Лекция 13. Стационарные распределения. Эргодическая теорема.

Неприводимые цепи Маркова.

При изучении долговременного поведения цепи Маркова интерес представляют лишь рекуррентные классы состояний. Это следует из приводимого ниже Предложения.

Предложение 13.1. Если C - рекуррентный класс, то он ***замкнут***, то есть $\forall i \in C$

$$\boldsymbol{P}_i(\exists n \geq 1: X_n \notin C) = 0.$$

Если C - транзитивный класс **с конечным числом элементов**, то $\forall i \in C$

$$\boldsymbol{P}_i(\exists N, \forall n \geq N: X_n \notin C) = 1.$$

Следствие 13.2. Каждая **конечная** цепь Маркова содержит по крайней мере одно рекуррентное состояние.

Доказательство Предложения 13.1. Пусть C - рекуррентный класс и $i \in C$. Событие $\{X_n \notin C\}$ влечёт событие $\bigcap_{k \geq n}\{X_k \notin C\}$. В самом деле, в противном случае можно было бы указать $i' \in C$ и $n', 0 < n < n'$, такие, что событие $\{X_0 = i, X_n = j, X_{n'} = i'\}$, $j \notin C$, имело бы положительную вероятность. Но i и i' принадлежат одному классу рекуррентных состояний C, то есть сообщаются, и мы получаем, что состояния i и j сообщающиеся и должны принадлежать одному классу. А это противоречит предположению, что $j \notin C$. Класс C - рекуррентный, $i \in C$, поэтому P_i - почти наверное цепь X_n посещает состояние i и, стало быть, этот класс бесконечное число раз, то есть событие $\bigcap_{k\geq n}\{X_k \notin C\}$ имеет P_i - вероятность ноль при любом фиксированном $n \geq 1$. Но тогда и совпадающее (как мы только что установили) с ним событие $\{X_n \notin C\}$ также имеет P_i - вероятность ноль при любом фиксированном $n \geq 1$. Счётное объединение по n таких событий также имеет вероятность ноль, откуда следует первое утверждение о замкнутости рекуррентного класса. Для доказательства второй части Предложения напомним Упражнение, решение которого содержится в Лекции 12. Обозначим через N_{ij} число посещений состояния $j \in C$ цепи, исходящей из состояния $i \in C, i \neq j$. Тогда

$$\boldsymbol{E}_i(N_{ij}) = V_{ij} = \boldsymbol{P}_i(S(j) < \infty) \cdot V_{jj}.$$

Поскольку состояние j транзитивно, то, согласно Следствию 12.1, $V_{jj} < \infty$. Первый сомножитель $\boldsymbol{P}_i(S(j) < \infty)$, очевидно, не превосходит 1. Отсюда следует, что $\boldsymbol{E}_i(N_{ij}) < \infty$. Следовательно $\forall j \in C, j \neq i,$ число посещений N_{ij} конечно P_i - почти наверное. Число посещений N_{ii} также конечно P_i - почти наверное, в силу транзитивности состояния i. Число элементов класса C конечно, откуда сразу следует вторая часть Предложения 13.1.

Следствие 13.3. Если цепь Маркова конечна, то откуда бы она не исходила, за конечный промежуток времени она попадает в множество рекуррентных состояний и останется в нём.

Следствие 13.4. Ограничение цепи Маркова на любой её рекуррентный класс C снова является цепью Маркова, то есть матрица $\tilde{P}_{ij} = P_{ij}, i, j \in C,$ стохастическая.

Определение 13.5. Цепь Маркова называется ***неприводимой***, если она состоит из одного класса.

Следствие 13.6. Неприводимая ***конечная*** цепь Маркова состоит из одного ***рекуррентного*** класса.

Следствие 13.6 вытекает из Следствия 13.2 и Определения 13.5.

Замечание. Для бесконечной цепи Маркова утверждение Следствия 13.6 перестает быть верным. Например, случайное блуждание на прямой может состоять из одного транзитивного класса.

Предельная теорема для конечных цепей Маркова.

Следующая важная теорема даёт достаточные условия существования стационарного распределения для цепи Маркова с конечным множеством состояний.

Теорема 13.7. *Если $n \times n$ - матрица P переходных вероятностей цепи Маркова с множеством состояний $\{1,2,\dots,n\}$ такова, что все элементы матрицы P^v положительны при некотором $v < \infty$, то существуют* ***положительные*** *пределы*

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \;\; j = 1,2,\dots,n.$$

Пределы π_j, $j = 1,2,\dots,n$, не зависят от начального состояния i и являются единственным решением линейной системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_{kj} = x_j, j = 1,2,\dots,n\,, \;\; \sum_{k=1}^{n} x_k = 1. \qquad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $P^v = \|p_{ij}(v)\|$ вероятностей переходов за v шагов. По условию она стохастическая, и все её элементы положительны. Положим $\varepsilon = \min_{i,j} p_{ij}(v) > 0$. Пусть

$$G_n = \{(x_1, \dots, x_n): x_1, \dots, x_n \geq 0, \;\; x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

симплекс распределений вероятностей на множестве $\{1, \dots, n\}$. Если $\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n} \in G_n$ - единичные векторы, то $p_{ij}(t) = (P^t)_{ij} = (\boldsymbol{e_i}P^t)_j$. Докажем, что существует такой вектор $\boldsymbol{p} = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, что $\boldsymbol{x}P^t \to \boldsymbol{p}, t \to \infty$, для любого $\boldsymbol{x} \in G_n$.

Последовательность $\{\boldsymbol{x}P^t\}$ состоит из v подпоследовательностей

$$\{\boldsymbol{x}P^{m+tv}\} = \{(\boldsymbol{x}P^m)(P^v)^t\}, m = 0,1, \dots, v-1.$$

Заметим, что если P - стохастическая матрица, то и P^m - стохастическая матрица, если $\boldsymbol{x} \in G_n$, то и $\boldsymbol{x}P^m \in G_n$, поэтому для доказательства утверждения теоремы достаточно доказать, что предел $\boldsymbol{p}$ последовательности векторов $\boldsymbol{y}(P^v)^t$ существует при любом $\boldsymbol{y} \in G_n$, не зависит от $\boldsymbol{y}$ и является решением системы (11).

Дальнейшее доказательство разбито на четыре утверждения.

а) Линейное отображение $A: R^n \to R^n, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}P^v$, отображает симплекс G_n вероятностных распределений в себя.

Действительно, если $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G_n$, то все компоненты вектора $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) = xP^v$ неотрицательны и

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k p_{kj}(v) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(v) = \sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

b) В метрике $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n}\left|x_j - y_j\right|$ ображение $A\colon G_n \to G_n$ - сжимающее с коэффициентом не более $1-\varepsilon < 1$. В самом деле,

$$\rho(\boldsymbol{x}P^v, \boldsymbol{y}P^v) = \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k p_{kj}(v) - \sum_{k=1}^{n} y_k p_{kj}(v)\right| =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)p_{kj}(v)\right|.$$

Если $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in G_n$, то $\sum_k (x_k - y_k) = 1 - 1 = 0$; поэтому суммы неотрицательных и неположительных разностей $x_k - y_k$ отличаются только знаком, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n}\max\{x_k - y_k, 0\} = -\sum_{j=1}^{n}\min\{x_k - y_k, 0\} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|x_k - y_k| =$$

$$\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Из последнего равенства, рассуждая от противного, легко получим, что при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ существуют такие индексы $r, s \in \{1, \dots, n\}, r \neq s$, что

$$x_r - y_r \geq \frac{1}{2n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > 0 > -\frac{1}{2n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq x_s - y_s.$$

Отсюда, из равенства $|a-b| = a + b - 2\min\{a,b\}$ при $a, b > 0$, и из определения ε следует, что **для этих $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$** при любом $j \in \{1, \dots, n\}$ (мы полагаем ниже $a = (x_r - y_r)p_{rj}(v)$, $b = (y_s - x_s)p_{sj}(v) = |x_s - y_s|p_{sj}(v)$)

$$\left|(x_r - y_r)p_{rj}(v) - (y_s - x_s)p_{sj}(v)\right| \leq (x_r - y_r)p_{rj}(v) +$$

$$|x_s - y_s|p_{sj}(v) - 2\min\{|x_r - y_r|, |x_s - y_s|\}\min\{p_{rj}(v), p_{sj}(v)\} \leq$$

$$|x_r - y_r| p_{rj}(v) + |x_s - y_s| p_{sj}(v) - \frac{1}{n}\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)p_{kj}(v)\right| \leq \sum_{k=1, k\neq r,s}^{n} |x_k - y_k| p_{kj}(v) + |x_r - y_r| p_{rj}(v)$$

$$+|x_s - y_s| p_{sj}(v) - \frac{1}{n}\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| p_{kj}(v) - \frac{1}{n}\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\varepsilon.$$

Значит,

$$\rho(xP^v, yP^v) = \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)p_{kj}(v)\right| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k| p_{kj}(v) - \frac{1}{n}\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\varepsilon\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k| \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(v) - \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\varepsilon = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\varepsilon =$$

$$= (1 - \varepsilon)\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

c) Сжимающее отображение компакта G_n в себя имеет ровно одну неподвижную точку $\boldsymbol{p}$, эта точка является предельной для любой последовательности $A^r \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(P^v)^r, r = 1,2, \ldots,$ с $\boldsymbol{y} \in G_n$, так как

$$\rho(A^r \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) = \rho(A^r \boldsymbol{y}, A^r \boldsymbol{p}) \leq (1 - \varepsilon)^r \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Других предельных точек у последовательности $A^r \boldsymbol{y}, r = 1,2, \ldots,$ нет. В самом деле, пусть есть другая предельная точка $\boldsymbol{p'}$ и она отлична от $\boldsymbol{p}$, то есть не является неподвижной (поскольку неподвижная точка единственная): $A\boldsymbol{p'} \neq \boldsymbol{p'}$. Тогда при достаточно больших r

$$\rho(A^r\boldsymbol{y},\boldsymbol{p'}) < \frac{1}{3}\rho(A\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p'}), \qquad \rho(A^r\boldsymbol{y},A^{r+1}\boldsymbol{y}) \le (1-\varepsilon)^r\rho(\boldsymbol{y},A\boldsymbol{y}) <$$

$$\frac{1}{3}\rho(A\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}'), \qquad \rho(A^{r+1}\boldsymbol{y},A\boldsymbol{p'}) \le (1-\varepsilon)\rho(A^r\boldsymbol{y},\boldsymbol{p'}) \le$$

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{3}\rho(A\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p'}).$$

С помощью неравенства треугольника приходим к противоречию

$$\rho(A\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p'}) \le \rho(A^r\boldsymbol{y},\boldsymbol{p'}) + \rho(A^r\boldsymbol{y},A^{r+1}\boldsymbol{y}) + \rho(A^{r+1}\boldsymbol{y},A\boldsymbol{p'}) <$$
$$\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\right)\rho(A\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}').$$

Таким образом, предельная точка $\boldsymbol{p}$ единственная.

d) Так как $A^r\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ и $(A^r\boldsymbol{x})P = A^r(\boldsymbol{x}P) \to \boldsymbol{p}$ при $r \to \infty$, а $\boldsymbol{y} \longmapsto \boldsymbol{y}P$ непрерывная функция, то $\lim\limits_{r\longrightarrow\infty}(A^r\boldsymbol{x})P = \boldsymbol{p}P = \boldsymbol{p}$, т.е. $\boldsymbol{p}$ - неподвижная точка линейного отображения $G_n \to G_n$, заданного матрицей P, то есть $\boldsymbol{y} \longmapsto \boldsymbol{y}P$**.** Если бы это линейное отображение имело другие неподвижные точки, то, как следует из определения A, они были бы неподвижными точками отображения A, что невозможно. Так как $\boldsymbol{p}$ **- единственная** неподвижная точка отображения с матрицей P, то она является **единственным решением** линейной системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_{kj} = x_j, j = 1,2,\dots,n\,, \ \ \sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что переходная матрица P^n за n шагов стремится при $n \to \infty$ к матрице, у которой все строки одинаковы и совпадают со стационарным распределением $\boldsymbol{\pi}$. Для докзательства достаточно в качестве вектора $\boldsymbol{x} \in G_n$ выбирать единичные вектора $\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n} \in G_n$.

Напомним, что конечная цепь Маркова (или, эквивалентно, её переходная матрица P) называтся **неприводимой**, если она состоит из одного класса C сообщающихся состояний. Поскольку любая конечная цепь Маркова должна иметь хотя бы одно возвратное состояние, то этот класс автоматически является замкнутым классом возвратных состояний. Более того, можно показать, что все состояния этой цепи ***возвратные положительные***, то есть

$$\rho(j,j) = \sum_{m \geq 1} m f_m(j,j) < \infty,$$

где $\rho(j,j)$ – математическое ожидание времени возвращения (среднее время возвращения) из состояния j в состояние j, $f_m(j,j)$ - вероятность ***первого*** возвращения из j в j ***ровно за*** $\boldsymbol{m}$ ***шагов.***

Замечание.

Пусть цепь Маркова неприводима. Очевидно, что если $p_{ii}^n > 0$ для ***всех*** достаточно больших n, то цепь является апериодической (НОД $(N, N+1) = 1$). Верно и обратное, если цепь апериодическая, то $p_{ij}^n > 0$ для ***всех достаточно больших*** n. Это следует из приводимой ниже теоремы 13.8, дающей более полное описание стационарных вероятностей (А.Н. Ширяев «Вероятность», стр. 545)

Теорема 13.8. *Пусть конечная цепь Маркова неприводима (говорят также неразложима) и апериодична. Тогда* ***все*** *состояния этой цепи* ***возвратные положительные*** *и*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \frac{1}{\rho(j,j)} > 0,$$

где $\rho(j,j) = \sum_{m\geq 1} m f_m(j,j)$ - среднее время возвращения из состояния j в состояние j (которое для *положительного возвратного* состояния j конечно по определению).

Вообще для ***возвратного апериодического*** состояния j возможны 4 случая (А.Н. Ширяев. «Вероятность», Лемма 3. стр. 541)

1. Если ***i сообщается с j***, то

$$p_{ij}^n \to \frac{1}{\rho(j,j)}, n\to\infty.$$

2. Если при этом j является ***возвратным положительным***, то

$$p_{ij}^n \to \frac{1}{\rho(j,j)} > 0.$$

3. Если при этом j является ***возвратным нулевым***, то

$$p_{ij}^n \to 0.$$

4. Если ***i и j принадлежат разным классам*** сообщающихся состояний, то

$$p_{ij}^n \to \frac{f^*(i,j)}{\rho(j,j)}, n\to\infty,$$

где $f^*(i,j) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(i,j)$ – вероятность достичь (за любое число шагов) состояние j из состояния i ($f_m(i,j)$ - вероятность достичь ***ровно*** за m шагов состояние j из состояния i).

Теорема 13.9. *Пусть $X_n -$ конечная, неприводимая апериодическая цепь Маркова. Тогда для любого начального распределения ν (не обязательно стационарного) имеем:*

$$\lim_{n\to\infty} \nu P^n = \mu$$

где $\mu -$ единственное стационарное распределение.

Доказательство. В силу Замечания и Теоремы 13.7, $P^n \to \Pi$, где Π - матрица, все строки которой одинаковы и равны вектору (единственному) стационарного распределения μ. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Пример. Рассмотрим 2x2 переходную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Тогда: если $\alpha + \beta > 0$, то существует единственное стационарное (инвариантное, равновесное) распределение

$$\pi = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right);$$

Если, например, $\alpha = \beta = 1$, то оба состояния цепи имеют период 2, матрица перехода равна

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $P^2 = I, \pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Если же $\alpha = \beta = 0$, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и любое распределение $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ является инвариантным, $\lim\limits_{n\to\infty} \nu P^n = \nu$. Всегда $P^n = I$, то есть содержит нулевые элементы.

Эргодическая теорема.

Теорема 13.10. *Пусть P – неприводимая, апериодическая стохастическая матрица, и пусть $\mu -$ её единственная инвариантная мера* ***(стационарное распределение)****, $i \in E$ и $(\Omega, (X_n)_{n\geq 0}, P, \delta_i)$ - цепь Маркова с переходной матрицей P и начальным распределением δ_i. Тогда для любой функции $f: E \to R \in L^1(E, \mu)$ P – почти наверное*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(f(X_0) + \cdots + f(X_{n-1})) = \int\limits_E f(i) d\mu(i) = \sum_{i\in E} f(i)\mu(i).$$

В частности, беря в качестве f индикатор состояния j, получим, что для всех i, j, для цепи, исходящей из i, доля посещений состояния j стремится к $\mu(j)$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{ij}}{n} = \mu(j)$$