21.09

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$X = (X_t)_{t\geq 0}$, $\Omega: w = (w(t))_{t\geq 0}$, $X_t(w) = w(t)$

X_t – случ. велич.

$X_t : \Omega \to \mathbb{R}$

$w \to X_t(w)$

$t \to X_t(w)$ – траектория, отвеч. w

$\sup\limits_{s\leq t} |f(s)| < \infty$, $\{s \leq t : |f(s) - f(s-0)| > \varepsilon\}$ конечно $\forall t$ и $\forall \varepsilon > 0$

càdlàg $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\forall t \geq 0$ $f(t) = \lim\limits_{\substack{s\to t \\ s > t}} f(s)$

$\forall t > 0$ $\underset{\in \mathbb{R}}{f(t-0)} = \lim\limits_{\substack{s\to t \\ s < t}} f(s)$

$X(t-0) = X_{t-}$, $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$

$X = (X^1, \dots, X^d)$

$X^1 = (X_t^1)$, ..., $X^d = (X_t^d)$

Поток σ-алгебр: $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $s \leq t$

$\to$ рассматриваем $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ $\quad (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ д.б. непрерывна справа: $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$

Пример фильтрации:

$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$

согласованный процесс – adapted

Марковский момент (момент остановки) – СВ $T : \Omega \to [0, +\infty]$, для которой $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

$\mathcal{F}_T = \{B \in \mathcal{F}_\infty : B \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup\limits_t \mathcal{F}_t)$ – минимальная σ-алгебра, к-е содержит все $\mathcal{F}_t$

Если $T \equiv t$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Процессы Леви

(I) Случ. процесс $X = (X_t)$ со значениями в $\mathbb{R}^d$:

1) $X_0 = 0$,
2) X – càdlàg
3) Независимость приращений: $\forall n$ $\forall$ $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$

$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы в совокупности

4) Однородность приращений:

расп. $X_t - X_s$, $s < t$, зависит от $t - s$

$Law(X_t - X_s) = Law(X_{t+h} - X_{s+h})$, $\forall s < t$, $\forall h > 0$

СП X и Y наз-ся модификациями друг друга, если $\mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = 0$ $\forall t$

СП X и Y наз-ся неразличимыми, если $\mathbb{P}(\exists t : X_t(w) \neq Y_t(w)) = 0$

пример: $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P} = Leb$, $X_t(w) = 0$, $Y_t(w) = \mathbb{1}\{t = w\}$ $\}$ – модификации, т.к. мера Лебега точки $= 0$

+ (2) ?
$\Rightarrow$ для $\forall$ проц. если неразлич. ? проц. $\exists$

Если X и Y непрер. справа, $\mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = 0$ $\forall t$

$\mathbb{P}(\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} \{X_r \neq Y_r\}) = 0$, $\mathbb{Q}$ – мн-во рац. точек

если они совпад. в рацион. точках, то они совпад. и в иррац-х, т.к. непрер. справа

Если $w \notin \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} (X_r \neq Y_r) \Rightarrow X_r(w) = Y_r(w)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $X_t(w) = Y_t(w)$ $\forall t \geq 0$

(II) $X=(X_t)$ со знач. в $\mathbb{R}^d$:

0) X согласован с $(\mathcal{F}_t)$
1) $X_0=0$
2) X càdlàg
3) $\forall\, s<t$ X_t-X_s и $\mathcal{F}_s$ независимы
4) однородность приращений

пример фильтрац., относ. кот-й процесс не будет проц. Леви

W_t $\quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \sigma(W_1) = \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \sigma(W_1))$

$\mathcal{F}_0 = \sigma(W_1) \quad W_1 - W_0 \not\perp \mathcal{F}_0$

т.е. если мы берем естественную фильтрацию и увеличиваем ее независимыми событиями, то процесс будет процессом Леви

(II) ⇒ (I)

Опр. Согласованный сп $B=(B_t)_{t\ge 0}$ со знач. в $\mathbb{R}^d$ называется проц. Броуновского движения, если:

1) $B_0=0$
2) B – непрерывный
3) B_t-B_s и $\mathcal{F}_s$ независимы для $s<t$
4) $B_t-B_s \sim N(0,(t-s)C)$, $s<t$

Св-ва Б.Д.:

1) $\sum\limits_{i=0}^{n}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2 \xrightarrow{L_2} t$

на интервале $t_0=0$ — $t=t_n$

док-во:

$Y_i=(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2-(t_{i+1}-t_i)$

Y_i – независимы, $\mathbb{E}Y_i=0$, $\mathbb{E}[Y_i\cdot Y_j]=0$ $i\ne j$

$\mathbb{E}[\sum Y_i]^2 \to 0$ нужно док-ть

$\Leftarrow \sum \mathbb{E}Y_i^2 \to 0$

$\dfrac{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2}{t_{i+1}-t_i} \overset{d}{=} Z^2$, $Z\sim N(0,1)$

$Y_i \overset{d}{=} (t_{i+1}-t_i)(Z^2-1)$

$\mathbb{E}Y_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(t_{i+1}-t_i)^2\cdot \underbrace{\mathbb{E}(Z^2-1)^2}_{=2}$

$\sum\limits_{i=1}^{n}(t_{i+1}-t_i)^2 \le \max|t_{i+1}-t_i|\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}|t_{i+1}-t_i| = \max|t_{i+1}-t_i|\cdot t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

■.

$B_t^2=\sum(B_{t_{i+1}}^2-B_{t_i}^2)=\sum(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2+2\sum B_{t_i}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})$

переходя к пределу по разбиению, получаем: $B_t^2 = t + 2\int_0^t B_s\,dB_s$ ← интеграл Ito

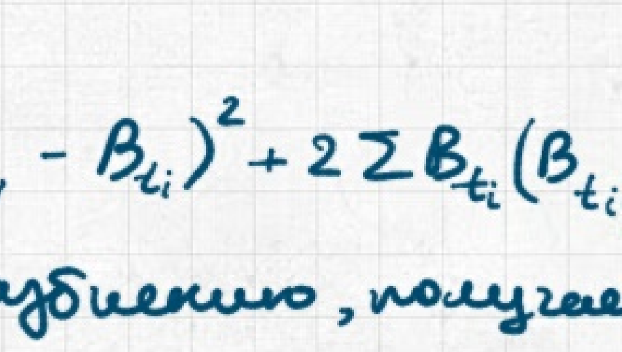
$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\,dB_s$ ← интеграл Стратановича

Считающий процесс

$0<T_0<T_1<\ldots<T_n<\ldots$

Опр. Процесс N наз-ся считающим, если он представим в виде $N_t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\{t\ge T_n\}$.

Если $t<T_1 \to N_t=0$
$T_1\le t<T_2 \to N_t=1$
$\vdots$



$T=\sup\limits_n T_n$

$\{t\ge T\}=\{N_t=\infty\}$

когда N конечно
$N_t-N_s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\{s<T_n\le t\}$

Лемма. N – согласован $\Leftrightarrow$ T_n – момент остановки.

док-во: ($\Leftarrow$) $\{N_t=n\}=\{T_n\le t<T_{n+1}\}$

$\{T_n\le t\}\in\mathcal{F}_t$, $\{T_{n+1}>t\}=\Omega\setminus\{T_{n+1}\le t\}\in\mathcal{F}_t$

$\Rightarrow$

$\{T_n \le t\} = \{N_t \ge n\} \in \mathcal{F}_t$

Опр. Считающий процесс Леви наз-ся Пуассоновским процессом.

Теорема

Пусть N – Пуас. процесс. Тогда $\exists \lambda > 0$: $\mathbb{P}(N_t = n) = \dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$.

док-во:

1) $a(t) = \mathbb{P}(N_t = 0)$ { $a(t)$ – непрер. справа

$s < t$ $\{N_t = 0\} = \{N_s = 0\} \cap \{N_t - N_s = 0\}$

$a(t) = a(s)\,a(t-s)$

$\{N_t = 0\} = \bigcup_n \{N_{t_n} = 0\}$, $t_n \downarrow t$ (непрер. в)

$a(0) = 1$

$a(t) = e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$

2) $\beta(t) = \mathbb{P}(N_t \ge 2)$, разделим отрезок $[0,1]$ на n равных интервалов

$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{if } N_{i/n} - N_{\frac{i-1}{n}} \ge 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, ξ_i независимы и одинаково распределены

$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \beta\left(\frac{1}{n}\right)$, $\xi_i \sim Bern\left(\beta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $S_n \sim Bin\left(\beta\left(\frac{1}{n}\right), n\right)$

Семинар (28.08)

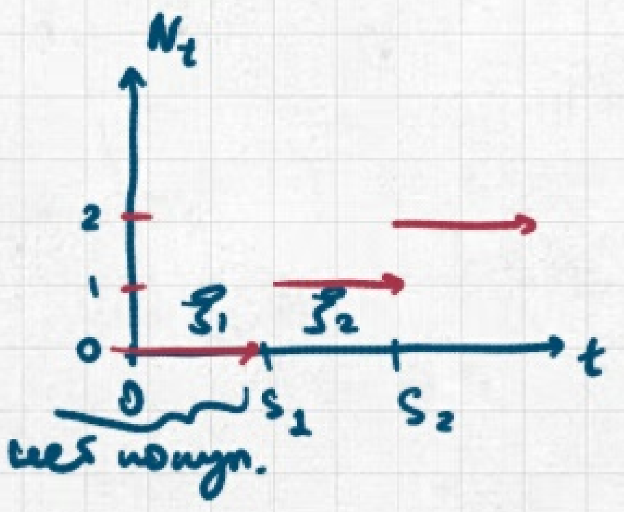
Процесс Пуассона

Опр. 1 N_t – пр. Пуассона, если

0) $N_0 = 0$
1) N_t незав. прираш.
$\forall\, t_1 < t_2 < \ldots < t_n$
$N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ незав.
2) N_t – стац. приращен.
$N_t - N_s \overset{d}{=} N_{t-s}$
3) $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))$

Опр. 2 (процесс восстановление – renewal proc.)

$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + \xi_n \\ S_0 = 0 \end{cases}, \quad \xi_1, \ldots, \xi_n \text{ – iid} > 0 \text{ a.s.} \quad (\Leftrightarrow F(0)=0)$$



считающий процесс: $N_t = \underset{k}{\operatorname{argmax}} \{S_k \le t\}$

$\{S_n > t\} = \{N_t < n\}$

n-й покупатель пришел после момента врем. t — к моменту t было менее n покупателей

Пр. Пуассона – считающий процесс, построенный по проц. восстановление с $\xi_1 \sim exp(\lambda)$.

распред-е S_n:

$$p_{S_n}(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$F_{S_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

распр-е $N_t \sim Pois(\lambda t)$

Опр. 3 (теор. массового обслуж.)

опр. 1 $\Rightarrow$ 0) и 1)

2) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t \ge 2\}}{\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t = 1\}} = 0 \quad \forall t$ – ординарность

3) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t = 0\}}{h} = \lambda$ ($\approx$ стационарность – т.к. не зависит от t)

Задачи

1. Два друга перепис-ся в чате, каждый пишет в соответствии с пр. Пуассона независимо друг от друга.
I – в среднем пишет 2 сообщ/минут
II – в среднем пишет 3 сообщ/мин.
Найти вер-ть того, что за 1 минуту будет написано ровно 2 сообщение

Решение:

1е реш.

$I \sim N_t$, $II \sim \tilde{N}_t \;\rightarrow\; \mathbb{E}N_1 = 2 \cdot 1 = 2$, $\mathbb{E}\tilde{N}_1 = 3$

$$\mathbb{P}(N_1 + \tilde{N}_1 = 2) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(N_1 = k, \tilde{N}_1 = 2-k) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(N_1 = k) \cdot \mathbb{P}(\tilde{N}_1 = 2-k) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} \times$$

$$\times \frac{e^{-3}\, 3^{2-k}}{(2-k)!} = \frac{e^{-2} \cdot e^{-3} \cdot 3^2}{2} + e^{-2}\, 2 \cdot e^{-3}\, 3 + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2} \cdot e^{-3} = e^{-5}\left(\frac{9}{2} + 6 + 2\right) = 12{,}5 \cdot e^{-5} =$$

$= 0{,}0842$

2е решение:

используем факт, что сумма независ. проц. Пуассона — пр. Пуассона

$$\mathbb{E}\, z^{N_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2}\cdot 2^n}{n!}\cdot z^n = e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\cdot z)^n}{n!} = e^{-2}\cdot e^{2z} = e^{2(z-1)}$$

$$\mathbb{E}\, z^{N_2} = e^{3(z-1)}$$

$$\mathbb{E}\, z^{N_1+N_2} = \mathbb{E} z^{N_1}\cdot \mathbb{E} z^{N_2} = e^{2(z-1)}\cdot e^{3(z-1)} = e^{5(z-1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad N_1+N_2 \sim Pois(5)$$

$$\mathbb{P}(N_1+N_2=2) = \frac{e^{-5}\cdot 5^2}{2!} = 12{,}5\cdot e^{-5}$$

(2) Приход клиентов в парикмах. модел-ся при помощи пр. Пуассона. В среднем за 10 минут приходит один клиент. Найти вер-ть того, что 2му клиенту придется подождать, т.к. мастер занят 1м клиентом, если:

$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ i) время стрижки 1 клиента имеет экспоненц. распр-е, среднее время стрижки — 20 мин η, $\mathbb{E}\eta = \mu$

$\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2$ ii) время обслуживания клиента (ожидание + стрижка) имеет экспоненциальное распред-е, среднее время обслуживания — 25 мин. ζ, $\mathbb{E}\zeta = \mu$

(3) Счетчик регистрирует автомобили, проезжающие по нек-й трассе. Проезд автомоб. задается проц. Пуассона N_t с интенсивностью λ. Счетчик регистрирует автом. с вер-ю p. Док-ть, что кол-во автом., зарегистрир. счетчиком M_t за время t — проц. Пуассона с интенсивн. λp.

Решение: проверить что для M_t: $M_0 = 0$
M_t — незав. прир.
$M_t - M_s \sim Pois(\lambda(t-s))$

$$\mathbb{P}(M_t-M_s=k) = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(M_t-M_s=k \mid N_t-N_s=n)\,\mathbb{P}(N_t-N_s=n) = \sum_{n=k} \overbrace{C_n^k}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}} p^k (1-p)^{n-k} \times \frac{e^{\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^n}{n!} = \left[\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}(\lambda(t-s))^{n-k}\right](\lambda(t-s))^k p^k \frac{1}{k!}\, e^{\lambda(t-s)} =$$

$$= e$$

(4) Автобусы подъезжают к остановке в соотв. с пр. Пуассона, λ. Пассажиры подходят к остановке в соответствии с др. пр. Пуассона, μ.

Найти вер-ть след. событий:

(i) в автобус номер m село ровно n пассажиров

(ii) в автобус село ровно n пассажиров при условии, что с момента приезда предыдущего автобуса прошло ровно x минут

(iii) " при условии, что предыдущий автобус приехал в 20:00 и как же люди до 20:30 не было ни одного автобуса

Решение:

$$t=0 \quad 111000\,\overbrace{1111111}^{\text{ровно } n \text{ пассажиров}}\,0$$

$p \to 1$ - пришел пассажир
$(1-p) \to 0$ - автобус

$$\mathbb{P}(\text{ровно } n \text{ пассажиров}) = p^n(1-p) = \frac{\mu^n\cdot\lambda}{(\lambda+\mu)^{n+1}}$$

$$P_t = M_t + N_t$$

$$\mathbb{P}(P_t=1) = \mathbb{P}(M_t=0)\cdot\mathbb{P}(N_t=1) + \mathbb{P}(M_t=1)\cdot\mathbb{P}(N_t=0)$$

$$1 = \underbrace{\frac{\mathbb{P}(M_t=0)\cdot\mathbb{P}(N_t=1)}{\mathbb{P}(P_t=1)}} + \underbrace{\frac{\mathbb{P}(M_t=1)\cdot\mathbb{P}(N_t=0)}{\mathbb{P}(P_t=1)}}_{p}$$

← произошло 1 событ. и это пассажир

$$p = \frac{e^{-\mu t}\mu t\cdot e^{-\lambda t}}{e^{-(\lambda+\mu)t}\cdot(\lambda+\mu)t} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

(ii) $\mathbb{P}(M_t - M_s = n \mid t-s=x) = \mathbb{P}(M_{t-s}=n \mid t-s=x) = \mathbb{P}(M_x=n) = e^{-\mu x}(\mu x)^n \cdot \frac{1}{n!}$

(iii) $\tilde{M}$ – сколько пришло с 20:00 до 20:30

$\tilde{\tilde{M}}$ – сколько пришло после 20:30 и до приезда автобуса

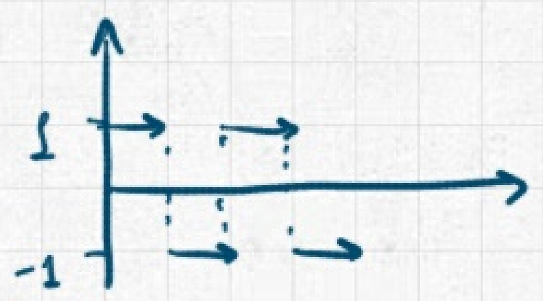
$\mathbb{P}\{\tilde{M}=\tilde{m}\} = \frac{(\mu\cdot 30)^{\tilde{m}}}{\tilde{m}!}\cdot e^{-30\mu}, \quad \tilde{m}$

$\mathbb{P}(\tilde{\tilde{M}}=\tilde{\tilde{m}}) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{\tilde{\tilde{m}}}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad \tilde{\tilde{m}} = n-\tilde{m}$

$$\mathbb{P}(\text{село ровно } n) = \sum_{\tilde{m}+\tilde{\tilde{m}}=n}\mathbb{P}(\tilde{M}=\tilde{m})\cdot\mathbb{P}(\tilde{\tilde{M}}=\tilde{\tilde{m}}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\mu\cdot 30)^{n-k}e^{-30\mu}}{(n-k)!}\cdot\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

5 Телеграфный процесс

$X_t = \xi\cdot(-1)^{N_t}, \quad \xi = \begin{cases}1, & 1/2\\ -1, & 1/2\end{cases}$



переключение в соотв. с Пуас. процессом

$N_t \sim Pois(\lambda), \quad N_t \perp \xi$

$K(s,t) = cov(X_t, X_s)$

Решение: $t>s$

$K(s,t) = cov(\xi\cdot(-1)^{N_s}, \xi(-1)^{N_t}) = \mathbb{E}\left(\xi\cdot(-1)^{N_s}\cdot\xi\cdot(-1)^{N_t}\right) = \mathbb{E}[\xi^2(-1)^{N_s+N_t}] =$

$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}[\xi\cdot(-1)^{N_s}] = \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}(-1)^{N_s} = 0 \Big\} = \mathbb{E}\xi^2\cdot\mathbb{E}(-1)^{N_s+N_t} = \mathbb{E}[(-1)^{N_s+N_t}] =$

$= \mathbb{E}[(-1)^{N_t-N_s+2(N_s-N_0)}] = \mathbb{E}(-1)^{N_t-N_s}\cdot\mathbb{E}(-1)^{2N_s} = \mathbb{E}(-1)^{N_{t-s}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda(t-s)}\cdot(\lambda(t-s))^k}{k!}(-1)^k$

$= e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda(t-s)} = e^{-2\lambda|t-s|}$

6 Пациенты приходят на прием к доктору в соответствии с законом Пуассона с $\lambda=6$ (за t часов N_t пациентов). Доктор начинает прием, если в очереди 3 человека.

(i) Найти МО времени начала приема

(ii) Найти вероятность того, что доктор не примет ни одного пациента в течение первого часа

Решение:

(i) $\mathbb{E}[\xi_1+\xi_2+\xi_3] = 3/\lambda = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) $\mathbb{P}(N_1\le 2) = \mathbb{P}(N_1=0)+\mathbb{P}(N_1=1)+\mathbb{P}(N_1=2) = e^{-6}+e^{-6}6+e^{-6}6^2\cdot\frac{1}{2} =$
$= 25e^{-6}$

Семинар 2

Составной пр. Пуассона

$X_t = \sum_{k=1}^{N_t}\xi_k$

$\begin{cases} N_t \text{ – Poisson proc. with intens. } \lambda \\ \xi_1,\xi_2,\dots \text{ – iid} \\ \xi_1,\xi_2,\dots,N_t \text{ – независимы}\end{cases}$

пример:

N_t - наступл. страх. случая

$\xi_1,\xi_2,\dots$ - размер выплат по стр. случ. N° 1, 2, …

$\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k$ - сумма выплат к моменту t

1 $\mathbb{E}e^{iu(X_t-X_s)} = e^{\lambda(t-s)(\varphi_{\xi_1}(u)-1)}, \quad t>s$

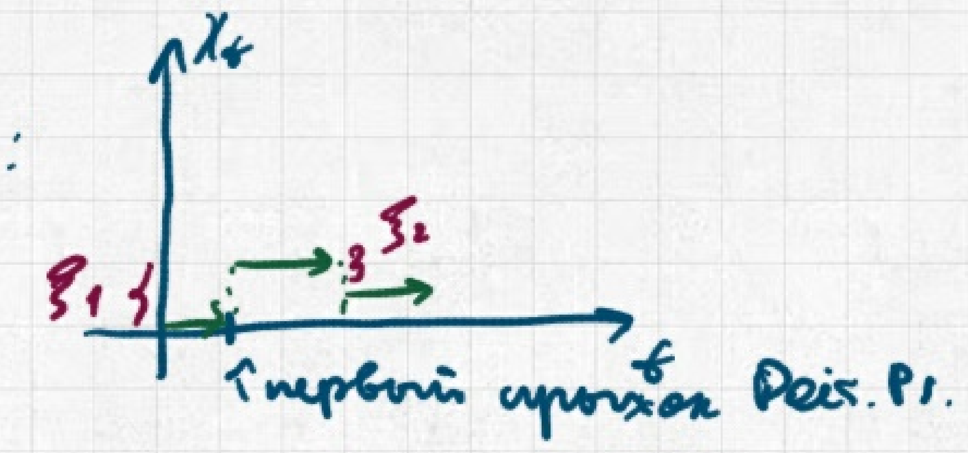
2 $\mathbb{E}X_t = \lambda t\,\mathbb{E}\xi_1, \quad Var X_t = \lambda t\,\mathbb{E}\xi_1^2$

$$\mathbb{E} e^{iu(X_t - X_s)} = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{iu(X_t - X_s)} \mid N_t - N_s = k\right]\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{iu(\xi_1 + \ldots + \xi_k)} \mid N_t - N_s = k\right] \cdot \mathbb{P}(N_t - N_s = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} e^{iu(\xi_1 + \ldots + \xi_k)} \frac{e^{-\lambda(t-s)} (\lambda(t-s))^k}{k!} = \sum_{k \ge 0} \varphi_{\xi_1}(u)^k \frac{e^{-\lambda(t-s)} (\lambda(t-s))^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda(t-s)} e^{\lambda(t-s)\varphi_{\xi_1}(u)} = e^{\lambda(t-s)(\varphi_{\xi_1}(u) - 1)},$$

траектории процесса X_t:



$\varphi(u) = \mathbb{E} e^{i\xi u}$

$\varphi'(u) = \mathbb{E}[e^{i\xi u} i\xi]|_{u=0} = i\mathbb{E}\xi$

$\varphi''(u) = \mathbb{E}[(i\xi)^2 e^{i\xi u}]|_{u=0} = -\mathbb{E}\xi^2$

$\cancel{i}\mathbb{E}X_t = \left(e^{\lambda t(\varphi_{\xi_1}(u) - 1)}\right)'_u\Big|_{u=0} = e^{\lambda t(\varphi_{\xi_1}(u) - 1)} \cdot \lambda t \, \varphi'_{\xi_1}(u)\Big|_{u=0} = e^{\lambda t(1-1)} \lambda t i \mathbb{E}\xi_1 = \cancel{i}\lambda t \mathbb{E}\xi_1$

$-\mathbb{E}X_t^2 = e^{\lambda t(\varphi_{\xi_1}(u) - 1)} (\lambda t)^2 (\varphi'_{\xi_1}(u))^2 + e^{\lambda t(\varphi_{\xi_1}(u) - 1)} \lambda t \, \varphi''_{\xi_1}(u)\Big|_{u=0} =$

$= \lambda^2 t^2 (i\mathbb{E}\xi_1)^2 - \lambda t \, \mathbb{E}\xi_1^2 = -\lambda^2 t^2 (\mathbb{E}\xi_1)^2 - \lambda t \, \mathbb{E}\xi_1^2$

$\mathrm{Var}\, X_t = \mathbb{E}X_t^2 - (\mathbb{E}X_t)^2 = \lambda t \mathbb{E}\xi_1^2 + \lambda^2 t^2 (\mathbb{E}\xi_1)^2 - \lambda^2 t^2 (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \lambda t \, \mathbb{E}\xi_1^2$

3. Количество заявок на возмещение ущерба модел-ся пр. Пуас., в среднем – 100 заявок/день. Размер одной выплаты имеет эксп. распр-е со средним 5000 \$.

X_t – сумма выплаты за t дней

Найти: $\mathbb{E}X_t$, $\mathrm{Var}\, X_t$, $\mathbb{P}(X_t = 0)$, преобр. Лапласа X_t

Решение:

$\mathbb{E}X_t = \lambda t \, \mathbb{E}\xi_1 = 100 \cdot t \cdot 5000 = 5 \cdot 10^5 t$

$\mathrm{Var}\, X_t = \lambda t \, \mathbb{E}\xi_1^2 = 100t \cdot (\mathrm{Var}\,\xi_1 + (\mathbb{E}\xi_1)^2) = 100t \frac{2}{\lambda_\xi^2} = 100t \; 2 \cdot 25000 =$

$= 5 \cdot 10^6 t$

$\mathbb{P}(X_t = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N_t} \xi_k = 0\right) = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N_t} \xi_k = 0, N_t = n\right) =$

$= \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N_t} \xi_k = 0 \mid N_t = n\right) \mathbb{P}(N_t = n) = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k = 0\right) \cdot \mathbb{P}(N_t = n) =$!

непрер. СВ

$\to \mathbb{P}(\ ) = 0$!!!

$\ne \sum_{n \ge 0}$

либо $\{X_t = 0\} \Leftrightarrow \{N_t = 0\}$

$\to \mathbb{P}(X_t = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^0}{0!} = e^{-100t}$

$\mathbb{E} e^{-uX_t} = \sum_{k \ge 0} \mathbb{E}\left[e^{-(\xi_1 + \ldots + \xi_k)u}\right] \cdot \mathbb{P}(N_t = k) = \sum_{k \ge 0} (\mathcal{L}_{\xi_1}(u))^k \cdot \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^k}{k!} =$

$= e^{-\lambda t} e^{\lambda t \mathcal{L}_{\xi_1}(u)} = e^{\lambda t(\mathcal{L}_{\xi_1}(u) - 1)} = e^{\lambda t\left(\frac{\mu}{u+\mu} - 1\right)}$

$\mathcal{L}_{\xi_1}(u) = \mathbb{E} e^{-u\xi_1} = \int_0^\infty \mu e^{-ux} e^{-\mu x} dx = \frac{\mu}{\mu + u}$

(4) X_t, Y_t – 2 CPP (2 сост. пуас. проц.)

$X_t \perp\!\!\!\perp Y_t$

Показать, что $X_t + Y_t$ – CPP

через хар. ф-ю нельзя, т.к. мы знаем ее только в один м. врем

$\Rightarrow$ нужно хар. ф-я конечномерного распр-е, но! ее искать сложно

выход $\Rightarrow$ процессы Леви

Теорема

X_t – CPP $\Leftrightarrow$ X_t – пр. Леви с кусочно-постоянными траекториями

X_t, Y_t – CPP $\Rightarrow$ X_t, Y_t – процессы Леви $\Rightarrow$ $X_t + Y_t$ – пр. Леви

X_t, Y_t имеют кусочно-пост. траектории $\Rightarrow$ $X_t + Y_t$ – имеет кусочно-пост. траектории $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $X_t + Y_t$ – CPP

Безгранично-делимые распределения
(infinitely-divisible distr.)

Опр. СВ ξ явл. бесконечно делимой, если

$\forall\ n \geq 2 \quad \exists\ Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – iid

$$\xi \overset{d}{=} Y_1 + \dots + Y_n$$

Отнош. к пр. Леви:

X_t – пр. Леви

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{X_{\frac{(k+1)t}{n}} - X_{\frac{kt}{n}}}_{iid \overset{d}{=} X_{\frac{t}{n}}}$$

- $\forall$ пр. Леви X_t в $\forall$ м.вр. t имеет бесконечно-делимое распр-е
- $\forall$ бесконечно-делимого распр. $\exists$ пр. Леви X_t, к-й имеет это распределение в м. вр. $t = 1$

Примеры

[Нормальное распр.
 распр. Коши

[Отриц. биномиальное
 геометрическое распр.

[Гамма распр.
 экспоненциальное распр.

[распр. Пуассона
 составное распр. Пуассона

Опр Устойчивое распр.

Говорят, что ξ имеет устойчивое распр. (stable), если

$\forall\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – iid $\overset{d}{=} \xi$:

$$\xi_1 + \dots + \xi_n \overset{d}{=} a_n \xi + b_n$$

a_n, b_n – детерминн. посл-ти

Уст. распр. – бесконечно делимые: $Y_k = \dfrac{\xi_k - b_n/n}{a_n}$

① $N(a,\sigma^2)$ – безгр. делимо

I) $\xi_1 + \ldots + \xi_n \sim N(0,n)$, $\xi_i \sim N(0,1)$

$Y_k \sim N\left(\frac{a}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

II) через ХФ

$$\varphi(u) = e^{iau - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} = \left(e^{\left(i\frac{a}{n}u - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}u^2\right)}\right)^n$$

$$\Rightarrow \varphi_{Y_1}(u) = \left(\varphi_\xi(u)\right)^{1/n}$$

② Коши

$$p(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1+\frac{(x-x_0)^2}{\gamma^2}\right)}$$

$$\varphi(u) = e^{x_0 iu - \gamma|u|}$$

$$(\varphi(u))^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{x_0}{n}iu - \frac{\gamma}{n}|u|}$$ ~ расп. Коши с пар-ми $\frac{x_0}{n}, \frac{\gamma}{n}$

③ отриц. бином-е $NB(r,p)$

$$\mathbb{P}(X=k) = C^k_{r+k-1}\, p^k (1-p)^r$$

$$\varphi(u) = \mathbb{E}e^{iuX} = \sum_{k\geq 0}^{\infty} C^k_{r+k-1}\, p^k (1-p)^r e^{iuk} =$$

$$= (1-p)^r \sum_{k\geq 0}^{\infty} C^k_{r+k-1} (p\cdot e^{iu})^k = (1-p)^r \frac{1}{(1-pe^{iu})^r}$$

отриц. бин. Ньютона

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k C^k_{r+k-1} = \frac{1}{(1-x)^r}, \quad |x|<1$$

$$(\varphi(u))^{1/n} = \left(\frac{1-p}{1-pe^{iu}}\right)^{r/n} \sim NB\left(\frac{r}{n}, p\right)$$

④ геометрическое расп.

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k p$$

$$\varphi(u) = \mathbb{E}e^{iuX} = \sum_{k\geq 0} e^{iuk}(1-p)^k p = p\sum_{k\geq 0}\left(e^{iu}(1-p)\right)^k = p\cdot\frac{1}{1-e^{iu}(1-p)}$$

т.к. $|e^{iu}(1-p)|<1$

$$(\varphi(u))^{1/n} = \left(\frac{p}{1-e^{iu}q}\right)^{1/n} \sim NB\left(\frac{1}{n}, 1-p\right)$$

Примеры не безгранично-делимых расп.

Доказать, что $U[a,b]$ не является бесконечно-делимым.

Утв. Хар. ф-я $\forall$ безгран. дел. расп. не имеет нулей, т.е. $\nexists u: \varphi(u)=0$.

$$\varphi(u) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{iux}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{iu} e^{iux}\Big|_a^b = \frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)} = 0, \quad e^{iua}\left(e^{iu(b-a)}-1\right)=0$$

$$e^{iu(b-a)}=1$$

$$\cos u(b-a) + i\sin u(b-a) = 1$$

$$u(b-a) = 2\pi n$$

док-во утв.:

$$\xi \overset{d}{=} Y_1 + \ldots + Y_n \rightarrow \varphi_{Y_1}(u) = (\varphi_\xi(u))^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1, & \varphi_\xi(u)\neq 0 \\ 0, & \varphi_\xi(u)=0 \end{cases} = G(u)$$

теор. Леви (часть 2)

послед. хар. ф-й $f_n(u) \to f(u)$, $f(u)$ непрер. в окр. т. 0 $\Big\} \Rightarrow f(u)$ – хар. ф-я

$\varphi_\xi(u)\neq 0 \Leftarrow G\equiv 1 \Leftarrow G$ - непрер.

$\Uparrow$

$\Rightarrow G(u)$ – ХФ

Покажем, что $G(u)$ непрер. в окр. т. 0:

1) $G(0)=1$
2) т.к. $\varphi_\xi(u)$ равном. непрер. $\Rightarrow \varphi_\xi(u)\neq 0$ в окрестности 0 $\Rightarrow G=1$ в окр. т. 0

Доказать, что $B(p)$ не явл. безгр. делимых

$X \overset{d}{=} \xi_1 + \xi_2$, ξ_1, ξ_2 – iid – покажем, что такое расп. не найти

• какие значения могут принимать ξ_1 и ξ_2?

– $\mathbb{P}((\xi_1<0)\cap(\xi_2<0)) \le \mathbb{P}(\xi_1+\xi_2<0)=0$

$\mathbb{P}(\xi_1<0)^2 \to \mathbb{P}(\xi_1<0)=0$

– $\mathbb{P}\{(\xi_1>\frac{1}{2})\cap(\xi_2>\frac{1}{2})\} \le \mathbb{P}(\xi_1+\xi_2>1)=0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\xi_1>\frac{1}{2})=0$

– $\mathbb{P}(\xi_1=0, \xi_2=0)=\mathbb{P}(\xi_1+\xi_2=0)=1-p$

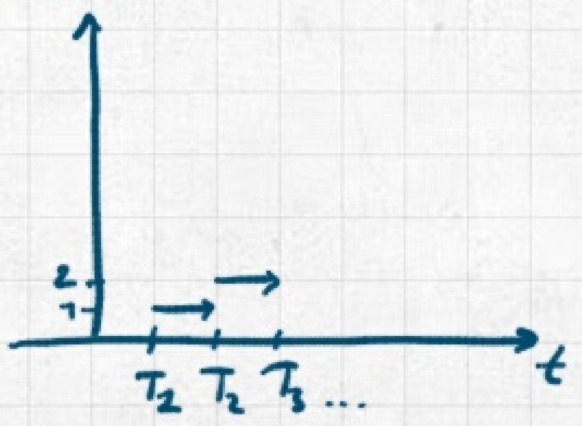
$\mathbb{P}(\xi_1=0)=\sqrt{1-p}$

– $\mathbb{P}(\xi_1=1/2)=\sqrt{p}$

$\Rightarrow \xi_1+\xi_2=\frac{1}{2}$ с вер-ю $2\sqrt{p(1-p)}$

Лекция 12.10

Теор. Считающий процесс Леви – Пуассоновский.



$\mathbb{P}(N_t=0)=e^{-\lambda t}$

$\beta(t)=\mathbb{P}(N_t\ge 2)$

$\xi_{n_1},\dots,\xi_{n_n}$: $\xi_{n_k}=\mathbb{1}\{N_{\frac{k}{n}}-N_{\frac{k-1}{n}}\ge 2\}$, $k=1,\dots,n$ – независимы

$N_t=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}\{t\ge T_n\}$

$S_n=\xi_{n_1}+\dots+\xi_{n_n}$ $\quad \mathbb{P}(S_n=0)=\mathbb{P}(\xi_{n_1}=0,\dots,\xi_{n_n}=0)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\xi_{n_i}=0)=$

$=(1-\beta(\frac{1}{n}))^n$

$S_n>0$ → хотя бы на одном инт. $(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})$ происходит 2 скачка, а на $[0,1]$ число скачков конечно →

→ если $\frac{1}{n}<\delta$, где δ – мин расст. между скачками, $S_n=0$

→ при $n\to\infty$ $S_n\to 0$

и $\mathbb{P}(S_n=0)\to 1$ (т.к. S_n – дискретна).

$\Leftrightarrow$ $n\ln(1-\beta(\frac{1}{n}))\to 0$

$n\ln(1-\beta(1/n))\le n(-\beta(\frac{1}{n}))\le 0 \Rightarrow n\beta(\frac{1}{n})\to 0,\ n\to\infty$

$\frac{1}{t}\beta(t)\to 0$, $t\downarrow 0$ равном. сход-се т.к. β – монотонная ф-я

$\beta(t)\le\beta\left(\frac{1}{[1/t]}\right)$

$\frac{\beta(t)}{t}\le\frac{\beta(1/[1/t])}{t}\cdot\frac{[1/t]}{[1/t]}$

Таким образом, имеем $\frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t\ge 2)\to 0$

$\frac{\mathbb{P}(N_t=1)}{t}=\frac{1-e^{-\lambda t}-\mathbb{P}(N_t\ge 2)}{t}\xrightarrow[t\to\infty]{}\lambda$

Найдем произв. ф-ю $\mathbb{E}u^{N_t}$, $0<u\le 1$

$s<t$

$\Psi(u,t)=\mathbb{E}u^{N_t}=\mathbb{E}u^{N_s}\cdot u^{N_t-N_s}=\mathbb{E}u^{N_s}\cdot\mathbb{E}u^{N_{t-s}}=\Psi(u,s)\cdot\Psi(u,t-s)$

↑ непрер. справа по t, т.к. N_t непрер. справа

→ $\Psi(u,t)=e^{-t\varphi(u)}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(u;t)-1}{t} = -\varphi(u)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(u,t)-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-\lambda t} + u\,\mathbb{P}(N_t=1) + \sum_{k=2}^{\infty} u^k\,\mathbb{P}(N_t=k) - 1}{t} = -\lambda + \lambda u + 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} u^k\,\mathbb{P}(N_t=k) \le \sum_{k=2}^{\infty} u^2\,\mathbb{P}(N_t=k) = u^2\,\mathbb{P}(N_t\ge 2)$$

$$\to \psi(u,t) = e^{-\lambda(1-u)t}$$

Проверим, что у пуас. потока с пар-м λ такая же произв. ф-я

$$\sum_{k=0}^{\infty} u^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} e^{u\lambda t} = e^{-\lambda(1-u)t}$$

теорема доказана ∎.

$\mathbb{P}(T_1>t) = \mathbb{P}(N_t=0) = e^{-\lambda t}$, T_1 - момент 1го скачка

Покажем, что $N_{T_1+t} - N_{T_1} \overset{d}{=} N_t$

$$f(t) = \mathbb{E} e^{iuN_t}$$

$$M_t = \frac{e^{iuN_t}}{f(t)} \to \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{iuN_s + iu(N_t-N_s)}}{f(t)}\right] = \frac{e^{iuN_s}\,\mathbb{E}e^{iuN_{t-s}}}{f(t)} = \frac{e^{iuN_s} f(t-s)}{f(t)} = \frac{e^{iuN_s}}{f(s)} = M_s$$

т.к. $\mathbb{E}M_t = 1 \Rightarrow f(s)f(t-s) = f(t)$

Optional sampling theorem

$$T_1^n = \min\{T_1, n\},\quad \mathbb{E}\left[\exp\{iu(N_{T_1^n+t} - N_{T_1^n}) + ivT_1^n\}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{M_{T_1^n+t}\, f(T_1^n+t)}{M_{T_1^n}\, f(T_1^n)} \cdot e^{ivT_1^n}\right] \quad (*)$$

мартинг. св-во применимое к моментам остановки T_1 и T_1+t:

$$\mathbb{E}[M_{T_1^n+t} \mid \mathcal{F}_{T_1^n}] = M_{T_1^n}$$

$$(*) = \mathbb{E}\left[\frac{f(T_1^n+t)}{M_{T_1^n} f(T_1^n)} \cdot e^{ivT_1^n}\, \mathbb{E}\left[M_{T_1^n+t} \mid \mathcal{F}_{T_1^n}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{f(T_1^n+t)}{f(T_1^n)} e^{ivT_1^n}\right] = f(t)\,\mathbb{E}e^{ivT_1^n}$$

перейдем к пределу при $n\to\infty$:

$$\mathbb{E}\, e^{iu(N_{T_1+t} - N_{T_1}) + ivT_1} = f(t)\,\mathbb{E}e^{ivT_1} = \mathbb{E}e^{iuN_t}\,\mathbb{E}e^{ivT_1}$$ (доказано строгое марковское свойство)

Монков конт $d=1$

Теор. Непрерывный процесс Леви - гауссовский.

$X = (X_t)$ - непрер. проц. Леви

$$\xi_{kn} = X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_k |\xi_{kn}| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

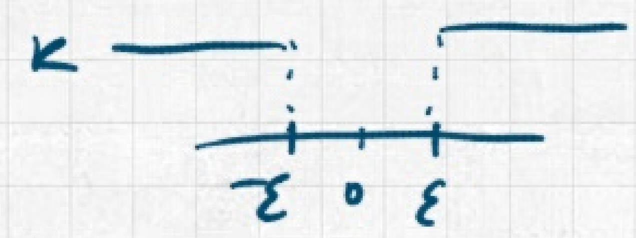
$$a_n = \mathbb{P}(|\xi_{kn}| > \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(\sup_k |\xi_{kn}| > \varepsilon) = 1 - (1-a_n)^n \to 0 \Rightarrow na_n \to 0$$

---

f - произвольная огр. ф-я, равная 0 в окрестности 0

$$n\,\mathbb{E}f(X_{1/n}) \to 0$$



$$\mathbb{E}|f(X_{\frac{1}{n}})| \le k\,\mathbb{P}(|X_{\frac{1}{n}}| > \varepsilon) = ka_n$$

$$|f(x)| \le k\,\mathbb{1}\{|x|>\varepsilon\}$$

$$\mathbb{E} e^{iuX_t} = f_t(u) = e^{t\psi(u)}$$

$$\mathbb{E} e^{iuX_{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\psi(u)}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{E}\cos uX_{\frac{1}{n}} + i\mathbb{E}\sin uX_{\frac{1}{n}}$$

$u=1$

$$e^{\frac{1}{n}\psi(1)} = e^{\frac{x+iy}{n}} = e^{\frac{x}{n}}\left(\cos\frac{y}{n} + i\sin\frac{y}{n}\right)$$

$$n\left(e^{\frac{x}{n}}\cos\frac{y}{n} - 1\right) \to x \qquad n\to\infty$$

$$n e^{x/n}\sin\frac{y}{n} \to y$$

пусть $f(x) = o(x^2)$, $x \to 0$

$$n\mathbb{E}[X_{\frac{1}{n}} \cdot \mathbb{1}\{|X_{\frac{1}{n}}| \le \varepsilon\}] \to b$$

$$n\mathbb{E}[X_{\frac{1}{n}}^2 \mathbb{1}\{|X_{\frac{1}{n}}| \le \varepsilon\}] \to 2c$$

$$\sim \quad n(\mathbb{E}\cos X_{\frac{1}{n}} - 1) \to -c$$

$$n\mathbb{E}\sin X_{\frac{1}{n}} \to b$$

$$\psi(u) = \log\mathbb{E}e^{iuX_1} = n\log\mathbb{E}e^{iuX_{\frac{1}{n}}}\mathbb{1}\{|X_{\frac{1}{n}}| \le \varepsilon\} = n\log\{1 + iu\mathbb{E}X_{\frac{1}{n}}\mathbb{1}\{|X_{\frac{1}{n}}| \le \varepsilon\} -$$

$$-\frac{u^2}{2}\mathbb{E}X_{\frac{1}{n}}^2\mathbb{1}\{|X_{\frac{1}{n}}| \le \varepsilon\} + o(1)\} = iub - u^2c$$

$$c = \sigma^2/2 \qquad \mathbb{E}e^{iuX_t} = e^{(iub - \frac{\sigma^2}{u^2})t}$$

$$\Rightarrow X_t = bt + \sigma W_t$$

∎

Пусть $\eta_1, \dots, \eta_n$ - iid $Exp(\lambda)$

плотность T_n

$$T_n = \eta_1 + \dots + \eta_n \quad \to \quad N_t = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{1}\{t \ge T_n\} \text{ - пуас. проц. с пар-м } \lambda t$$

$$\to p_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}, \quad F_n(x) = 1 - e^{-\lambda x}\left(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \dots + \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

ММИ: $n = 1$ $\quad p_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

пусть верно для n

проверим для $n+1$:

$$p_{n+1}(x) = \int_0^x p_n(x-y)p_1(y)dy = \int_0^x \frac{\lambda^n(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda(x-y)}\lambda e^{-\lambda y}dy =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\cdot\lambda^{n+1}\cdot e^{-\lambda x}\int_0^x (x-y)^{n-1}dy = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n+1}e^{-\lambda x}\cdot\frac{x^n}{n} = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}x^n e^{-\lambda x}$$

∎

$F_n(0) = 0$

$$F_n'(x) = \lambda e^{-\lambda x}(\quad) - e^{-\lambda x}\left(\lambda + \frac{2\lambda x}{2} + \dots + \frac{(n-1)\lambda^{n-1}x^{n-2}}{(n-1)!}\right) = e^{-\lambda x}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k+1}x^k}{k!} -\right.$$

$$\left.-\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{\lambda^{\ell+1}x^\ell}{\ell!}\right] = e^{-\lambda x}\lambda^n x^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} = p_n(x)$$

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(\underbrace{T_n \le t, T_{n+1} > t}_{\text{разность мн-в}}) = \mathbb{P}(T_n \le t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \le t) = F_n(t) - F_{n+1}(t) =$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

не случ-е

Возьмем произвольное время t: $T_{\sigma-1} < t \le T_\sigma$, σ-случайное, завис. от t

$T_\sigma - t$ имеет exp распр. с λ

$T_\sigma - T_{\sigma-1}$ не имеет exp. распр.

$$\mathbb{P}(T_\sigma - T_{\sigma-1} \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}, & x < t \\ 1 - e^{-\lambda x} - \lambda t e^{-\lambda x}, & x > t \end{cases}$$

- если выбрасывать каждый 2й скачок - процесс не пуас.
- если мы подкидываем монетку и выбрасываем прыжки с вер-ю 1/2 - процесс остается пуассоновским.

Д31

N1 $\mathbb{P}(N_{3t} \le 3, N_t \ge 1) = \mathbb{P}(N_t \ge 1, N_{3t} - N_t \le 2) = \mathbb{P}(N_{3t} - N_t \le 2, N_t - N_0 \ge 1) = \mathbb{P}(N_{2t} \le 2) \cdot \mathbb{P}(N_t \ge 1) =$

$= (\mathbb{P}(N_{2t} = 0) + \mathbb{P}(N_{2t} = 1) + \mathbb{P}(N_{2t} = 2))(1 - \mathbb{P}(N_t = 0)) = (e^{-2\lambda t} + e^{-2\lambda t}\lambda t + e^{-2\lambda t}(\lambda t)^2)(1 - e^{-\lambda t}) =$

$= e^{-2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})(1 + \lambda t + \lambda^2 t^2)$

N2

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}\{N_h = 0\}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 1 + \lambda h}{h} = \lambda$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(N_h = 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\lambda h} \cdot \lambda h}{h} = \lambda \lim_{h \to 0} e^{-\lambda h} = \lambda$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(N_h \ge 2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}\{N_h = 0\} - \mathbb{P}(N_h = 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}\{N_h = 0\}}{h} -$$

$$- \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(N_h = 1)}{h} = \lambda - \lambda = 0$$

N3

(i) $X \sim Bin(n, p)$

$$\mathbb{E} z^X = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k (1-p)^{n-k} = (pz + (1-p))^n$$

(ii) $X \sim Geom(p)$

$$\mathbb{E} z^X = \sum_{k \ge 0} p(1-p)^k z^k = p \sum_{k \ge 0} ((1-p)z)^k = \frac{p}{1 - z(1-p)}$$

(iii) $X \sim NB(r, p)$

$$\mathbb{E} z^X = \sum_{k \ge 0} C_{k+r-1}^k (1-p)^r p^k \cdot z^k = (1-p)^r \sum_{k \ge 0} C_{k+r-1}^k (pz)^k = \frac{(1-p)^r}{(1-pz)^r}$$

N4

(i) X_t - составной процесс Пуассона

(ii) $\lambda = 6$

ξ_1:	1	2	3
	1/2	1/3	1/6

$\mathbb{E}\xi_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{10}{6}$

$\mathbb{E}\xi_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} = \frac{20}{6}$

$\mathbb{E} X_t = \lambda t \, \mathbb{E}\xi_1 = 6t \cdot 10/6 = 10t$

$Var X_t = \lambda t \, \mathbb{E}\xi_1^2 = 6t \cdot 20/6 = 20t$

$\mathbb{P}\{X_t = 0\} = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-6t}$

$\mathbb{E} z^{X_t} = e^{6t(\varphi_{\xi_1}(u) - 1)} = \exp\{t[(3z + 2z^2 + z^3) - 6]\}$, т.к.

$\varphi_{\xi_1}(u) = \mathbb{E} z^{\xi_1} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{6}z^3$

(iii)

Y:	ξ_1	0
	2/3	1/3

$\mathbb{E} X_t' = 6t \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3} t$

$Var X_t' = 6t \cdot \frac{20}{6} \cdot (\frac{2}{3})^2 = \frac{80}{9} t$

$\mathbb{P}(X_t' = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-6t}$

$\varphi_Y(u) = \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{6}z^3) + 1/3 \cdot z^0 = \frac{1}{3}(z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + 1)$

$\mathbb{E} z^{X_t'} = \exp\{6t(\frac{1}{3}(1 + z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{3}z^3) - 1)\} = e^{2t(z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - 2)}$

N5 (i) составной процесс Пуассона

(ii) $\mathbb{E}\, Y_1 = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \cdot x\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\,\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$

$\mathbb{E}\, Y_1^2 = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} x^2 dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} e^{-\beta x} dx = \frac{(\alpha+1)\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\beta^2\,\Gamma(\alpha)} =$

$= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}$

$\mathbb{E}\, X_t = \lambda t \frac{\alpha}{\beta}$, $Var\, X_t = \lambda t \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}$, $\mathbb{P}\{X_t = 0\} = \mathbb{P}\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t}$

$\mathbb{E}\, e^{-uY_1} = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} e^{-ux} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta+u)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(\beta+u)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\beta+u)x} dx$

$= \left(\frac{\beta}{\beta+u}\right)^\alpha$

$\mathbb{E}\, e^{-uX_t} = e^{\lambda t(L_{Y_1}(u) - 1)} = e^{\lambda t\left[\left(\frac{\beta}{u+\beta}\right)^\alpha - 1\right]}$

N6 распределение безгранично-делимо $\Leftrightarrow$ хар-я функция не имеет нулей

(i) Гамма-распределение

$\varphi(u) = \left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha} = 0 \qquad \beta > 0$

$\frac{\beta}{\beta - iu} = 0 \rightarrow$ ни при каких u не имеет решение $\Rightarrow$ распределение безгранично-делимо

(ii) экспоненциальное распределение

$\varphi(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu} = 0$, $\lambda > 0$

ни при каких u $\varphi(u)$ не равно „0" $\rightarrow$ распределение безгранично-делимо

Семинар

① $\left.\begin{array}{l} f(x)>0 \\ \log f(x) - \text{concave} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ - субмультипликативна

следствие: $f(x) = e^{x^\beta}$, $\beta \in (0,1)$ - субмульт. ф-я

$$\log(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \ge \lambda \log f(x) + (1-\lambda)\log f(y)$$

показать: $\exists a>0 \quad f(x+y) \le a f(x) f(y)$

$$f(x) = e^{h(x)} \to e^{h(x+y)} \le a e^{h(x)+h(y)}$$

$$h(x+y) \le \log a + h(x) + h(y)$$

$$x = \frac{x}{x+y}(x+y) + \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)\cdot 0$$

$$h(x) \ge \frac{x}{x+y} h(x+y) + \left(1 - \frac{x}{x+y}\right) h(0)$$

$$h(y) \ge \frac{y}{x+y} h(x+y) + \left(1 - \frac{y}{x+y}\right) h(0)$$

$$h(x) + h(y) \ge h(x+y) + h(0)$$

$$h(x+y) \le h(x) + h(y) - h(0)$$

$$\Rightarrow \exists a \text{ и } a = e^{-h(0)}$$

Представление Леви-Ито

X_t - пр. Леви

$$X_t = \overbrace{at}^{I} + cW_t + \overbrace{\sum_{|\Delta X_s| \ge 1} \Delta X_s}^{II} + \overbrace{\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\sum_{|\Delta X_s|<1} \Delta X_s - t\int_{\varepsilon<|x|<1} x\,\nu(dx)\right)}^{III}$$

все слагаемые независимы, II и III - CPP

если $BG<1 \rightarrow \int_{\varepsilon<|x|<1} x\,\nu(dx) < \infty$

Носитель безгранично-делимого распр-я

$\text{supp}(\mu) = \{x \in \mathbb{R} : \forall$ открытое мн-во G, содержащее x : $\mu(G)>0\}$

μ - мера, ξ - СВ | носитель всегда замкнутое мн-во

$\text{supp}(\xi) = \text{supp}(\mathbb{P}_\xi)$

$\text{supp}(\mathbb{P}_\xi) = \min\{F$ - замкн. мн-во : $\mathbb{P}_\xi(F) = 1\}$

пример: $\xi \ne 0$ в т. $1/n$, $n = 1, 2, \ldots \to \text{supp}(\xi) = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 0\}$ ← чтобы было замкнуто

$\xi = \begin{cases} 0; & 1-p \\ 1; & p \end{cases} \quad \text{supp}(\xi) = \{0, 1\}$

Утв.

Носитель $\forall$ невырожденного б.-д. распред-я является неограниченным мн-м.

пример: Bern, Unif - не б.-д.

№2 Доказать, что CPP $\forall t$ имеет неогр. носитель.

↳ Утв. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ - СВ $\quad \text{supp}(\xi + \eta) = \overline{\text{supp}(\xi) + \text{supp}(\eta)}$

к т. Леви - Хинчина

1) $C \neq 0$ $\quad supp(W_t) = \mathbb{R}$ неогран. $\Rightarrow$ $supp(X_t)$ - неограничен

2) $\sum\limits_{|\Delta X_s| \geq 1} \Delta X_s \neq 0$ - СРР, неогран. supp $\Rightarrow$ $supp(X_t)$ - неогран.

3) в разложении Л-Х 1 „не важна"

$\exists \, \gamma > 0 : \sum\limits_{|\Delta X_s| \geq \gamma} \Delta X_s \neq 0 \Rightarrow supp(X_t)$ - неогран.

№2 носитель $X_t = \sum\limits_{k=1}^{N_t} \xi_k$

$\bullet \; \mathbb{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{N_t} \xi_k \in B\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{N_t} \xi_k \in B \,\middle|\, N_t = n\right)\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \in B\right) \cdot \mathbb{P}(N_t = n) \;\ominus$

$z \in supp(\xi_1) \Rightarrow pz \in supp(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$

пусть $B = G$

$\Rightarrow \exists \, G_p$ - откр. окрестность pz : $\mathbb{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n \in G) > 0$

$\ominus \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \in G_p\right) e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \underbrace{\mathbb{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \xi_k \in G_p\right)}_{>0} + \underbrace{\sum\limits_{n \neq p} (\quad)}_{\geq 0} > 0$

$\Rightarrow \forall p \; pz \in supp(CPP)$

$\Rightarrow \{z, 2z, 3z, \ldots\} \subset supp(CPP)$

Формула Леви - Хинчина

$\varphi_t(u) = \mathbb{E} e^{iuX_t} = \mathbb{E} e^{t\psi(u)}$

$\psi(u) = iub - \frac{1}{2}u^2c^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbb{1}\{|x|<1\}) \nu(dx)$

$\boxed{X_t \text{ - проц. ограниченной вариации } \iff \begin{cases} c = 0 \\ \int\limits_{|x|<1} |x| \nu(dx) < \infty \quad (\text{ВG} < 1) \end{cases}}$

$\int\limits_{\mathbb{R}} -iux \mathbb{1}\{|x|<1\} \nu(dx) = -iu \int\limits_{|x|<1} x \, \nu(dx) < \infty$

$\hookrightarrow \psi(u) = iu\tilde{b} + \int\limits_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \nu(dx)$,

$\tilde{b} = b - \int\limits_{|x|<1} x \, \nu(dx)$

③ Выразить меру Леви ν через $\varphi(u)$, если упрощенная форм. выполн.

$\rightarrow$ можно оценить ν по данным?

$\hat{\varphi}_\Delta(u) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{iu(X_{k\Delta} - X_{(k-1)\Delta})}$

$\varphi'(u) = \left(e^{t\psi(u)}\right)' = e^{t\psi(u)} \cdot t\psi'(u) = e^{t\psi(u)} \cdot t\left(i\tilde{b} + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iux} ix \nu(dx)\right) =$

$= t\varphi(u)\left(i\tilde{b} + i\int\limits_{\mathbb{R}} x e^{iux} \nu(dx)\right)$

$\varphi''(u) = t\psi''(u)\varphi(u) + (t\psi'(u))^2 \varphi''(u) = t\varphi(u)\left(-\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 e^{iux} \nu(dx)\right) +$

$+ \left(\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right)^2 \cdot \varphi''(u)$

$\rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 e^{iux} \nu(dx) = -\frac{\varphi''(u)}{t\varphi(u)}\left(1 - \left(\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right)^2\right)$

если у ν имеет плотность $s(x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}_{\{x^2 s(x)\}}(u) = F(u)$ - преобр. Фурье $x^2 s(x)$

$x^2 s(x) = \mathcal{F}^{-1}(F(u)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iux} F(u) du$