

Ki-kare Analizleri

- 1- Uyum Testi
- 2-Homojenlik Testi
- 3-Bağımsızlık Testi

Örnek Olaylar-1 (Uyum)

1) Bir marketler zinciri, geliştirilen bir tavsiye sistemi algoritmasını devreye almak istemektedir. Öncesinde saha analizi yapmaya karar vermişlerdir. Bunun için 3 adet farklı bölgede bulunan mağzalarına yeni sistemi göndermişler ve kullanıp, kullanmama kararını onlara bırakmışlardır. Yönetim, mağzaların programı %60'nın devamlı, %30'nun bazen, %10'un ise çok az kullandığını düşünmektedirler. Bunun için mağzalar arasından 30 adetini seçip, incelemişler ve %65'nin devamlı, %20'sinin bazen ve %15'nin ise çok az kullandığını bulmuşlardır. Bu mağzalarının kullanım durumu, genel kullanım durumuna uyduğu söylenebilir mi?

Örnek Olaylar-2 (Homojenlik Testi)

2) Programın 3 farklı bölgedeki kullanım durumlarının aynı olup olmadığı araştırılmaktadır. Her 3 bölgeden alınan ayrı örneklemelerin sonucu aşağıdaki tabloda verimiştir.

	Devamlı	Bazen	Çok Az
Bölge-1	15	8	3
Bölge-2	14	6	4
Bölge-3	6	7	7

Örnek Olaylar-3 (Bağımsızlık Testi)

3) Programın kullanımı ile kar oranının artışı arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmak istenmektedir. Bölgelerden seçilen 100 adet mağaza örneği incelenmiş ve programı kullanma sıklıkları ile karlılık oranlarındaki artışların sayısını gösteren aşağıdaki tablo elde edilmiştir.

	<50	50<70	70<90	>=90
Devamlı	15	20	10	1
Bazen	12	19	5	3
Çok Az	2	5	5	3

Ki Kare Testi 3 Amaç için Kullanılabilir:

Ki-Kare Testleri

İyi Uyum Testi

Varsayımları:

1. Çokdeğerli kategorik veri
2. Tek bir örnek, birden çok ilgilenilen oran
3. Örnek oranları hakkında varsayılan oranların test edilmesi

Homojenlik Testi

Varsayımları:

1. Tek bir kategorik değişken
2. Her gruptan alınan ayrı birer örnek
3. Varsayılan oran yok
4. Bir grup için oranın diğer grup veya gruplar için de aynı olup olmadığının test edilmesi

Bağımsızlık Testi

Varsayımları:

1. İki kategorik değişken
2. Sadece tek örnek, oranlarla ilgili varsayım yok
3. Bir kategorik değişkenin diğeriyle ilişkili olup olmadığının test edilmesi

Ki-Kare Test İstatistiği nasıl hesaplanır?

A) Kİ-KARE DAĞILIMI VE ÖZELLİKLERİ

Örnekleme yoluyla elde edilen rakamların, anakütle rakamlarına uygun olup olmadığı; bir başka ifadeyle gözlenen değerlerin teorik(beklenen) değerlere uygunluk gösterip göstermediği ki-kare testi ile tespit edilir.

Standart normal değişken Z_i değerlerinin;

$$Z_i^2 = \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

şeklinde karesi alındığında, Z_i^2 değerlerinin dağılımı **ki-kare dağılımına** dönüşür.

X tesadüfi değişken dağılımından bir değer seçilip standart hale dönüştürülür ve karesi alınırsa X değişkeninin dağılımı ki-kare dağılımına dönüşür. Normal dağılım gösteren bir X tesadüfi değişken dağılımından tesadüfi ve birbirinden bağımsız olarak iki değer seçilsin. Seçilen değerleri;

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} \qquad Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}$$

şeklinde standart hale dönüştürülsün. Bu Z değerlerinin kareleri alınıp toplanırsa elde edilen $Z_1^2 + Z_2^2$ değişkeni ki-kare dağılımı gösterir. N adet örnek için bu prosedür takip edildiğinde;

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \dots + Z_n^2$$

değişkeni de ki-kare dağılımı gösterir.

Bir ki-kare dağılımı diğer ki-kare dağılımlarından serbestlik derecelerine göre ayrılır. Kareleri alınıp toplandığında , ki-kare dağılımı gösteren bağımsız standart normal değer sayısına **serbestlik derecesi** denir. Bir ki-kare dağılımının **ortalaması**, dağılımın serbestlik derecesine ve **varyansı**, serbestlik derecesinin iki katına eşittir. Mesela, serbestlik derecesi 10 olan bir ki-kare dağılımının ortalaması 10 ve varyansı 20'dir.

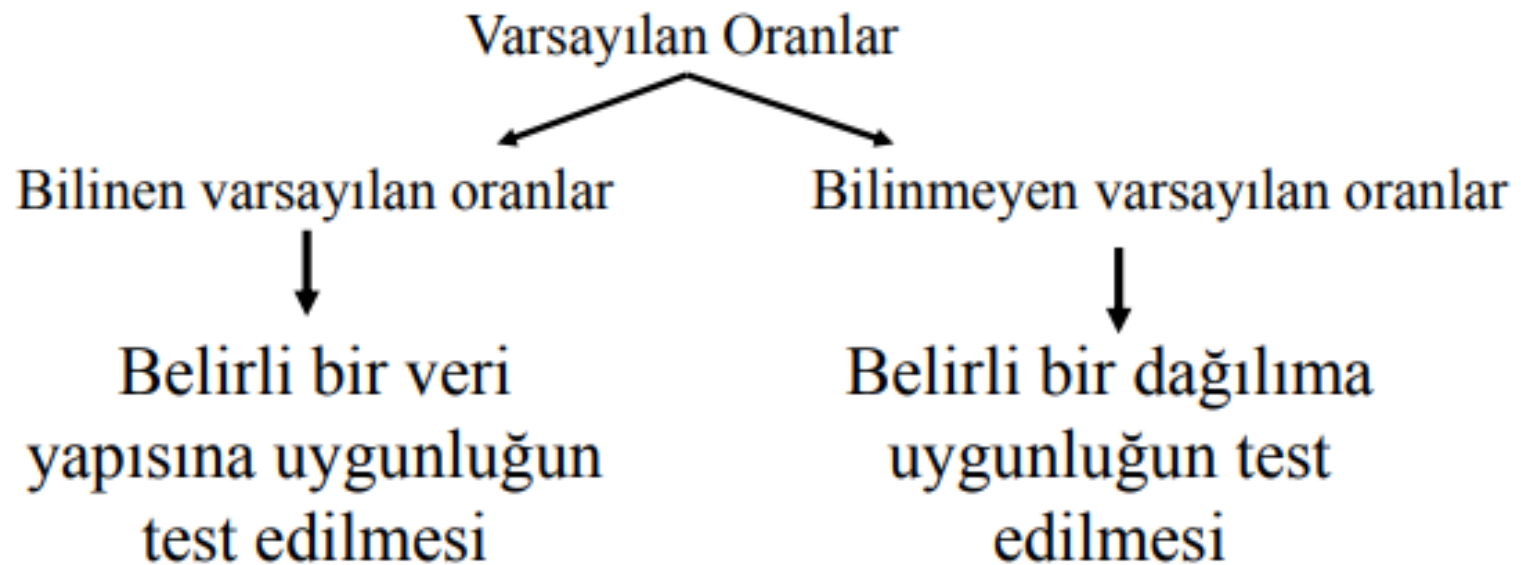
Ki-kare değişkeni, χ^2 sembolü ile gösterilir. Bir dağılımı diğerinden ayırmak için , bu sembole serbestlik derecesini gösteren bir indis eklenebilir. Böylece 1, 2 ve n serbestlik dereceleriyle ki-kare dağılımı gösteren değişkenler, χ^2_1 , χ^2_2 ve χ^2_n şeklinde gösterilebilir.

Ki-kare dağılımı sağa çarpıktır ve normalden daha diktir. N büyüdükçe merkezi limit teoreminin bir sonucu olarak diklik va asimetri azalır ve dağılım normale yaklaşır. Ki-kare değerleri 0 ile $+\infty$ arasında değişir.

Ki-Kare İyi Uyum Testi

Varsayımları:

1. Çok değerli kategorik veri (2'den fazla kategorisi olan kategorik değişken)
2. Tek bir örnek, birden çok ilgilenilen oran
3. Örnek oranları hakkında varsayılan oranların test edilmesi



HANGİ OLAY BU TEST İLE İLGİLİDİR?

Örnek Olaylar-1

1) Bir marketler zinciri, geliştirilen bir tavsiye sistemi algoritmasını devreye almak istemektedir. Öncesinde saha analizi yapmaya karar vermişlerdir. Bunun için 3 adet farklı bölgede bulunan mağzalarına yeni sistemi göndermişler ve kullanıp, kullanmama kararını onlara bırakmışlardır. Yönetim, mağzaların programı %60'nın devamlı, %30'nun bazen, %10'un ise çok az kullandığını düşünmektedirler. Bunun için mağzalar arasından 30 adetini seçip, incelemişler ve %65'nin devamlı, %20'sinin bazen ve %15'nin ise çok az kullandığını bulmuşlardır. Bu mağzalarının kullanım durumu, genel kullanım durumuna uyduğu söylenebilir mi?

	varsayılan oranlar	gözlenen oranlar
devamli	0.60	0.65
bazen	0.30	0.20
çok az	0.10	0.15

$H_0: \Pi_{\text{devamli}}=0.60, \Pi_{\text{bazen}}=0.30, \Pi_{\text{çok az}}=0.10$

H_1 : En az bir oran varsayılandan farklıdır.

$$H_0: \Pi_{\text{devamlı}}=0.60, \Pi_{\text{bazen}}=0.30, \Pi_{\text{çok az}}=0.10$$

H_1 : En az bir oran varsayılandan farklıdır.

Bu hipotez testini uygulamak için gözlenen ve beklenen arasındaki farkların büyüklüğüne bakmak gerekir. Bu farkların mutlak değeri ne kadar büyükse, sıfır hipotezi hakkında o kadar kuşkuya düşeriz. Sıfır hipotezi doğruyken ve örnek orta büyüklükteyken (beklenen değerlerin (E_i) herbiri en az 5 ise) , bu hipotez testi için aşağıdaki Ki-Kare test istatistiği kullanılır:

$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Gözlenen değer Beklenen değer

Bu test istatistiği, k-1 serbestlik dereceli tablo değeriyle karşılaştırılır.

Burada k: kategori sayısıdır.

$$\chi^2_{\text{tablo}} = \chi^2_{k-1, \alpha}$$

$$H_0: \Pi_{\text{devamli}}=0.60, \Pi_{\text{bazen}}=0.30, \Pi_{\text{çok az}}=0.10$$

H_1 : En az bir oran varsayılandan farklıdır.

$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Beklenen değer = örnek hacmi x beklenen olasılık $\rightarrow E_i = n \times p_i$

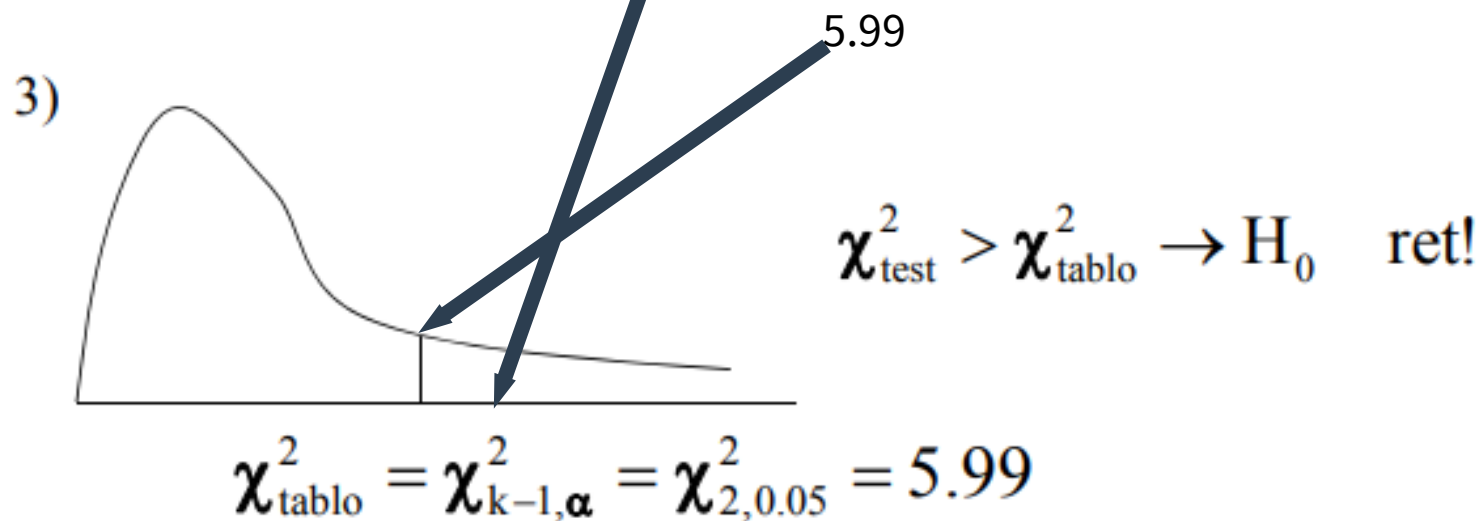
Gözlenen değer = örnek hacmi x gözlenen olasılık $\rightarrow O_i = n \times r_i$

	varsayılan oranlar	gözlenen oranlar	beklenen degerler (Ei)	gözlenen degerler (Oi)	Oi - Ei	(Oi - Ei)^2	((Oi - Ei)^2)/Ei
devamli	0.60	0.65	60	65	5	25	0.42
bazen	0.30	0.20	30	20	-10	100	3.33
çok az	0.10	0.15	10	15	5	25	2.50
				Ki-kare test =			6.25

1) $H_0: \Pi_{\text{devamlı}}=0.60, \Pi_{\text{bazen}}=0.30, \Pi_{\text{çok az}}=0.10$

H_1 : En az bir oran varsayılandan farklıdır.

2)
$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 6.25$$



4) Yorum : %5 hata payı ile en az bir mağzanın kullanım durumu, genel duruma istatistiki olarak anlamlı bir şekilde uymamaktadır.

Ki-Kare Homojenlik Testi

Homojenlik testinde her bir anakütleden belirli hacimlerde örnekler çekilir ve bu örneklerin belirli bir karakteristiği taşımaları bakımından benzer değişim gösterip göstermediklerine karar verilir.

Varsayımları:

1. Tek bir kategorik değişken
2. Her gruptan alınan ayrı birer örnek
3. Varsayılan oran yok
4. Bir grup için oranın diğer grup veya gruplar için de AYNI (HOMOJEN) olup olmadığının test edilmesi

HANGİ OLAY BU TEST İLE İLGİLİDİR?

Örnek Olaylar-2

2) Programın 3 farklı bölgedeki kullanım durumlarının aynı olup olmadığı araştırılmaktadır. Her 3 bölgeden alınan ayrı örneklemelerin sonucu aşağıdaki tabloda verimiştir.

	Devamlı	Bazen	Çok Az
Bölge Sınıfı-1	15	8	3
Bölge Sınıfı-2	14	6	4
Bölge Sınıfı-3	6	7	7

H0: bölge1'in kullanım sıklığı=bölge2'nin kullanım sıklığı=bölge3'ün kullanım sıklığı

H1: en az bir bölgenin kullanım sıklığı diğerlerinden farklıdır.

Bu hipotez testini uygulamak için yine gözlenen ve beklenen arasındaki farkların büyüklüğü ile ilgili Ki-Kare test istatistiği kullanılır.

Bu test istatistiği, $(k-1)(r-1)$ serbestlik dereceli tablo değeriyle karşılaştırılır.

$$\chi^2_{\text{tablo}} = \chi^2_{(k-1)(r-1), \alpha}$$

Burada k: kategori sayısı (sütun sayısı),
r: grup sayısı (satır sayısı)

$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Fakat bu sefer veriler bir tabloda yer aldığı için test istatistiğinin hesaplamaları ayrı tablolarla yapılır.

Gözlenen	devamli	bazen	çok az	satır toplamı
sinif1	15	8	3	26
sinif2	14	6	4	24
sinif3	6	7	7	20
sütun toplamı	35	21	14	70

$$\text{beklenen} = \frac{\text{satır toplamı} \times \text{sütun toplamı}}{\text{genel toplam}}$$

Beklenen	devamli	bazen	çok az
sinif1	13	7.8	5.2
sinif2	12	7.2	4.8
sinif3	10	6	4

$$\frac{26 \times 14}{70}$$

Gözlenen	devamli	bazen	çok az	satir toplami
sinif1	15	8	3	26
sinif2	14	6	4	24
sinif3	6	7	7	20
sütun toplami	35	21	14	70

Beklenen	devamli	bazen	çok az
sinif1	13	7.8	5.2
sinif2	12	7.2	4.8
sinif3	10	6	4

$$15 - 13 = 2$$

O - E	devamli	bazen	çok az
sinif1	2	0.2	-2.2
sinif2	2	-1.2	-0.8
sinif3	-4	1	3

(O - E) ² /E	devamli	bazen	çok az	
sinif1	0.31	0.01	0.93	
sinif2	0.33	0.20	0.13	
sinif3	1.60	0.17	2.25	
				5.93

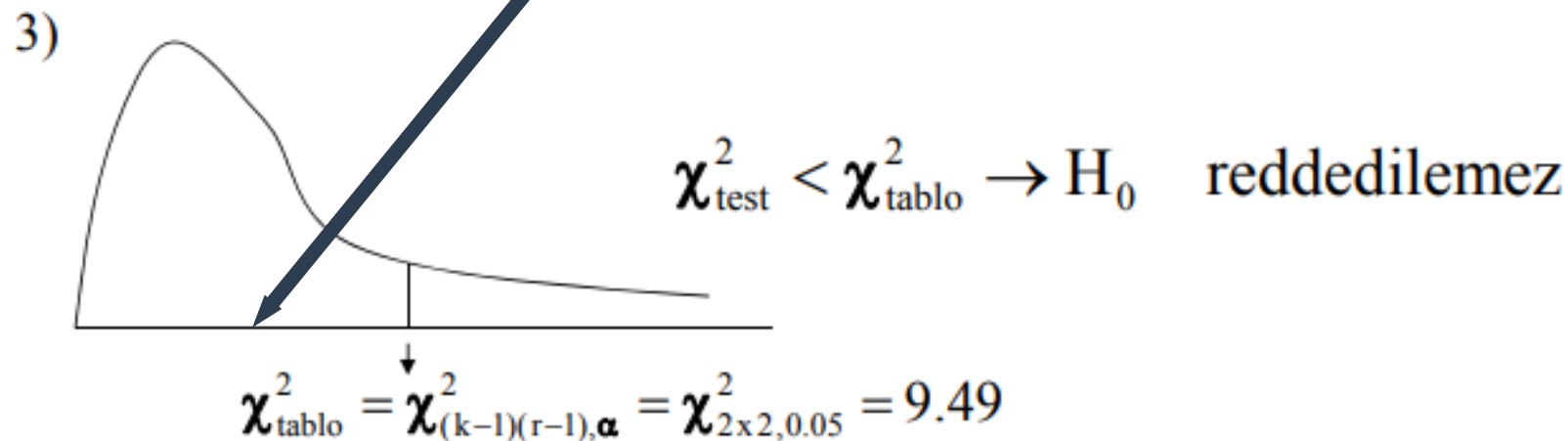
χ^2_{test}

1) H_0 : sınıf1'in devam yapısı = sınıf2'nin devam yapısı = sınıf3'ün devam yapısı

H_1 : En az bir sınıfın devam yapısı diğerlerinden farklıdır.

2)

$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 5.93$$



4) Yorum: %5 hata olasılığı ile, sınıfların devam yapısının birbirinden farklı olduğu söylenemez.

Ki-Kare Bağımsızlık Testi

Sık sık karşılaşılan araştırma sorularından biri de iki değişkenin birbiri ile ilişkili olup olmadığıdır.

İki değişken arasında ilişki yoksa, birisinin dağılımı hiçbir şekilde diğerinin dağılımına bağımlı değilse bu iki değişken birbirinden bağımsızdır denir. İki değişken arasında ilişki yoksa, belirli bir değişkenin değerini bilmek, diğer değişkenin değerini tespit etme imkanı sağlamaz.

Varsayımları:

1. İki kategorik değişken
2. Sadece tek örnek, oranlarla ilgili varsayım yok
3. Bir kategorik değişkenin diğeriyle İLİŞKİLİ olup olmadığının test edilmesi

HANGİ OLAY BU TEST İLE İLGİLİDİR?

Örnek Olaylar-3

3) Programın kullanımı ile kar oranının artışı arasında bir ilişki olup olmadığı araştırılmak istenmektedir. Bölgelerden seçilen 100 adet mağaza örneği incelenmiş ve programı kullanma sıklıkları ile karlılık oranlarındaki artışların sayısını gösteren aşağıdaki tablo elde edilmiştir.

	<50	50<70	70<90	>=90
Devamlı	15	20	10	1
Bazen	12	19	5	3
Çok Az	2	5	5	3

$$K=4, r=3$$

$Df = (k-1) \cdot (r-1) = 3 \cdot 2 = 6$,
Kritik değeri tablodan
hesaplama için gerekli.

Olay-3 : Bağımsızlık Testi

H0 : Kullanım sıklığı, Karlılık oranı ile ilişkili değildir.

H1 : Kullanım sıklığı, Karlılık oranı ile ilişkilidir

Bu hipotez testini uygulamak için yine gözlenen ve beklenen arasındaki farkların büyüklüğü ile ilgili Ki-Kare test istatistiği kullanılır.

Bu test istatistiği, $(k-1)(r-1)$ serbestlik dereceli tablo değeriyle karşılaştırılır.

$$\chi^2_{\text{tablo}} = \chi^2_{(k-1)(r-1), \alpha}$$

Burada k: sütun sayısı, r:satır sayısı

$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Yine veriler bir tabloda yer aldığı için test istatistiğinin hesaplamaları ayrı tablolarla yapılır.

Gözlenen	<50	50-<70	70-<90	>=90	satir toplami
devamli	15	20	10	1	46
bazen	12	19	5	3	39
çok az	2	5	5	3	15
sütun toplami	29	44	20	7	100

$$\text{beklenen} = \frac{\text{satir toplam} \times \text{sutun toplami}}{\text{genel toplam}}$$

Beklenen	<50	50-<70	70-<90	>=90
devamli	13.3	20.2	9.2	3.2
bazen	11.3	17.2	7.8	2.7
çok az	4.4	6.6	3.0	1.1

Gözlenen	<50	50-<70	70-<90	>=90	satir toplami
devamli	15	20	10	1	46
bazen	12	19	5	3	39
çok az	2	5	5	3	15
sütun toplami	29	44	20	7	100

Soruda bana verilen tablo, gözlenen değerler, mevcutta olan durum

Beklenen	<50	50-<70	70-<90	>=90
devamli	13.3	20.2	9.2	3.2
bazen	11.3	17.2	7.8	2.7
çok az	4.4	6.6	3.0	1.1

O - E	<50	50-<70	70-<90	>=90
devamli	1.7	-0.2	0.8	-2.2
bazen	0.7	1.8	-2.8	0.3
çok az	-2.4	-1.6	2.0	2.0

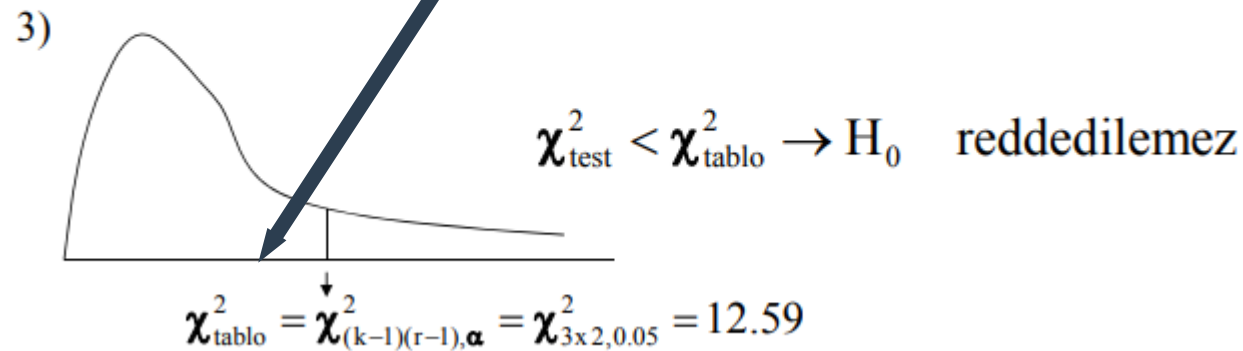
$(O - E)^2/E$	<50	50-<70	70-<90	>=90	
devamli	0.21	0.003	0.07	1.53	
bazen	0.04	0.20	1.01	0.03	
çok az	1.27	0.39	1.33	3.62	
					9.69

χ^2_{test}

1) H_0 : Kullanım sıklığı, Karlılık oranı ile ilişkili değildir.

H_1 : Kullanım sıklığı, Karlılık oranı ile ilişkilidir

2)
$$\chi^2_{\text{test}} = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 9,69$$



4) Yorum, %95 önem seviyesinde, istatistiki olarak anlamlı , kullanım sıklığı ile karlılık oranı değişkenlerinin ilişkili olduğuna dair yeterli kanıt bulunamamıştır

Tablo 7. χ^2 Dağılımı

df	α									
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	-	-	-	-	0.02	2.71	3.84	5.02	6.64	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.12	0.22	0.35	0.58	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.74	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.58	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.08	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.27	7.02	8.23	9.39	10.87	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.51	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.49	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.07	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Not: Tablodaki değerler tek kuyrukludur.

Kaynak: Kmietowicz, Z. W., Yannoulis, Y. (1988). *Statistical tables for economic, business, and social studies* (2. basım). UK: Longman.

Kritik değerler, tablolardan hesaplanır.