第六章　线性方程组的解法

Methods for Solving Linear Systems

引论

- 这一章介绍求解线性方程组(如下)的解法。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

- 工程科学中的许多领域，如热传导，震动，气象学及数量经济学等中的问题解决必须求解下列数值计算问题：

$$\left.\begin{array}{l} \text{微分方程组的差分方法，有限元法.} \\ \text{最小二乘拟合（最小二乘法）} \end{array}\right\} \text{求解线性方程组}$$

- 解线性方程组的方法在计算数学与科学计算中尤为重要。

引论

- 线性方程组表示为AX=b
- 当D=|A|≠0时．由Gramer法则，方程组有唯一解.

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

- 注：用Gramer求解时，要计算n+1个n阶行列式，共做 $N=n!(n^2-1)+n$ 次乘除法。
- n=20时，用高性能计算机要计算几万年。

引论

Chapter 6 Methods for solving linear systems

有效的解法：

- 直接法：有限步运算求精确解(由于舍入误差的影响，其解是近似的。) ——Gauss消元法及其变形
- 迭代法：不是用有限步运算求精确解，而是通过迭代产生近似解序列逐步逼近精确解。

  ——Jacobi迭代， Gauss -Seidel迭代

6.1 向量和矩阵的范数/* Norms of Vectors and Matrices */

数值分析中,经常要用向量和矩阵,为了应用的需要(误差分析),引入衡量向量和矩阵大小的度量—范数.

对于实数x ∈R,我们定义了绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

其满足 $|x| \ge 0$ 非负性.

$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$ 齐次性

$|x+y| \le |x| + |y|$ 三角不等式

类似,定义向量范数

Def 6.1 在实n维线性空间R^n中定义一个映射,它使任意$X \in R^n$有一个非负实数与之对应,记为$\|x\|$,且该映射满足:

(1) 正定性 任意$x \in R^n$,$\|x\| \ge 0$,iff $X=0$时, $\|X\|=0$

(2) 齐次性 任意$x \in R^n$, $\lambda \in R$,有 $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$

(3) 三角不等式 任意$X,Y \in R^n$,有 $\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$

则称该映射在R^n中定义了一个向量范数.

注: R^n中的范数不唯一.

常用的范数有三种: 设$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$, 则

1—范数: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2—范数: $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = (\sum_{i=0}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

∞—范数: $\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

P-范数 $\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

注: (1) 根据范数的定义可验证上述皆为向量范数

(2) p=1,2, $\|X\|_p$ 即为 $\|X\|_1$,$\|X\|_2$.

(3) 任意$x\in R^n$:

$$\lim_{p\to\infty}\|X\|_p = \|X\|_\infty$$

例: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\|X\|_1 = 1+2+3 = 6$$

$$\|X\|_\infty = 3$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$$

向量范数的性质

(1) 任意$X,Y\in R^n$,则 $\big|\, \|X\| - \|Y\| \,\big| \le \|X-Y\|$

证: $\because \|X\| = \|X-Y+Y\| \le \|X-Y\| + \|Y\|$

$\|Y\| = \|Y-X+X\| \le \|Y-X\| + \|X\| = \|X-Y\| + \|X\|$

$\therefore\ -\|X-Y\| \le \|X\| - \|Y\| \le \|X-Y\|$

(2) R^n上向量范数的等价性:

即若 $\|X\|_a$ 与 $\|X\|_b$ 为R^n上两种范数,则存在正数M与m(M>m)对任意$X\in R^n$,有

$$m\|X\|_b \le \|X\|_a \le M\|X\|_b$$

例:

$$\frac{1}{n}\|X\|_1 \le \|X\|_\infty \le \|X\|_1$$

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le n\|X\|_\infty$$

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\|X\|_\infty$$

注: R^n范数的等价性表明,虽不同向量范数其值不同,但考虑到向量序列收敛性时,却有明显的一致性。

向量范数的应用

Def 6.2 R^n中的向量序列$\{X_k\}$, 即$X_0, X_1, \dots X_K, \dots$

其中$X_K = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$，若对任意i（i=1,2,…,n）都有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$$

则向量 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ 称为$\{X_k\}$的极限。

记做 $\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$

注：向量序列收敛实际上是按分量收敛（数列收敛）

利用向量范数，也可以说明向量序列收敛的概念。

Th. 向量序列$\{X_k\}$依分量收敛于X^* 的充要条件是:

$$\lim_{k\to\infty} \|X_k - X^*\| = 0$$

注：(1) 数列 $\|X_k - X^*\|$ 收敛于**0**；

(2) 依范数收敛等价于依分量（坐标）收敛。

矩阵的范数

类似于向量范数，给出矩阵范数的定义。

Def. 在线性空间$R^{n\times n}$中定义一个映射，使任意$A\in R^{n\times n}$对应一个非负实数，记做|| A ||, 如果该映射满足：

1.正定性：$\forall A \in R^{n\times n}, \|A\| \ge 0$, 且 $\|A\| = 0$ iff $A = 0$

2.齐次性：$\forall \lambda \in R, A \in R^{n\times n}, \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

3.三角不等式：$\forall A, B \in R^{n\times n}, \Rightarrow \|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

4.相容性：$\forall A, B \in R^{n\times n}, \Rightarrow \|AB\| \le \|A\| \|B\|$

（相容性是矩阵乘法的需要，而**1. 2. 3.**为向量范数的推广）

在$R^{n\times n}$中可定义多种范数。

例 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$，则$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 称为A的Frobenius范数.

例2. $A \in R^{n\times n}$， $||\ldots||$为R^n中的向量范数，则定义$R^{n\times n}$中的范数为 $\|A\| = \sup\limits_{\substack{||x||=1 \\ x\in R^n}} \|Ax\|.$

易验证这样由向量范数导出的映射为矩阵范数，称之为诱导范数（或算子范数）。

诱导范数具有如下性质：

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|, \forall A \in R^{n\times n}, x \in R^n$$

证：(1) 当$x=0$时，显然成立，

(2) 当$x\neq 0$时，$\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \cdot \dfrac{x}{\|x\|} \right\| \le \|A\|.$

Chapter 6 Methods for solving linear systems

Def. 对于$R^{n\times n}$中的矩阵范数$\|\ldots\|_a$与R^n中的向量范数$\|\ldots\|_b$，若任意$x \in R^n$，$A \in R^{n\times n}$都有 $\|Ax\|_b \le \|A\|_a \cdot \|x\|_b$
则称矩阵范数$\|\ldots\|_a$和向量范数$\|\ldots\|_b$相容（协调）。

注：（1）任何向量范数与其诱导范数是相容的。

（2）给出一种向量范数$\|x\|_p$,就有对应的诱导范数$\|A\|_p$.

（3）向量范数$||\ldots||_1$，$||\ldots||_2$， $||\ldots||_\infty$的诱导矩阵范数仍记为 $||\ldots||_1$， $||\ldots||_2$， $||\ldots||_\infty$.

定理：$A \in R^{n\times n}$ 则A的诱导范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{（列和范数）}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} \quad \text{其中}\lambda_1\text{为}A^TA\text{的最大特征值} \qquad \text{（谱范数）}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{（行和范数）}$$

证：对谱范数$\| A \|_2$来证明。$\|AX\|_2^2 = (AX,AX) = X^T A^T AX \geq 0$

A^TA为对称半正定阵.

设A^TA的特征值为$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$，

相应的特征向量为e_1，e_2，…，e_n 且 $(e_i,e_j)=\begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i \neq j\end{cases}$

设 $X \in G = \{X \mid \|X\|_2 = 1, X \in R^n\}$

$X = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n.$

则 $AX = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2 + \dots + \lambda_n x_n e_n.$

从而，$\|AX\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1$

$\therefore \|AX\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1}$

当$X=e_1$时，上式等号成立，故 $\|A\|_2 = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$

例 求$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$的$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$, $\|A\|_2$.

$\|A\|_1 = \max\{4,5,5\} = 5$, $\|A\|_\infty = \max\{5,4,5\} = 5$,

$\|A\|_F = \sqrt{4+1+4+1+4+1+1+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$A^TA = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ A^TA的特征值为：

$\lambda_1 = 13.0902$, $\lambda_2 = 9.0000$, $\lambda_3 = 1.9098$

$\therefore \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{13.092} \approx 3.6180$

线性方程组的性态

对于线性方程组Ax=b， 当|A|≠0,时，可用消去法求数值解.

一般，A，b都是由观测数据而得，都存在误差，那么原始数据的误差，对解的结果有什么影响呢？——稳定性分析

（1）若**A**精确，**b**有微小误差**δb**，所得解的误差为**δX**，

而精确解X满足Ax=b

即A(X+δX)=b+δb.

$\therefore$ AδX=δb

δX=A^{-1}δb

$$\|\delta X\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|X\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|X\|}$$

$$\because \|A\|\|X\| \ge \|AX\| = \|b\|$$

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

X的相对误差为**b**的相对误差的 **|| A || || A^{-1} ||** 倍。.

（2）若b精确，A有微小误差δA，所得解的误差为δX

即 （A+δA）(X+δX)=b

$\therefore$ AX+AδX+(δA)X+δAδX=b

$\therefore$ AδX+(δA)X+δAδX=0

假设A可逆，且A＋δA非奇异（当$\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|<1$）,则

δX=－A^{-1}(δA)X－A^{-1}δA·δX

$$\therefore \|\delta X\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|X\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|\delta X\|$$

$$(1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|)\,\|\delta X\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|X\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

解的相对误差近似等于原始数据相对误差的**||A|| ||A^{-1}||**倍，若**||A|| ||A^{-1}||**较大，解会对舍入误差很敏感。

Def 6.4 设**A**为非奇异矩阵，称**$\|A\|\ \|A^{-1}\|$**为矩阵**A**的条件数，记为**cond(A)**。

条件数的性质：

- cond(A) ≥1
- cond(kA)=cond(A) ,k≠0
- 若$\|A\|=1$，则 cond（A）=$\| A^{-1}\|$

若cond(A)很大，称方程组AX＝b是病态的**(**不稳定**)**；否则，是良态的。

例 $\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.501\\ 0.375\end{pmatrix}$ 精确解 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

原始数据微小变化

$\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5\\ 0.37\end{pmatrix}$ 其解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -10\end{pmatrix}$

原始数据的绝对误差限≤0.5×10^{-2},而解的误差很大。

$$A=\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1000 & 4000\\ -4000 & 16016\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}\ \|A\|_\infty=1.251.\ \|A^{-1}\|_\infty=20016$$

$$\therefore \mathrm{cond}(A)=25040$$

$\therefore$ AX＝b是病态方程组。

6.2 迭代法

思想:由某初始近似解向量X_0,按一迭代格式产生向量序列$\{X_k\}$,
X_k 为准确解X^*的近似值， 但其逐步逼近X^*，即

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$$

Ø 怎样建立迭代格式 Ø 迭代格式的收敛性 Ø $\|X^*-X_k\|=?$

将AX＝b， A非奇异，变换为一个等价的方程组:

x=Bx+f (B为n阶方阵，f 为n维向量)。

有迭代格式 $\begin{cases} X_0 \\ X_{k+1}=BX_k+f \quad k=0,1,\ldots \end{cases}$

从而产生向量序列$\{X_K\}$:$X_0, X_1,\ldots, X_k,\ldots$，称为简单迭代法，
B为迭代矩阵，$\{X_K\}$为迭代序列。

若$\{X_k\}$收敛: $\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$

则有$X^*=BX^*+f$， 即X^*为AX=b的解。

若$B=(b_{ij})_{n\times n}$， $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)^T$，则上式可用分量形式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)} + f_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(k)} + f_2 \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + b_{nn}x_n^{(k)} + f_n \end{cases} \quad k=0,1,2,\ldots, \quad X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

或 $x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{(k)} + f_i,\ i=1,2,\ldots,n;\ k=0,1,2,\ldots$

那么,如何由AX=b 等价变形为 x=Bx+f ?

例: A=M-N. (M非奇异)

例: A=L+D+U.

则有 (M-N)x=b.

$\therefore MX = NX+b$

$\therefore X=M^{-1}NX+M^{-1}b$

从而，迭代矩阵 $B=M^{-1}N$， $f=M^{-1}b$.

迭代过程的收敛性

对某一迭代过程: $X_{k+1}=BX_k+f$. 其产生的序列**$\{X_k\}$是否收敛呢?** 它和迭代矩阵**B**相关.

Def 6.5 已知$\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$为A的全体特征值，A的谱半径为:

$$\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

Th. 设 $A\in R^{n\times n}$, 则 A 的谱半径不超过 A 的任何一种范数：

$$\rho(A)\le||A||$$

证明: 设λ是A的任意特征值，x为对应的特征向量($x\neq 0$)，则 $Ax=\lambda x$

$$\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|=\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\| \qquad \because \|x\|>0 \qquad \therefore |\lambda|\le\|A\|$$

$$\therefore \quad \rho(A)\le||A||$$

引理 设$B\in R^{n\times n}$,则$B^k\to O_{n\times n}(k\to\infty)$的充要条件是$\rho(B)<1$.

证明: (参考Th6.13,引理6.3,Jordan标准型)

迭代法的收敛性条件

Th6.14 对于任意的初始向量X_0,迭代过程$X_{k+1}=BX_k+f$ 收敛于$AX=b$的解 X^*的充要条件是$\rho(B)<1$，此时$AX=b$有唯一解X^*.

证:（1）$\because X^*=BX^*+f$

$X_{k+1}=BX_k+f$

$\therefore X_{k+1}-X^*=B(X_k-X^*)$

$\therefore X_{k+1}-X^*=B^{k+1}(X_0-X^*)$，从而:

$$\lim_{k\to\infty}X_k=X^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}B^k(X_0-X^*)=0_n \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}B^k=O_{n\times n} \Leftrightarrow \rho(B)<1$$

（2）$X=BX+f$,即为$(I-B)X=f$

$\rho(B)<1$则$|I-B|\neq 0$,

从而$X=BX+f$有唯一解。

Th 6.15 当$||B||<1$时,迭代过程$X_{k+1}= BX_k+f$收敛于$X= BX+f$的解X^*,且

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X_k - X_{k-1}\| \quad (6.59)$$

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|X_1 - X_0\| \quad (6.60)$$

证明: (1) $\because \rho(B) \leqslant ||B||<1$

$\therefore$ 迭代过程收敛

(2) $\because X_k-X^*= B (X_{k-1}-X^*)$

$\therefore ||X_k-X^*||\le|| B ||\cdot|| X_{k-1}-X^* ||$

$= ||B||\cdot|| X_{k-1}- X_k + X_k -X^*||$

$\le||B|| (|| X_{k-1}- X_k ||+ ||X_k -X^*||)$

$\therefore (1- ||B||)||X_k-X^*||\le ||B||\cdot|| X_{k-1}-X_k||$

$$\therefore \|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X_k - X_{k-1}\|$$

(3) $\because X_k - X_{k-1}= B (X_{k-1}-X_{k-2})=\ldots=B^{k-1} (X_1-X_0)$

$\therefore || X_k- X_{k-1} ||\le||B||^{k-1}||X_1-X_0||$；将其代入(6.59)即得(6.60)

停机准则: 用户精度要求 $|| X_k- X^* ||<\varepsilon$.

I. 先验估计法:

$$\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|X_1 - X_0\| < \varepsilon$$

则迭代次数

$$k > \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\|X_1 - X_0\|}}{\ln\|B\|}$$

取**k**为满足上式的最小正整数(保守估计)

II. 后验估计法:

$$|| X_k -X_{k-1} ||<\varepsilon$$

6.3 简单迭代法

对AX=b的A作如下分解:

若A的主对角线元素都不为**0**，即$a_{ii}\neq 0$，i=1~n.

记$D=diag(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$.

若A=D-N.

则 **(** D-N)X=b，即$X=D^{-1}NX+D^{-1}b$

则迭代格式为:

$$X_{k+1}=D^{-1}NX_k+D^{-1}b$$

此称为Jacobi迭代，迭代矩阵$B=D^{-1}N$,其主对角线元素全为0.

下面讨论: Jacobi迭代的收敛性

充要条件——$\rho(D^{-1}N)<1$，充分条件——$\|D^{-1}N\|<1$

Def 6.6 若$\mathbf{A}=(\mathbf{a}_{ij})_{n\times n}$的各行元素满足$|a_{ii}|\geq\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|\ ,\ i=1,2,\ldots,n$
则称**A**是对角占优阵,
若上各式严格不等号成立,则称**A**为严格对角占优阵。

Th 6.17 严格对角占优阵是可逆的。

Th 6.18 若**A**严格对角占优阵，则其**Jacobi**迭代收敛.

分析: A=D-N

迭代矩阵 $B=D^{-1}N$

只需证: $\|B\|_\infty=\|D^{-1}N\|_\infty<1$

例6.7 用Jacobi迭代法解下列方程组(精确到10^{-3})

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0.06 & -0.02 \\ 0.03 & 1 & -0.05 \\ 0.01 & -0.02 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解: 原方程组可变形为右上形式， 记为**AX=b**

$\because$ A为严格对角占优阵， $\therefore$其Jacobi迭代收敛。

令 A=D-N， D=I, 则

$$B = D^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore$Jacobi迭代格式为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Chapter 6 Methods for solving linear systems

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

取$X_0=(2,3,5)^T$迭代得:

$X_1=(1.92,3.19,5.04)^T$

$X_2=(1.909,3.194,5.045)^T$ 又$\|X_3 - X_2\|_\infty<10^{-3}$

$\because \| X_2 - X_1 \|_\infty>10^{-3}$ 取 $X^*\approx X_3$

$\therefore$进一步迭代

$X_3=(1.909,3.194,5.045)^T$

Algorithm: **(Jacobi迭代法)**

Step 1 取X_0,置精度要求和最大迭代次数N，k=0

Step 2 计算$X_{k+1}=BX_k+f$

Step 3 if ($\max_{i=1}^{n}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|<\varepsilon$) stop ($X^*\approx X_{k+1}$)

else if (k=N) stop (不收敛)

else k=k+1；

goto **Step** 2

Chapter 6 Methods for solving linear systems

Jacobi迭代公式的分量形式

设方程组 **AX=b** , 通过分离变量的过程建立 **Jacobi**迭代公式，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,,\ a_{ii}\neq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

由此我们可以得到 **Jacobi** 迭代公式:

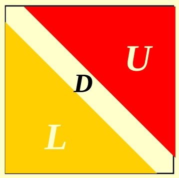
$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

雅可比迭代法的另一种矩阵表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{a_{ii} \neq 0} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

写成矩阵形式：

A =



$$Ax = b \Leftrightarrow (D+L+U)x = b$$
$$\Leftrightarrow Dx = -(L+U)x + b$$
$$\Leftrightarrow x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{\mathbf{B}}x + \underbrace{D^{-1}b}_{f}$$

Jacobi 迭代阵

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

高斯-塞德尔迭代法（AX=b)

注意到利用Jacobi迭代公式计算 $x_i^{(k+1)}$时，已计算好下述值：

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$$

而Jacobi迭代公式并不利用这些最新的近似值计算，仍用

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$$

这启发我们可以对其加以改进,即在每个分量的计算中尽量利用最新的迭代值，得到

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

上式称为 **Gauss-Seidel 迭代法**.

高斯-塞德尔迭代法

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n)$$

写成矩阵形式:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}) + D^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \quad (D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}x^{(k)} + \underbrace{(D+L)^{-1}b}_{f}$$

Gauss-Seidel 迭代阵

高斯-塞德尔迭代法算例

考虑解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

其准确解为X^*={1.1, 1.2, 1.3}。

高斯-塞德尔迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84 \end{cases}$$

迭代次数	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0.72	0.902	1.1644
2	1.04308	1.167188	1.282054
3	1.09313	1.195724	1.297771
4	1.099126	1.199467	1.299719
5	1.09989	1.199933	1.299965
6	1.099986	1.199992	1.299996
7	1.099998	1.199999	1.299999
8	1.1	1.2	1.3

定理 设 $Ax=b$ ，如果：

A为严格对角占优，则解 $Ax=b$ 的**Jacobi迭代法，Gauss-Seidel迭代法均收敛。**

例：设方程组为

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12 \\ -x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$$

试分别写出其 Jacobi 和 Gauss-Seidel 的迭代格式以及相应的迭代矩阵。

解：Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{5}(-12-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)})=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(20+x_1^{(k)}-2x_3^{(k)})=\frac{1}{4}x_1^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{10}(3-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)})=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)}+\frac{3}{10} \end{cases}$$

故 Jacobi 迭代矩阵为

$$\mathbf{B_J}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k+1)}+\frac{3}{10}x_2^{(k+1)}+\frac{3}{10} \end{cases}$$

从式中解出 $x_i^{(k+1)}, i=1,2,3$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)}=-\frac{1}{10}x_2^{(k)}-\frac{11}{20}x_3^{(k)}+\frac{22}{5} \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{20}x_2^{(k)}-\frac{1}{8}x_3^{(k)}+\frac{21}{10} \end{cases}$$

故可得**Seidel**迭代矩阵为 $B_s=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{11}{20} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

Jacobi迭代矩阵$\mathbf{B_j}$的主对角线为零，而**Seidel**迭代矩阵$\mathbf{B_s}$的第**1**列都是零，这对一般情况也是成立的。