Лекция 1. Одномерные временные ряды.

Белый шум. Основные ARMA-модели. Операторы лага и полиномы лага.

Белый шум.

Основным элементом при построении моделей временных рядов будет процесс ***белого шума,*** который мы будем обозначать ε_t. В простейшем случае

$$\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, \sigma_\varepsilon^2).$$

Отметим три следствия этого предположения:

1. $E(\varepsilon_t) = E\left(\varepsilon_t \middle| \varepsilon_{t-1,}\varepsilon_{t-2}, \dots\right)$
$$= E(\varepsilon_t | \textit{вся информация к моменту } t-1\ ) = 0.$$
2. $E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}\right) = Cov\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}\right) = 0.$
3. $Var\ (\varepsilon_t) = Var\left(\varepsilon_t \middle| \varepsilon_{t-1,}\varepsilon_{t-2}, \dots\right)$
$$= Var(\varepsilon_t | \textit{вся информация к моменту } t-1\ ) = \sigma_\varepsilon^2.$$

Первое и второе свойства – это ***отсутствие какой-либо сериальной корреляции или предсказуемости.*** Третье свойство – это ***условная гомоскедастичность,*** т.е. постоянство условной дисперсии.

Позже мы будем рассматривать более общие процессы в качестве основного элемента модели. Например, мы можем предполагать выполнение 2) и 3) без предположения нормальности распределения. В этом случае ε_t не обязательно независимы. Мы можем предполагать только первое свойство, в этом случае говорят, что ε_t является последовательностью ***мартингал-***

разностей (т.е. накопленные суммы $S_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$ образуют мартингал и $\varepsilon_t = S_t - S_{t-1}$).

Сам по себе процесс ε_t не столь интересен. Из-за независимости последующие значения ε_{t+j} никак не связаны со значением ε_t. В более реалистичных моделях рассматриваются комбинации значений ε_t.

Основные ARMA-модели.

Мы будем изучать модели, в которых используются различные линейные комбинации процесса белого шума. Например:

$$AR(1): \quad x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$MA(1): \ x_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

$$AR(p): x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$MA(q): \ x_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$ARMA(p,q): x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p}$$

$$+\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Как мы видим, каждая из моделей даёт способ построения последовательности $\{x_t\}$ по заданной последовательности реализаций $\{\varepsilon_t\}$ и начальным значениям процесса x_t.

Операторы лага и полиномы от них.

Оператор лага удобен для описания и представления ARMA моделей. Он сдвигает индекс назад на одну единицу времени: $Lx_t = x_{t-1}$. Иначе говоря, оператор лага из исходного ряда $\{x_t\}$ производит новый ряд, который отличается от исходного тем, что «сдвинут» на единицу времени назад. Из определения легко получаем:

$$L^2 x_t = L(Lx_t) = Lx_{t-1} = x_{t-2}.$$

$$L^j x_t = x_{t-j},\ L^{-j} x_t = x_{t+j}.$$

Можно ввести также ***полиномы от оператора лага,*** например

$$a(L)x_t = (a_0 L^0 + a_1 L^1 + a_2 L^2)x_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2}.$$

Используя эти обозначения, мы можем переписать предыдущие модели в виде:

$$AR(1): \quad (1 - \phi L)x_t = \varepsilon_t$$

$$MA(1):\ x_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$$

$$AR(p): (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)x_t = \varepsilon_t$$

$$MA(q):\ x_t = (1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

$$ARMA(p,q): (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)x_t$$
$$= (1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

или просто

$$AR:\ a(L)x_t = \varepsilon_t$$

$$MA:\ x_t = b(L)\varepsilon_t$$

$$ARMA: a(L)x_t = b(L)\varepsilon_t$$

Использование операторов лага в ARMA-моделях.

ARMA модели не определяются рядом однозначно. Временной ряд с заданным совместным распределением вектора $\{x_0, \dots, x_T\}$ может, как правило, быть представлен множеством ARMA моделей. Часто бывает удобно работать с разными представлениями. Например, самое короткое полиномиальное представление является самым удобным для работы во многих случаях. Представление AR – самое удобное для задач оценивания, так как МНК - гипотезы часто всё ещё применимы. Представление MA выражает x_t в виде линейных комбинаций независимых случайных величин в правой части уравнения. Для многих целей, таких, как нахождение дисперсий и ковариаций, это самое удобное представление.

От AR(1) к MA (∞) с помощью рекурсии.

Начнём с модели AR(1)

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Последовательно подставляя, получим

$$x_t = \phi(\phi x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \phi^2 x_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t =$$
$$\dots = \phi^k x_{t-k} + \phi^{k-1}\varepsilon_{t-k+1} + \dots + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Таким образом, AR(1) всегда можно представить как ARMA (k,k-1).

В случае, когда $|\phi| < 1$ имеем $\lim_{k\to\infty}\phi^k x_{t-k} = 0$ и

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

То есть, AR(1) модель может быть представлена как MA(∞) модель. Сходимость ряда понимается в среднеквадратическом.

От AR(1) к MA (∞) с помощью операторов лага.

То, что мы проделали в предыдущем параграфе, гораздо легче проделать ***с использованием операторов лага***. Чтобы обратить модель AR(1), запишем её как

$$(1 - \phi L)x_t = \varepsilon_t.$$

Естественный способ «обратить» AR(1) – это записать модель в виде

$$x_t = (1 - \phi L)^{-1} \varepsilon_t.$$

Какой смысл придать выражению $(1 - \phi L)^{-1}$? Вспомним, что

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots \quad \text{для } |z| < 1$$

Из этого разложения (полагая $\phi L = z$) получим

$$x_t = (1 - \phi L)^{-1} \varepsilon_t = (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \cdots) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j},$$

То есть получаем прежний ответ. Позже мы дадим некоторое обоснование тому, почему такие формальные методы обращения «работают». Заметим, что не все ARMA процессы обратимы.

От AR(p) к MA(∞), от MA(q) к AR(∞), разложение полиномов лага на множители, разложение на простые дроби.

Для модели AR(1) переход к MA(∞) осуществляется одинаково просто как методом рекурсий, так и методом обращения. Уже для модели AR(2) это не так: метод обращения позволяет значительно упростить вычисления. Рассмотрим AR(2) модель

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

или, записывая через полиномы лага,

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) x_t = \varepsilon_t.$$

Применим ***метод разложения на множители***. Ищем $\lambda_1 \, и \, \lambda_2$ такие, что

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)=(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L).$$

Это приводит к системе уравнений для λ_1и λ_2

$$\lambda_1\lambda_2=-\phi_2$$

$$\lambda_1+\lambda_2=\phi_1$$

(Заметим, что λ_1 и λ_2 могут быть комплексными числами). Обратим исходный ряд

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)x_t=(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)x_t=\varepsilon_t,$$

$$x_t=(1-\lambda_1 L)^{-1}(1-\lambda_2 L)^{-1}\varepsilon_t=$$

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_1^j L^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_2^j L^j\right)\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}\lambda_1^k\lambda_2^{j-k}\right)L^j\,\varepsilon_t.$$

Есть другой метод получения MA(∞) модели из AR(2). Он связан с ***разложением на простые дроби***. Будем искать a и b из условия

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}=\frac{a}{(1-\lambda_1 L)}+\frac{b}{(1-\lambda_2 L)}=$$

$$\frac{a(1-\lambda_2 L)+b(1-\lambda_1 L)}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}.$$

Числитель правой части последнего равенства должен быть равен 1, поэтому

$$a+b=1$$
$$a\lambda_2+b\lambda_1=0.$$

Откуда

$$a=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2},b=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1},$$

поэтому

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{1}{(1-\lambda_1 L)}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\frac{1}{(1-\lambda_2 L)}.$$

Таким образом, для x_t получаем следующее выражение

$$x_t = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_1^j\varepsilon_{t-j} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_2^j\varepsilon_{t-j} =$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^j + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_2^j\right)\varepsilon_{t-j}$$

Эта формула напоминает решение разностного или дифференциального уравнения второго порядка, которое представляется в виде суммы двух экспонент или (если λ комплексное) суммы двух затухающих синусоидальных и косинусоидальных волн. В случае AR(p)-модели можно действовать аналогичным образом. Имеются программы, которые находят корни полиномов произвольного порядка. Затем можно перемножить полиномы вида $(1 - \lambda_i L)$ или искать разложение на простые дроби. Можно также использовать сведение одномерной модели AR(p) к векторной модели AR(1), что позволяет упростить вычисления. Отметим снова, что не каждую модель AP(2) можно обратить. Нужно требовать, чтобы $|\lambda| < 1$, и, используя выражение λ через ϕ, можно найти допустимую область значений $\phi_1 \, и \, \phi_2$. Если не оговорено противное, мы будем рассматривать только обратимые ARMA модели. После наших рассмотрений переход от MA к AR(∞) очевиден. Запишем MA в виде

$$x_t = b(L)\varepsilon_t.$$

Тогда AR(∞) представление имеет вид

$$b(L)^{-1}x_t = \varepsilon_t.$$

Сводка допустимых операций с полиномиальными лагами.

Коротко говоря, с полиномиальными лагами можно обращаться во многом как с обычными полиномами, если заменить L на $z,$ где z комплексное число. Перечислим допустимые операции:

1. Полиномиальные лаги ***можно перемножать***

$$a(L)b(L) = (a_0 + a_1 L + \cdots)(b_0 + b_1 L + \cdots) =$$
$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)L + \cdots$$

2. Полиномиальные лаги ***коммутируют***

$$a(L)b(L) = b(L)a(L)$$

3. Полиномиальные лаги можно ***возводить в натуральные степени***

$$a(L)^2 = a(L)a(L)$$

4. Их можно ***обращать, разлагая на множители*** и обращая каждый сомножитель отдельно

$$a(L) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots$$

$$a^{-1}(L) = (1 - \lambda_1 L)^{-1}(1 - \lambda_2 L)^{-1} \dots =$$
$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^j L^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_2^j L^j\right) \dots = \frac{c_1}{(1 - \lambda_1 L)} + \frac{c_2}{(1 - \lambda_2 L)} + \cdots$$

Один полезный приём.

Помимо разложения на множители и на простые дроби существует много полезных приёмов при работе с полиномиальными лагами. Рассмотрим один из них. Можно обратить полиномы конечного порядка, просто приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях L. Пусть имеется модель $a(L)x_t = b(L)\varepsilon_t$, и мы хотим найти MA представление вида $x_t = d(L)\varepsilon_t$. Прямое вычисление по формуле $x_t = a(L)^{-1}b(L)\varepsilon_t$ часто бывает затруднительным. Вместо этого будем искать $d(L)$ из соотношения

$$a(L)x_t = a(L)d(L)\varepsilon_t = b(L)\varepsilon_t$$

То есть $a(L)d(L) = b(L)$ и достаточно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях L. Например, пусть $a(L) = a_0 + a_1L, b(L) = b_0 + b_1L + b_2L^2$. Имеем

$$b_0 + b_1L + b_2L^2 = (a_0 + a_1L)(d_0 + d_1L + d_2L^2 + \cdots)$$

Приравнивая, получим систему уравнений

$$b_0 = a_0d_0$$

$$b_1 = a_1d_0 + a_0d_1$$

$$b_2 = a_1d_1 + a_0d_2$$

$$0 = a_1d_{j-1} + a_0d_j, \qquad j \geq 3.$$

Система легко решается относительно d_j.