Лекция 3.

Определения:
Процесс $\{x_t\}$ называется *строго стационарным (или стационарным с сильном смысле)*, если совместные распределения векторов $\{x_{t-s}, \dots, x_t, \dots, x_{t+s}\}$ не зависят от t для всех s.
Процесс $\{x_t\}$ называется *стационарным в слабом смысле*, если $E(x_t), E(x_t^2)$ конечны и ковариации $E\left(x_t x_{t-j}\right)$ зависят только от j, но не зависят от t.
Заметим, что

1. Сильная стационарность, вообще говоря, не влечёт слабую стационарность. Средние $E(x_t), E(x_t^2)$ должны быть конечны. Например, последовательность независимых одинаково распределенных по закону Коши случайных величин образует строго стационарный процесс, но этот процесс не является стационарным в слабом смысле.
2. Строгая стационарность *плюс* условие конечности моментов $E(x_t), E(x_t^2)$ влекут слабую стационарность.
3. Слабая стационарность не влечёт сильную стационарность. Например, если процесс не гауссовский, то высшие моменты $E(x_t x_{t-j} x_{t-k})$ *могут* зависеть от t, поэтому процесс может быть не строго стационарным.
4. Слабая стационарность плюс нормальность влекут строгую стационарность.

Строгая стационарность сохраняется при нелинейных преобразованиях, то есть нелинейная (измеримая) функция от строго стационарного процесса даёт снова строго стационарный процесс. Это неверно для слабой стационарности. Для большинства целей достаточно слабой стационарности, её мы и будем использовать в дальнейшем.

Условия стационарности для моделей ARMA.

Когда ARMA процессы стационарны? Рассмотрим сначала MA процесс

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

Напомним формулу для дисперсии этого процесса

$$Var(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 \sigma_\varepsilon^2.$$

Мы видим, что второй момент конечен тогда и только тогда, когда ряд из квадратов коэффициентов MA процесса суммируем. Легко видеть, что

$$\text{Стационарность MA} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty.$$

То есть, если вторые моменты существуют, то они не зависят от индекса t.

Рассмотрим процесс AR (1). Итерируя, получим

$$x_t = \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \varepsilon_{t-j} + \phi^k x_{t-k}.$$

Ясно, что если условие $|\phi| < 1$ не выполнено, то коэффициенты MA модели не будут суммируемы с квадратом и, следовательно, дисперсия x_t не будет конечной.

Рассмотрим более общую AR модель

$$A(L)x_t = \varepsilon_t \text{ или } (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots x_t = \varepsilon_t.$$

Для того, чтобы дисперсия была конечной, оператор полиномиального лага должен быть обратим, то есть должны выполняться условия $|\lambda_i| < 1$ для всех i. Обычно полином $A(L)$ раскладывают на множители несколько иным способом

$$A(L) = const \cdot (L - \zeta_1)(L - \zeta_2) \dots,$$

где ζ_i – корни полинома лага $A(L)$, поскольку $A(z) = 0 \Leftrightarrow z = \zeta_i$. Мы можем переписать последнее соотношение следующим образом

$$A(L) = const \cdot (-\zeta_1)\left(1 - \frac{1}{\zeta_1} L\right)(-\zeta_2)\left(1 - \frac{1}{\zeta_2} L\right) \dots$$

Таким образом, корни ζ_i и λ_i связаны соотношением

$$\zeta_i = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Следовательно, правило «все $|\lambda| < 1$» трансформируется в правило «все $|\zeta| > 1$». Поскольку λ и ζ могут быть комплексными, можно сказать иначе: ***AR* – процессы стационарны, если все корни полинома лага лежат вне единичного круга, то есть полином лага обратим.**

Спектральное представление.

Частота, период и фаза.

Период λ связан с частотой ω соотношением $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$. Период λ - это время, которое требуется волне, чтобы пройти полный цикл. Частота ω - это ***угловая*** скорость, измеряемая, например, в радиан/сек. Фаза – это величина угла ϕ, на который сдвинута синусоидальная волна. Так как это угловой сдвиг, временной сдвиг равен $\frac{\phi}{\omega}$.

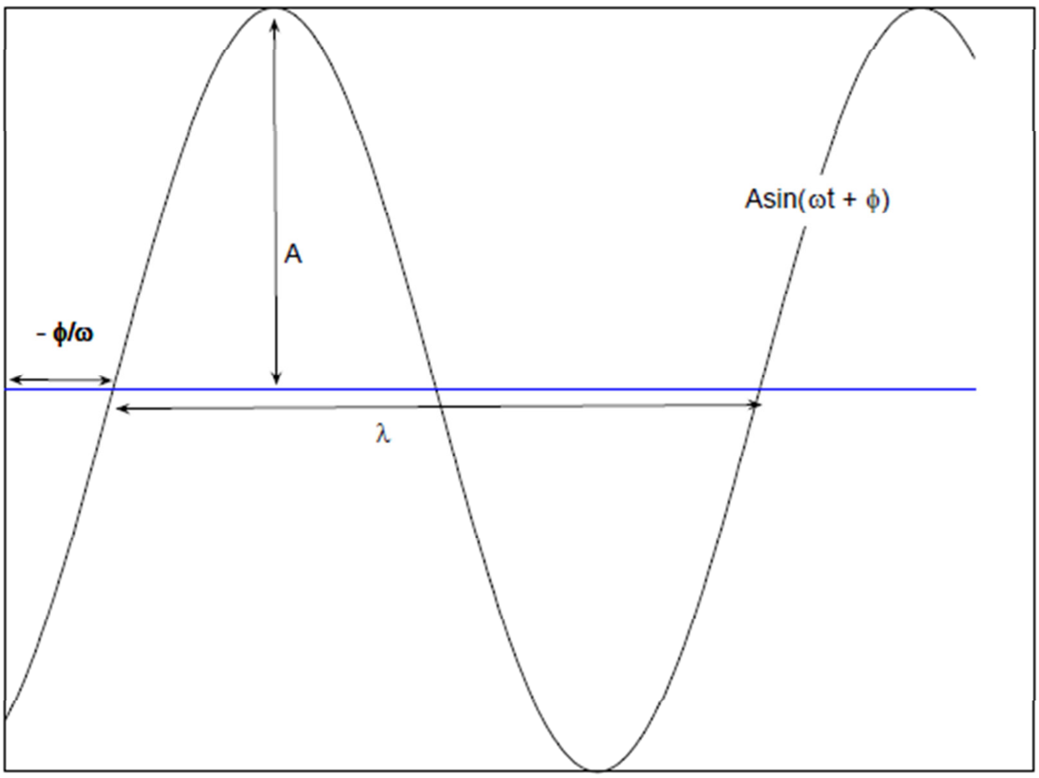


Рис.4. Синусоидальная волна амплитуды А, периода λ и частоты ω.

Преобразование Фурье.

Рассмотрим любой ряд чисел $\{x_t\}$. Определим его (дискретное) преобразование Фурье следующим образом

$$x(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x_t.$$

Заметим, что эта операция преобразует ряд x_t, который является функцией t, в комплекснозначную функцию $x(\omega)$ частоты ω.

Теорема. По заданной $x(\omega)$ ряд x_t восстанавливается с помощью ***обратного преобразования Фурье***

$$x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} x(\omega) d\omega.$$

Доказательство. Подставим

$$x(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x_t$$

в формулу обратного преобразования Фурье и проверим, что получим x_t

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} x_\tau \right) d\omega = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x_\tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega.$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = \delta(t-\tau) = \begin{cases} 1 \text{ если } t-\tau = 0 \\ 0 \text{ если } t-\tau \neq 0 \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x_\tau \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x_\tau \delta(t-\tau) = x_t.$$

Зачем использовать комплексные числа?

Можно задаться вопросом: зачем использовать комплексные числа, если все экономические временные ряды вещественны? Ответ таков: можно ограничиться вычислениями только с вещественными числами. Однако работа с комплексными числами позволяет ***упростить формулы.***

Покажем, например, что обратное преобразование Фурье можно было бы определить без использования комплексных чисел. Тогда формула обращения будет выглядеть следующим образом

$$x_t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |x(\omega)| \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega.$$

В самом деле, поскольку $x(\omega) = |x(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$, то из определения обратного преобразования Фурье следует

$$x(\omega) = \overline{x(-\omega)} = \overline{|x(-\omega)|e^{i\phi(-\omega)}} = |x(-\omega)|e^{-i\phi(-\omega)},$$

поэтому, сравнивая эквивалентные представления $x(\omega) = |x(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$ и $x(\omega) = |x(-\omega)|e^{-i\phi(-\omega)}$, получим

$$|x(\omega)| = |x(-\omega)|,\ \ \phi(\omega) = -\phi(-\omega), \quad \text{откуда}$$

$$x_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x(\omega)| e^{i(\omega t + \phi(\omega))} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(|x(\omega)|e^{i(\omega t+\phi(\omega))} + |x(-\omega)|e^{i(-\omega t+\phi(-\omega))}\right) d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |x(\omega)|\left(e^{i(\omega t+\phi(\omega))} + e^{-i(\omega t+\phi(\omega))}\right) d\omega =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|x(\omega)|\cos(\omega t+\phi(\omega))d\omega.$$

Ещё один пример. Пусть $x(\omega)$ имеет два «пика» (две дельта-функции) в точках ω_0 и $-\omega_0$. Тогда

$$x_t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\omega t}x(\omega)d\omega=e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}=2\cos(\omega_0 t).$$

Спектральная плотность.

Напоминание. ***Автоковариационная функция*** ряда x_t определяется следующим образом

$$\gamma_j=Cov(x_t,x_{t-j})=E(x_t-Ex_t)(x_{t-j}-Ex_{t-j}).$$

(мы рассматриваем ряды с $Ex_t=0$ поэтому $\gamma_j=E(x_t x_{t-j})$).

Автокорреляционная функция ряда x_t определяется следующим образом

$$\rho_j=\frac{\gamma_j}{\operatorname{var}(x_t)}=\frac{\gamma_j}{\gamma_0}.$$

Спектральная функция $S(\omega)$ определяется как преобразование Фурье *автоковариационной функции*

$$S(\omega)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{-i\omega j}\gamma_j. \tag{1}$$

Одно из условий, гарантирующее сходимость этого ряда, состоит в том, что ряд из модулей автоковариаций

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\gamma_j|$$

абсолютно сходится, т.е. $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\gamma_j|<\infty$. Поскольку автоковариационная функция γ_j симметрична, $\gamma_j=\gamma_{-j}$, функция $S(\omega)$ ***вещественнозначна***

$$S(\omega) = \gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(j\omega).$$

Эта формула снова показывает, что мы могли бы определить спектральную плотность, используя только вещественнозначные функции, но с комплексными версиями этих функций удобнее работать. Также заметим, что $S(\omega)$ ***симметрична***: $S(\omega) = S(-\omega)$.
Используя формулу обращения, можем вычислить γ_j по $S(\omega)$:

$$\gamma_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} S(\omega) d\omega.$$

В частности,

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega.$$

Иногда рассматривают преобразование Фурье ***автокорреляционной функции***

$$\frac{S(\omega)}{\gamma_0} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} \rho_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} \frac{\gamma_j}{\gamma_0},$$

где корреляции ρ_j, в свою очередь, выражаются с помощью обратного преобразования Фурье

$$\rho_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} \frac{S(\omega)}{\gamma_0} d\omega.$$

При $j = 0$

$$\rho_0 = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S(\omega)}{2\pi\gamma_0} d\omega.$$

Функция $f(\omega) := \frac{S(\omega)}{2\pi\gamma_0}$ периодическая, с периодом 2π. Если рассматривать эту функцию на отрезке $[-\pi, \pi]$, то она ***обладает свойствами плотности вероятности: она вещественна и интеграл от неё по отрезку*** $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$ ***равен 1.*** Чтобы это была плотность вероятности, нужно ещё проверить свойство ***неотрицательности.*** Эту функцию называют ***спектральной плотностью*** стационарного ряда (процесса) x_t. Для доказательства неотрицательности $f(\omega)$ заметим, что автоковариационная функция неотрицательно определена, то есть

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \gamma_{i-j} \geq 0$$

для любых вещественных чисел c_i, c_j и для любого натурального n. Это следует из очевидного равенства

$$0 \leq Var(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \gamma_{i-j}.$$

В частности,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\cos\omega i)(\cos\omega j)\,\gamma_{i-j} \geq 0\,, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(sin\,\omega i)(\sin\omega j)\,\gamma_{i-j} \geq 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\cos\omega i)(\cos\omega j)\,\gamma_{i-j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\sin\omega i)(\sin\omega j)\,\gamma_{i-j} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{i-j}\cos\omega(i-j) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)\gamma_k \cdot \cos\omega k =$$

$$n\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(1-\frac{|k|}{n}) \cdot \gamma_k \cdot \cos\omega k \geq 0.$$

Предположим, мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\frac{|k|}{n} \cdot \gamma_k \cdot \cos\omega k = 0. \qquad (2)$$

Тогда

$$S(\omega) = \gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\cos(j\omega) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \cos(j\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left[1 - \frac{|k|}{n}\right] \cdot \gamma_k \cdot \cos(\omega k) \geq 0.$$

Остаётся доказать (2). Имеем для $n > N + 1$ и произвольных фиксированных $\varepsilon > 0,\ N < \infty$

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \frac{|k|}{n} \cdot |\gamma_k| \leq \sum_{k=-N}^{N} \frac{|k|}{n} \cdot |\gamma_k| + \sum_{k=-\infty}^{-(N+1)} |\gamma_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\gamma_k| \leq$$

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{|k|}{n} |\gamma_k| + \varepsilon. \qquad (3)$$

Мы воспользовались абсолютной суммируемостью ряда

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma_j|$$

автоковариационной функции. Очевидно, для любого *фиксированного* $N < \infty$

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{|k|}{n} |\gamma_k| \to 0,\ \ n \to \infty. \qquad (4)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (3) и (4) следует (2).

Можно определить ***спектральную функцию распределения*** $F(\omega)$**,** соответствующую спектральной плотности $f(\omega) = \frac{S(\omega)}{2\pi\gamma_0}$:

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(v)dv,\ \ F(-\pi) = 0,\ \ F(\pi) = 1.$$

Спектральная плотность некоторых процессов.

Белый шум.

$$x_t = \varepsilon_t$$

$$\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2, \gamma_j = 0 \text{ для } j > 0.$$

$$\rho_0 = 1, \rho_j = 0 \text{ для } j > 0.$$

$$S(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j}\gamma_j = \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_0 = \sigma_x^2.$$

Спектральная плотность белого шума $f(\omega) = \frac{S(\omega)}{2\pi\gamma_0} \equiv \frac{1}{2\pi}$ является ***константой.***

MA (1)

$$x_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

$$\gamma_0 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2, \gamma_1 = \theta\sigma_\varepsilon^2, \gamma_j = 0, j > 1.$$

$$S(\omega) = \gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j \cos(j\omega) =$$

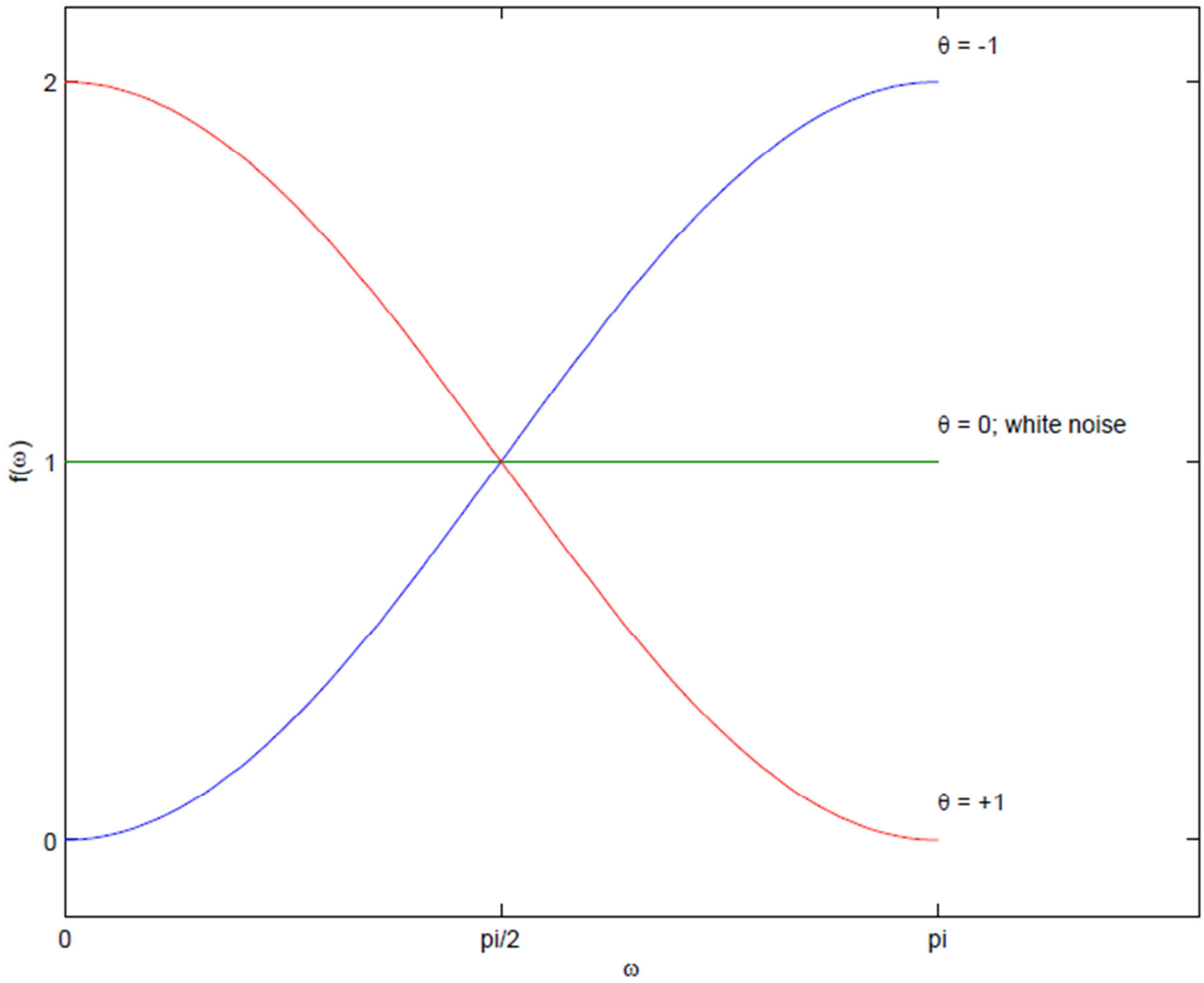
$$(1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 + 2\theta\sigma_\varepsilon^2 \cos\omega = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2+2\theta\cos\omega) =$$

$$= \gamma_0\left(1 + \frac{2\theta}{1+\theta^2}\cos\omega\right).$$

Отсюда

$$f(\omega) = \frac{S(\omega)}{2\pi\gamma_0} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\theta}{\pi(1+\theta^2)}\cos\omega.$$

График функции $2\pi f(\omega)$ на отрезке $[0, \pi]$ показан на рисунке ниже.



Из графика видно, что при $\theta = 1$ спектральная плотность принимает большие значения на низких частотах, а при $\theta = -1$ - на высоких частотах.

Матрица спектральной плотности, кросс спектральная плотность.

Для двумерного ряда $x_t = [y_t, z_t]^T$ определим ***автоковариационную матричную*** функцию $\Gamma_j = E\left(x_t x_{t-j}^T\right)$, которая составлена из авто- и кросс - ковариаций. ***Спектральная матричная функция*** определяется следующим образом

$$S_x(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j}\Gamma_j = \begin{bmatrix} \sum_j e^{-i\omega j}\gamma_y(j) & \sum_j e^{-i\omega j}E(y_t z_{t-j}) \\ \sum_j e^{-i\omega j}E(z_t y_{t-j}) & \sum_j e^{-i\omega j}\gamma_z(j) \end{bmatrix}$$

На главной диагонали стоят спектральные функции компонент y_t и z_t. Вне диагонали стоят, так называемые, ***кросс - спектральные функции***

$$S_{yz}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E(y_t z_{t-j}).$$

Напомним, что мы использовали свойство симметрии автоковариационной функции, чтобы показать, что спектральная функция вещественна и симметрична по ω. Однако, не верно, что $E\left(y_t z_{t-j}\right) = E\left(z_t y_{t-j}\right)$, поэтому кросс - спектральная функция не обязательно вещественная, симметричная или неотрицательная. Но она обладает следующим свойством

$$S_{yz}(\omega) = \overline{S_{zy}(\omega)} = S_{zy}(-\omega).$$

В самом деле,

$$S_{yz}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E(y_t z_{t-j}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E(z_t y_{t+j}) = (-j \Rightarrow k) =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k} E(z_t y_{t-k}) = \overline{S_{zy}(\omega)} = S_{zy}(-\omega).$$

Как и для любого преобразования Фурье, мы можем написать обратное преобразование Фурье

$$E\left(y_t z_{t-j}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j}\, S_{yz}(\omega) d\omega.$$

В частности, при $j = 0$ получим

$$E(y_t z_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{yz}(\omega) d\omega.$$

Спектральная функция суммы.

Напомним, что дисперсия суммы двух случайных величин равна $Var(\xi+\eta) = Var(\xi) + Var(\eta) + 2Cov(\xi,\eta)$. Спектральные функции обладают похожим свойством

$$S_{x+y}(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E(x_t + y_t)\left(x_{t-j} + y_{t-j}\right) =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E\left(x_t x_{t-j}\right) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E\left(y_t y_{t-j}\right) +$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E\left(x_t y_{t-j}\right) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega j} E\left(y_t x_{t-j}\right) = S_x(\omega) + S_y(\omega) +$$

$$S_{xy}(\omega) + S_{yx}(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega) + S_{xy}(\omega) + \overline{S_{xy}(\omega)} =$$

$$S_x(\omega) + S_y(\omega) + 2Re[S_{xy}(\omega)]$$

В частности, если ряды x_t и y_t некоррелированы (или, тем более, независимы) при всех сдвигах «вперёд» и «назад», то их спектральные функции складываются

$$S_{x+y}(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega).$$

Фильтрация.

Будем говорить, что ряд y_t получен ***фильтрацией*** ряда x_t, если

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j x_{t-j} = b(L)x_t, \;\; b(L) = \sum\nolimits_j b_j L^j.$$

Найдём автоковариационную функцию y_t по известной автоковариационной функции x_t.

$$\gamma_k(y) := E(y_t y_{t-k}) = E\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j x_{t-j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l x_{t-k-l}\right) =$$

$$\sum_{j,l} b_j b_l E(x_{t-j}\, x_{t-k-l}) = \sum_{j,l} b_j b_l \gamma_{k+l-j}(x). \qquad (5)$$

Формула довольно сложна. Однако формула для преобразования ***спектральной функции*** при фильтрации оказывается очень простой

$$S_y(\omega) = \left|b(e^{-i\omega})\right|^2 S_x(\omega), \qquad (6)$$

где $b(e^{-i\omega})$ - удобное обозначение для преобразования Фурье коэффициентов фильтра b_j, то есть $b\left(e^{-i\omega}\right) = \sum_j e^{-i\omega j}\, b_j$.
Докажем формулу (6). По формуле (5)

$$S_y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} \gamma_k(y) = \sum_{k,j,l} e^{-i\omega k}\, b_j b_l \gamma_{k+l-j}(x).$$

Положим $h = k + l - j,$ тогда $k = h - l + j$

$$S_y(\omega) = \sum_{h,j,l} e^{-i\omega(h-l+j)}\, b_j b_l \gamma_h(x) = \sum\nolimits_j e^{-i\omega j} b_j \sum\nolimits_l e^{i\omega l} b_l \times$$

$$\sum\nolimits_h e^{-i\omega h} \gamma_h(x) = b\left(e^{-i\omega}\right)\overline{b(e^{-i\omega})}\, S_x(\omega) = \left|b(e^{-i\omega})\right|^2 S_x(\omega).$$

Фильтр

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j x_{t-j} = b(L) x_t$$

связывает исходный ряд x_t и полученный в результате фильтрации ряд y_t довольно сложным образом. Однако, формула, связывающая $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$, выглядит так же, как и скалярная формула $y = bx \implies Var(y) = b^2 Var(x)$. Это показывает, почему удобно работать с преобразованиями Фурье: ***сложные операции во временной области переходят в простое умножение в частотной области.***

Векторная версия формулы фильтрации является естественным обобщением скалярной версии.

$$y_t = B(L)x_t \Rightarrow S_y(\omega) = B\left(e^{-i\omega}\right)S_x(\omega)B\left(e^{-i\omega}\right)^T.$$

Спектральная функция произвольного процесса MA(∞).

Поскольку MA(∞) представление выражает любой временной ряд в виде линейного фильтра белого шума, использование вышеприведённой формулы позволяет вывести спектральную функцию ***любой* ARMA модели**, представленной её ***разложением Вольда.***

$$x_t = \theta(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

По формуле для фильтра (6)

$$S_x(\omega) = \theta\left(e^{-i\omega}\right)\overline{\theta(e^{-i\omega})}\sigma_\varepsilon^2.$$

Таким образом, мы теперь знаем, как находить спектральную функцию ***любого*** стационарного процесса. Например, для $MA(1)$, $x_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$, имеем

$$S_x(\omega) = \left(1+\theta e^{-i\omega}\right)\left(1+\theta e^{i\omega}\right)\sigma_\varepsilon^2 =$$

$$\left(1+\theta\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)+\theta^2\right)\sigma_\varepsilon^2 = (1+2\theta\cos\omega+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2,$$

То есть получаем более простым путем ту же формулу, которая была получена выше прямым подсчётом.

Фильтрация и МНК.

Рассмотрим модель

$$y_t = b(L)x_t + \varepsilon_t, \qquad E\left(x_t\varepsilon_{t-j}\right) = 0 \text{ для всех } j.$$

Учитывая то, что спектральные функции некоррелированных процессов складываются и применяя формулу (6), получим

$$S_y(\omega) = S_{b(L)x}(\omega) + S_\varepsilon(\omega) = \left|b(e^{-i\omega})\right|^2 S_x(\omega) + S_\varepsilon(\omega). \qquad (7)$$

Эта модель аналогична регрессионной модели $y_t = x_t\beta + \varepsilon_t$ с некоррелированными x_t и ε_t, где для дисперсий получаем аналогично (7)

$$\sigma_y^2 = \beta^2\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

и вытекающую отсюда формулу для R^2. Таким образом, формула (7) даёт R^2- разложение, показывающая какой вклад в дисперсию y на *каждой частоте* ω даёт x и какой вклад на этой же частоте даёт ε. Интересно то, что первое слагаемое разложения (7) связано с кросс-спектральной функцией

$$S_{yx}(\omega) = b\left(e^{-i\omega}\right)S_x(\omega). \qquad (8)$$

В самом деле, используем определение и сделаем замену в индексах

$$S_{yx}(\omega) = \sum_k e^{-i\omega k} E(y_t x_{t-k}) = \sum_k e^{-i\omega k} \sum_j b_j E\left(x_{t-j}x_{t-k}\right) =$$

$$\sum_k e^{-i\omega k} \sum_j b_j \gamma_{k-j}(x).$$

Положим $l = k - j,$ то есть $k = l + j$. Получим

$$S_{yx}(\omega) = \sum_k e^{-i\omega(l+j)} \sum_j b_j \gamma_l(x) = \sum_j e^{-i\omega j} b_j \sum_l e^{-i\omega l}\gamma_l(x) =$$

$$b\left(e^{-i\omega}\right)S_x(\omega).$$

Эта формула имеет ряд следствий. Во-первых, разделив, получим $b\left(e^{-i\omega}\right) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_x(\omega)}$. Эта формула аналогична формуле для коэффициента одномерной регрессии $\beta = \frac{Cov(y,x)}{Var(x)}$. Мы снова видим, что спектральное представление сводит сложную динамику во временной области к простому представлению в частотной области. Во-вторых, мы можем следующим образом ***оценить коэффициенты полинома лага,*** используя обратное преобразование Фурье

$$b_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} b\left(e^{-i\omega}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j} \frac{S_{yx}(\omega)}{S_x(\omega)} d\omega.$$

Эта оценка известна как «оценка Хэннана». В-третьих, мы можем использовать (8) для изучения кросс-спектральной функции. Например, если $x_t = \varepsilon_t, \sigma_\varepsilon^2 = 1,$ и задана фильтрация $y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j x_{t-j} = x_{t-1}$, то

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) = 1, b\left(e^{-i\omega}\right) = e^{-i\omega} b_1 = e^{-i\omega}$$

и по формуле (8)

$$S_{yx}(\omega) = b\left(e^{-i\omega}\right) S_x(\omega) = e^{-i\omega}.$$