty$

$\downarrow$ $\int_0^1 \alpha e^{-\beta x} dx$ сх.

$\downarrow$

$\int \frac{\alpha e^{-\beta x}}{x} dx \le \int_1^\infty x\, s(x) = \int_1^\infty e^{-\beta(x)} dx < \infty$

$\Rightarrow$ Пр Леви $\mu = 0$

$c = 0$

$\exists$ пл. плотн. $\frac{\alpha e^{-\beta x}}{x}$

если $\mathbb{I}\{|x| < 1\} \to$ др. ф-ия урез.

По полем. м.:

$$\hat{\mu} = \int_0^1 \alpha e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta})$$

Ии леви. СРР, полеви. субордин.

(4) $W_t$ $t \leftarrow T(s)$ проц. Леви

$\phi_{W_{T(s)}} = L_{T(s)}\left(\frac{u^2}{2}\right)$ – раньше решали через это

$T(s)$ пр. Леви (суборд) $(\mu_T, 0, \nu_T)$

Нужно док-ть, что тройка Леви отн. 0 ф-ии уср.

$X_s = W_{T(s)}$ : $(0, \mu_T, \nu_X)$,

где $\nu_X(B) = \int_0^\infty \mathbb{P}\{\sqrt{v} \cdot \xi \in B\} \nu_T(dv)$, $\sqrt{v}\,\xi \sim N(0, v)$, $\xi \sim N(0,1)$

пр $W_{N(s)} = \sum_{k=1}^{N(s)} \xi_k$, $\xi \sim N(0,1)$, iid

$N(s) \sim (0, 0, \nu)$, $\nu = \lambda I\{x \in B\}$

$\phi_{N(s)}(u) = e^{s\lambda(e^{iu} - 1)} = e^{s\int(e^{iux}-1)\nu_x - \lambda I\{x<1\}}$

$(0, 0, \nu)$

$\nu(B) = \int P\{\sqrt{x}\xi \in B\}\, \nu(dx) =$

$= P\{\xi \in B\} \cdot \lambda$ — мера Леви СРП

$\xi \sim N(0,1)$

Ф л.-Х

$\phi_{T(s)}(u) = \exp\{iu\mu_T + \int (e^{iux} - 1)\nu_T(dx)$

преобр. Лапл.— это ХФ в точке $iu$

$L_{T(s)}\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \phi_{T(s)}\left(i \cdot \frac{u^2}{2}\right) =$

$= \exp\{-\frac{u^2}{2}\mu_T + \int_{R+} (e^{-u^2/2 \cdot x} - 1)\nu_T(dx)\}$

$e^{-\frac{u^2}{2}x} = \phi_{N(0,x)}(u) = \int e^{iuv} p_{N(0,x)}(v)\, dv$

$P\{\xi \in B\} =$

$= \exp\{-\frac{u^2}{2}\mu_T + \iint_R e^{iuv} p_{N(0,x)}(v) +$

$+ \int_0^\infty \int_R (e^{iuv} - 1)\, p_{N(0,x)}(v)\, \nu(dx)\}$

т.к. суборд $\Rightarrow$ мера Леви сосред. на полож. оси

Поменяем местами знаки интегр.

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \left(e^{iuv}-1\right) p_{N(0,x)}(v)\,\nu_{T(s)}(dx)\,dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iuv}-1\right) \underbrace{\int_0^\infty p_{N(0,x)}(v)\,\nu_{T(s)}(dx)}_{s_T(v)\ \sim\ \text{плотн. меры}}\,dv =$$

$$=$$

$$\int_0^\infty p_{N(0,x)}(v)\,\nu_{T(s)}\,dx\ \nu(dx) = s(v)$$

$$\int_0^\infty \mathbb{P}\{\sqrt{v}\,\xi \in B\}\,\nu_{T(s)}\,dx = \nu(B)$$

$$\nu(B) = \int_B s(v)\,dv = \int_B\int_{\mathbb{R}_+} p_{N(0,x)}(v)\,\nu_T(dx)\,dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\underbrace{\int_B p_{N(0,x)}(v)\,dv}_{=\ \text{вер. что СВ} \in B\ \text{т.е.}\ \mathbb{P}\{\sqrt{v}\,\xi\in B\}}\,\nu_T(dx)$$

α-уст. проц

Мера Леви $\nu(x)$ : $\nu(x) = \frac{A}{x^{1+\alpha}}$

$$\nu(x) = \frac{A}{x^{1+\alpha}} I\{x \geq 0\} + \frac{B}{|x|^{1+\alpha}} I\{x<0\}$$

$\alpha \in (0, 2]$, $A, B \geq 0$

Возьмем суборд.: где $B = 0$, $\alpha \in (0, 1]$

Док-во:

$$W_{T(s)} = \cancel{2}\alpha\,(X_s)$$

α уст. суб. 2-α уст. процесс

Показать, что $\nu_u(x)$ имеет тот же самый с 2-ое α

$$\nu_x(B) = \int_0^\infty P(\sqrt{v}\,\xi \in B)\left(\frac{A}{v^{1+\alpha}} I\{x>0\} + \underbrace{\frac{B}{|v|^{1+\alpha}} I\{x<0\}}_{=0}\right) dv =$$

$$= \nu_u(\cdot) = \int_0^\infty p_{N(0,v)}(u) \cdot \frac{A}{v^{\alpha+1}}\, dv =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}u^2} \frac{A}{v^{1+\alpha}}\, dv =$$

$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma}u^2} \cdot \frac{1}{u^{1,5+\alpha}} du =$

— Надо знать зам. перем. =

$= \{ \frac{u}{\sqrt{\sigma}} = y \quad u \to y \} =$

$-\frac{1}{2}u^{-2} du = dy$

$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot \left(\frac{u}{y}\right)^{2(1,5+\alpha)} \quad \left(\frac{u}{y}\right)^3 \quad (-2)u^{-1} \frac{\cdot}{(\ )} dy =$

$= C u^{\cancel{-3-2\alpha+1}}$

$= -\frac{2A}{\sqrt{2\pi}} u^{-(1+2\alpha)} \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} y^{2\alpha} dy}$

$\to$ спец. fun.

$y^2 = x \quad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ как понять кон. или бескон.

$\frac{1}{2}\int e^{\frac{x}{2x}} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx$

сход. и $\alpha > 0$ $\int_0 f(y)dy$, пусть $f$ вблиз $g$ шир.

$\to$ гамма $g$ в точке $\exists$ ли интеграл

Если мы знаем что $\exists \int_0^\infty g(y)dy$ !

! $\lim_{y\to 0} \frac{f}{g} \in (0,\infty)$ $\lim_{y\to\infty} \frac{f}{g} \in (0,\infty)$

кон. и не 0

$\to$ два инт. одновр. сход или расход

Но в этом случае сложно.