

## **Лекция 4. Генерирование случайных чисел. Метод обращения. Моделирование распределения Пуассона.**

Равномерно распределённые случайные числа из интервала  $[0,1]$  играют ключевую роль при генерировании выборок, закон распределения которых отличен от равномерного. Наилучшие (в смысле близости распределений) последовательности равномерно распределённых случайных чисел в интервале  $[0,1]$  генерируются с помощью электронных приборов. Так как имитационные модели реализуются на компьютере, использование электронных приборов для генерации случайных чисел слишком бы замедлило процедуру имитационного моделирования. Кроме того, электронные приборы активируются случайным образом. Следовательно, невозможно по желанию воспроизвести одну и ту же последовательность случайных чисел. Этот факт чрезвычайно важен, так как для отладки и проверки имитационной модели часто требуется дублирование одной и той же последовательности случайных чисел.

В имитационном моделировании единственным подходящим методом генерации случайных чисел из интервала  $[0,1]$  является ***метод, основанный на арифметических операциях***. Такие числа не являются истинно случайными, так как они могут быть определены заранее, поэтому их называют ***псевдослучайными***.

Наиболее часто используется ***мультипликативный метод сравнений***, который генерирует псевдослучайные числа из интервала  $[0,1]$  с использованием арифметических операций. В соответствии с этим методом псевдослучайное число  $R_n$  при

заданных значениях параметров  $u_0, b, c$  и  $m$  можно вычислить по следующей формуле:

$$u_n = (bu_{n-1} + c) \bmod (m), n = 1, 2, \dots$$

$$R_n = \frac{u_n}{m} \in [0, 1], n = 1, 2, \dots$$

Начальное значение параметра  $u_0$  обычно называют **начальным числом** генератора случайных чисел. Конкретный выбор параметров  $u_0, b, c$  и  $m$  является решающим фактором, определяющим статистические качества генератора случайных чисел, а также длину его цикла (по окончании цикла генерируемая последовательность начинает повторять себя). Использование параметров, выбранных «наобум», не даёт хорошего генератора случайных чисел. Надёжные генераторы, наряду с достаточно большой длиной цикла генерируемых случайных чисел, должны пройти соответствующие статистические проверки, чтобы гарантировать равномерное распределение на интервале  $[0, 1]$  полученной последовательности. На это условие нужно обращать внимание при использовании непроверенного программного обеспечения в качестве генератора случайных чисел.

Возможны также вариации мультипликативного метода сравнений, которые улучшают качество генератора.

**Задача.** Найдите программу генератора равномерно распределённых на  $[0, 1]$  случайных чисел для вашего компьютера и с его помощью получите 500 случайных чисел из

интервала  $[0,1]$ . Постройте гистограмму полученных чисел и визуально убедитесь, что есть веские основания считать, что они подчинены равномерному распределению на интервале  $[0,1]$ .

### **Распределения, задаваемые своими функциями распределения. Метод обращения.**

Пусть  $F$  - функция распределения, то есть функция  $F: R \rightarrow [0,1]$ , неубывающая, непрерывная справа, имеющая пределы слева,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ . Эта функция полностью определяет закон распределения с.в.  $X$ : если  $F(x)$  – функция распределения с.в.  $X$ , то для любого  $t$ , по определению  $F$ ,  $P(X \leq t) = F(t)$ . Предположим сначала, для простоты, что  $F$  *строго возрастает и всюду непрерывна*. Тогда можно определить *обратную функцию*  $G = F^{-1}: ]0,1[ \rightarrow R$  следующим образом:  $G(x) = t$  тогда и только тогда, когда  $F(t) = x$ . Ключевая идея моделирования методом обращения основана на следующем простом свойстве равномерного распределения. Пусть с.в.  $U$  равномерно распределена на  $[0,1]$ , тогда, по определению  $U$ ,  $F(t) = P(U \in [0, F(t)])$  и, следовательно,  $F(t) = P(U \leq F(t))$ . Но  $P(U \leq F(t)) = P(F^{-1}(U) \leq t)$ . Мы доказали, что *если положить  $X = F^{-1}(U)$ , то функция распределения с.в.  $X$  равна  $F(t)$* . Весьма важным для моделирования оказывается то, что *от предположения строгого возрастания функции  $F(t)$  можно отказаться*. Нужно только подходящим образом обобщить понятие

обратной функции  $G$ . Такую *обобщённую обратную функцию* определяют следующим образом:

$$G(u) = \inf \{s \in R: u \leq F(s)\} \quad (6)$$

Заметим, что  $G(u)$  в (6) определена всегда, даже когда  $F(t)$  имеет горизонтальные участки или скачки (как, например, у функции распределения Пуассона) и, если  $F(t)$  строго возрастает и непрерывна, то определение (6) совпадает с предыдущим определением обратной функции. Имеет место следующее утверждение:

**Лемма 4.1.** Пусть  $F: R \rightarrow [0,1]$  - функция распределения и  $G: (0,1) \rightarrow R$  определена формулой (6). Тогда

- i)  $\inf$  в (6) есть на самом деле  $\min$
- ii) для всех  $t \in R$  и  $u \in (0,1)$  имеем:  $u \leq F(t) \Leftrightarrow G(u) \leq t$   
(последнее как раз и означает, что  $G$  является обратной для  $F$ ).

*Доказательство.*

- i) Достаточно доказать, что для  $u \in (0,1)$  множество  $E_u := \{s \in R: u \leq F(s)\}$  замкнуто, не пусто и ограничено снизу (тогда  $\inf$  есть, на самом деле,  $\min$ ). Очевидно, что  $E_u$  не пусто, поскольку  $u \in (0,1)$ , множество  $E_u$  ограничено снизу, ибо, в противном случае, найдётся  $s_n \rightarrow -\infty$  такая, что  $F(s_n) \geq u$ , а это невозможно, поскольку  $u \in (0,1)$ , т.е. строго положительно, а  $F(s_n) \rightarrow 0$  при  $s_n \rightarrow -\infty$ . Для

доказательства замкнутости множества  $E_u$  достаточно доказать, что если  $s_n \in E_u$  и сходится к некоторому вещественному числу  $s$ , то и  $s \in E_u$ , то есть  $u \leq F(s)$ . Если существует  $n$  такое, что  $s_n \in E_u$  и  $s_n \leq s$ , то, в силу монотонности  $F$  и принадлежности  $s_n$  к  $E_u$ ,  $u \leq F(s_n) \leq F(s)$ , если же при всех  $n$  выполнено  $s_n > s$ , то можно выбрать подпоследовательность  $s_{n_r} \in E_u$ , сходящуюся к  $s$ , убывая,  $s_{n_r} \downarrow s$ . Поскольку  $F$  непрерывна справа,  $F(s_{n_r}) \rightarrow F(s)$  и, переходя к пределу в неравенстве  $u \leq F(s_{n_r})$ , получим  $u \leq F(s)$ , то есть  $s \in E_u$ , и множество  $E_u$  замкнуто.

ii) Если  $u \leq F(t)$ , то, по определению,  $t \in E_u$  и  $t \geq \inf E_u := G(u)$ . Обратно, как мы видели,  $\inf E_u$  есть, на самом деле,  $\min E_u$ , то есть  $G(u) \in E_u$ . Если  $G(u) \leq t$ , то, так как  $F$  неубывающая функция, получаем  $F(t) \geq F(G(u)) \geq u$ . Последнее неравенство следует из того, что  $G(u) \in E_u$ . Лемма доказана.

Немедленным следствием этой леммы является следующая

**Теорема 4.1.** Пусть  $F$  - функция распределения и  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$  последовательность независимых, одинаково распределённых с.в., равномерно распределённых на отрезке  $[0,1]$ . Тогда последовательность с.в.  $(X_k)_{k \geq 1}$ , где  $X_k = G(U_k)$ , является последовательностью независимых с.в., причем каждая  $X_k$  имеет закон распределения, функция распределения которого равна  $F(t)$ .

*Доказательство.* Очевидно, что с.в.  $X_k$  независимы, как функции от независимых с.в.  $U_k$  (напомним, что  $X_k = G(U_k)$ ). Далее, из утверждения ii) Леммы 4.1. следует, что

$$F(t) = P(U_k \leq F(t)) = P(G(U_k)) \leq t = P(X_k \leq t).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим два примера применения Теоремы 4.1: моделирование экспоненциального закона и моделирование закона Пуассона.

### **Моделирование экспоненциального закона распределения.**

По определению, экспоненциальный закон распределения  $\mathcal{E}(\lambda)$  с параметром  $\lambda$  имеет плотность распределения  $\lambda e^{-\lambda t} \cdot 1_{(t \geq 0)}(t)$  и функцию распределения  $F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$ . Эта функция непрерывна и строго возрастающая, поэтому обратная функция определена в обычном (не обобщённом) смысле. Имеем:  $F(t) = u \Leftrightarrow t = -\lambda^{-1} \ln(1 - u)$ . Таким образом,  $G(u) = -\lambda^{-1} \ln(1 - u)$ , и, в соответствии с Теоремой 4.1, с.в.  $X = -\lambda^{-1} \ln(1 - U)$  распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$ . Для получения последовательности  $X_k$  независимых, одинаково распределённых по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$  случайных величин, достаточно рассмотреть  $X_k = -\lambda^{-1} \ln(1 - U_k)$ . Заметим, что из того, что  $1 - U$  также распределена равномерно на  $[0, 1]$  (докажите!), следует, что с.в.  $Y =$

$-\lambda^{-1} \ln(U)$  также имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$  (используйте тождество  $U = 1 - (1 - U)$ ).

**Моделирование закона Пуассона.** Для моделирования закона Пуассона с параметром  $\lambda$  можно использовать предыдущий результат (моделирование экспоненциального распределения) и следующую теорему

**Теорема 4.2.** Пусть  $\{T_k\}_{k \geq 1}$  – последовательность независимых одинаково распределённых с.в., каждая из которых имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . Тогда целочисленная с.в.

$$v_{t,\lambda} = \max\{k \geq 1: T_1 + \dots + T_k \leq t\}$$

имеет распределение Пуассона с параметром  $t\lambda$ .

**Замечание.** Очевидно, что для моделирования распределения Пуассона с параметром  $\lambda$  следует применить Теорему 4.2 с  $t = 1$ .

*Доказательство.* Обозначим  $S_r = T_1 + \dots + T_r, r \geq 1$ . Поскольку последовательность  $(T_i)_{i \geq 1}$  независима, и каждая с.в.  $T_i$  имеет плотность  $\lambda e^{-\lambda t} 1_{\{t \geq 0\}}$ , нетрудно видеть, что  $S_r$  имеет плотность  $\rho_{S_r}(t)$ , равную нулю для  $t \leq 0$  и равную

$$\rho_{S_r}(t) =$$

$$\int_{0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{r-1} \leq t} \lambda^r \exp(-\lambda(t - u_{r-1})) \exp(-\lambda(u_{r-1} - u_{r-2})) \times \dots$$

$$\times \exp(-\lambda(u_2 - u_1)) \exp(-\lambda u_1) du_1 \dots du_{r-1} \quad (7)$$

для  $t \geq 0$ . Это обычная формула свёртки  $r$  независимых случайных величин. Так, например, для  $r = 2$ , т.е. для плотности с.в.  $S_2 = T_1 + T_2$  получаем

$$\rho_{S_2}(t) = \int_0^t \lambda^2 \exp(-\lambda(t - u_1)) \exp(-\lambda u_1) du_1,$$

а для  $S_2 = T_1 + T_2 + T_3$

$$\rho_{S_3}(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-u_2)} \cdot \rho_{S_2}(u_2) du_2 =$$

$$\iint_{0 \leq u_1 \leq u_2 \leq t} \lambda^3 \exp(-\lambda(t - u_2)) \exp(-\lambda(u_2 - u_1)) \exp(-\lambda u_1) du_1 du_2.$$

Легко видеть, перемножая экспоненты и произведя сокращения, что интеграл в (7) равен числу  $\lambda^r e^{-\lambda t}$ , умноженному на объём  $(r - 1)$ -го симплекса  $0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{r-1} \leq t$ . Этот объём равен  $\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}$ . Таким образом, мы получаем, что интеграл в (7) равен  $\lambda^r e^{-\lambda t} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}$ . Далее, событие  $\{v_{t,\lambda} = k\}$  совпадает с событием  $\{S_k \leq t \text{ и } S_k + T_{k+1} > t\}$ . Вероятность этого события равна

$$E(1_{S_k \leq t} \cdot 1_{S_k + T_{k+1} > t})$$



(вероятность события равна математическому ожиданию индикатора этого события). Используя свойства условных математических ожиданий, получим

$$E(1_{S_k \leq t} \cdot 1_{S_k + T_{k+1} > t}) = E(1_{S_k \leq t} \cdot E(1_{S_k + T_{k+1} > t} | S_k))$$

Поскольку  $S_k$  и  $T_{k+1}$  независимы, то (Предложение 3.1 Лекции 3)

$$E(1_{S_k + T_{k+1} > t} | S_k) = \phi(S_k),$$

где (детерминированная) функция  $\phi(s)$  равна

$$\phi(s) = E(1_{s + T_{k+1} > t}).$$

(см. Предложение 3.1 Лекции 3). Случайная величина  $T_{k+1}$  распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda$ , поэтому

$$\phi(s) = P(T_{k+1} > t - s) = \int_{t-s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du =$$

$$(-e^{-\lambda u})|_{t-s}^{\infty} = e^{-\lambda(t-s)},$$

и, следовательно,

$$P(v_{t,\lambda} = k) = E(1_{S_k \leq t} \cdot \phi(S_k)) = \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \rho_{S_k}(s) ds =$$

$$\int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \cdot \lambda^k e^{-\lambda s} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} ds =$$

$$\frac{\lambda^k \exp(-\lambda t)}{(k-1)!} \int_0^t s^{k-1} ds = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t),$$

то есть  $P\{v_{t,\lambda} = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$ . Что и требовалось доказать.