Лекция 2. Автоковариационная и автокорреляционная функции.

Рассматриваемые в этой лекции ряды мы предполагаем стационарными в широком смысле. Поэтому определяемые ниже автоковариационная и автокорреляционная функции зависят только от разности моментов времени.

Определение. *Автоковариационная функция* ряда x_t определяется следующим образом

$$\gamma_j = Cov\left(x_t x_{t-j}\right) = E\left(x_t x_{t-j}\right).$$

(напомним, что мы рассматриваем ряды с $Ex_t = 0$).

Автокорреляционная функция ряда x_t определяется следующим образом

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\mathrm{var}(x_t)} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}.$$

Автоковариации и автокорреляции дают один из простейших способов описания совместных распределений наблюдаемого временного ряда. Например, корреляция между x_t и x_{t+1} является мерой того, насколько устойчив временной ряд, насколько, скажем, тенденция сегодняшнего дня будет воспроизведена завтра.

Автоковариации и автокорреляции различных ARMA процессов.

В этом параграфе мы вычислим автоковариационные и автокорреляционные функции некоторых основных временных рядов.

Белый шум. Поскольку мы предположили, что $\varepsilon_i \sim i.i.d.\,\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, очевидно, что

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2,\ \gamma_j = 0 \ \text{для}\ j \neq 0$$

$$\rho_0 = 1, \qquad \rho_j = 0 \ \text{для} \ j \neq 0.$$

MA (1). Модель имеет вид

$$x_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Автоковариации:

$$\gamma_0 = var(x_t) = var(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2 + \theta^2\sigma_\varepsilon^2 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma_1 = E(x_t x_{t-1}) = E\big((\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2})\big) = E(\theta\varepsilon_{t-1}^2) = \theta\sigma_\varepsilon^2.$$

$$\gamma_2 = E(x_t x_{t-2}) = E((\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) = 0.$$

$$\gamma_j = 0, j \geq 3.$$

Автокорреляции:

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \rho_{2,} \rho_3, \ldots = 0.$$

MA (2). Модель:

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}.$$

Автоковариации:

$$\gamma_0 = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})^2] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma_1 = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2} + \theta_2\varepsilon_{t-3})] =$$

$$(\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3} + \theta_2\varepsilon_{t-4})] = \theta_2\sigma_\varepsilon^2.$$

$$\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \ldots = 0.$$

Автокорреляции:

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = \frac{(\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \rho_2 = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \rho_3, \rho_4, \dots = 0.$$

MA(q), MA(∞).

Теперь должно быть ясно, как считать ковариации для общих моделей скользящего среднего. Для модели **MA(**∞)

$$x_t = \theta(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}(\theta_j L^j)\varepsilon_t$$

для автоковариаций получаем

$$\gamma_0 = var(x_t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j^2\right)\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{\infty}\theta_j\theta_{j+k}\sigma_\varepsilon^2.$$

Здесь $\theta_0 = 1$. Автоковариации для модели **MA(q)** получаются из автоковариаций для модели **MA(**∞), если в формулах положить $\theta_{j+k} = 0$ для $j + k > q$. Формулы для ρ_j немедленно следуют из соотношения $\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$.

AR (1). Есть два способа вычисления автоковариаций для этого процесса. Первый способ заключается в переходе к MA(∞) и использовании вышеприведённых формул для процесса MA(∞). Имеем:

$$(1-\phi L)x_t = \varepsilon_t \ \Rightarrow x_t = (1-\phi L)^{-1}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \, \varepsilon_{t-j},$$

Поэтому

$$\gamma_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\right)\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2, \rho_0 = 1,$$

$$\gamma_1 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+1}\right)\sigma_\varepsilon^2 = \phi \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\right)\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\phi}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2, \ \rho_1 = \phi.$$

и, продолжая аналогичным образом, получим

$$\gamma_k = \frac{\phi^k}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2, \ \rho_k = \phi^k.$$

Другой способ нахождения автоковариаций состоит в прямом вычислении и представляет самостоятельный интерес.

$$\gamma_1 = E(x_t x_{t-1}) = E\big((\phi x_{t-1} + \varepsilon_t)\cdot x_{t-1}\big) = \phi\sigma_x^2, \rho_1 = \phi.$$

$$\gamma_2 = E(x_t x_{t-2}) = E\big((\phi^2 x_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)\cdot x_{t-2}\big) = \phi^2\sigma_x^2, \rho_2 = \phi^2.$$

$$\gamma_k = E(x_t x_{t-k}) = E\left((\phi^k x_{t-k} + \cdots + \varepsilon_t)\cdot x_{t-k}\right) = \phi^k\sigma_x^2, \rho_k = \phi^k.$$

AR (p). Уравнения Юла-Уолкера.

Второй метод позволяет легко вычислять автоковариации в модели AR(p). Приведём вычисления для модели AR(3), для моделей высшего порядка вычисления аналогичны. Имеем

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \phi_3 x_{t-3} + \varepsilon_t.$$

Умножая обе части на $x_t, x_{t-1}, \ldots$, беря математические ожидания и деля на γ_0, получим

$$1 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \phi_3\rho_3 + \sigma_\varepsilon^2/\gamma_0$$

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \phi_3\rho_2$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \phi_3\rho_1$$

$$\rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 + \phi_3$$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \phi_3\rho_{k-3}$$

Из второго, третьего и четвёртого уравнений находим ρ_1, ρ_2, ρ_3. Из последнего уравнения находим $\rho_4, \rho_5, \ldots$. Из первого уравнения находим дисперсию σ_x^2

$$\sigma_x^2 = \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - (\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \phi_3\rho_3)}.$$

Фундаментальное представление.

ARMA процессы с ***нормальными*** независимыми одинаково распределёнными ошибками являются линейными комбинациями нормальных величин, поэтому сами $\{x_t\}$ нормально распределены. Таким образом, совместное распределение ARMA временных рядов полностью характеризуется их средним (0) и ковариациями

$E(x_t, x_{t-j})$. (Используя обычную формулу для плотности многомерного нормального распределения, мы можем написать совместную плотность любого конечного набора значений $\{x_t\}$, эта плотность использует лишь ковариации). В свою очередь, все статистические свойства ряда описываются его совместными распределениями. Автоковариации дают в этом случае полную информацию о процессе. Иначе говоря:

Если два процесса с нормальными ошибками имеют одну и ту же автоковариационную функцию, то это один и тот же процесс.

Мы видели также, что $AR(1)$ - это тот же процесс, что и соответствующий ему $MA(\infty)$, и.т.д. То, что автоковариационная функция полностью определяет процесс, является полезным фактом. Рассмотрим пример. Пусть $\{x_t\}$ разлагается на *две* ***гауссовские*** *ненаблюдаемые компоненты* следующим образом:

$$x_t = y_t + z_t, \qquad z_t = \delta_t, \qquad y_t = \nu_t + \alpha\nu_{t-1},$$

где $\nu_t - i.i.d, \delta_t - \ i.i.d,$ и ν_t и δ_t независимы между собой. Каким ARMA процессом описывается x_t? Один из способов решения этой задачи состоит в нахождении автоковариационной функции $\{x_t\}$, затем находят ARMA процесс с этой автоковариационной функцией. Этот процесс и даст ARMA представление для $\{x_t\}$. Очевидно, процессы y_t и z_t независимы, поэтому

$$Var\ x_t = Var\ y_t + Var\ z_t = (1+\alpha^2)\sigma_\nu^2 + \sigma_\delta^2.$$

$$E(x_t x_{t-1}) = E[(\nu_t + \delta_t + \alpha\nu_{t-1})(\nu_{t-1} + \delta_{t-1} + \alpha\nu_{t-2})] = \alpha\sigma_\nu^2.$$

$$E(x_t x_{t-k}) = 0, \qquad k \geq 2.$$

Таким образом, автоковариационная функция этого процесса такова, что первые две автоковариации γ_0 и γ_1 отличны от нуля, а $\gamma_k = 0$ для $k \geq 2$. Как мы видели, такое поведение имеет автоковариационная функция процесса MA(1): $x_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$. Используя формулы, полученные выше для автоковариационной функции процесса MA(1), запишем систему уравнений, приравняв соответствующие ковариации

$$\gamma_0 = (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2 = (1 + \alpha^2)\sigma_\nu^2 + \sigma_\delta^2.$$

$$\gamma_1 = \theta\sigma_\varepsilon^2 = \alpha\sigma_\nu^2.$$

Получаем два уравнения с двумя неизвестными, которые следует решить относительно θ и σ_ε^2 - двух параметров представления $x_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$. Выражая θ и σ_ε^2 *через ковариации* γ_0 и γ_1, получим искомое представление. Вычисление автоковариационных функций гауссовских рядов для последующего представления ряда в виде одной из стандартных моделей является одним из наиболее часто используемых приёмов при работе с временными рядами.

Допустимые автокорреляционные функции.

Автокорреляционная функция играет фундаментальную роль при построении ARMA процессов. Однако не каждое множество чисел может быть множеством автокорреляций некоторого процесса. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос: ***когда множество чисел*** $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{\rho_1}, \boldsymbol{\rho_2}, \dots\}$ ***может быть автокорреляционной функцией некоторого ARMA процесса?***

Очевидно, что коэффициенты корреляции должны по модулю не превосходить 1. Однако это условие является лишь ***необходимым, но не достаточным.*** Дополнительное условие состоит в том, что дисперсия любой линейной комбинации значений $\{x_t\}$ должна быть неотрицательна. Таким образом,

$$Var\ (\alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \cdots) \geq 0\ для\ \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}.$$

В частности,

$$Var\ (\alpha_0 x_t + \alpha_1 x_{t-1}) = \gamma_0 [\alpha_0 \alpha_1] \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Таким образом, матрицы

$$B_1 := \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 := \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

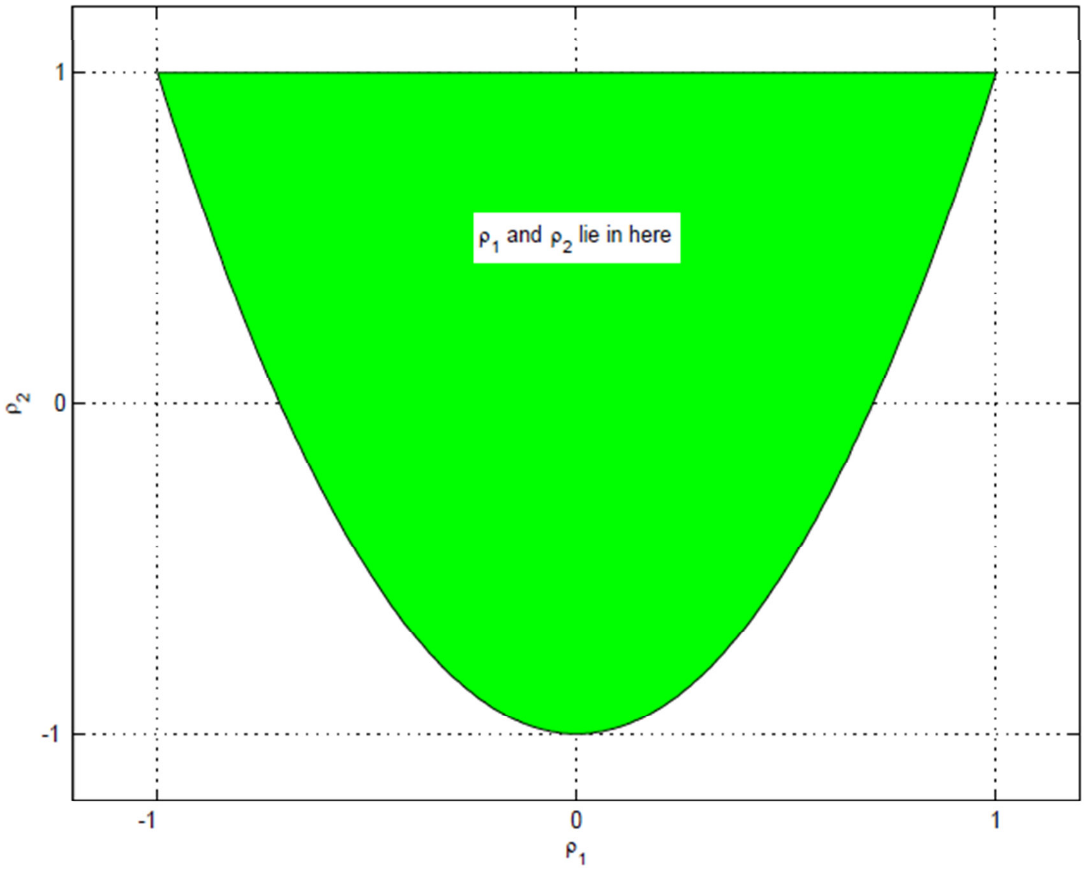
и.т.д. должны быть неотрицательно определены. Это более сильное требование, чем $|\rho_i| \leq 1$. Например, детерминант второй матрицы B_2 должен быть неотрицательным (также как и детерминанты её главных миноров, что влечёт $|\rho_1| \leq 1, |\rho_2| \leq 1$), поэтому

$$1 + 2\rho_1^2\rho_2 - 2\rho_1^2 - \rho_2^2 \geq 0\ \Rightarrow \left(\rho_2 - (2\rho_1^2 - 1)\right)(\rho_2 - 1) \leq 0$$

Мы уже знаем, что $|\rho_2| \leq 1$, поэтому $1 \geq \rho_2 \geq (2\rho_1^2 - 1) \Rightarrow$

$$-1 \leq \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \leq 1$$

Таким образом, $\rho_1\ и\ \rho_2$ должны лежать внутри области параболической формы, показанной на рисунке



Например, если $\rho_1 = 0{,}9, то\ 2 \times (0{,}9)^2 - 1 = 0{,}62 \leq \rho_2 \leq 1.$

Зачем нужны все эти вычисления? Тому есть, по крайней мере, две причины:

1) Показать, что **не всякая** последовательность автокорреляций может быть автокорреляционной функцией ARMA процесса.

2) Показать, что ограничения на ρ могут иметь очень сложный вид.

Сложности такого рода побуждают использовать другие методы анализа временных рядов. А именно, ***спектральные методы.*** Напомним, что из уравнений Юла-Уолкера следует, что автокорреляции на больших промежутках времени затухают экспоненциально быстро, т.е. $\exists\lambda, 0 < \lambda < 1$, такое, что $|\gamma_j| < \lambda^j$.

Отсюда следует, что $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^2 < \infty$.

Прогнозирование и импульсные функции отклика.

Одно из наиболее важных направлений в теории ARMA процессов – прогнозирование будущих значений переменой на основе её прошлых значений. То есть мы хотим найти

$$E_t\left(x_{t+j}\right) \triangleq E\left(x_{t+j}|x_t, x_{t-1}, x_{t-2\dots}\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\right).$$

То, насколько мы можем быть уверены в нашем прогнозе, характеризуется величиной

$$Var_t\left(x_{t+j}\right) \triangleq Var\left(x_{t+j}|x_t, x_{t-1}, x_{t-2\dots}\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots\right).$$

Прогнозирование для ARMA моделей.

Мы рассмотрим несколько примеров, а потом постараемся вывести общие принципы, следующие из этих примеров.

AR (1). Для модели $AR(1)$, $x_{t+1} = \phi x_t + \varepsilon_{t+1}$, имеем

$$E_t(x_{t+1}) = E_t(\phi x_t + \varepsilon_{t+1}) = \phi x_t.$$

$$E_t(x_{t+2}) = E_t(\phi^2 x_t + \phi \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}) = \phi^2 x_t,$$

$$E_t(x_{t+k}) = E_t(\phi^k x_t + \varepsilon_{t+k} + \cdots) = \phi^k x_t.$$

Аналогично,

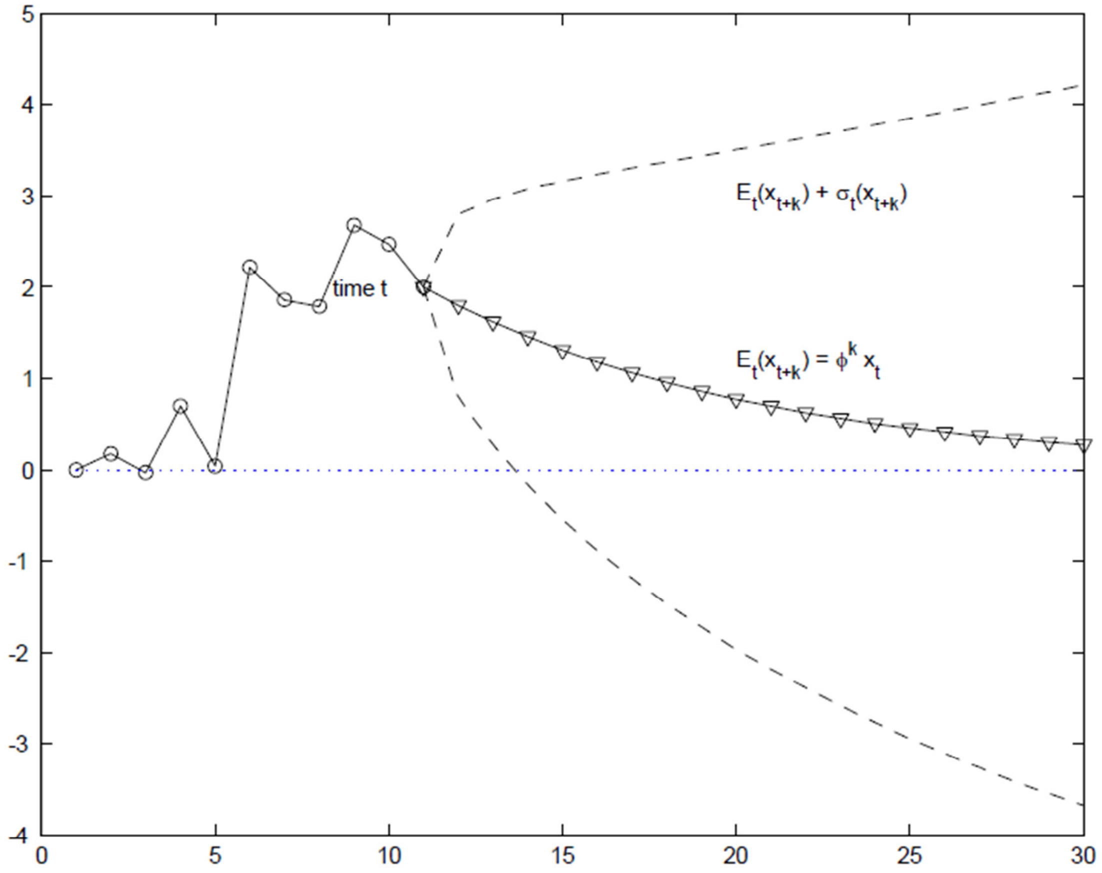
$$Var_t(x_{t+1}) = Var_t(\phi x_t + \varepsilon_{t+1}) = E_t(\phi x_t + \varepsilon_{t+1})^2 - \phi^2 x_t^2 = \sigma_\varepsilon^2.$$

$$Var_t(x_{t+2}) = Var_t(\phi^2 x_t + \phi \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}) =$$

$$= E_t(\phi^2 x_t + \phi \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2})^2 - \phi^4 x_t^2 = (1 + \phi^2)\sigma_\varepsilon^2.$$

$$Var_t(x_{t+k}) = \cdots = \left(1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots + \phi^{2(k-1)}\right)\sigma_\varepsilon^2.$$

Прогноз и стандартное отклонение для этой модели показаны на рисунке ниже



Заметим, что

$$\lim_{k\to\infty} E_t(x_{t+k}) = 0 = E(x_t),$$

$$\lim_{k\to\infty} Var_t(x_{t+k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2 = Var(x_t)$$

Интуитивно это понятно: на очень далёкое время вперёд ничего лучше не придумать в качестве прогноза для x_{t+k}, чем среднее в момент t. В качестве дисперсии этого прогноза (она характеризует точность прогноза) берётся дисперсия в момент t. Таким образом, безусловные моменты являются пределами условных моментов. То есть, мы можем рассматривать безусловные моменты либо как пределы условных моментов x_t, когда $t \to -\infty$, либо как пределы условных моментов x_{t+j}, когда горизонт $j \to \infty$.

MA. Прогноз для моделей MA также считается легко. Поскольку

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$$

Имеем

$$E_t(x_{t+1}) = E_t(\varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-1} + \cdots) = \theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-1} + \cdots$$

$$E_t(x_{t+k}) = E_t(\varepsilon_{t+k} + \theta_1 \varepsilon_{t+k-1+} + \theta_k \varepsilon_t + \theta_{k+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots) =$$

$$= \theta_k \varepsilon_t + \theta_{k+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots$$

$$Var_t(x_{t+1}) = E_t(\varepsilon_{t+1} + \theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-1} + \cdots)^2$$

$$-(\theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-1} + \cdots)^2 = \sigma_\varepsilon^2,$$

$$Var_t(x_{t+k}) = E_t(\varepsilon_{t+k} + \theta_1 \varepsilon_{t+k-1} + \cdots + \theta_k \varepsilon_t + \theta_{k+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots)^2$$

$$-(\theta_k \varepsilon_t + \theta_{k+1} \varepsilon_{t-1} + \cdots)^2 = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_{k-1}^2)\sigma_\varepsilon^2.$$

AR и ARMA. При вычислении прогнозов используется то, что $E_t(\varepsilon_{t+j}) = 0$ и $Var_t(\varepsilon_{t+j}) = \sigma_\varepsilon^2$ при $j > 0$. Значение x_{t+j} представляется в виде суммы

$$x_{t+j} = \{функция\ от\ \ \varepsilon_{t+j}, \varepsilon_{t+j-1}, \dots, \varepsilon_{t+1}\} +$$
$$\{функция\ от\ \ \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots x_t, x_{t-1}, \dots\}$$

Второе слагаемое определяет условное среднее или прогноз, а первое слагаемое определяет условную дисперсию или ошибку прогноза. Сам прогноз можно выражать как в терминах $x - ов$,

так и в терминах ε. Например, для модели AR(1) можно написать $E_t(x_{t+j}) = \phi^j x_t$ или $E_t(x_{t+j}) = \phi^j \varepsilon_t + \phi^{j+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots$ поскольку $x_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \cdots$.

Многомерные ARMA модели.

Сейчас мы только отметим, что многомерные ARMA модели определяются аналогично одномерным, только все буквы надо понимать не как числа и одномерные переменные, а как матрицы и векторы. Конечно, как обычно, надо соблюдать некоторую осторожность с такими операциями, как транспонирование и.т.п. Многомерные прогнозы считаются во многом так же, как и прогнозы для одномерных моделей. Если мы рассмотрим, например, векторную модель MA(∞)

$$x_t = \varepsilon_t + B_1\varepsilon_{t-1} + B_2\varepsilon_{t-2} + \cdots$$

(здесь x_t, ε_t – векторы, а B_i – матрицы), то

$$E_t(x_{t+j}) = B_j\varepsilon_t + B_{j+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

$$Var_t(x_{t+j}) = \Sigma + B_1\Sigma B_1' + \cdots + B_{j-1}\Sigma B_{j-1}'.$$

Сравните с одномерным случаем

$$E_t(x_{t+j}) = E_t(\varepsilon_{t+j} + \theta_1\varepsilon_{t+j-1+} + \theta_j\varepsilon_t + \theta_{j+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots)$$

$$= \theta_j\varepsilon_t + \theta_{j+1}\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

$$Var_t(x_{t+j}) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_{j-1}^2)\sigma_\varepsilon^2.$$

Пространственное представление.

Модель AR(1) особенно удобна для вычислений, поскольку для неё сам прогноз и дисперсия ошибки прогноза могут быть вычислены рекурсивно. В этом параграфе мы объясним один полезный приём, позволяющий любой процесс преобразовать в ***векторный*** процесс AR(1), что приводит, в конечном счете, к созданию удобных программ, позволяющих вычислять прогнозы.

Представление ARMA процессов в виде векторного процесса AR(1).

Рассмотрим, для примера, процесс ARMA (2,1)

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}.$$

Представим его как ***векторный*** процесс авторегрессии первого порядка

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\varepsilon_t]$$

Или в матричном виде

$$x_t = Ax_{t-1} + Cw_t.$$

Иногда бывает удобно переопределить матрицу C таким образом, чтобы дисперсия $w_t = 1$. То есть

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon \\ 0 \\ \sigma_\varepsilon \end{bmatrix}, E(w_t w_t') = 1.$$

Вычисление прогнозов с помощью векторного AR(1) представления.

Рассмотрим векторную MA(∞) модель

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} A^j C w_{t-j}, \ \ Var(w_t) = I.$$

Прогноз легко считается

$$E_t(x_{t+k}) = A^k C w_t + A^{k+1} C w_{t-1} + \cdots = A^k x_t.$$

Дисперсии ошибок прогноза равны

$$x_{t+1} - E_t(x_{t+1}) = Cw_{t+1} \Rightarrow Var_t(x_{t+1}) = CC'.$$

$$x_{t+2} - E_t(x_{t+2}) = Cw_{t+2} + ACw_{t+1} \Rightarrow Var_t(x_{t+2}) = CC' + ACC'A',$$

$$Var_t(x_{t+k}) = \sum_{j=0}^{k-1} A^j CC' \left(A^j\right)'$$

Эти формулы особенно удобны тем, что они позволяют рекуррентно пересчитывать прогнозы и их дисперсии:

$$E_t(x_{t+k}) = AE_t(x_{t+k-1}),$$

$$Var_t(x_{t+k}) = CC' + A[Var_t(x_{t+k-1})]A'.$$