Вопросы по курсу «Случайные процессы и моделирован»

1. Необходимые сведения из теории вероятностей.

1.1. Вероятностные пространства. Основные определения.
1.2. Случайные величины. Простые случайные величины.
1.3. Аппроксимация случайных величин простыми случайными величинами.
1.4. Математические ожидания. Один полезный результат.
1.5. Функции распределения и плотности. Как проверить что $X \sim f$?
1.6. Независимость случайных величин.
1.7. Лемма Дуба-Дынкина. Примеры.

Резюме: Разбираются некоторые часто встречающиеся заблуждения относительно нормальных распределений. Типичные ошибки: на вопросы

1. Является ли сумма двух стандартных нормальных величин нормальной случайной величиной?
2. Следует ли из некоррелированности двух стандартных нормальных величин их независимость?

часто можно услышать положительный ответ.

2. Краткий обзор основных понятий и теорем теории вероятностей.

2.1. Математическое ожидание и дисперсия. Формула перехода, плотность.
2.2. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости, теорема Леви о монотонной сходимости. Лемма Фату.
2.3. Лемма Бореля - Кантелли, неравенство Маркова, неравенство Чебышева, неравенство Колмогорова.
2.4. Производящие функции, характеристические функции, их основные свойства.
2.5. Независимость случайных величин и сигма - алгебр.
2.6. Разные виды сходимости случайных величин и связь между ними.
2.7. Классические примеры законов распределения.

Резюме: Цель второй части курса – напомнить необходимые факты теории вероятностей, которые будут использоваться на протяжении всего курса. Приведены основные теоремы, неравенства и понятия теории вероятностей. Обсуждаются различные виды сходимости случайных величин и связь между этими видами сходимости. Дается список классических законов распределения. Обратить особое внимание на лемму Фату и лемму Бореля - Кантелли, которые даются с доказательствами

3. Условные математические ожидания. Первые примеры моделирования.

3.1. Условное математическое ожидание относительно сигма-алгебры.
3.2. Свойства условных математических ожиданий. Примеры.
3.3. Моделирование случайных величин. Исходные предпосылки.
3.4. Первые примеры моделирования: распределение Бернулли, равномерное распределение.

3.5. Моделирование с помощью функции распределения. Дискретное распределение, биномиальное распределение.

Резюме: В этой части курса даются первые примеры моделирования: моделирование равномерных распределений, распределений Бернулли, биномиального, полиномиального распределений.

4. Генерирование случайных чисел. Метод обращения, моделирование закона Пуассона.

4.1 Псевдослучайные числа. Мультипликативный метод генерирования.
4.1. Распределения, задаваемые своими функциями распределения. Метод обращения. Обобщенная обратная функция.
4.2. Моделирование экспоненциального закона.
4.3. Моделирование закона Пуассона.

Резюме: Излагается простейший общий метод моделирования – метод обращения функций распределения. Для этого вводится понятие обобщенной обратной функции распределения, обсуждаются ее свойства. Затем, применяя метод обращения, объясняется как моделировать экспоненциальный закон распределения. Показывается, как с помощью последовательности независимых экспоненциально распределенных случайных величин можно моделировать закон Пуассона. Здесь используется другой принцип моделирования, «принцип первого перескока». Все вычисления подробно проведены, строгое доказательство основано на свойствах условных математических ожиданий, в конечном итоге на Лемме Дуба-Дынкина.

5. Моделирование случайной величины, заданной плотностью распределения.

5.1. Метод выборки с отклонением.
5.2. Обобщение метода выборки с отклонением.
5.3. Моделирование равномерного распределения в более сложных областях пространства R^d: на сфере, в открытом диске $D(0,1)$ плоскости.
5.4. Моделирование нормальных законов распределения. Метод Бокса-Мюллера.

Резюме: Дается детальное изложения метода выборки с отклонением. Приводятся полные доказательства. Рассматривается обобщение метода. Помимо метода выборки с отклонением в этом разделе изложены методы моделирования равномерного распределения в сложных областях пространства $R^d, d > 1,$ а также метод Бокса-Мюллера моделирования нормального распределения.

6. Метод Монте-Карло.

6.1. Методы численного интегрирования: метод прямоугольников, трапеций Симпсона.
6.2. Преимущества вероятностных алгоритмов. Метод Монте-Карло.
6.3. Роль закона больших чисел и центральной предельной теоремы в методе Монте - Карло.
6.4. Неравенство Берри-Эссеена. Оценка точности метода Монте-Карло.
6.5. Варианты метода.

Резюме: Раздел целиком посвящен методу Монте-Карло численного интегрирования. Дается краткий обзор основных методов численного интегрирования. Затем объясняется, зачем нужны вероятностные алгоритмы численного интегрирования, и метод Монте-Карло сравнивается с методами численного интегрирования. Хорошо известно, что для больших размерностей метод Монте-Карло является вполне конкурентоспособным с методами численного интегрирования, а в некоторых приложениях применение этого метода неизбежно. Отличительной особенностью нашего изложения является применение неравенства Берри - Эссеена для оценки точности метода. Это неравенство позволяет строить асимптотические доверительные полосы для интеграла, который вычисляется. Выбор необходимого объема выборки для достижения заданной точности может быть сделан исходя из теории доверительных интервалов.

7. Марковские процессы с конечным пространством состояний.

7.1. Полугруппы переходных матриц, инфинитезимальная матрица.
7.2. Стационарное распределение. Эргодическая теорема (б/д).
7.3. Прямая и обратная система уравнений А. Н. Колмогорова.
7.4. Прямая конструкция марковского процесса с конечным множеством состояний.

Резюме: Изучены основные свойства марковских процессов с конечным множеством состояний. Уметь выводить прямую и обратную системы уравнений А. Н. Колмогорова. Уметь объяснить прямую конструкцию марковского процесса с конечным множеством состояний.

8. Элементы теории случайных процессов.

8.1. Процессы с независимыми приращениями (процессы Леви). Определение и основные свойства. Примеры.
8.2. Процесс Пуассона и его основные свойства.
8.3. Винеровский процесс (броуновское движение) и его основные свойства.
8.4. Поток сигма-алгебр. Моменты остановки, определение и основные свойства. Примеры моментов остановки.
8.5. Мартингалы с дискретным и непрерывным временем. Теоремы о среднем остановленного мартингала в дискретном и непрерывном времени (непрерывное время б/д). Неравенство Дж. Дуба для мартингалов (дискретное время).

Резюме: Даны простейшие свойства наиболее важных классов случайных процессов: процессов Леви, в частности, винеровского процесса, пуассоновского процесса. Определено понятие потока сигма-алгебр, момента остановки относительно этого потока, рассмотрено понятие мартингала с дискретным и непрерывным временем, изучены их некоторые свойства.

9. Цепи Маркова.

9.1. Цепи Маркова и случайные процессы.
9.2. Марковское свойство.
9.3. Теорема о монотонном классе. Оператор сдвига.
9.4. Независимые сигма-алгебры.
9.5. Матрицы перехода и начальные распределения.
9.6. Цепь Маркова как стохастическая динамическая система.

Резюме: Дается достаточно сжатое, но строгое изложение основных понятий и фактов, связанных в цепями Маркова с конечным или счетным множеством возможных состояний. Этот материал изложен во многих учебниках по теории вероятностей.

10. Рекуррентность и транзитивность.

10.1. Времена возвращений и числа возвращений.
10.2. Неприводимость и апериодичность цепей Маркова.
10.3. Классификация состояний. Классы состояний. Период.
10.4. Случайное блуждание. Возвратность случайных блужданий.

Резюме: Понятия и определения, вводимые здесь, являются базовыми понятиями теории цепей Маркова с дискретным временем и с конечным или счетным множеством возможных состояний. Эти понятия изложены во многих учебниках по теории цепей Маркова. Следует обратить внимание на то, что разные авторы используют разную терминологию для одних и тех же понятий. Так, например, используют разные термины: «рекуррентное» состояние или «возвратное» состояние, «транзитивное» состояние или «невозвратное» состояние. Дается пять определений рекуррентных и транзитивных состояний, доказывается их эквивалентность. Подробно обсуждаются асимптотические свойства цепей Маркова, предельное поведение переходных вероятностей.

11. Стационарные распределения. Эргодическая теорема.

11.1. Неприводимые цепи Маркова.
11.2. Предельная теорема для конечных цепей Маркова.
11.3. Предельное поведение переходных вероятностей.
11.4. Эргодическая теорема.

Резюме: Рассмотрены важные вопросы асимптотического поведения цепей Маркова. Дано подробное доказательство теоремы о предельном поведении переходных вероятностей. Доказана теорема о сходимости к стационарному распределению. Рассмотрен ряд примеров. Сформулирована (без доказательства) эргодическая теорема для неприводимой апериодической стохастической матрицы. Сформулирована теорема об описании стационарных вероятностей в терминах средних времен возвращения.

12. Методы Монте-Карло для цепей Маркова (MCMC моделирование).

12.1. Обратимые цепи Маркова. Связь между обратимостью распределения и его стационарностью. Примеры: марковские цепи на графах, конфигурации, реализуемые конфигурации, марковские цепи на конфигурациях (гиббсовские ансамбли).
12.2. Идеология MCMC. Цепь Метрополиса и ее применение для моделирования распределения, заданного на конечном множестве вершин графа.

Резюме: Обсуждается метод Монте-Карло моделирования дискретного распределения, заданного на конечном множестве вершин графа. Показано несколько методов построения конечной неприводимой и апериодической цепи Маркова, для которой это распределение будет стационарным. Это позволяет применять к этой цепи теорему о сходимости к стационарному распределению и, тем самым приближенно (но с любой заданной точностью) моделировать это распределение.