第四章

常微分方程的数值解法

Numerical Solutions to Ordinary Differential Equations

概述

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

- 一阶常微分方程初值问题:

Problem I: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 求函数y=y(x)满足: $y'(x) = f(x, y(x))$

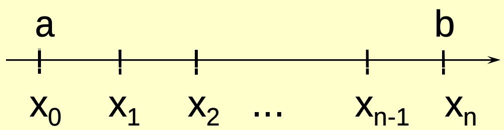
- f(x,y)在D={(x,y)|a≦x≦b, -∞≦y≦∞}上连续，且满足Lipschitz条件: $\exists L, \forall y_1, y_2$, s.t. $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$

则初值问题Problem I有唯一解**y(x)**, 称为积分曲线。

- 实际工程技术、生产、科研上会出现大量的微分方程问题很难得到其解析解，有的甚至无法用解析表达式来表示，因此只能依赖于数值方法去获得微分方程的数值解。

HUST

- 微分方程的**数值解法**：
  - 不求y(x)的精确表达式，而求在x_0，x_1，…，x_n处的函数值
  - 设Problem I的解y(x)的存在区间是[a,b]，初始点x_0=a，取[a,b]内的一系列节点$x_0, x_1,\dots,x_n$. $a= x_0< x_1<\dots< x_n =b$，一般采用等距步长。



  - 用数值方法，求得y(x)在每个节点x_k的值$y(x_k)$的近似值，用y_k表示，即$y_k \approx y(x_k)$，
  - 这样y_0，y_1，…，y_n称为微分方程的数值解。
  - 求y(x)————>求y_0，y_1，…，y_n

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

- @方法：采用步进式和递推法

将[a,b]n等分， $a= x_0< x_1<\dots< x_n =b$，步长$h=\frac{b-a}{n}$， $x_k=a+kh$

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = g(h, x_n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}) \end{cases}$$

- 计算过程：

$$y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-m} \to y_{n-m+1} \to \cdots \to y_n \to y_{n+1} \to \cdots$$

- 怎样建立递推公式？
  - Taylor公式
  - 数值积分法

4.1 欧拉公式

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

@思想:用向前差商近似代替微商.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \qquad h=x_{n+1}-x_n$$

$$\therefore f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}.$$

$$\therefore y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_n, y(x_n))$$

$\therefore y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ ——欧拉公式（Euler Schema）

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

HUST

几何意义

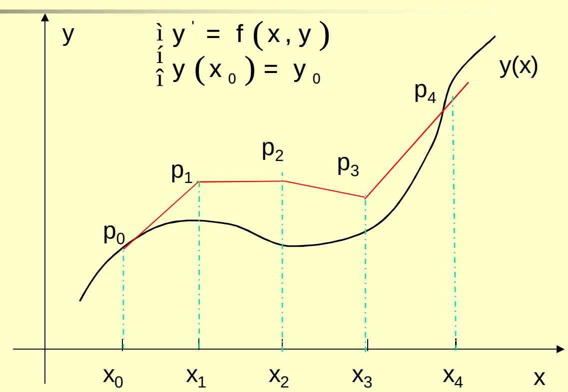
Chapter 4 Initial -value problems for ODE

1. y(x)过点$P_0(x_0,y_0)$且在任意点(x,y)的切线斜率为f(x,y),
2. y(x)在点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为:
   $y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$

在切线上取点$P_1(x_1,y_1)$

$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$

y_1正是Euler 公式所求。



3. 类似2，过P_1以$f(x_1,y_1)$为斜率作直线，近似平行于y(x)在x_1的切线，在其上取点$P_2(x_2,y_2)$，依此类推…
4. 折线P_0 P_1 P_2 …P_n…作为曲线y(x)的近似 ——欧拉折线法

HUST

欧拉法（续）

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

@用向后差商近似代替微商：

$$y'(x_{n+1}) \approx y[x_n,x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \qquad h=x_{n+1}-x_n$$

$$\therefore f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$ ——隐式欧拉公式

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

注：用隐式欧拉法，每一步都需解方程

（或先解出y_{n+1}的显式表达式），但其稳定性好。

欧拉法（续）

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

@用中心差商近似代替微商：

$$y'(x_n) \approx y[x_{n-1},x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h} \Rightarrow f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}$$

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots$$ —— 二步欧拉法

注：计算时，先用欧拉法求出y_1，以后再用二步欧拉法计算。

欧拉法（续）

公式	单步否	显式否	截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$	单步	显式	
$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$	单步	隐式	
$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$	二步	显式	

局部截断误差

定义1 假设$y_n=y(x_n)$,即第n步计算是精确的前提下,称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为欧拉法的局部截断误差.

注：无$y_n=y(x_n)$ 前提下，称R_{n+1}为整体截断误差。

定义2 若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,称该算法有**p**阶精度.

定义3 假设$y_n=y(x_n)$, $y_{n-1}=y(x_{n-1})$,称$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为二步欧拉法的局部截断误差.

定理 欧拉法的精度是一阶。

复 习

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

求：y(x) ⇒ 数值解 y_1，y_2，…，y_n

公式	单步否	显式否	局部截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$	单步	显式	$O(h^2)$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$	单步	隐式	$O(h^2)$
$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$	二步	显式	$O(h^3)$

定义1 假设$y_n=y(x_n)$，即第n步计算是精确的前提下，称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为欧拉法的局部截断误差。

定义2 假设$y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，称$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为二步欧拉法的局部截断误差。

定义3 若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，称该算法有**p**阶精度。

局部截断误差

定理 欧拉法的精度是一阶。

分析：证明其局部截断误差为$O(h^2)$, 可通过Taylor展开式分析。

证明： Euler 公式为 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

令$y_n=y(x_n)$，下证： $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2)$

$\because\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$ 由 $y'(x)=f(x,y(x))$

$=y(x_n)+hy'(x_n)$

$\because\ y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\dfrac{y''(\xi)}{2!}h^2,\ \xi\in(x_n,x_{n+1})$

$\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=\dfrac{y''(\xi)}{2}h^2=O(h^2)$

二步法的局部截断误差 $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$

定理 隐式欧拉法的精度是一阶，二步欧拉法的精度是二阶。

证明： 对二步欧拉法进行证明，考虑其局部截断误差，

令$y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，

$$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)=y(x_{n-1})+2hf(x_n,y(x_n))=y(x_{n-1})+2hy'(x_n)$$

$$\because\ y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{y'''(\xi)}{3!}h^3,\ \xi\in(x_n,x_{n+1})$$

$$y(x_{n-1})=y(x_n-h)=y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{(-h)^2}{2!}y''(x_n)+\frac{y'''(\eta)}{3!}(-h)^3,\ \eta\in(x_{n-1},x_n)$$

将上两式左右两端同时相减：

$$\therefore\ y(x_{n+1})-y(x_{n-1})=2hy'(x_n)+\frac{y'''(\xi)+y'''(\eta)}{3!}h^3 \qquad \therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$$

∴二步欧拉法的局部截断误差为$O(h^3)$，其精度是二阶。

例：求 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y-\frac{2x}{y}, \\ y(0)=1,\end{cases}$ $x=0.1,0.2,\cdots,1.0$ 的近似值。

解：这儿 $f(x,y)=y-\frac{2x}{y}$，$x_0=0, y_0=1, h=0.1$

由欧拉公式得：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ ，$y_0=1$

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)=1+0.1\times(1-\frac{0}{1})=1.1$$

$$y_2=y_1+hf(x_1,y_1)=1.1+0.1\times(1.1-\frac{2\times0.1}{1.1})=1.191818$$

$$y_3=y_2+hf(x_2,y_2)=1.277438 \quad \cdots\cdots$$

又其精确解为 $y=\sqrt{2x+1}$

整体误差 $e_{k+1}=y(x_{k+1})-y_{k+1}$ ，下面对其加以分析。

x_k	y_k	$y(x_k)$	e_k
0.1	1.1	1.0954451	0.0045548
0.2	1.191818	1.183216	0.0086022
0.3	1.2774379	1.2649111	0.012527
0.4	1.3582127	1.3416408	0.016572
0.5	1.4351330	1.4142136	0.0209194
0.6	1.5089664	1.4831397	0.0257267
0.7	1.5803384	1.5491933	0.0311906
0.8	1.6497836	1.6124519	0.037332
0.9	1.7177795	1.6722301	0.044594
1.0	1.7847710	1.7320508	0.0527201

从表中看出误差在逐步增加、积累

$$\tilde{y}_{10} = y(x_9) + hf(x_9, y(x_9)) = 1.7330815$$

局部截断误差：$y(x_{10}) - \tilde{y}_{10} = 0.00103$ 而误差是 $y(x_{10}) - y_{10} = 0.05272$

数值积分法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \qquad y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

对右端的定积分用数值积分公式求近似值：

（1）用左矩形数值积分公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx (x_{n+1} - x_n) f(x_n, y(x_n))$$

$$\therefore y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx hf(x_n, y(x_n))$$

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

数值积分法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

（2）用梯形公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx \frac{(x_{n+1}-x_n)}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y(x_{n+1})-y(x_n) \approx \frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$ ——梯形公式

- 梯形公式:将显示欧拉公式，隐式欧拉公式平均可得
- 梯形公式是隐式、单步公式，其精度为二阶

梯形公式的精度

定理：梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 的精度是2阶的.

分析：证明其局部截断误差为$O(h^3)$；用二元函数的Taylor公式。

证法一（了解）：令$y_n=y(x_n)$，由Taylor公式有

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_{n+1},y(x_{n+1})+(y_{n+1}-y(x_{n+1})))$

$=f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$，$\eta$介于$y_{n+1}$与$y(x_{n+1})$之间

$=y'(x_{n+1})+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=f(x_n,y_n)+hy''(x_n)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)$

又$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_n,y_n)+hy''(x_n)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)$

$y(x_{n+1})=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h\,[f(x_{n+1},y_{n+1})$

$-f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)]/2+O(h^3)$

$=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$

$+hf_y(x_{n+1},\eta)(y(x_{n+1})-y_{n+1})/2+O(h^3)$

从而$y(x_{n+1})=y_{n+1}+h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)/[1-hf_y(x_{n+1},\eta)/2]=O(h^3)$

$\therefore$ 梯形公式的截断误差为$O(h^3)$，其精度是2阶。

HUST

定理：梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 的精度是2阶的。

分析：证明其局部截断误差为$O(h^3)$；用一元函数的Taylor公式。

证法二：令 $y_n=y(x_n)$，公式右边的 $y_{n+1}=y(x_{n+1})$，由Taylor公式有

$f(x_{n+1},\ y_{n+1})=f(x_{n+1},\ y(x_{n+1}))$

$=y'(x_{n+1})=y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2)$

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

$=y(x_n)+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$

$=y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

又由Talor公式有:

$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

因此局部截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$，梯形公式的精度为2阶。

HUST

梯形公式的应用

例4.1 用梯形公式求初值问题 $\frac{dy}{dx}=y,\ y(0)=1.$ 的解在x=0.01上的值y(0.01).

解: 取h=0.01, $x_0=0$, $y_0=y(0)=1$. 则 $y(0.01)\approx y_1$

f(x,y)=y, 由梯形公式,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]=y_n+\frac{h}{2}[y_n+y_{n+1}] \Rightarrow y_1=y_0+\frac{h}{2}[y_0+y_1]$$

$$y_1=\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}y_0$$ 基于幂级数理论 $$y_1=(1+\frac{h}{2})(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\ldots)y_0$$

$$\approx(1+\frac{h}{2})^2+\frac{h^2}{4}=1.01005$$

解析解 $y=e^x$ $$y(0.01)=e^{0.01}=1+0.01+\frac{0.01^2}{2!}+\frac{0.01^3}{3!}+\ldots$$

$$\approx \mathbf{1+0.01+\frac{0.01^2}{2!}=1.01005}$$

欧拉公式的比较

欧拉法	简单，精度低
隐式欧拉法	稳定性好
二步欧拉法	显式，但需要两步初值，且第**2**个初值只能由其它方法给出，可能对后面的递推精度有影响
梯形公式法	精度有所提高，但隐式公式需迭代求解

思考与阅读

证明：隐式欧拉法的精度为一阶。

4.2 改进的Euler法

- Euler公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 显式 一阶
- 梯形公式 $y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$ 隐式 二阶

- Euler公式 计算量小，精度低。
- 梯形公式 计算量大，精度高。

综合两个公式，提出预报—校正公式：

$$\left.\begin{aligned} &\text{预报} \quad \bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ &\text{校正} \quad y_{n+1}=y_n+\tfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})] \end{aligned}\right\}\text{——改进的Euler法}$$

嵌套形式：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$ 显式单步法

$$y_{n+1}=\tfrac{1}{2}[y_n+hf(x_n,y_n)+y_n+hf(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$$

平均化形式：
$$\begin{cases} y_p=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_c=y_n+hf(x_{n+1},y_p) \\ y_{n+1}=\tfrac{1}{2}(y_p+y_c) \end{cases}$$

例4.4 用改进的Euler法解初值问题在区间[0,0.4]上， $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 步长h=0.1的解，并比较与精确解的差异。

说明：精确解 $y=1/(1-x)$。

解：Euler法的具体形式为：$y_{n+1}=y_n+hy_n^2$，

改进的Euler法的具体形式为：

$$\begin{cases} y_p=y_n+hy_n^2 \\ y_c=y_n+hy_p^2 \\ y_{n+1}=\tfrac{1}{2}(y_p+y_c) \end{cases}$$

$\because x_0=0$，$h=0.1$，则

$\therefore x_1=0.1$，$x_2=0.2$，$x_3=0.3$，$x_4=0.4$

计算y_1: $y_p=y_0+0.1y_0^2=1+0.1\cdot1^2=1.1$

$y_c=1+0.1\times1.1^2=1.121$

$y_1=(1.1+1.121)/2\approx1.1118$

同样可求y_2,y_3,y_4，见P93表

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$y_n - y(x_n)$
1	0.1	1.1118	1.1111	0.0007
2	0.2	1.2521	1.2500	0.0021
3	0.3	1.4345	1.4236	0.0059
4	0.4	1.6782	1.6667	0.015

$y_n-y(x_n)$ 随n增大而增大，表明误差积累。

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

注:

（1）令$y_n=y(x_n)$，可推导改进的Euler法的局部截断误差为 $O(h^3)$,具有二阶精度。

（2）改进的Euler法也可写成如下平均化形式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1)$$

HW:
作业四 **#1**

二元函数泰勒公式复习

$$
\begin{aligned}
& f(x_0+h, y_0+k) \\
= & f(x_0, y_0) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}) f(x_0, y_0) + \\
& \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \mathbf{L} + \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0) + \\
& \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0 + q h, y_0 + q k), \qquad (0 < q < 1)
\end{aligned}
$$

$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$ 表示 $hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$

$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$ 表示 $h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)$

龙格—库塔方法 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Euler公式：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 写成 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_1 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \end{cases}$ 精度：一阶

改进的Euler公式：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1) \end{cases}$ 精度：二阶

由Lagrange中值定理， $\exists x \in (x_n, x_{n+1})$ $y'(x) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$

$\therefore\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x)$

而$y'(x) = f(x, y(x))$ 称为y(x)在$[x_n，x_{n+1}]$上的平均斜率，

$\therefore y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x, y(x)) \Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + k^*$

Ø取 $k^* = hf(x_n, y_n) = k_1$ —Euler公式 Ø 取 $k^* = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}$—改进Euler公式

Euler公式用一点的值k_1作为k^*的近似值，而改进的Euler公式用二个点的值k_1和k_2的平均值作为k^*近似值，其精度更高。

龙格－库塔法

Runge-Kutta法的思想：在［x_n，x_{n+1}］内多预报几个点的k_i值并用其加权平均作为k^*近似而构造出具有更高精度的公式。

4.3.2 二阶龙格—库塔方法

以k_1与k_2的加权平均来近似k^*，设

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + a h, y_n + b k_1) \end{cases} \quad (*)$$

其中w_1，w_2，α，β为待定参数。适当选取参数，使(*)式的精度为二阶，即使其局部截断误差为$O(h^3)$

令 $y_n=y(x_n)$，由泰勒公式：$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$

$$\because y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) = f(x_n, y_n) \qquad y''(x_n) = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)$$

$$(\because y''(x) = (y'(x))' = [f(x,y)]'_x = f_x + f_y y'(x) = f_x + f_y f(x,y) \quad)$$

$$\therefore y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

二阶龙格－库塔法

$$y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3) \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + a h, y_n + b k_1) \end{cases} \quad (*)$$

由多元函数的泰勒公式

$$k_2 = hf(x_n + a h, y_n + b k_1) = h\{f(x_n, y_n) + a h f_x(x_n, y_n) + b k_1 f_y(x_n, y_n) + O(h^2)\}$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + w_1 hf(x_n, y_n) + w_2 hf(x_n, y_n) + w_2 a h^2 f_x(x_n, y_n) + w_2 b h^2 f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2) hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[2w_2 a f_x(x_n, y_n) + 2w_2 b f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3) \quad (2)$$

比较(1)与(2)要使：$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$ 则有

$$\begin{cases} w_1+w_2=1 \\ w_2 α=1/2 \\ w_2 β=1/2 \end{cases}$$

注：上述方程组有四个未知量，只有三个方程，有无穷多组解。

二阶龙格－库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + a h, y_n + b k_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1+w_2=1 \\ w_2 a=1/2 \\ w_2 \beta=1/2 \end{cases}$$

- 取任意一组解便得一种二阶龙－库公式。
- 当$w_1=w_2=1/2$, $\alpha=\beta=1$时二阶Runge-Kutta公式为

$y_{n+1}=y_n+k_1/2+k_2/2$

$k_1=hf(x_n,y_n)$ 此即改进的Euler法

$k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1)$

- 取$w_1=0$，$w_2=1$，$\alpha=\beta=1/2$，

$y_{n+1}=y_n+k_2$

$k_1=hf(x_n,y_n)$ 此为中点法或变形的 Euler公式

$k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2)$

HUST

三阶龙格－库塔法

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

- 三阶龙格－库塔法是用k_1，k_2，k_3的加权平均来近似k^*，即有：

$$y_{n+1}=y_n+c_1k_1+c_2k_2+c_3k_3$$
$$k_1=hf(x_n,y_n)$$
$$k_2=hf(x_n+a_2h,y_n+b_{21}k_1)$$
$$k_3=hf(x_n+a_3h,y_n+b_{31}k_1+b_{32}k_2)$$

- 要使其具有三阶精度，必须使局部截断误差为$O(h^4)$
- 类似二阶龙格－库塔法的推导，$c_1,c_2,c_3,a_2,a_3,b_{21},b_{31},b_{32}$应满足

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=1 \\ a_2=b_{21} \\ a_3=b_{31}+b_{32} \\ c_2a_2+c_3a_3=1/2 \\ c_2a_2^2+c_3a_3^2=1/3 \\ c_3b_{32}a_2=1/6 \end{cases}$$

由其任意解可得三阶龙格-库塔公式

例：Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+4k_2+k_3)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h,y_n-k_1+2k_2) \end{cases}$$

HUST

龙格—库塔方法（复习）

$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Euler公式：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 写成 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_1 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \end{cases}$

改进的Euler公式：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1) \end{cases}$

二阶龙格-库塔法：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + a h, y_n + b k_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1+w_2=1 \\ w_2 a=1/2 \\ w_2 \beta=1/2 \end{cases}$$

三阶龙格-库塔法，如kutta公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+4k_2+k_3)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h,y_n-k_1+2k_2) \end{cases}$$

HUST

四阶龙格－库塔法

- 类似可推出四阶龙格-库塔公式，常用的有

例：经典Runge-Kutta法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h/2,y_n+k_2/2) \\ k_4=hf(x_n+h,y_n+k_3) \end{cases}$$

局部截断误差 $O(h^5)$

- 还有： Gill公式及m (m>4)阶龙格－库塔法。
- m>4时：计算量太大，精确度不一定提高，有时会降低。

HUST

求解：$\begin{cases} dy/dx=f(x,y) & a\le x\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

对于经典的四阶Runge-Kutta法给出如下算法：

- Step 1: 输入a,b,y_0 及N
- Step 2: (b-a)/N=>h,a=>x,y_0=>y
- Step 3: 输出 (x,y)
- Step 4: For i=1 T0 N
  - hf(x,y)=>k_1
  - hf(x+h/2,y+ k_1/2)=> k_2
  - hf(x+h/2,y+k_2/2)=>k_3
  - hf(x+h,y＋k_3)=>k_4
  - y+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6=>y
  - x+h=>x
  - 输出(x,y)
- END

龙格－库塔法

例：用四阶经典Runge－Kutta方法解初值问题：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y-\dfrac{2x}{y} \\ y(0)=1 \end{cases}$ $h=0.2$

(1)求 y_1 ，$x_0=0, y_0=1, h=0.2$

$$K_1=hf(x_0,y_0)=h(y_0-\frac{2x_0}{y_0})=0.2$$

$$K_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{1}{2}K_1\right)$$

$$=h(y_0+\frac{1}{2}K_1-\frac{2\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{y_0+\frac{1}{2}K_1})=0.18363636$$

$$K_3=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{1}{2}K_2\right)$$

$$=h(y_0+\frac{1}{2}K_2-\frac{2\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{y_0+\frac{1}{2}K_2})=0.1817275$$

$$K_4=hf(x_0+h,y_0+K_3)$$

$$=h[y_0+K_3-\frac{2(x_0+h)}{y_0+K_3}]=0.16864798$$

$$y_1=y_0+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$$

$$=1.1832293$$

$$y(x_1)=\sqrt{2x_1+1}=\sqrt{1.4}=1.1832160$$

$$e_1=y(x_1)-y_1\approx 1.3\times 10^{-5}$$

龙格—库塔法

(2)求 y_2，$x_1=0.2, h=0.2 \quad y_1=1.1832293$

HW:
作业四 #2

$$K_1=hf(x_1,y_1)=h(y_1-\frac{2x_1}{y_1})=0.16903428$$

$$K_2=hf(x_1+\tfrac{h}{2},y_1+\tfrac{1}{2}K_1)=0.15893312$$

$$K_3=hf(x_1+\tfrac{h}{2},y_1+\tfrac{1}{2}K_2)=0.1574989 \qquad K_4=hf(x_1+h,y_1+K_3)=0.1488075$$

$$y_2=y_1+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)=1.3416803$$

$$y(x_2)=\sqrt{2x_2+1}=1.3416408 \qquad e_2=4.0\times10^{-5}$$

x_k	y_k	$y(x_k)$	e_k
0.2	1.1832293	1.1832160	1.3×10^{-5}
0.4	1.3416803	1.3416408	4.0×10^{-5}
0.6	1.4832838	1.4832397	4.4×10^{-5}
0.8	1.6125172	1.6124515	6.6×10^{-5}
1.0	1.7321463	1.7320508	9.6×10^{-5}

变步长龙格—库塔法

Ø 问题I： 求数值解 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 要求误差<ε＝10^{-8}

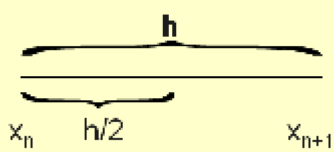
问题：①：如何判断$|y(x_n)-y_n|<\varepsilon$ ②：如何取h=?

解①：如用p阶龙格—库塔法计算，局部截断误差为$O(h^{p+1})$

Ø如 x_n----------------- à x_{n+1}

令 $y_n=y(x_n)$ $\quad y_{n+1}^{(h)}$

则 $y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h)}\approx ch^{p+1}$



步长折半x_n à $x_{n+h/2}$ à x_{n+1}分两步计算$y(x_{n+1})$的近似值$y_{n+1}^{(h/2)}$。

则 $y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h/2)}\approx 2c(h/2)^{p+1}$

$$\therefore \frac{y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}}{y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h)}}\approx\frac{1}{2^p}\Rightarrow y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}\approx\frac{1}{2^p-1}[y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{n+1}^{(h)}]=\Delta$$

变步长龙格－库塔法

定理：对于问题I若用P阶龙格－库塔法计算$y(x_{n+1})$在步长折半前后的近似值分别为$y_{n+1}^{(h)}$, $y_{n+1}^{(h/2)}$则有误差公式

$$|y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}|\approx\frac{1}{2^p-1}|y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{n+1}^{(h)}|=\Delta$$

注：1^0 误差的事后估计法

2^0 停机准则：$\triangle<\varepsilon$ (可保证$|y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h/2)}|<\varepsilon$)

解②：(1) h取大，局部截断误差ch^{p+1}大，不精确；

(2) h取小，运算量大（步数多），舍入误差积累大。

解决策略：变步长龙格－库塔法

if（$\triangle>\varepsilon$） 将步长折半反复计算，直至$\triangle<\varepsilon$为止，取**h**为最后一次的步长，y_{n+1}为最后一次计算的结果。

else if ($\triangle<\varepsilon$) 将步长增倍反复计算，直至$\triangle>\varepsilon$为止，最后一次运算的前一次计算结果即为所需。

HUST

4.5 收敛性与稳定性

对于常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

数值解法：

Ø求$y=y(x)$ $\xrightarrow[x_n=x_0+nh]{\text{离散化}}$ 求$y(x_n)$ $\xrightarrow{\text{某种公式}}$ 求y_n

单步法：计算y_{n+1}时只用到前一步的结果y_n。

例：Euler法，改进的Euler法，龙格－库塔法都是单步法。

Ø 显式单步法： $y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)$

$\varphi(x,y,h)$为增量函数，它依赖于f，仅是x_n，y_n，h的函数。

Ø Def:若某数值方法对于任意固定的$x_n=x_0+nh$,当

$h\to 0(n\to\infty)$时，$y_n\to y(x_n)$，则称该法是收敛的。

即 $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$ ($x_n=x_0+nh$为固定值)。

HUST

整体截断误差与收敛性

注：数值方法是否收敛取决于误差$y(x_n)-y_n$的变化情况。

对于p阶公式，其局部截断误差为$O(h^{p+1})$，

即$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^{p+1})$， 其前提假定$y_n=y(x_n)$.

虽h->0时，局部截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}\to 0$，并不能说明其收敛（因其前提$y_n=y(x_n)$不成立），为此我们引入——

Def: 称$y(x_n)-y_n$为单步法的解y_n的**整体截断误差**。

局部截断误差与整体截断误差有何区别？

单步法收敛 ó $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$

即h→ 0时，整体截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}\to 0$

HUST

收敛性的判定

单步法收敛 ó $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$

Th：若单步法$y_{n+1}=y_n+h\,\varphi(x_n,y_n,h)$具有p阶精度，且增量函数$\varphi(x,y,h)$关于y满足Lipschitz条件：

$$|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|\le L_\Phi\,|y-\bar{y}|$$

若初值y_0是准确的($y_0=y(x_0)$)，则其整体截断误差为：

$$y(x_n)-y_n=O(h^p).$$

注：若单步法满足以上条件,显然其收敛。

HUST

改进Euler法的收敛性

$$y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n))]/2$$

则$\varphi(x,y,h)=[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))]/2$

若：①$y_o=y(x_0)$ ②$f(x,y)$关于y满足李--条件:$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|$

则：$|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|$

$$\le \tfrac{1}{2}[|f(x,y)-f(x,\bar{y})|+|f(x+h,y+hf(x,y))-f(x+h,\bar{y}+hf(x,\bar{y}))|]$$

$$\le \tfrac{1}{2}[L|y-\bar{y}|+L|y+hf(x,y)-\bar{y}-hf(x,\bar{y})|]$$

$$\le \frac{1}{2}[L|y-\bar{y}|+L|y-\bar{y}|+L^2h|y-\bar{y}|]=L(1+\frac{h}{2}L)|y-\bar{y}|$$

限定$h\le h_0$，则 $|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|\le L(1+\frac{h_0}{2}L)|y-\bar{y}|$

即$\Phi(x,y,h)$ 满足李普希兹条件，由定理知改进的Euler法收敛。

其它方法的收敛性

- 同样可验证，

①若$f(x,y)$关于y满足李普希兹条件且 ② $y_0=y(x_0)$时，

Euler法，标准四阶龙格－库法也收敛。

- 当方程中的$f(x,y)$给定时，可具体验证条件①的满足性。

稳定性

- 讨论收敛性时一般认可：数值方法本身计算过程是准确的。

但：① 初始值y_0有误差 $\delta_0=y_0-y(x_0)$.

② 计算的每一步有舍入误差。

- 初始误差在计算过程传播中，是逐步衰减，还是恶性增长，这就是稳定性问题。

Def：设在节点x_n处用数值法得到的理想数值解为y_n，而实际计算得到的近似值为$\tilde{y}_n$，称 $d_n=\tilde{y}_n-y_n$为第n步数值解的扰动。

Def：若一种数值方法在节点x_n处的数值解y_n的扰动$\delta_n\neq 0$，而在以后的各节点值$y_m(m>n)$上有扰动δ_m.

当$|\delta_m|\le|\delta_n|$，$(m=n+1,n+2,\ldots)$，则称该数值算法是稳定的。

- 分析算法的数值稳定性常考察模型方程： $y'=\lambda y$ ， $(\lambda<0)$

HUST

Euler法的稳定性

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

Euler法：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

考察模型方程 $y'=\lambda y$，$(\lambda<0)$

即 $y_{n+1}=(1+h\lambda)y_n$

假设在节点值y_n上有扰动δ_n，在y_{n+1}上有扰动δ_{n+1}，

且δ_{n+1}仅由δ_n引起(计算过程不再引进新的误差)。

$$d_{n+1}=\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}=(1+h\lambda)\tilde{y}_n-(1+h\lambda)y_n$$

$$\therefore d_{n+1}=(1+h\lambda)(\tilde{y}_n-y_n)=(1+h\lambda)d_n$$

Euler法稳定 $\Leftrightarrow |d_{n+1}|\le|d_n|\Leftrightarrow|1+h\lambda|\le 1$

$\therefore$ Euler法的稳定的条件为 $0<h\le-2/\lambda$.

HUST

隐式Euler稳定性

Ø 例：隐式Euler法：$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

对于模型方程 $y'=\lambda y$ $(\lambda<0)$

则$y_{n+1}=y_n+h\lambda y_{n+1}$ => $y_{n+1}=y_n/(1-h\lambda)$

Ø设y_n的扰动为 $d_n=\tilde{y}_n-y_n$，则y_{n+1}的扰动

$$d_{n+1}=\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}=\frac{d_n}{1-hl}$$

Ø∴ 要使隐式Euler法稳定 ó $|1/(1-h\lambda)|\le 1$

Ø∵ $\lambda<0$， ∴ $\forall h>0$ 上式均成立，隐式Euler法无条件稳定。

梯形公式稳定性

梯形公式 $y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$，

设模型方程为$y'=\lambda y(\lambda<0)$

则 $y_{n+1}=y_n+h[\lambda y_n+\lambda y_{n+1}]/2$

$$\therefore y_{n+1}=\frac{1+\frac{hl}{2}}{1-\frac{hl}{2}}y_n$$

当y_n有扰动 $d_n=\tilde{y}_n-y_n$时,y_{n+1}的扰动$\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}=\delta_{n+1}$ 为

$$d_{n+1}=\frac{1+\frac{hl}{2}}{1-\frac{hl}{2}}d_n$$

∴ 梯形公式稳定<=> $\left|\frac{1+\frac{h\lambda}{2}}{1-\frac{h\lambda}{2}}\right|<1$

∵ $\lambda<0$

∴ 上式对任意$h>0$时恒成立，

∴ 梯形公式恒稳定。

HW:
作业四 #3, 4

边值问题的数值解法（了解）

- 一阶常微分方程初值问题：

Problem I: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 求函数y=y(x)满足：$y'(x) = f(x, y(x))$

数值解法：求y=y(x) $\xrightarrow{\text{离散化}}$ 求$y(x_n)$ $\xrightarrow{\text{递推公式}}$ 求y_n

$x_n = x_0 + nh$

局部截断误差　整体截断误差

- 数值微分（中心差商）：

$$f'(a) \approx G(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \qquad f'(a) - G(h) = -\frac{f'''(\xi)}{6}h^2$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \qquad x \in [\min_{0\le i\le n} x_i, \max_{0\le i\le n} x_i]$$

- 二阶线性常微分方程边值问题：

$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$，$a < x < b$

$y(a) = \alpha$，$y(b) = \beta$ ——边值条件

其中p(x)，q(x)，r(x)为区间［a，b］上足够光滑的已知函数，且$q(x) \le 0$，α、β为已知常数。

在上述条件下，边值问题存在唯一的连续可微解 y(x).

- 有限差分法：/* finite difference method */

(1)将区间[a,b]离散化，取节点 $x_n = a + nh$ $(n = 0, \ldots, N)$ ——求$y(x_n)$

$y''(x_n) + p(x_n)\, y'(x_n) + q(x_n)\, y(x_n) = r(x_n)$，$(n = 0, \ldots, N)$

(2)用2阶差商近似$y''(x_n)$；1阶差商近似$y'(x_n)$；数值解y_n近似$y(x_n)$ $(n = 0, \ldots, N)$ ——求y_n

(3) 解关于y_n $(n = 0, \ldots, N)$的差分方程组

差分法

$y''+p(x)y'+q(x)y= r(x)$， $a< x< b$ $\qquad$ $x_n = a + nh\ (n = 0, \ldots, N)$

$y(a)=\alpha$， $y(b)=\beta$ $\qquad$ $h=\dfrac{b-a}{N}$， $x_0=a, x_N=b$

$$y''(x_n) +p(x_n)\, y'(x_n) +q(x_n)\, y(x_n) = r(x_n)\,,\quad (n = 0, \ldots, N) \qquad (1)$$

泰勒展开 $(n = 1, \ldots, N\text{-}1)$

$$y'(x_n)=\frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}-\frac{y'''(h_n)}{6}h^2 \qquad (2)$$

$$y''(x_n)=\frac{\dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}-\dfrac{y(x_n)-y(x_{n-1})}{h}}{h}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_n)$$

证明:(3)

$$y''(x_n)=\frac{y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(x_n) \qquad (3)$$

将(2)，(3)代入(1) 得

$$\frac{y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})}{h^2}+p(x_n)\frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}+q(x_n)y(x_n)$$
$$=r(x_n)+\left[\frac{y^{(4)}(x_n)}{12}+p(x_n)\frac{y^{(3)}(h_n)}{6}\right]h^2$$

差分方程组

$$\frac{y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})}{h^2}+p(x_n)\frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}+q(x_n)y(x_n)$$
$$=r(x_n)+\left[\frac{y^{(4)}(x_n)}{12}+p(x_n)\frac{y^{(3)}(h_n)}{6}\right]h^2 \qquad (4)$$

记 $p(x_n)= p_n$,$q(x_n)= q_n$, $r(x_n) = r_n$, $y(x_0) = y_0 = \alpha$, $y(x_N) = y_N =\beta$

当h较小时，忽略上式中$O(h^2)$，并取 $y_n \approx y(x_n)$，使

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+p_n\dfrac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+q_ny_n=r_n & n=1,2,\ldots,N-1; \\ y_0=a\ ;\ y_N=b \end{cases} \qquad (5)$$

(5)称为边值问题的差分方程组：$y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$为差分解

$R_n=\left[\dfrac{y^{(4)}(x_n)}{12}+p(x_n)\dfrac{y^{(3)}(h_n)}{6}\right]h^2$ 称为差分方程(5)逼近边值问题的截断误差

$e_n= y(x_n)- y_n$ ， $(n = 1, \ldots, N\text{-}1)$称为差分解的截断误差

注：R_n，$n = 1, \ldots, N\text{-}1$ 与e_n，$n = 1, \ldots, N-1$有何关系？

差分解的截断误差

由 (4)-(5) 得：

$$\begin{cases} \dfrac{e_{n+1}-2e_n+e_{n-1}}{h^2}+p_n\dfrac{e_{n+1}-e_{n-1}}{2h}+q_ne_n=R_n \quad n=1,2,\cdots,N-1; \\ e_0=0;\ e_N=0 \end{cases} \qquad (6)$$

对于前述边值问题 $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$，$a<x<b$
$y(a)=\alpha$，$y(b)=\beta$

当p(x)=0时，差分方程(4)的截断误差 $R_n=\dfrac{y^{(4)}(x_n)}{12}h^2$

此时（q(x)≤0），差分解的截断误差有结论：

$$|e_n|=|y(x_n)-y_n|\le \frac{\max\limits_{a\le x\le b}|y^{(4)}(x)|}{96}(b-a)^2h^2,\quad n=1,2,\cdots,N-1$$

特别地， $R_n=0,\ n=1,2,\cdots,N-1 \Rightarrow e_n=0, n=1,2,\cdots,N-1$

$$\begin{cases} e_{n+1}+(-2+h^2q_n)e_n+e_{n-1}=0,\ n=1,2,\cdots,N-1; \\ e_0=0;\ e_N=0 \end{cases} \qquad (7)$$

求解差分方程组的追赶法

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+p_n\dfrac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+q_ny_n=r_n \quad n=1,2,\cdots,N-1; \\ y_0=a;\ y_N=b \end{cases} \qquad (5)$$

当*n*=1与 *N*-1时：

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+p_1\frac{y_2-y_0}{2h}+q_1y_1=r_1 \Rightarrow (-2+h^2q_1)y_1+(1+\frac{h}{2}p_1)y_2=h^2r_1-(1-\frac{h}{2}p_1)a$$

$$\frac{y_N-2y_{N-1}+y_{N-2}}{h^2}+p_{N-1}\frac{y_N-y_{N-2}}{2h}+q_{N-1}y_{N-1}=r_{N-1}$$

$$\Rightarrow (1-\frac{h}{2}p_{N-1})y_{N-2}+(-2+h^2q_{N-1})y_{N-1}=h^2r_{N-1}-(1+\frac{h}{2}p_{N-1})b$$

差分方程组(5)可化为三对角型：用追赶法求解

$$\begin{cases} (-2+h^2q_1)y_1+(1+\frac{h}{2}p_1)y_2=h^2r_1-(1-\frac{h}{2}p_1)a \\ (1-\frac{h}{2}p_n)y_{n-1}+(-2+h^2q_n)y_n+(1+\frac{h}{2}p_n)y_{n+1}=h^2r_n,\ 2\le n\le N-2; \\ (1-\frac{h}{2}p_{N-1})y_{N-2}+(-2+h^2q_{N-1})y_{N-1}=h^2r_{N-1}-(1+\frac{h}{2}p_{N-1})b \end{cases} \qquad (8)$$

例4.5 用差分法解边值问题: $y''-y=x$

解：建立差分方程组: $y(0)=0$，$y(1)=1$，$0\le x\le 1$，$h=0.1$.

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}-y_n=x_n, \quad n=1,2,\ldots,9; \quad x_n=\dfrac{n}{10} \\ y_0=0;\ y_{10}=1 \end{cases}$$

化为三对角型

$$\begin{cases} (-2-10^{-2})y_1+y_2=0.1\times 10^{-2} \\ y_{n-1}+(-2-10^{-2})y_n+y_{n+1}=x_n\times 10^{-2}, \ 2\le n\le 8 \\ y_8+(-2-10^{-2})y_9=x_9\times 10^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -(2+10^{-2}) & 1 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 1 & -(2+10^{-2}) & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -(2+10^{-2}) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & & 1 & -(2+10^{-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1\times 10^{-2} \\ 0.2\times 10^{-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -1+0.9\times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

用追赶法解差分方程组，差分解与精确解对比如下：

i	精确解 $y(x_i)$	差分解 y_i	实际误差 $(y(x_i)-y_i)$
1	0.07046741	0.07048938	-0.2197×10^{-4}
2	0.14264090	0.14268364	-0.4274×10^{-4}
3	0.21824367	0.21830475	-0.6108×10^{-4}
4	0.29903319	0.29910891	-0.7571×10^{-4}
5	0.38681887	0.38690415	-0.8528×10^{-4}
6	0.48348014	0.48356844	-0.8830×10^{-4}
7	0.59098524	0.59106841	-0.8317×10^{-4}
8	0.71141095	0.71147906	-0.6811×10^{-4}
9	0.84696337	0.84700451	-0.4113×10^{-4}

其精确解为：$y(x)=\dfrac{2(e^x-e^{-x})}{e-e^{-1}}-x$

用差分解的截断误差公式分析：

$$|e_n| = |y(x_n) - y_n| \le \frac{\max\limits_{a\le x\le b}|y^{(4)}(x)|}{96}(b-a)^2h^2,\quad n=1,2,\cdots,N-1$$

$$y'' - y = x \Rightarrow y'' = x + y \Rightarrow y^{(4)}(x) = y''$$

$$\therefore\ y^{(4)}(x) = y(x) + x$$

由差分方程，可证：当$0\le x\le 1$时，$|y(x)|\le 1$

$$\therefore\ \max_{0\le x\le 1}|y^{(4)}(x)| \le 2$$

$$\therefore\ |y(x_n) - y_n| \le \frac{1}{48}\times 10^{-2} \approx 2.083\times 10^{-4},\quad n=1,2,\cdots,N-1$$

以上是关于第一类边值条件边值问题差分法

类似，可导出第二，三类边值条件边值问题差分方程

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

小结

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Taylor公式　　数值积分法

公式	单步否	显式否	精度
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$	单步	显式	一阶
$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$	单步	隐式	一阶
$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$	二步	显式	二阶
$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$	单步	隐式	二阶
$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$	单步	显式	二阶

Runge－Kutta方法

局部截断误差　整体截断误差

收敛性与稳定性