Лекция 7. Цепи Маркова.

7.1 Цепи Маркова и случайные процессы.

Случайный процесс – это совокупность случайных величин $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega\}, X_t(\omega): \Omega \to E$, где переменная t интерпретируется как «время». Множество E называется ***пространством состояний*** процесса. Время может быть как дискретным, в этом случае $T = N = 0,1,2, \dots$ *или* $Z = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ так и непрерывным, когда T может быть конечным или бесконечным интервалом вещественной прямой R. В первом случае говорят о *процессе **с дискретным временем***, а во втором – *с* ***непрерывным временем.*** Примером процесса с дискретным временем является ежедневная сводка погоды (в этом случае $t = 1,2, \dots$ и X_t принимает значения в множестве $E = \{солнечно, пасмурно\}$). Примеры процессов с непрерывным временем: X_t – это число клиентов, пришедших к окну обслуживания до момента t или X_t - это положение в момент t молекулы в газе и.т.д. Чтобы задать такой процесс, достаточно задать для любого n и любой возрастающей последовательности моментов времени

$$s_1 < \dots < s_n$$

закон распределения вектора $(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$. Распределения такого вида часто называют ***конечномерными распределениями процесса*** X_t. Случайный процесс X_t называется ***строго стационарным (или стационарным в узком смысле),*** если для всех n и $(t, s_1, \dots, s_n)$ закон распределения случайного вектора

$$(X_{t+s_1}, \dots, X_{t+s_n})$$

не зависит от t (но, конечно, может зависеть от $s_1, \dots, s_n$). Другими словами, процесс стационарный, если все его конечномерные распределения ***инвариантны относительно сдвига по времени***. Одна из основных целей этого раздела – показать, что всякий «разумный» процесс Маркова асимптотически стабилизируется, то есть сходится при $t \to \infty$ в некотором смысле (который будет уточнён) к стационарному процессу.

Цепь Маркова - это один из важных примеров стохастических процессов. Мы ограничимся в этом курсе рассмотрением простейшего класса цепей Маркова, а именно: ***однородных цепей Маркова с дискретным временем и конечным или счетным пространством состояний E*** (то есть все состояния пространства E можно перенумеровать, чем мы и будем пользоваться и отождествлять состояния цепи с присвоенными им номерами). Для простоты мы будем рассматривать случай конечного числа состояний, однако практически все результаты почти автоматически переносятся на случай бесконечного счетного числа состояний. Соответствующий случайный процесс мы будем обозначать X_n.

Определение 7.1. *Цепью Маркова с дискретным временем называется случайный процесс $X_0, \dots, X_n, \dots$, удовлетворяющий условию: для любого n и для любых состояний $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$ условная вероятность*

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

зависит только от i, j и n. Цепь Маркова называют ***однородной,*** *если эта вероятность зависит от i и j, но не зависит от n. Другими словами, для однородной цепи Маркова состояние системы в будущем (в момент $n+1$) при фиксированном настоящем (момент n) не зависит от её состояний в прошлом (в моменты $0 \le k \le n-1$). Обозначим*

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

и назовём эту вероятность ***переходной вероятностью из состояния i в состояние j****. Закон распределения X_0 называется* ***начальным законом распределения*** *цепи (или кратко –* ***начальным распределением*** *цепи).*

Будем обозначать через $\mathcal{F}\{X_i, i \ge 0\}$ (или $\sigma\{X_i, i \ge 0\}$) сигма-алгебру, порождённую всеми событиями вида $(X_i \in I_i), i \ge 0$, $I_i -$ открытый интервал R. В дальнейшем будем предполагать, что X_i ***принимает конечное число r значений.***

Важное свойство цепей Маркова состоит в том, что ***они полностью определяются заданием начального распределения X_0 и переходных вероятностей за один шаг***

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

«Определяются» в том смысле, что знание начального распределения и переходных вероятностей за один шаг позволяет найти закон распределения случайного вектора

$$\left(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}\right)$$

для всех n и для всех возрастающих последовательностей времён $s_1, \dots, s_n$. В самом деле, верна следующая теорема.

Теорема 7.1.

а) Обозначим через $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ закон распределения X_n, пусть $p^{(n)}$ – соответствующая вектор-строка, $p^{(n)} = \left(p_1^{(n)}, \dots, p_r^{(n)}\right)$. Пусть P - матрица переходных вероятностей цепи за один шаг, то есть $r \times r$ - матрица P, элементами которой являются p_{ij}

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Тогда для всех k

$$p^{(n+k)} = p^{(k)} P^n.$$

Таким образом, закон распределения X_0 *и переходные вероятности* p_{ij} *определяют закон распределения* X_n *(достаточно положить в последнем равенстве* $k = 0$*).*

b) *Для всех состояний* $i_{s_1}, i_{s_2}, \dots, i_{s_n}$ *пространства* $E = \{1,2,\dots,r\}$ ($s_1 < s_2 < \dots < s_n$)

$$\boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}\right) = \boldsymbol{P}\left(X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_2} = i_{s_2} | X_{s_1} = i_{s_1}\right) \times \dots \times \boldsymbol{P}\left(X_{s_n} = i_{s_n} | X_{s_{n-1}} = i_{s_{n-1}}\right).$$

Эта «цепная» зависимость оправдывает название – цепь Маркова. Таким образом, применяя Теорему 7.1 к правой части последнего равенства, получим, что закон распределения случайного вектора

$$\left(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}\right)$$

полностью определяется законом распределения X_0 и переходными вероятностями ***за один шаг***.

Упражнение. Доказать, что матрица перехода за k шагов однородной цепи Маркова, т.е. матрица, элементами которой являются $p_{ij}^{(k)}$

$$p_{ij}^{(k)} = \boldsymbol{P}(X_{n+k} = j | X_n = i)$$

равна P^k, где P - матрица перехода за один шаг.

Доказательство Теоремы 7.1.

a) Достаточно заметить, что

$$p_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = k) = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = k) \boldsymbol{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{r} p_k^{(n)} p_{kj},$$

что в матричном виде записывается как

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} P.$$

Итерируя последнее равенство, получим a).

b) Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 7.1. *Если* A *– событие, принадлежащее сигма-алгебре «прошлого»* $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$, *то*

$$\boldsymbol{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n, A) = \boldsymbol{P}(X_{n+k} = i_{n+k} | X_n = i_n).$$

Доказательство. Мы знаем, что эта формула верна, когда $k = 1$ и A – событие вида

$$C = \{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}$$

(в этом случае это просто определение цепи Маркова). Так как пространство состояний конечно, то любое событие A из $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ является конечным объединением непересекающихся событий C_l вида C, рассмотренного выше, то есть $A = \cup_l C_l$. Имеем:

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, A) = \frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, A)}{\boldsymbol{P}(X_n = i_n, A)} =$$

$$\sum_l \frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, C_l)}{\boldsymbol{P}(X_n = i_n, A)} =$$

$$\sum_l \frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, C_l)}{\boldsymbol{P}(X_n = i_n, A)} \boldsymbol{P}(X_n = i_n, C_l) =$$

$$\sum_l \frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)}{\boldsymbol{P}(X_n = i_n, A)} \boldsymbol{P}(X_n = i_n, C_l) =$$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \sum_l \frac{\boldsymbol{P}(X_n = i_n, C_l)}{\boldsymbol{P}(X_n = i_n, A)} =$$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

(переход от 3-ей строки к 4-ой следует из определения цепи Маркова). Таким образом, мы доказали лемму для $k = 1$. Докажем теперь лемму для произвольного k индукцией по k. Предположим, что лемма верна для некоторого k (при этом момент n, связанный с «настоящим», может быть любым, $n = 0,1,2, \dots.$, а событие A - любое событие из сигма - алгебры «прошлого» $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$) и докажем её справедливость для $k + 1$. Имеем

$$\boldsymbol{P}\big(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1} | X_n = i_n, A\big) =$$

$$\sum_{j \in E} \boldsymbol{P}(X_{n+k+1} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, X_n = i_n, A) \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n, A)$$

(5)

Применим теперь гипотезу индукции с новым «настоящим» $n' = n + 1$ и новым «прошлым» $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)$. Рассмотрим $A' = \{X_n = i_n\} \cap A$, очевидно, $A' \in \mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n)$. Получим для $j \in E$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+k+1} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, X_n = i_n, A) =$$

$$\boldsymbol{P}\big(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, A'\big) =$$

$$\boldsymbol{P}\big(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j\big).$$

Применим доказанное выше с $k = 1$, n и A ко второму сомножителю в сумме (5), получим

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n, A) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n).$$

Окончательно имеем:

$$\boldsymbol{P}\big(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1} | X_n = i_n, A\big) =$$

$$\textstyle\sum_{j \in E} \boldsymbol{P}\big(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j\big) \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n). \tag{6}$$

Согласно предположению индукции (с «настоящим» $n + 1$), в первом сомножителе суммы правой части (6) в условие можно добавить событие $\{X_n = i_n\}$ из $\sigma-$ алгебры «прошлого» $\mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_n)$, от этого условная вероятность не изменится. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}\big(X_{n+(k+1)} = i_{n+k+1} | X_n = i_n, A\big) =$$

$$\sum_{j \in E} \boldsymbol{P}\big(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_{n+1} = j, X_n = i_n\big) \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n) =$$

$$\sum_{j \in E} \frac{\boldsymbol{P}\big(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1}, X_{n+1} = j, X_n = i_n\big)}{\boldsymbol{P}(X_n = i_n)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}\big(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1}, X_n = i_n\big)}{\boldsymbol{P}(X_n = i_n)} =$$

$$\boldsymbol{P}\big(X_{(n+1)+k} = i_{n+k+1} | X_n = i_n\big).$$

Лемма доказана.

Чтобы теперь доказать b), достаточно заметить, что

$$\boldsymbol{P}\big(X_{s_n} = i_{s_n}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}\big) = \boldsymbol{P}\big(X_{s_1} = i_{s_1}\big) \times \boldsymbol{P}\big(X_{s_2} = i_{s_2} | X_{s_1} = i_{s_1}\big) \times$$

$$\boldsymbol{P}\big(X_{s_3} = i_{s_3} | X_{s_2} = i_{s_2}, X_{s_1} = i_{s_1}\big) \times \dots \times \boldsymbol{P}\big(X_{s_n} = i_{s_n} | X_{s_{n-1}} = i_{s_{n-1}}, \dots, X_{s_1} = i_{s_1}\big)$$

и применить лемму к каждому из сомножителей начиная с третьего (т.е. у каждого из сомножителей отбросить прошлое).

7.2. Марковское свойство.

В этом параграфе мы докажем две теоремы, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем.

Теорема 7.2. *Пусть* $n \geq 1$, $A \in \mathcal{F}(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$ *и* $B \in \mathcal{F}(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$. *Тогда для любого* $i \in E$ *имеем*

$$\boldsymbol{P}(B | X_n = i, A) = \boldsymbol{P}(B | X_n = i).$$

Это свойство интерпретируют следующим образом: ***«будущее» не зависит от «прошлого» при фиксированном «настоящем».***

Доказательство. Из Леммы 7.1 следует, что утверждение теоремы верно для любого события B вида $\{X_{n+k} = j\}$. Покажем, что теорема верна для событий B вида

$$B = \left\{X_{n+k_1} = j_1\right\} \cap \left\{X_{n+k_2} = j_2\right\} \cap \dots \cap \left\{X_{n+k_p} = j_p\right\},$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p$. Имеем:

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p} = j_p, \dots, X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A\right) =$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p} = j_p | X_{n+k_{p-1}} = j_{p-1}, \dots, X_{n+k_1} = j_1, X_n = i, A\right) \times$$

$$\dots \times \boldsymbol{P}\big(X_{n+k_2} = j_2 | X_{n+k_1} = j_1, X_n = i, A\big) \boldsymbol{P}\big(X_{n+k_1} = j_1 | X_n = i, A\big).$$

Применив Лемму 7.1 к каждому сомножителю, получим

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p}=j_p,\dots,X_{n+k_1}=j_1|X_n=i,A\right)=$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_p}=j_p|X_{n+k_{p-1}}=j_{p-1}\right)\times\dots\times\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_2}=j_2|X_{n+k_1}=j_1\right)\times$$

$$\boldsymbol{P}\left(X_{n+k_1}=j_1|X_n=i\right). \qquad (7)$$

Последнее равенство показывает (следует применить Теорему 7.1 b), к правой части (7), разделив и помножив предварительно правую часть (7) на $P(X_n=i)$), что теорема 7.2 верна для событий $B,$ которые являются цилиндрическими множествами. Эти цилиндрические множества образуют ***полукольцо с единицей.*** Напомним определения полукольца с единицей, монотонного класса и теорему о монотонном классе:

Определение. Семейство Φ подмножеств множества Ω называется *полукольцом с единицей,* если:

1. $\Omega\in\Phi$;
2. Если $A,B\in\Phi$, то и $A\bigcap B\in\Phi$;
3. Для любого множества $A\in\Phi$ его дополнение $\Omega\setminus A$ может быть представлено как объединение конечного числа попарно не пересекающихся элементов семейства Φ.

Определение. Пусть (Ω,Σ,μ) – пространство с мерой. Семейство $\mathrm{M}\subset\Sigma$ называется *монотонным классом множеств*, если оно подчиняется следующим аксиомам:

A. Если $A,B\in\mathrm{M}$, $A\bigcap B=\varnothing$, то $A\bigcup B\in\mathrm{M}$.
B. Если $A,B\in\mathrm{M}$, $A\subset B$, то $B\setminus A\in\mathrm{M}$.
C. Если $A,B\in\mathrm{M}$, $A\subset B$ и $\mu(B)=0$, то $A\in\mathrm{M}$.
D. Если $A_1,A_2,\dots,A_n,\dots\in\mathrm{M}$ – возрастающая цепочка множеств, то $\bigcup\limits_1^\infty A_n\in\mathrm{M}$.

Теорема (о монотонном классе множеств). Пусть (Ω,Σ,μ) - пространство с мерой, полученное продолжением меры μ с некоторого полукольца с единицей $\Phi\subset\Sigma$. Пусть, далее, $\mathrm{M}\subset\Sigma$ - монотонный класс множеств, содержащий все элементы полукольца Φ. Тогда $\mathrm{M}=\Sigma$.

Нетрудно видеть, что совокупность событий B, для которых теорема 7.2 верна, является монотонным классом, содержащим, как было показано выше, все цилиндрические множества вида

$$\left\{\omega: X_{n+k_p}(\omega)=j_p,\dots,X_{n+k_1}(\omega)=j_1\right\}, 1\le k_1<k_2<\dots<k_p.$$

Совокупность всех таких цилиндрических множеств образует полукольцо с единицей. Из теоремы о монотонном классе следует, что эта совокупность совпадает с наименьшей сигма алгеброй, содержащей все цилиндрические множества такого вида, а это и есть $\mathcal{F}\left(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+p}, \dots\right)$.

Оператор сдвига. Рассмотрим цепь Маркова $X_k, k = 0, \pm 1, \dots$
Обозначим через $\mathcal{F}$ σ - алгебру $\mathcal{F}(X_k, k = 0, \pm 1, \dots)$.

Предложение 7.1. *Для любого $T \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ существует единственное $\mathcal{F}$ - измеримое отображение $\theta_T: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ такое, что для любых $n, s_1 < s_2 < \dots < s_n$ и любых $i_1, i_2, \dots, i_n \in E$*

$$\theta_T^{-1}\left(\omega: \left\{X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_n} = i_n\right\}\right) = \left\{\omega: X_{s_1+T} = i_1, \dots, X_{s_n+T} = i_n\right\}.$$

Оператор θ_T называют ***оператором сдвига*** *(этот оператор сдвигает каждую последовательность $\omega = (\dots \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots)$ на T единиц* ***влево****, а обратный оператор θ_T^{-1} —на T единиц* ***вправо****). Это также единственное $\mathcal{F}$ - измеримое отображение $\theta_T: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ для которого*

$$X_n \circ \theta_T := X_n\left(\theta_T(\omega)\right) = X_{n+T}(\omega).$$

для всех n.
Легко видеть, что

$$\theta_T = \theta^T := \underbrace{\theta \circ \theta \circ \dots \circ \theta}_{T \text{ раз}},$$

где $\theta = \theta_1$. Заметим также, что

$$\theta_T^{-1}\mathcal{F}(X_0, \dots, X_n) = \mathcal{F}(X_T, \dots, X_{n+T}).$$

Можно применять оператор сдвига и к случайным величинам: если Y – случайная величина, то можно определить случайную величину $Y \circ \theta_T$. Для ***однородных*** цепей Маркова справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3. *Для любых событий $B \in \mathcal{F}(X_k: k \geq m)$, $i \in E$*

$$\boldsymbol{P}(\theta_1^{-n}B | X_{m+n} = i) = \boldsymbol{P}(B | X_m = i).$$

Здесь $\theta_1^{-n}B \in \mathcal{F}(X_k: k \geq m + n)$. Эта теорема показывает, что если событие B и событие в условии «сдвинуты» в будущее на одно и то же число n, то условная вероятность остаётся неизменной.

7.3. Независимые сигма-алгебры.

Определение 7.2. *Семейство сигма-алгебр $\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in A$, называется* ***независимым****, если для* ***любого конечного*** *подсемейства $\mathcal{F}_{\alpha_k}, k = 1, \dots, r$ и всех $A_{\alpha_k} \in \mathcal{F}_{\alpha_k}$ имеем:*

$$\boldsymbol{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{\alpha_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} \boldsymbol{P}(A_{\alpha_k}).$$

Посмотрим, как это понятие связано с понятием независимости случайных величин. Если задана последовательность с.в. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, то можно рассмотреть сигма-алгебру $\mathcal{F}(X_i; i \geq 1)$, которая является сигма-алгеброй, порождённой событиями $X_i^{-1}(I)$, где $i \geq 1$ и I пробегает всевозможные интервалы вещественной прямой R. Нетрудно видеть, что это наименьшая сигма-алгебра, относительно которой измеримы все X_i. Последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независима, если независимы сигма - алгебры, порожденные отдельными X_i. Будем говорить, что ***с.в. X независима от сигма - алгебры $\mathcal{F}$*** если сигма-алгебра, порождённая X, не зависит от сигма алгебры $\mathcal{F}$ (в смысле определения 7.2).

Предложение 7.2.

a) *Если с.в.*

$$U_1, \dots, U_n, X$$

независимы, то X не зависит от $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

b) *Если $U_1, U_2, \dots, U_n$ - последовательность с.в. и $X = F(U_1, U_2, \dots, U_n)$, то*

$$\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n, X) = \mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n).$$

Доказательство. Для доказательства a) достаточно доказать следующую более общую лемму.

Лемма 7.2. *Пусть $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}$, семейство независимых событий (т.е. индикаторные функции событий A_α для разных α независимы как случайные величины). Пусть $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ разбиение $\mathcal{E}$. Тогда сигма-алгебры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ независимы, где $\mathcal{F}_i$ сигма-алгебра, порождённая событиями $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_i, i =$* 1,2.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество тех событий A, для которых ***для всех*** $B \in \{A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2\}$ имеем

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B). \tag{8}$$

Легко проверить, что $\mathcal{C}$ образует сигма - алгебру (т.е. $\Omega \in \mathcal{C}, \emptyset \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}$ замкнуто относительно взятия дополнений и счётных объединений непересекающихся множеств). Эта сигма–алгебра, по предположению леммы, содержит $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_1$. Поскольку $\mathcal{F}_1$ порождена событиями $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_1$, получаем, что $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{C}$, то есть равенство (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1$ и всех B вида $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$. Обозначим теперь через $\mathcal{D}$ множество тех B, для которых (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1$. Это также сигма-алгебра, содержащая, как мы только что доказали, $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$ и, следовательно, содержащая наименьшую сигма-алгебру, порождённую $A_\alpha, \alpha \in \mathcal{E}_2$, то есть $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{D}$. Таким образом, (8) верно для всех $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$.

Доказательство b) очевидно, поскольку любое событие вида $X^{-1}(I)$ принадлежит $\mathcal{F}(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

7.4. Матрицы перехода и начальные распределения.

Определение 7.3. *$r \times r$ матрица $P = \| P_{ij} \|$ с вещественными коэффициентами называется **стохастической**, если для всех $1 \le i, j \le r$ имеем:*

a) $0 \le P_{ij} \le 1$.

b) для всех i сумма элементов i- ой строки равна единице:

$$\sum_{j=1}^{r} P_{ij} = 1.$$

Доказательство следующего предложения основано на теореме А.Н. Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями. Мы его приводим без доказательства.

Предложение 7.3. *Пусть P стохастическая матрица. Для любого закона распределения μ на пространстве состояний E существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P_\mu)$ и последовательность с.в. $(X_n)_{n\ge0}$ такая, что (X_n) является цепью Маркова, для которой матрица P является матрицей переходных вероятностей, а μ - начальным законом распределения.*

7.5. Цепь Маркова как стохастическая динамическая система.

Другое определение цепи Маркова с дискретным временем можно дать в терминах ***стохастических динамических систем.*** Пусть $(X_n)_{n\ge0}$ последовательность с.в., определённая соотношением

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n), n = 0,1,2, \dots, \quad (9)$$

где X_0 задана и

$$X_0, U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$$

является последовательностью независимых случайных величин, U_i принимают значения в множестве B и $F: E \times B \to E$ - измеримое отображение. Следующая лемма является прямым следствием Предложения 7.2.

Лемма 7.3. Пусть задана стохастическая динамическая система (9). Тогда U_n *независима от сигма-алгебры* $\mathcal{F}(X_n, \dots, X_0) \subset \mathcal{F}(X_0, U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$.

Обозначим для всех $i, j \in E$

$$T_{i\to j} := \{b \in B, F(i, b) = j\}.$$

Имеем, используя независимость U_n *и* X_n,

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} = \frac{\boldsymbol{P}(F(i, U_n) = j, X_n = i)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}\big(U_n \in T_{i\to j}, X_n = i\big)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} = \frac{\boldsymbol{P}\big(U_n \in T_{i\to j}\big)\boldsymbol{P}(X_n = i)}{\boldsymbol{P}(X_n = i)} = \boldsymbol{P}\big(U_n \in T_{i\to j}\big). \tag{10}$$

Вычислим теперь

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$\frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}{P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)}. \tag{11}$$

Если обозначим через A событие в знаменателе (11)

$$A = (X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0),$$

то

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$\frac{\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, A)}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{P}(F(i, U_n) = j, X_n = i, A)}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{P}(U_n \in T_{i\to j}, A)}{\boldsymbol{P}(A)}$$

и, поскольку U_n независима от сигма-алгебры $\mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ и $A \in \mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$, имеем

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \boldsymbol{P}\big(U_n \in T_{i\to j}\big).$$

Таким образом, мы доказали (см. (10)), что для всех $i, j \in E$

$$\boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0),$$

что и означает, что (X_n) является цепью Маркова в смысле «старого» определения. Нетрудно доказать и обратное: всякая цепь Маркова $\{X_n\}$ с конечным числом состояний представима в виде стохастической динамической системы. Уточним сказанное. Введём вероятности перехода

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

и начальный закон распределения $p^{(0)}$ случайной величины X_0. Тогда для заданного семейства переходных вероятностей и начального закона распределения с.в. X_0 можно построить пространство B, функцию F и с.в. $U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ такие, что $X_0, U_0, U_1, \dots, U_n, \dots$ независимы и для $n = 0,1,2, \dots$ выполнено соотношение

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n).$$

Пример 1. Рассмотрим процесс

$$X_{n+1} = \alpha X_n + U_n.$$

Если ошибки $U_n, n = 0,1,2, \dots$ независимы между собой и независимы от начального значения процесса X_0, то процесс X_n является цепью Маркова. Здесь $F(x, u) = \alpha x + u$ - линейная функция.

Пример 2. Пусть $U_n, n = 0,1,2, \dots$последовательность независимых случайных величин, $S_0 = 0, S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}, n \geq 1$. Тогда

$$S_{n+1} = S_n + U_n.$$

В этом случае $F(x, u) = x + u$. Процесс частичных сумм является цепью Маркова.