Лекция 12. Рекуррентность и транзитивность.

12.1. Времена возвращений и числа возвращений.

Определение 12.1. *Если* $A \subseteq E$, *то назовём:*

(a) ***Временем достижения множества A*** - *случайную величину* $T_A: \Omega \to N \cup \{\infty\}$, *определённую следующим образом:*

$$T_{\boldsymbol{A}} := \min\{\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}: X_n \in A\}$$

(в частности, $T_A = 0$, *если* $X_0 \in A$).

(b) ***Временем возвращения в множество A*** - *случайную величину* $S_A: \Omega \to N \cup \{\infty\}$, *определённую следующим образом:*

$$S_A := \min\{\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}: X_n \in A\}$$

(*слова «время возвращения» связаны с тем, что с.в.* S_A *обычно рассматривают для тех траекторий цепи Маркова, которые начинаются в* A, *т.е. для которых* $X_0 \in A$. *Если* $X_0 \notin A$, *то* $T_{\boldsymbol{A}}$ *совпадает с* S_A *).*

(c) ***Последовательными временами возвращения в множество A*** - *случайные величины* $S_A^{(k+1)}$, *где, по определению,* $S_A^{(0)} = 0$ *и, далее, рекуррентно*

$$S_A^{(k+1)} = \min\left\{n \geq S_A^{(k)} + 1 : X_n \in A\right\}.$$

(очевидно, $S_A^{(1)} = S_A$).

(d) ***Числом посещений (визитов) процессом*** $\boldsymbol{X_n}$ ***множества A*** – *случайную величину*

$$N_A = \sum_{k=0}^{\infty} 1_A(X_k) = \# \{k \geq 0: X_k \in A\}$$

Предложение 12.1. *Случайные величины* $T_{\boldsymbol{A}}, S_A$ *и* $S_A^{(k)}$ *являются* ***моментами остановки (марковскими моментами)***, *то есть для любого* n *события* $\{T_A = n\}$, $\{S_A = n\}$, $\{S_A^{(k)} = n\}$ *измеримы относительно сигма-алгебры* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Доказательство. Доказательство для S_A следует из очевидного представления

$$\{S_A = n\} = \{X_0 \in A, X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \cup$$

$$\{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n.$$

Доказательство для T_A *и* $S_A^{(k)}$ столь же просто, предлагаем это сделать читателю в качестве упражнения. Докажите также, что N_A не является моментом остановки. В случае, когда множество A состоит из одной точки $\{i\}$, мы будем использовать обозначения:

$$S(i) = S_{\{i\}},\ S^{(k)}(i) = S_{\{i\}}^{(k)} \text{ и } N(i) = N_{\{i\}}.$$

Будем обозначать $P_i(A) = P(A|X_0 = i)$.

Определение 12.2. *Назовём состояние* $i \in E$ ***рекуррентным (возвратным, существенным)****, если*

$$a(i) := \boldsymbol{P}_i\{S(i) < \infty\} = 1$$

и ***транзитивным (невозвратным, несущественным)****, если*

$$a(i) := \boldsymbol{P}_i\{S(i) < \infty\} < 1$$

(то есть на множестве положительной условной меры $\boldsymbol{P}_i(\cdot)$ *время возвращения бесконечно,* $\boldsymbol{P}_i(S(i) = \infty) > 0$. *Выйдя из состояния* $\{i\}$*, с положительной вероятностью цепь в него никогда не вернётся).*

Несущественные состояния не играют роли при изучении ***долговременного поведения*** цепи Маркова, а потому их чаще всего игнорируют (отсюда и их название «несущественные»). Заметим, что из Определения 12.2. следует, что всё множество состояний цепи E разбивается на два непересекающихся подмножества, $E = E_R \cup E_T$, где E_R - множество рекуррентных состояний, а E_T – множество транзитивных состояний. Рекуррентные и транзитивные состояния можно охарактеризовать также ***в терминах числа посещений этих состояний.*** Эта характеризация дана в следующей теореме.

Теорема 12.1.

(a) *Если* $i \in E$ *рекуррентно, то*

$$\boldsymbol{P}_i\{N(i) = \infty\} = 1.$$

Если $i \in E$ *транзитивно, то*

$$\boldsymbol{P}_i\{N(i) < \infty\} = 1.$$

То есть с вероятностью 1 мы посещаем это состояние лишь конечное число раз и потом покидаем навсегда это состояние. Отсюда ясно, почему пренебрегают этими состояниями при изучении долговременного поведения цепи.

Последнее утверждение можно уточнить:

(b) *Если $i \in E$ транзитивно, то случайная величина $N(i)$ имеет* ***геометрическое распределение с параметром*** $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{P}_i\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{i}) < \infty\} < \mathbf{1}$. *Это означает, что*

$$\boldsymbol{P}_i(N(i) = k) = \big(1 - a(i)\big)a(i)^{k-1}.$$

Доказательство. Пусть цепь Маркова имеет начальное распределение $\delta_{\{i\}}$, то есть $\boldsymbol{P}\{X_0 = i\} = 1$. Обозначим через $R(n, i)$ событие $\{S^{(n)}(i) < \infty\}$: «n-е возвращение в состояние i происходит в ***конечный*** момент времени» или, что то же самое, «число возвращений в состояние $\{i\}$ не менее n», а через $R(n-1, i, t)$ обозначим событие $\{R(n-1, i) \cap S^{(n-1)}(i) = t\}$: «имеется не менее $(n-1)$-го возвращения в состояние i, и $(n-1)$ - е возвращение происходит в момент t». Это последнее событие принадлежит $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, X_1, X_2, \dots, X_t)$, точнее, $R(n-1, i, t) = \{X_t = i\} \cap A_{t-1}$, где $A_{t-1} \in \mathcal{F}_{t-1}$. Обозначим

$$S_t(i) = \min\{n \geq t + 1 : X_n = i\},$$

т.е. $S_t(i)$ - момент первого после t возвращения в состояние i .
Имеем

$$\boldsymbol{P}(R(n, i)) = \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\big(R(n-1, i), S^{(n-1)}(i) = t, X_t = i, S_t(i) < \infty\big) =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(S_t(i) < \infty | R(n-1, i, t), X_t = i) \cdot \boldsymbol{P}(R(n-1, i, t), X_t = i).$$

Применяя Теоремы 11.2 и 11.3 и учитывая, что $\{S_t(i) < \infty\} \in F(X_{t+1}, X_{t+2}, \dots)$, $R(n-1, i, t) = \{X_t = i\} \cap A_{t-1}$, где $A_{t-1} \in \mathcal{F}_{t-1}$, получим

$$\boldsymbol{P}(R(n,i)\,) = \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(S_t(i) < \infty | X_t = i)\boldsymbol{P}(R(n-1,i,t), X_t = i) =$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{P}(S_0(i) < \infty | X_0 = i)\boldsymbol{P}\big(R(n-1,i,t)\big) =$$

$$\boldsymbol{P}(S_0(i) < \infty | X_0 = i) \sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{P}\big(R(n-1,i,t)\big) =$$

$$\boldsymbol{P}(S_0(i) < \infty | X_0 = i)\boldsymbol{P}\big(R(n-1,i)\big) = a(i)\boldsymbol{P}\big(R(n-1,i)\big),$$

где $a(i) = \boldsymbol{P}_i(S(i) < \infty)$ (заметим, что из определения $S_t(i)$ следует, что $S_0(i) = S(i)$). Из последнего соотношения следует (заметим, что $P\big(R(0,i)\big) = P\big(S^{(0)}(i) = 0 < \infty\big) = 1$)

$$\boldsymbol{P}(R(n,i)\,) = (a(i))^n.$$

Если i ***рекуррентно*** ($\Leftrightarrow a(i) = 1$), то для всех n

$$\boldsymbol{P}\big(R(n,i)\big) = 1^n = 1 \text{ и } \{N(i) = \infty\} = \cap_{n\geq 1} R(n,i). \text{ Поэтому}$$

$$\boldsymbol{P}_i\{N(i) = \infty\} = \boldsymbol{P}_i\{\cap_{i\geq 1} R(n,i)\} = 1.$$

Если i ***транзитивно*** ($\Leftrightarrow a(i) < 1$)) и траектория выходит из состояния $\{i\}$, то число посещений $N(i)$ состояния $\{i\}$ будет не меньше $n+1$ тогда и только тогда, когда наступает событие $R(n,i) = \{S^{(n)}(i) < \infty\}$ (напомним, что мы выходим из состояния i и, по определению, подсчёт числа визитов $N(i)$ начинается с момента 0). Поэтому

$$\boldsymbol{P}_i(N(i) \geq n+1) = \boldsymbol{P}_i\big(R(n,i)\big) = a(i)^n.$$

Следовательно, для всех $n \geq 1$

$$\boldsymbol{P}_i(N(i) = n) = \boldsymbol{P}_i(N(i) \geq n) - \boldsymbol{P}_i(N(i) \geq n+1) =$$

$$a(i)^{n-1} - a(i)^n = a(i)^{n-1}(1 - a(i)).$$

Таким образом, для транзитивного состояния i случайная величина $N(i)$ имеет ***геометрическое распределение*** с параметром $a(i) = \boldsymbol{P}_i(S(i) < \infty)$**.**
Вторая часть утверждения а) следует из того, что

$$\boldsymbol{P}_i\{N(i) < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}_i\{N(i) = n\} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(i)^{n-1}(1 - a(i)) = 1.$$

Предложение 12.2. Обозначим $N_i = N_{\{i\}}$. Тогда $E_i N_i = V_{ii}$, где $V - r \times r$ матрица

$$V = I + P + P^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} P^k.$$

Доказательство. Число посещений N_i состояния i является с.в., представимой в виде $N_i = \sum_{k\geq 0} \mathbf{1}_{\{i\}}(X_k)$, её условное математическое ожидание (при условии $X_0 = i$) равно

$$E_i N_i = E_i \sum_{k\geq 0} \mathbf{1}_{\{i\}}(X_k) = \sum_{k\geq 0} P_i(X_k = i) = \sum_{k\geq 0} (P^k\,)_{ii}.$$

Таким образом, $E_i N_i = V_{ii}$.

Следствие 12.1. Состояние i рекуррентно (возвратно) тогда и только тогда, когда $\sum_{k\geq 0}(P^k\,)_{ii} = \infty$.

Доказательство. По Теореме 12.1 i рекуррентно $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{P_i}(N_{\ i} = \infty) = 1 \implies E_i N_i = \sum_{k\geq 0}(P^k)_{ii} = \infty$. Обратно, заметим, что $E = E_R \cup E_T, E_R \cap E_T = \emptyset$ (здесь $E_R -$ множество рекуррентных состояний, а $E_T -$ множество транзитивных состояний). Если из того, что $E_i N_i = \sum_{k\geq 0}(P^k)_{ii} = \infty \nRightarrow i$ рекуррентно, то i должно быть транзитивным и, снова по Теореме 12.1, N_i имеет геометрическое распределение с параметром $a(i) = \boldsymbol{P}_i(S(i) < \infty) < 1$. Но тогда

$$E_i N_i = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a(i)^{k-1}\big(1 - a(i)\big) = \big(1 - a(i)\big) \sum_{k=0}^{\infty} k\, a(i)^{k-1} =$$

$$\big(1 - a(i)\big)\frac{d}{da}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a(i)^k\right) = \big(1 - a(i)\big)\frac{d}{da}\left(\frac{1}{1 - a(i)}\right) =$$

$$\frac{1}{1 - a(i)} < \infty.$$

Полученное противоречие завершает доказательство следствия.

Обозначим через N_{ij} число посещений состояния j цепи, исходящей из состояния i, $\boldsymbol{i \neq j}$. Справедливо следующее обобщение Предложения 12.2.

Упражнение. Доказать, что

a) $\boldsymbol{E}_i(N_{ij}) = V_{ij}$

b) $V_{ij} = \boldsymbol{P}_i(S(j) < \infty) \cdot V_{jj}$.

Доказательство. Утверждение *a)* доказывается аналогично Предложению 12.2. Для доказательства утверждения *b)* заметим, что, согласно *a)*,

$$V_{ij} = \boldsymbol{E}_i N_{ij} = \boldsymbol{E}_i \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{j\}}(X_n) = \sum_{n\geq 0} \boldsymbol{P}_i(X_n = j) = \sum_{n\geq l}\sum_{l\geq 1} \boldsymbol{P}_i(X_n = j, S(j) = l) =$$

$$\sum_{n\geq l}\sum_{l\geq 1} \boldsymbol{P}_i(X_n = j | S(j) = l)\boldsymbol{P}_i(S_j = l) =$$

$$\sum_{n\geq l}\sum_{l\geq 1} \boldsymbol{P}(X_n = j | X_l = j, X_{l-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i)\boldsymbol{P}_i(S(j) = l) =$$

$$\sum_{n\geq l}\sum_{l\geq 1} \boldsymbol{P}(X_n = j | X_l = j)\boldsymbol{P}_i(S(j) = l) = \sum_{l\geq 1} \boldsymbol{P}_i(S(j) = l) \sum_{n-l\geq 0} (P^{n-l})_{jj} =$$

$$V_{jj} \sum_{l\geq 1} \boldsymbol{P}_i(S(j) = l) = \boldsymbol{P}_i(S(j) < \infty) \cdot V_{jj}.$$

12.2. Неприводимость и апериодичность цепей Маркова.

Определение 12.3. Будем говорить, что ***состояние j* однородной цепи Маркова *следует за состоянием i этой цепи*** (и будем обозначать это $i \to j$), если существует n такое, что $(P^n)_{ij} > 0$, то есть существует такое $n \geq 0$, что $\boldsymbol{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0$. Если $i \to j$ и $j \to i$, то состояния i и j называются ***сообщающимися***: $i \sim j$. *По определению полагают, что* ***каждое состояние сообщается с самим собой*** *(можно положить* $n = 0$ *и* $\boldsymbol{P}(X_0 = i | X_0 = i) = 1 > 0$).

Дальнейшая классификация состояний состоит в следующем. Приведём необходимые определения. Состояние $i \in E$ называется:

- ***Поглощающим,*** если $p_{ii}(1) = 1$,

- ***Периодическим с периодом*** $\boldsymbol{d} > 1$, если НОД $\{t: p_{ii}(t) > 0\} = d$,
- ***Непериодическим (апериодическим),*** если НОД $\{t: p_{ii}(t) > 0\} = 1$,
- ***Несущественным (транзитивным)***, если $\exists j \in E: i \to j, j \nrightarrow i$ (иначе говоря, из этого состояния можно «уйти в некоторое состояние j и не вернуться обратно в i»),
- ***Существенным (рекуррентным)***, если $\forall j \in E: i \to j \Rightarrow\ j \to i$,
- ***Возвратным***, если $\boldsymbol{P}\{\exists t < \infty: X_t = i | X_0 = i\} = 1$,
- ***Возвратным нулевым***, если при этом $p_{ii}(t) \to 0, t \to \infty$,
- ***Возвратным положительным***, если $\overline{\lim}_{t\to\infty} p_{ii}(t) > 0$.

*(в англоязычной литературе употребляют термины **null recurrent и positive recurrent)***

Соотношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве состояний, поэтому можно говорить о ***классах эквивалентных состояний***.

Замечания. Сделаем несколько замечаний по поводу введённых определений. Каждое поглощающее состояние является существенным (рекуррентным) и представляет собой отдельный класс, состоящий из одного элемента. Каждое состояние $i \in E$, для которого $p_{ii}(1) > 0$, является апериодическим (непериодическим). Множество возвратных состояний (нулевых или положительных) совпадает с множеством существенных (рекуррентных) состояний. Множества транзитивных и несущественных состояний также совпадают.

На множестве ***классов сообщающихся состояний*** можно определить отношение ***частичного порядка:*** класс состояний B следует за классом состояний A, $A \to B$, если хотя бы одно состояние $j \in B$ следует за каким-либо состоянием $i \in A$.

Упражнение. Доказать, что $A \to B, B \to A\ \Rightarrow A = B$.

Предложение 12.3. *Если i и j два сообщающихся состояния, то:*

a) *Они оба либо рекуррентны, либо транзитивны.*
b) *Они оба имеют один и тот же период.*

Таким образом, можно говорить о ***классах рекуррентных или транзитивных состояний*** *и о* ***периоде класса.***

Доказательство.

a) В самом деле, $i \in A$ рекуррентно $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(P^k)_{ii} = \infty$. Если j – другое состояние этого же класса, то, по определению класса, $\exists k, l$ такие, что $(P^k)_{ij} > 0, (P^l)_{ji} > 0$. Очевидно, $(P^m)_{ii} > 0$ влечёт $(P^{k+l+m})_{jj} > (P^l)_{ji}(P^m)_{ii}(P^k)_{ij} > 0$. Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(P^m)_{jj} \geq \sum_{m=0}^{\infty}(P^{k+l+m})_{jj} \geq (P^l)_{ji}(P^k)_{ij}\sum_{m=0}^{\infty}(P^m)_{ii} = \infty,$$

т.е. рекуррентность состояния i влечёт рекуррентность любого сообщающегося с ним состояния j. Если же i было транзитивным, то и любое j из этого класса транзитивно, ибо если бы j было рекуррентным, то, по доказанному, любое состояние из этого класса, в том числе и i, было бы рекуррентным, а это не так.

b) Как и в п. а), $\exists M, N$ такие, что $(P^M)_{ij} > 0, (P^N)_{ji} > 0$. Для любого $k \geq 1$

$$(P^{M+nk+N})_{ii} \geq (P^M)_{ij}[(P^k)_{jj}]^n(P^N)_{ji},$$

(поскольку путь

$\{X_0 = i, X_M = j, X_{M+k} = j, X_{M+2k} = j, \ldots, X_{M+nk} = j, X_{M+nk+N} = i\}$

это только ***один из возможных*** путей перехода из i в i за $M + nk + N$ шагов). Мы получаем, что для любого $k \geq 1$ такого, что $(P^k)_{jj} > 0$ переходная вероятность $(P^{M+nk+N})_{ii} > 0$ ***при любом*** $n \geq 1$. Отсюда следует, что период d_i состояния i является делителем $M + nk + N$ **при любом $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$**, где $k \geq 1$ такое, что $(P^k)_{jj} > 0$. Но тогда d_i также является делителем k. В самом деле, d_i делитель $M + nk + N$ и делитель $M + (n+1)k + N = k + (M + nk + N\ )$, то есть d_i - делитель k. Итак, d_i – делитель любого $k,$ для которого $(P^k)_{jj} > 0$. По определению, $d_j -$ ***наибольший*** делитель, обладающим таким свойством, то есть $d_i \leq d_j$. Симметричное рассуждение (замена i на j и

j на i) показывает, что $d_j \leq d_i$. Таким образом, $d_i = d_j$, то есть **период – это *свойство класса.***

Рассмотрим некоторые примеры, связанные со случайными блужданиями.

1. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ - независимые случайные величины,

$$P\{\zeta_k = 1\} = p, P\{\zeta_k = -1\} = q = 1 - p, k = 1,2, \dots$$

и $S_0 = 0, S_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n, n = 1,2, \dots$ Последовательность $\{S_n\}$ - цепь Маркова со счётным множеством состояний $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, все состояния которой сообщаются. Траектория случайного блуждания $\{S_n\}$ возвращается в 0 тогда и только тогда, когда числа шагов в положительном и отрицательном направлениях одинаковы. Поэтому вероятность возвращения в 0 за нечётное число шагов равна 0, а за чётное число шагов равна

$$p_{00}(2n) = C_{2n}^n p^n q^n \sim \frac{(4pq)^n}{(\pi n)^{1/2}} \text{ при } n \to \infty,$$

так как по формуле Стирлинга при $n \to \infty$

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \cdot \left(1 + o(1)\right) \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Если $p \neq q$, то $4pq < 1$, и ряд $\sum_{n \geq 1} p_{00}(n)$ сходится,т.е. при $p \neq q$ состояние 0 невозвратно. Если же $p = q = \frac{1}{2}$, то $4pq = 1$ и $\sum_{n \geq 1} p_{00}(n) = \infty$, т.е. для ***симметричного*** одномерного случайного блуждания состояние 0 возвратно.

2. Рассмотрим случайное блуждание *на плоскости*

$$\left(S_{1,0}, S_{2,0}\right) = (0,0), \left(S_{1,n}, S_{2,n}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\zeta_{2k-1}, \zeta_{2k}), n \geq 1,$$

где $\{\zeta_k\}$ - та же последовательность случайных величин, что и в п.1. Это блуждание является совокупностью $\left(S_{1,n}, S_{2,n}\right)$ двух независимых случайных блужданий на множестве целых чисел из п.1. При $p \neq q$ случайное блуждание $S_{1,n}$ невозвратно, а поэтому невозвратно и двумерное случайное блуждание. Рассмотрим случай $p = q = \frac{1}{2}$. Вероятность возвращения в точку (0,0) за $2n$ шагов равна произведению вероятностей того, что каждое из двух блужданий вернётся в точку (0,0) за $2n$ шагов:

$$p_{(0,0)(0,0)}(2n) = (p_{(0,0)}(2n))^2 = (2^{-2n}C_{2n}^{n})^2 \sim \frac{1}{\pi n} \text{ при } n \to \infty.$$

т.е. для симметричного *двумерного* случайного блуждания состояние (0,0) также возвратно.

3. Однако для для симметричного *трёхмерного* случайного блуждания, образованного совокупностью $(S_{1,n}, S_{2,n}, S_{3,n})$ трёх независимых случайных блужданий из пункта 1, состояние (0,0.0) невозвратно, потому что

$$p_{(0,0,0)(0,0,0)}(2n) = (p_{(0,0)}(2n))^3 = (2^{-2n}C_{2n}^{n})^3 \sim \frac{1}{\pi n^{3/2}} \text{ при } n \to \infty.$$

и ряд $\sum_{n\geq 1} p_{(0,0,0)(0,0,0)}(n)$ сходится.