# Лекция 11. Цепи Маркова.

## 11.1 Цепи Маркова и случайные процессы.

*Случайный процесс* – это совокупность случайных величин $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega\}, X_t(\omega): \Omega \to E$, где переменная $t$ интерпретируется как «время». Множество $E$ называется ***пространством состояний*** процесса. Время может быть как дискретным, в этом случае $T = N = 0,1,2, \dots$ или $Z = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ так и непрерывным, когда $T$ может быть конечным или бесконечным интервалом вещественной прямой $R$. В первом случае говорят о *процессе* ***с дискретным временем***, а во втором – ***с непрерывным временем.*** Примером процесса с дискретным временем является ежедневная сводка погоды (в этом случае $t = 1,2, \dots$ и $X_t$ принимает значения в множестве $E = \{\text{солнечно}, \text{пасмурно}\}$). Примеры процессов с непрерывным временем: $X_t$ – это число клиентов, пришедших к окну обслуживания до момента $t$ или $X_t$ - это положение в момент $t$ молекулы в газе и.т.д. Чтобы задать такой процесс, достаточно задать для любого $n$ и любой возрастающей последовательности моментов времени

$$s_1 < \cdots < s_n$$

закон распределения вектора $(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$. Распределение такого вида часто называют ***конечномерным распределением процесса*** $X_t$. Случайный процесс $X_t$ называется ***строго стационарным (или стационарным в узком смысле)***, если для всех $n$ и $(t, s_1, \dots, s_n)$ закон распределения случайного вектора

$$(X_{t+s_1}, \dots, X_{t+s_n})$$

не зависит от $t$ (но, конечно, может зависеть от $s_1, \dots, s_n$). Другими словами, процесс стационарный, если все его конечномерные распределения *инвариантны относительно сдвига по времени.* Одна из основных целей этого раздела – показать, что всякий «разумный» процесс Маркова асимптотически стабилизируется, то есть сходится при $t \to \infty$ в некотором смысле (который будет уточнён) к стационарному процессу.

***Цепь Маркова*** - это один из важных примеров стохастических процессов. Мы ограничимся в этом курсе рассмотрением простейшего класса цепей Маркова, а именно: однородных цепей Маркова с дискретным временем и конечным пространством состояний $E$ (то есть все состояния пространства $E$ можно перенумеровать, чем мы и будем пользоваться и отождествлять состояния цепи с присвоенными им номерами). Соответствующий случайный процесс мы будем обозначать $X_n$.

**Определение 11.1.** *Цепью Маркова с дискретным временем называется случайный процесс $X_0, \dots, X_n, \dots$ , удовлетворяющий условию: для любого $n$ и для любых состояний $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$ условная вероятность*

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

*зависит только от $i, j$ и $n$. Цепь Маркова называют* ***однородной,*** *если эта вероятность зависит от $i$ и $j$, но не зависит от $n$. Другими словами, для однородной цепи Маркова состояние системы в будущем (в момент $n+1$) при фиксированном настоящем (момент $n$) не зависит от её состояний в прошлом (в моменты $0 \le k \le n-1$). Обозначим*

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

*и назовём эту вероятность* ***переходной вероятностью из состояния $i$ в состояние $j$****. Закон распределения $X_0$ называется* ***начальным законом распределения*** *цепи (или кратко –* ***начальным распределением*** *цепи).*

Будем обозначать через $\mathcal{F}\{X_i, i \ge 0\}$ или $\sigma\{X_i, i \ge 0\}$ сигма-алгебру, порождённую событиями $(X_i \in I_i), i \ge 0$ , $I_i -$ открытый интервал $R$. В дальнейшем будем предполагать, что $X_i$ ***принимает конечное число $r$ значений.***

Важное свойство цепей Маркова состоит в том, что ***они полностью определяются заданием начального распределения $X_0$ и переходных вероятностей за один шаг***

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

«Определяются» в том смысле, что знание начального распределения и переходных вероятностей за один шаг позволяет найти закон распределения случайного вектора

$$(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$$

для всех $n$ и для всех возрастающих последовательностей времён $s_1, \dots, s_n$. В самом деле, верна следующая теорема.

## Теорема 11.1.

*a) Обозначим через* $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ *закон распределения* $X_n$, *пусть* $p^{(n)}$ *– соответствующая вектор-строка,* $p^{(n)} = \left(p_1^{(n)}, \dots, p_r^{(n)}\right)$. *Пусть* $P$ *- матрица переходных вероятностей цепи за один шаг, то есть* $r \times r$ *матрица, элементами которой являются* $p_{ij}$

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

*Тогда для всех* $k$

$$p^{(n+k)} = p^{(k)} P^n.$$

*Таким образом, закон распределения* $X_0$ *и переходные вероятности определяют закон распределения* $X_n$ *(достаточно положить* $k = 0$*).*

*b) Для всех состояний* $i_{s_1}, i_{s_2}, \dots, i_{s_n}$ *пространства* $E = \{1,2, \dots, r\}$

$(s_1 < s_2 < \dots < s_n)$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}\right) = \boldsymbol{P}\left(X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_2} = i_{s_2} | X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times$$

$$\dots \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n} | X_{s_{n-1}} = i_{s_{n-1}}\right).$$

*Эта «цепная» зависимость оправдывает название – цепь Маркова. Таким образом, закон распределения случайного вектора*

$$\left(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}\right)$$

*полностью определяется законом распределения* $X_0$ *и переходными вероятностями за один шаг.*

**Упражнение.** Доказать, что матрица перехода за $k$ шагов однородной цепи Маркова, т.е. матрица, элементами которой являются

$$p_{ij}^{(k)} = \boldsymbol{P}(X_{n+k} = j | X_n = i)$$

равна $P^k$, где $P$ - матрица перехода за один шаг.

*Доказательство.* а) Достаточно заметить, что

$$p_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = k) = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = k)\boldsymbol{P}(X_n = k) =$$
$$\sum_{k=1}^{r} p_k^{(n)} P_{kj},$$

что в матричном виде записывается как

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} P.$$

Итерируя последнее равенство, получим а).

b) Докажем сначала следующую лемму:

**Лемма 11.1.** *Если* $A$ *– событие, принадлежащее сигма-алгебре «прошлого»* $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, *то*

$$\boldsymbol{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n, A) = \boldsymbol{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n).$$

*Доказательство.* Мы знаем, что эта формула верна, когда $k = 1$ и $A$ – событие вида

$$C = \{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}$$

(в этом случае это просто определение цепи Маркова). Так как пространство состояний конечно, то любое событие из $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ является конечным объединением непересекающихся событий $C_l$ вида $C$, рассмотренного выше, то есть $A = \cup_l C_l$. Имеем:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, A) = \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, A)}{P(X_n = i_n, A)} =$$

$$\sum_l \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, C_l)}{P(X_n = i_n, A)} =$$

$$\sum_l \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, C_l)}{P(X_n = i_n, A)} P(X_n = i_n, C_l)$$

$$\sum_l \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n)}{P(X_n = i_n, A)} P(X_n = i_n, C_l) =$$

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n) \sum_l \frac{P(X_n = i_n, C_l)}{P(X_n = i_n, A)} =$$

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n).$$

(переход от 3-ей строки к 4-ой снова следует из определения цепи Маркова). Таким образом, мы доказали лемму для $k = 1$. Докажем теперь лемму для произвольного $k$ индукцией по $k$. Предположим, что лемма верна для некоторого $k$ (при этом момент $n$, связанный с «настоящим», может быть любым, $n = 0,1,2,\ldots$, а событие $A$ - любое событие из сигма - алгебры «прошлого» $\mathcal{F}(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$) и докажем её справедливость для $k + 1$. Имеем

$$P\left(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1}|X_n = i_n, A\right) =$$

$$\sum_{j \in E} P(X_{n+k+1} = i_{n+k+1}|X_{n+1} = j, X_n = i_n, A) P(X_{n+1} = j|X_n = i_n, A) \tag{5}$$

Применим теперь гипотезу индукции с новым «настоящим» $n' = n + 1$ и новым «прошлым» $A' = \{X_n = i_n\} \cap A$, очевидно, $A' \in \mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)$. Получим для $j \in E$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+k+1} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, X_n = i_n, A) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, A'\right) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j\right).$$

Применим доказанное выше с $k = 1$ , $n$ и $A$ ко второму сомножителю в сумме (5), получим

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n, A) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n).$$

Окончательно имеем:

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1} | X_n = i_n, A\right) =$$

$$\sum_{j \in E} \boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j\right) \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n). \tag{6}$$

Согласно предположению индукции (с «настоящим» $n + 1$), в первом сомножителе суммы правой части (6) в условие можно добавить событие $\{X_n = i_n\}$ из $\sigma-$ алгебры «прошлого» $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_n)$, от этого условная вероятность не изменится. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1} | X_n = i_n, A\right) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_n = i_n\right).$$

Лемма доказана.

Чтобы доказать b), достаточно заметить, что

$$P(X_{s_n} = i_{s_n}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}) = P(X_{s_1} = i_{s_1}) \times P(X_{s_2} = i_{s_2} | X_{s_1} = i_{s_1}) \times$$

$$P(X_{s_3} = i_{s_3} | X_{s_2} = i_{s_2}, X_{s_1} = i_{s_1}) \times \dots \times P(X_{s_n} = i_{s_n} | X_{s_{n-1}} = i_{s_{n-1}}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1})$$

и применить лемму к каждому из сомножителей (начиная с третьего).

## 11.2. Марковское свойство.

В этом параграфе мы докажем две теоремы, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем.

**Теорема 11.2.** *Пусть* $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ *и* $B \in \mathcal{F}(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$. *Тогда для любого* $i \in E$ *имеем*

$P(B | X_n = i, A) = P(B | X_n = i)$.

*Это свойство интерпретируют следующим образом:* ***«будущее» не зависит от «прошлого» при фиксированном «настоящем».***

*Доказательство.* Из Леммы 11.1 следует, что утверждение теоремы верно для любого события $B$ вида $\{X_{n+k} = j\}$. Покажем, что теорема верна для событий $B$ вида

$B = \{X_{n+k_1} = j_1\} \cap \{X_{n+k_2} = j_2\} \cap \dots \cap \{X_{n+k_p} = j_p\}$,

где $k_1 < k_2 < \dots < k_p$. Имеем:

$$P\left(X_{n+k_p} = j_p, \dots, X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A\right) =$$

$$P\left(X_{n+k_p} = j_p | X_{n+k_{p-1}} = j_{p-1}, \dots, X_{n+k_1} = j_1, X_n = i, A\right) \times$$

$$\dots \times P(X_{n+k_2} = j_2 | X_{n+k_1} = j_1, X_n = i, A) P(X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A).$$

Применив Лемму 11.1 к каждому сомножителю, получим

$$P\left(X_{n+k_p} = j_p, \dots, X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A\right) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p} = j_p | X_{n+k_{p-1}} = j_{p-1}\right) \times \dots \times \boldsymbol{P}\left(X_{n+k_2} = j_2 | X_{n+k_1} = j_1\right) \times$$
$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i\right). \qquad (7)$$

Последнее равенство показывает (следует применить Теорему 11.1 b), к правой части (7), разделив и помножив предварительно правую часть (7) на $P(X_n = i)$), что теорема 11.2 верна для событий $B$, которые являются конечными пересечениями событий вида $(X_k = i)$, $k \geq n+1$, и, следовательно, теорема верна для всех событий из сигма - алгебры $\mathcal{F}\left(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+p}\right), p \geq 1$. Совокупность событий, для которых теорема верна, является монотонным классом: если $B_1 \subseteq B_2 \subseteq ..$ – возрастающая последовательность событий, для которых теорема верна, то и для $\bigcup_l B_l$ теорема верна. Из теоремы о монотонном классе (минимальный монотонный класс и минимальная сигма-алгебра, содержащие одну и ту же алгебру, совпадают) следует, что все события из сигма-алгебры, порождённой всеми $\mathcal{F}\left(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+p}\right), \forall\, p \geq 1$, удовлетворяют условию теоремы. Но эта сигма-алгебра совпадает с $\mathcal{F}\left(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+p}, \dots\right)$.

**Оператор сдвига.** Обозначим через $\mathcal{F}$ -алгебру $\mathcal{F}(X_k, k = 0, \pm 1, \dots)$.

**Предложение 11.1.** *Для любого $T \in Z$ существует единственное $\mathcal{F}$ - измеримое отображение $\theta_T: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ такое, что для любых $n, s_1 < s_2 < \dots < s_n$ и любых $i_1, i_2, \dots, i_n \in E$*

$$\theta_T^{-1}\left(\left\{X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_n} = i_n\right\}\right) = \left\{X_{s_1+T} = i_1, \dots, X_{s_n+T} = i_n\right\}$$

*Оператор $\theta_T$ называют **оператором сдвига** (этот оператор сдвигает каждую последовательность $\omega = (\dots\omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$ на $T$ единиц **влево**, а обратный оператор $\theta_T^{-1}$ –на $T$ единиц вправо). Это также единственное $\mathcal{F}$ - измеримое отображение $\theta_T: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ для которого*

$$X_n \circ \theta_T \stackrel{\text{def}}{=} X_n\left(\theta_T(\omega)\right) = X_{n+T}(\omega).$$

*для всех $n$.*

Легко видеть, что

$\theta_T = \theta^T \overset{\text{def}}{=} \theta \circ \theta \circ \ldots \circ \theta$

($T$ раз), где $\theta = \theta_1$. Заметим также, что

$$\theta_T^{-1}\mathcal{F}(X_0, \ldots, X_n) = \mathcal{F}(X_T, \ldots, X_{n+T}).$$

Можно применять оператор сдвига и к случайным величинам: если $Y$ – случайная величина, то можно определить случайную величину $Y \circ \theta_T$. Для ***однородных*** цепей справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.3.** *Для любых событий* $B \in \mathcal{F}(X_k : k \geq m)$, $i \in E$

$$\boldsymbol{P}(\theta_1^{-n}B | X_{m+n} = i) = \boldsymbol{P}(B | X_m = i).$$

Здесь $\theta_1^{-n}B \in \mathcal{F}(X_k : k \geq m + n)$. Эта теорема показывает, что если событие $B$ и событие в условии «сдвинуты» в будущее на одно и то же число $n$, то условная вероятность остаётся неизменной.

## 11.3. Независимые сигма-алгебры.

**Определение 11.2.** *Семейство сигма-алгебр* $\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in A$, *называется* ***независимым****, если для любого конечного подсемейства* $\mathcal{F}_{\alpha_k}, k = 1, \ldots, r$ *и всех* $A_{\alpha_k} \in \mathcal{F}_{\alpha_k}$ *имеем:*

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{\alpha_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(A_{\alpha_k}).$$

Посмотрим, как это понятие связано с понятием независимости случайных величин. Если задана последовательность с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, то можно рассмотреть сигма-алгебру $\mathcal{F}(X_i; i \geq 1)$, которая является сигма-алгеброй, порождённой событиями $X_i^{-1}(I)$, где $i \geq 1$ и $I$ пробегает всевозможные интервалы вещественной прямой $R$. Нетрудно видеть, что это наименьшая сигма-алгебра, относительно которой измеримы все $X_i$. Последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независима, если независимы сигма - алгебры, порожденные отдельными $X_i$. Будем говорить, что **с.в. $X$ независима от сигма - алгебры**

$\mathcal{F}$ если сигма-алгебра, порождённая $X$, не зависит от сигма алгебры $\mathcal{F}$ (в смысле определения 11.2).

## Предложение 11.2.

a) *Если с.в.*

$$U_1, \dots, U_n, X$$

*независимы, то $X$ не зависит от $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.*

b) *Если $U_1, U_2, \dots, U_n$ - последовательность с.в. и $X = F(U_1, U_2, \dots, U_n)$, то $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n, X) = \mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.*

*Доказательство. Для доказательства a) достаточно доказать следующую более общую лемму.*

**Лемма 11.2.** *Если $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}$, семейство независимых событий (т.е. индикаторные функции событий $A_\alpha$ для разных $\alpha$ независимы) и если $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ разбиение $\mathcal{E}$, то сигма-алгебры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ независимы, где $\mathcal{F}_i$ сигма-алгебра, порождённая событиями $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_i, i = 1,2$.*

*Доказательство.* Обозначим через $\mathcal{C}$ множество тех $A$, для которых ***для всех*** $B \in \{A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2\}$ имеем

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B). \tag{8}$$

Легко проверить, что $\mathcal{C}$ образует сигма - алгебру (т.е. $\Omega \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$ замкнуто относительно взятия дополнений и счётных объединений непересекающихся множеств). Эта сигма – алгебра, по предположению леммы, содержит $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_1$ и, следовательно, из определения $\mathcal{F}_1$ следует, что равенство (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1$ и всех $B$ вида $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$. Обозначим теперь через $\mathcal{D}$ множество тех $B$, для которых (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1$. Это также сигма-алгебра, содержащая, как мы только что доказали, $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$ и, следовательно, содержащая наименьшую сигма-адгебру, порождённую $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$, то есть$A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$ $\mathcal{F}_2$. Таким образом, (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$.

Доказательство b) очевидно, поскольку любое событие вида $X^{-1}(I)$ принадлежит $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

## 11.4. Матрицы перехода и начальные распределения.

**Определение 11.3.** *$r \times r$ матрица $P = \| P_{ij} \|$ с вещественными коэффициентами называется* ***стохастической****, если для всех $1 \le i, j \le r$ имеем:*

*a)* $0 \le P_{ij} \le 1$

b) *Для всех $i$ сумма элементов $i$- ой строки равна единице:* $\sum_{j=1}^{r} P_{ij} = 1$

Доказательство следующего предложения основано на теореме А.Н. Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями. Мы его приводим без доказательства.

**Предложение 11.3.** *Пусть $P$ стохастическая матрица. Для любого закона распределения $\mu$ на пространстве состояний $E$ существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P_\mu)$ и последовательность с.в. $(X_n)_{n\ge0}$ такая, что $(X_n)$ является цепью Маркова, для которой матрица $P$ является матрицей переходных вероятностей, а $\mu$ - начальным законом распределения.*

## 11.5. Цепь Маркова как стохастическая динамическая система.

Другое определение цепи Маркова с дискретным временем можно дать в терминах ***стохастических динамических систем.*** Пусть $(X_n)_{n\ge0}$ последовательность с.в., определённая соотношением

$X_{n+1} = F(X_n, U_n), n = 0,1,2, \dots$

где $X_0$ задана и

$$X_0, U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$$

является последовательностью независимых случайных величин, $U_i$ принимают значения в множестве $B$ и $F: E \times B \to E$ - измеримое отображение. Следующая лемма является немедленным следствием Предложения 11.2.

**Лемма 11.3.** $U_n$ *независима от сигма-алгебры*

$$\mathcal{F}(X_n, \dots, X_0) \subset \mathcal{F}(X_0, U_0, U_1, \dots, U_{n-1}).$$

Обозначим для всех $i, j \in E$

$$T_{i \to j} \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B, F(i, b) = j\}.$$

Имеем, используя независимость $U_n$ и $X_n$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}\left(U_n \in T_{i \to j}, X_n = i\right)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} = \frac{\boldsymbol{P}\left(U_n \in T_{i \to j}\right)\boldsymbol{P}(X_n = i)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} = \boldsymbol{P}\left(U_n \in T_{i \to j}\right). \tag{9}$$

Вычислим теперь

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}{\boldsymbol{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}. \tag{10}$$

Если обозначим через $A$ событие в знаменателе (10)

$$A = (X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0),$$

то

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, A)}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{P}(U_n \in T_{i \to j}, A)}{\boldsymbol{P}(A)}$$

и, поскольку $U_n$ независима от сигма-алгебры $\mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$, и $A \in \mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$, имеем

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P\big(U_n \in T_{i\to j}\big).$$

Таким образом, мы доказали (см. (9)), что для всех $i, j \in E$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0).$$

что и означает, что $(X_n)$ является цепью Маркова в смысле «старого» определения. Нетрудно доказать и обратное: всякая цепь Маркова с конечным числом состояний представима в виде стохастической динамической системы. Уточним сказанное. Введём вероятности перехода

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

и начальный закон распределения $p^{(0)}$ случайной величины $X_0$. Тогда для заданного семейства переходных вероятностей и начального закона распределения с.в. $X_0$ можно построить пространство $B$, функцию $F$ и с.в. $U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ такие, что $X_0, U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ независимы и для $n = 0,1,2, \dots$ выполнено соотношение

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n).$$

**Пример 1.** Процесс авторегрессии первого порядка

$X_{n+1} = \alpha X_n + U_n.$

Если ошибки $U_n, n = 0,1,2, \dots$ независимы между собой и независимы от начального значения процесса $X_0$, то процесс $X_n$ является цепью Маркова. Здесь $F(x, u) = \alpha x + u$ линейная функция.

**Пример 2.** Пусть $U_n, n = 0,1,2, \dots$последовательность независимых случайных величин, $S_0 = 0, S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}, n \geq 1$. Тогда

$S_{n+1} = S_n + U_n.$

В этом случае $F(x, u) = x + u$. Процесс частичных сумм является цепью Маркова.