Лекция 11. Цепи Маркова.

11.1 Цепи Маркова и случайные процессы.

Случайный процесс – это совокупность случайных величин $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega\}, X_t(\omega): \Omega \to E$, где переменная t интерпретируется как «время». Множество E называется ***пространством состояний*** процесса. Время может быть как дискретным, в этом случае $T = N = 0,1,2, \dots$ или $Z = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ так и непрерывным, когда T может быть конечным или бесконечным интервалом вещественной прямой R. В первом случае говорят о *процессе* ***с дискретным временем***, а во втором – ***с непрерывным временем.*** Примером процесса с дискретным временем является ежедневная сводка погоды (в этом случае $t = 1,2, \dots$ и X_t принимает значения в множестве $E = \{\text{солнечно}, \text{пасмурно}\}$). Примеры процессов с непрерывным временем: X_t – это число клиентов, пришедших к окну обслуживания до момента t или X_t - это положение в момент t молекулы в газе и.т.д. Чтобы задать такой процесс, достаточно задать для любого n и любой возрастающей последовательности моментов времени

$$s_1 < \cdots < s_n$$

закон распределения вектора $(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$. Распределение такого вида часто называют ***конечномерным распределением процесса*** X_t. Случайный процесс X_t называется ***строго стационарным (или стационарным в узком смысле)***, если для всех n и $(t, s_1, \dots, s_n)$ закон распределения случайного вектора

$(X_{t+s_1}, \dots, X_{t+s_n})$

не зависит от t (но, конечно, может зависеть от $s_1, \dots, s_n$). Другими словами, процесс стационарный, если все его конечномерные распределения *инвариантны относительно сдвига по времени.* Одна из основных целей этого раздела – показать, что всякий «разумный» процесс Маркова асимптотически стабилизируется, то есть сходится при $t \to \infty$ в некотором смысле (который будет уточнён) к стационарному процессу.

Цепь Маркова - это один из важных примеров стохастических процессов. Мы ограничимся в этом курсе рассмотрением простейшего класса цепей Маркова, а именно: однородных цепей Маркова с дискретным временем и конечным пространством состояний E (то есть все состояния пространства E можно перенумеровать, чем мы и будем пользоваться и отождествлять состояния цепи с присвоенными им номерами). Соответствующий случайный процесс мы будем обозначать X_n.

Определение 11.1. *Цепью Маркова с дискретным временем называется случайный процесс $X_0, \dots, X_n, \dots$, удовлетворяющий условию: для любого n и для любых состояний $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$ условная вероятность*

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

зависит только от i, j и n. Цепь Маркова называют ***однородной,*** *если эта вероятность зависит от i и j, но не зависит от n. Другими словами, для однородной цепи Маркова состояние системы в будущем (в момент $n+1$) при фиксированном настоящем (момент n) не зависит от её состояний в прошлом (в моменты $0 \le k \le n-1$). Обозначим*

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

и назовём эту вероятность ***переходной вероятностью из состояния i в состояние j****. Закон распределения X_0 называется* ***начальным законом распределения*** *цепи (или кратко –* ***начальным распределением*** *цепи).*

Будем обозначать через $\mathcal{F}\{X_i, i \ge 0\}$ или $\sigma\{X_i, i \ge 0\}$ сигма-алгебру, порождённую событиями $(X_i \in I_i), i \ge 0$, $I_i -$ открытый интервал R. В дальнейшем будем предполагать, что X_i ***принимает конечное число r значений.***

Важное свойство цепей Маркова состоит в том, что ***они полностью определяются заданием начального распределения X_0 и переходных вероятностей за один шаг***

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

«Определяются» в том смысле, что знание начального распределения и переходных вероятностей за один шаг позволяет найти закон распределения случайного вектора

$$(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$$

для всех n и для всех возрастающих последовательностей времён $s_1, \dots, s_n$. В самом деле, верна следующая теорема.

Теорема 11.1.

а) Обозначим через $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ *закон распределения* X_n, *пусть* $p^{(n)}$ *– соответствующая вектор-строка,* $p^{(n)} = \left(p_1^{(n)}, \dots, p_r^{(n)}\right)$. *Пусть* P *- матрица переходных вероятностей цепи за один шаг, то есть* $r \times r$ *матрица, элементами которой являются* p_{ij}

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Тогда для всех k

$$p^{(n+k)} = p^{(k)} P^n.$$

Таким образом, закон распределения X_0 *и переходные вероятности определяют закон распределения* X_n *(достаточно положить* $k = 0$*).*

b) Для всех состояний $i_{s_1}, i_{s_2}, \dots, i_{s_n}$ *пространства* $E = \{1,2, \dots, r\}$

$(s_1 < s_2 < \dots < s_n)$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}\right) = \boldsymbol{P}\left(X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_2} = i_{s_2} | X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times$$

$$\dots \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n} | X_{s_{n-1}} = i_{s_{n-1}}\right).$$

Эта «цепная» зависимость оправдывает название – цепь Маркова. Таким образом, закон распределения случайного вектора

$$\left(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}\right)$$

полностью определяется законом распределения X_0 *и переходными вероятностями за один шаг.*

Упражнение. Доказать, что матрица перехода за k шагов однородной цепи Маркова, т.е. матрица, элементами которой являются

$$p_{ij}^{(k)} = \boldsymbol{P}(X_{n+k} = j | X_n = i)$$

равна P^k, где P - матрица перехода за один шаг.

Доказательство. a) Достаточно заметить, что

$$p_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = k) = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = k)\boldsymbol{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{r} p_k^{(n)} P_{kj},$$

что в матричном виде записывается как

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} P.$$

Итерируя последнее равенство, получим a).

b) Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 11.1. *Если* A *– событие, принадлежащее сигма-алгебре «прошлого»* $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, *то*

$$\boldsymbol{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n, A) = \boldsymbol{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n).$$

Доказательство. Мы знаем, что эта формула верна, когда $k = 1$ и A – событие вида

$$C = \{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}$$

(в этом случае это просто определение цепи Маркова). Так как пространство состояний конечно, то любое событие из $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ является конечным объединением непересекающихся событий C_l вида C, рассмотренного выше, то есть $A = \cup_l C_l$. Имеем:

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,A)=\frac{P(X_{n+1}=i_{n+1},X_n=i_n,A)}{P(X_n=i_n,A)}=$$

$$\sum_l \frac{P(X_{n+1}=i_{n+1},X_n=i_n,C_l)}{P(X_n=i_n,A)}=$$

$$\sum_l \frac{P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,C_l)}{P(X_n=i_n,A)}P(X_n=i_n,C_l)$$

$$\sum_l \frac{P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)}{P(X_n=i_n,A)}P(X_n=i_n,C_l)=$$

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)\sum_l \frac{P(X_n=i_n,C_l)}{P(X_n=i_n,A)}=$$

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n).$$

(переход от 3-ей строки к 4-ой снова следует из определения цепи Маркова). Таким образом, мы доказали лемму для $k=1$. Докажем теперь лемму для произвольного k индукцией по k. Предположим, что лемма верна для некоторого k (при этом момент n, связанный с «настоящим», может быть любым, $n=0,1,2,\dots$, а событие A - любое событие из сигма - алгебры «прошлого» $\mathcal{F}(X_0,X_1,\dots,X_{n-1})$) и докажем её справедливость для $k+1$. Имеем

$$P\left(X_{n+(k+1)}=i_{n+k+1}|X_n=i_n,A\right)=$$

$$\sum_{j\in E} P(X_{n+k+1}=i_{n+k+1}|X_{n+1}=j,X_n=i_n,A)P(X_{n+1}=j|X_n=i_n,A)$$

(5)

Применим теперь гипотезу индукции с новым «настоящим» $n' = n + 1$ и новым «прошлым» $A' = \{X_n = i_n\} \cap A$, очевидно, $A' \in \mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)$. Получим для $j \in E$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+k+1} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, X_n = i_n, A) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, A'\right) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j\right).$$

Применим доказанное выше с $k = 1$, n и A ко второму сомножителю в сумме (5), получим

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n, A) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n).$$

Окончательно имеем:

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1} | X_n = i_n, A\right) =$$

$$\sum_{j \in E} \boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j\right) \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n). \tag{6}$$

Согласно предположению индукции (с «настоящим» $n + 1$), в первом сомножителе суммы правой части (6) в условие можно добавить событие $\{X_n = i_n\}$ из $\sigma-$ алгебры «прошлого» $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_n)$, от этого условная вероятность не изменится. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1} | X_n = i_n, A\right) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_n = i_n\right).$$

Лемма доказана.

Чтобы доказать b), достаточно заметить, что

$$\boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}\right) = \boldsymbol{P}\left(X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_2} = i_{s_2} | X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{s_3} = i_{s_3} | X_{s_2} = i_{s_2}, X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times \dots \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n} | X_{s_{n-1}} = i_{s_{n-1}}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}\right)$$

и применить лемму к каждому из сомножителей (начиная с третьего).

11.2. Марковское свойство.

В этом параграфе мы докажем две теоремы, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем.

Теорема 11.2. *Пусть* $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ *и* $B \in \mathcal{F}(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$. *Тогда для любого* $i \in E$ *имеем*
$\boldsymbol{P}(B | X_n = i, A) = \boldsymbol{P}(B | X_n = i)$.
Это свойство интерпретируют следующим образом: ***«будущее» не зависит от «прошлого» при фиксированном «настоящем».***

Доказательство. Из Леммы 11.1 следует, что утверждение теоремы верно для любого события B вида $\{X_{n+k} = j\}$. Покажем, что теорема верна для событий B вида

$$B = \left\{X_{n+k_1} = j_1\right\} \cap \left\{X_{n+k_2} = j_2\right\} \cap \dots \cap \left\{X_{n+k_p} = j_p\right\},$$

где $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$. Имеем:

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p} = j_p, \dots, X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A\right) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p} = j_p | X_{n+k_{p-1}} = j_{p-1}, \dots, X_{n+k_1} = j_1, X_n = i, A\right) \times$$

$$\dots \times \boldsymbol{P}\left(X_{n+k_2} = j_2 | X_{n+k_1} = j_1, X_n = i, A\right) \boldsymbol{P}\left(X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A\right).$$

Применив Лемму 11.1 к каждому сомножителю, получим

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p} = j_p, \dots, X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A\right) =$$

$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p}=j_p|X_{n+k_{p-1}}=j_{p-1}\right)\times\ldots\times\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_2}=j_2|X_{n+k_1}=j_1\right)\times$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_1}=j_1|X_n=i\right). \qquad (7)$$

Последнее равенство показывает (следует применить Теорему 11.1 b), к правой части (7), разделив и помножив предварительно правую часть (7) на $P(X_n=i)$), что теорема 11.2 верна для событий B, которые являются конечными пересечениями событий вида $(X_k=i)$, $k\geq n+1$, и, следовательно, теорема верна для всех событий из сигма - алгебры $\mathcal{F}\left(X_{n+1},X_{n+2},\ldots,X_{n+p}\right), p\geq 1$. Совокупность событий, для которых теорема верна, является монотонным классом: если $B_1\subseteq B_2\subseteq..-$ возрастающая последовательность событий, для которых теорема верна, то и для $\cup_l B_l$ теорема верна. Из теоремы о монотонном классе (минимальный монотонный класс и минимальная сигма-алгебра, содержащие одну и ту же алгебру, совпадают) следует, что все события из сигма-алгебры, порождённой всеми $\mathcal{F}\left(X_{n+1},X_{n+2},\ldots,X_{n+p}\right),\forall\, p\geq 1$, удовлетворяют условию теоремы. Но эта сигма-алгебра совпадает с $\mathcal{F}\left(X_{n+1},X_{n+2},\ldots,X_{n+p},\ldots\right)$.

Оператор сдвига. Обозначим через $\mathcal{F}$ -алгебру $\mathcal{F}(X_k,k=0,\pm1,\ldots)$.

Предложение 11.1. *Для любого $T\in Z$ существует единственное $\mathcal{F}$ - измеримое отображение $\theta_T:(\Omega,\mathcal{F})\to(\Omega,\mathcal{F})$ такое, что для любых $n, s_1<s_2<\cdots<s_n$ и любых $i_1,i_2,\ldots,i_n\in E$*

$$\theta_T^{-1}\left(\{X_{s_1}=i_1,\ldots,X_{s_n}=i_n\}\right)=\{X_{s_1+T}=i_1,\ldots,X_{s_n+T}=i_n\}$$

*Оператор θ_T называют **оператором сдвига** (этот оператор сдвигает каждую последовательность $\omega=(\ldots\omega_{-2},\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots)$ на T единиц **влево**, а обратный оператор θ_T^{-1} —на T единиц вправо). Это также единственное $\mathcal{F}$ - измеримое отображение $\theta_T:(\Omega,\mathcal{F})\to(\Omega,\mathcal{F})$ для которого*

$$X_n\circ\theta_T\overset{\text{def}}{=}X_n\left(\theta_T(\omega)\right)=X_{n+T}(\omega).$$

для всех n.

Легко видеть, что

$\theta_T = \theta^T \stackrel{\text{def}}{=} \theta \circ \theta \circ \ldots \circ \theta$

(T раз), где $\theta = \theta_1$. Заметим также, что

$$\theta_T^{-1}\mathcal{F}(X_0, \ldots, X_n) = \mathcal{F}(X_T, \ldots, X_{n+T}).$$

Можно применять оператор сдвига и к случайным величинам: если Y – случайная величина, то можно определить случайную величину $Y \circ \theta_T$. Для ***однородных*** цепей справедлива следующая теорема.

Теорема 11.3. *Для любых событий $B \in \mathcal{F}(X_k : k \geq m)$, $i \in E$*

$$\boldsymbol{P}(\theta_1^{-n}B | X_{m+n} = i) = \boldsymbol{P}(B | X_m = i).$$

Здесь $\theta_1^{-n}B \in \mathcal{F}(X_k : k \geq m+n)$. Эта теорема показывает, что если событие B и событие в условии «сдвинуты» в будущее на одно и то же число n, то условная вероятность остаётся неизменной.

11.3. Независимые сигма-алгебры.

Определение 11.2. *Семейство сигма-алгебр $\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in A$, называется* ***независимым****, если для любого конечного подсемейства $\mathcal{F}_{\alpha_k}, k = 1, \ldots, r$ и всех $A_{\alpha_k} \in \mathcal{F}_{\alpha_k}$ имеем:*

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{\alpha_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(A_{\alpha_k}).$$

Посмотрим, как это понятие связано с понятием независимости случайных величин. Если задана последовательность с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, то можно рассмотреть сигма-алгебру $\mathcal{F}(X_i; i \geq 1)$, которая является сигма-алгеброй, порождённой событиями $X_i^{-1}(I)$, где $i \geq 1$ и I пробегает всевозможные интервалы вещественной прямой R. Нетрудно видеть, что это наименьшая сигма-алгебра, относительно которой измеримы все X_i. Последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независима, если независимы сигма - алгебры, порожденные отдельными X_i. Будем говорить, что **с.в. *X* независима от сигма - алгебры**

$\mathcal{F}$ если сигма-алгебра, порождённая X, не зависит от сигма алгебры $\mathcal{F}$ (в смысле определения 11.2).

Предложение 11.2.

a) *Если с.в.*

$$U_1, \dots, U_n, X$$

независимы, то X не зависит от $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

b) *Если $U_1, U_2, \dots, U_n$ - последовательность с.в. и $X = F(U_1, U_2, \dots, U_n)$, то $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n, X) = \mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.*

Доказательство. Для доказательства a) достаточно доказать следующую более общую лемму.

Лемма 11.2. *Если $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}$, семейство независимых событий (т.е. индикаторные функции событий A_α для разных α независимы) и если $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ разбиение $\mathcal{E}$, то сигма-алгебры $\mathcal{F}_1$* и *$\mathcal{F}_2$ независимы, где $\mathcal{F}_i$ сигма-алгебра, порождённая событиями $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_i, i = 1,2$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество тех A, для которых ***для всех*** $B \in \{A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2\}$ имеем

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B). \tag{8}$$

Легко проверить, что $\mathcal{C}$ образует сигма - алгебру (т.е. $\Omega \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$ замкнуто относительно взятия дополнений и счётных объединений непересекающихся множеств). Эта сигма – алгебра, по предположению леммы, содержит $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_1$ и, следовательно, из определения $\mathcal{F}_1$ следует, что равенство (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1$ и всех B вида $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$. Обозначим теперь через $\mathcal{D}$ множество тех B, для которых (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1$. Это также сигма-алгебра, содержащая, как мы только что доказали, $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$ и, следовательно, содержащая наименьшую сигма-адгебру, порождённую $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$, то есть$A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$ $\mathcal{F}_2$. Таким образом, (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$.

Доказательство b) очевидно, поскольку любое событие вида $X^{-1}(I)$ принадлежит $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

11.4. Матрицы перехода и начальные распределения.

Определение 11.3. $r \times r$ *матрица* $P = \| P_{ij} \|$ *с вещественными коэффициентами называется* ***стохастической****, если для всех* $1 \le i, j \le r$ *имеем:*

a) $0 \le P_{ij} \le 1$

b) *Для всех* i *сумма элементов* i*- ой строки равна единице:* $\sum_{j=1}^{r} P_{ij} = 1$

Доказательство следующего предложения основано на теореме А.Н. Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями. Мы его приводим без доказательства.

Предложение 11.3. *Пусть* P *стохастическая матрица. Для любого закона распределения* μ *на пространстве состояний* E *существует вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P_\mu)$ *и последовательность с.в.* $(X_n)_{n \ge 0}$ *такая, что* (X_n) *является цепью Маркова, для которой матрица* P *является матрицей переходных вероятностей, а* μ *- начальным законом распределения.*

11.5. Цепь Маркова как стохастическая динамическая система.

Другое определение цепи Маркова с дискретным временем можно дать в терминах ***стохастических динамических систем.*** Пусть $(X_n)_{n \ge 0}$ последовательность с.в., определённая соотношением

$X_{n+1} = F(X_n, U_n), n = 0,1,2, \dots$

где X_0 задана и

$$X_0, U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$$

является последовательностью независимых случайных величин, U_i принимают значения в множестве B и $F: E \times B \to E$ - измеримое отображение. Следующая лемма является немедленным следствием Предложения 11.2.

Лемма 11.3. *U_n независима от сигма-алгебры*

$$\mathcal{F}(X_n, \dots, X_0) \subset \mathcal{F}(X_0, U_0, U_1, \dots, U_{n-1}).$$

Обозначим для всех $i, j \in E$

$$T_{i \to j} \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B, F(i, b) = j\}.$$

Имеем, используя независимость U_n и X_n

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}\left(U_n \in T_{i \to j}, X_n = i\right)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} = \frac{\boldsymbol{P}\left(U_n \in T_{i \to j}\right)\boldsymbol{P}(X_n = i)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} = \boldsymbol{P}\left(U_n \in T_{i \to j}\right). \tag{9}$$

Вычислим теперь

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}{\boldsymbol{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}. \tag{10}$$

Если обозначим через A событие в знаменателе (10)

$$A = (X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0),$$

то

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, A)}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{P}(U_n \in T_{i \to j}, A)}{\boldsymbol{P}(A)}$$

и, поскольку U_n независима от сигма-алгебры $\mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$, и $A \in \mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$, имеем

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \boldsymbol{P}\big(U_n \in T_{i \to j}\big).$$

Таким образом, мы доказали (см. (9)), что для всех $i, j \in E$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0).$$

что и означает, что (X_n) является цепью Маркова в смысле «старого» определения. Нетрудно доказать и обратное: всякая цепь Маркова с конечным числом состояний представима в виде стохастической динамической системы. Уточним сказанное. Введём вероятности перехода

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

и начальный закон распределения $p^{(0)}$ случайной величины X_0. Тогда для заданного семейства переходных вероятностей и начального закона распределения с.в. X_0 можно построить пространство B, функцию F и с.в. $U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ такие, что $X_0, U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ независимы и для $n = 0,1,2, \dots$ выполнено соотношение

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n).$$

Пример 1. Процесс авторегрессии первого порядка

$X_{n+1} = \alpha X_n + U_n.$

Если ошибки $U_n, n = 0,1,2, \dots$ независимы между собой и независимы от начального значения процесса X_0, то процесс X_n является цепью Маркова. Здесь $F(x, u) = \alpha x + u$ линейная функция.

Пример 2. Пусть $U_n, n = 0,1,2, \dots$последовательность независимых случайных величин, $S_0 = 0, S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}, n \geq 1$. Тогда

$S_{n+1} = S_n + U_n.$

В этом случае $F(x, u) = x + u$. Процесс частичных сумм является цепью Маркова.