第五章　方程求根的数值解

/* Solutions of Nonlinear Equations */

HUST

引入

在科学与工程计算中经常需求解方程$f(x)=0$的根

① 当$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+......a_1 x+a_0$ 时

　$n=1,2,3,4$时,可用求根公式求解

　$n\geqslant 5$时,不能用公式表示方程的根

② 对于一般的非线性方程$f(x)=0$, $x\in R$， 只能求出其近似值，我们探讨其数值解法——逐步逼近法。

1.初始近似根x_0

2. $x_k \rightarrow \boxed{递推关系} \rightarrow x_{k+1}$　　(x_k收敛于真解x^*)

HUST

5.1 根的隔离和二分法

为了确定初始近似根 x_0，必须知道**f(x)=0** 的根的大致范围。

若**f(x)=0** 在**(a,b)** 内有一个根，称**(a,b)**为**f(x)=0** 的有根区间;

若**f(x)=0** 在 **(a,b)**只有一个根，称**(a,b)**为**f(x)=0** 的隔根区间。

当(a,b) 为隔根区间时，可取$x_0 \in (a,b)$。

Def: 根的隔离——求f(x)=0的隔根区间的过程。

根的隔离的依据

Th5.1 设函数f(x)在[a,b]上连续，且有f(a)f(b)<0, 则方程 f(x)=0 在[a,b]内至少有一个根.

注: ① [a,b]为有根区间

② 当 f(x) 满足Th5.1 的条件且在[a,b] 上单调时，

f(x)在**[a,b]**内只有一根;

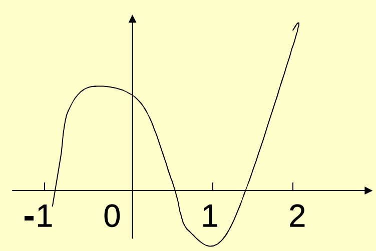
即 (a,b)为隔根区间。

根的隔离的方法

图象法:作出 y=f(x)的草图，由曲线y=f(x) 与x轴的交点的大致位置来确定隔根区间.

例 隔根区间：(-1,0),(0,1),(1,2)

区间端点上函数值f(x) 异号



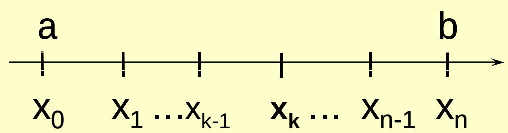
逐步搜索法

已知：[a,b]为 f(x)=0的有根区间，

且[a,b] 较大,

求一个缩小的有根区间

Ø取步长h=(b-a)/n



Ø从x_0=a出发以h 为步长向右搜索直至找到第一个点x_k=a+kh 满足 $f(a)f(x_k) \le 0$, 则得缩小得有根区间$[x_{k-1},x_k]$。

Ø取初始近似根为x_{k-1}或x_k，其误差限为h.

Algorithm

step 1: $x_0 = a,\ h=(b-a)/n$

step 2: If $(f(x_0)f(x_0+h) \le 0)$ 输出(x_0,x_0+h)

Else $x_0 = x_0+h$, goto step 2

例 求方程$f(x)=x^3-x-1=0$ 的有根区间。

解: ∵ $f(0)=-1<0$, $f(+\infty)>0$ ∴ $(0,+\infty)$为有根区间

从x=0 出发, 步长h=0.5向右计算, 则

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	-	-	-	+	+

得缩小的有根区间为（1.0，1.5）

可取初始近似根$x_0=1.0$或$x_0=1.5$

小结 :当 h很小时，得到很小的有根区间，

取$x^* \in (x_0,x_0+h)$，从而可算得任意精度的近似根，

但h越小计算量越大，利用此法求近似根仍不十分理想。

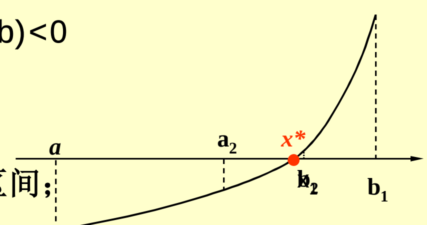
5.1.2 二分法 /* Bisection Method */

思想：将有根区间 [a,b]逐次减半（二分），使有根区间缩小直到误差容许范围内，然后取区间中点为真根x* 的近似值。

设$f(x)=0$的有根区间为$[a,b]$且$f(a)f(b)<0$

(1) 取$x_0=(a+b)/2$

If $f(x_0)=0$，则 x_0为 $f(x)=0$的根；



else if $f(a)f(x_0)<0$, 则$[a,x_0]$为有根区间;

记 $a_1=a,\ b_1=x_0=(a+b)/2$

else $f(x_0)f(b)<0$,则$[x_0,b]$ 为有根区间,记 $a_1=x_0=(a+b)/2,\ b_1=b$

∴ 得缩小的有根区间$[a_1,b_1]$且$b_1-a_1=(b-a)/2$，$[a,b]$包含$[a_1,b_1]$

(2) 将$[a_1,b_1]$ 二等分，其中点$x_1=(a_1+b_1)/2$，计算$f(x_1)$，重复(1)，或$f(x_1)=0$ 则$x^*=x_1$，或得有根区间 $[a_2,b_2]$ 且$b_2-a_2=(b_1-a_1)/2$.

(3) ……反复进行，则得到有根区间套

$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_k,b_k] \ldots \ni x^*$

$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \ldots = \frac{1}{2^k}(b-a)$

记 $[a_k,b_k]$ 的中点为 $x_k=(a_k+b_k)/2$ 并作为根的近似值，

从而有近似根序列：$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k, \ldots..$

Q $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^k}=0$ 且 $\forall k,\ x^* \in [a_k,b_k]$ $\quad \therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

二分法是收敛的

将有限次二分的结果x_k 作为根的近似值，其误差为多少呢？

Q$x^*, x_k \in [a_k,b_k]$，$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$ $\quad \therefore |x^*-x_k| \le \frac{1}{2}(b_k-a_k)=b_{k+1}-a_{k+1}$

从而误差估计式 $\quad |x^*-x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}$

$$|x^*-x_k| \le |b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

于是用二分法解f(x)=0，使误差不超过 ε 的终止准则：

（1） 先验估计 $|x^*-x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon \ \Rightarrow k > \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2} - 1$

（2） 后验估计 $b_{k+1}-a_{k+1} < \varepsilon$

Algorithm

Step1. 输入a, b, ε, δ

Step2. X=(a+b)/2

Step3. if (|f(x)|<δ 或b-x<ε) 输出x stop

else if (f(a)f(x)<0) b=x

else a=x

Step4. Goto Step2

例题

例 5.2 求方程 $f(x)=x^3-x-1$ 在区间(1,1.5)内的根，要求精确到小数点后的第二位，($\varepsilon=10^{-2}/2$)，用四位小数计算。

解：① $a=1, b=1.5$ 且 $f(a)<0$，$f(b)>0$

精度要求为 $\varepsilon=10^{-2}/2=0.005$　由误差估计式 $|x^*-x_k|\le(b-a)/2^{k+1}$

得 $0.5/2^{k+1}<0.005$，从而　$2^{k+1}>100$，取 $k=6$　即可。

② $x_0=\frac{1}{2}(a+b)=1.25$　　$f(x_0)<0$

$\because f(x_0)f(b)<0$　$\therefore$ 令 $a_1=x_0=1.25$，$b_1=b=1.5$

新的有根区间 (a_1,b_1)　取 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)=1.375$，$f(x_1)>0$　$f(a_1)f(x_1)<0$

$\therefore a_2=a_1=1.25$, $b_2=x_1=1.375$　从而得有根区间 (a_2,b_2)，… …

二分法分析

① 简单;收敛性有保证;
② 对 $f(x)$ 要求不高(只要连续即可)。

HW:
作业五 **#1**

① 无法求复根及偶重根;
② 收敛慢。

注：用二分法求根，最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。或用搜索程序，将 $[a, b]$ 分为若干小区间，对每一个满足条件 $f(a_k)\cdot f(b_k)<0$ 的区间调用二分法程序，可求 $[a, b]$ 内的多个根 。

5.2 迭代法

思想：先给出f(x)=0的一个初始近似根x_0，再反复使用某一公式校正这个初始根，使之逐步精确化，直到满足精度要求为止。

$$\begin{cases} x_0 & \text{迭代初值} \\ x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,2,\ldots & \text{迭代格式} \end{cases}$$

g(x)称为迭代函数.

如何构造迭代格式？ ——不动点迭代法/* Fixed-Point Iteration */

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$$

$f(x)$ 的根 ⟷ $g(x)$ 的不动点

思路

从 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, …, $x_{k+1}=g(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 g 连续，则由 $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k)$ ，得 $x^*=g(x^*)$，即x^*是g的不动点，

也就是f(x)=0的根

迭代法的几何解释

x=g(x) 的解即为曲线y=g(x) 与直线y=x 的交点p*

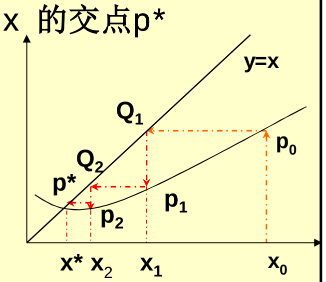
初始值x_0, 得y=g(x) 上点$p_0(x_0,g(x_0))$

…$p_1(x_1,g(x_1))$ $x_1=g(x_0)$

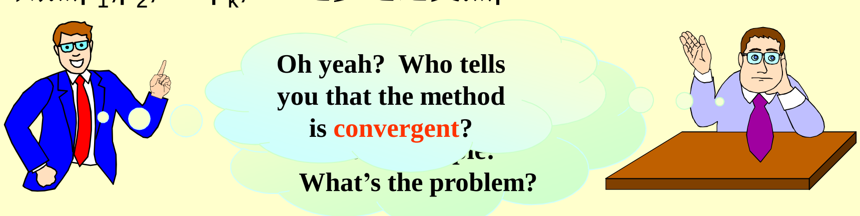
…$p_2(x_2,g(x_2))$ $x_2=g(x_1)$

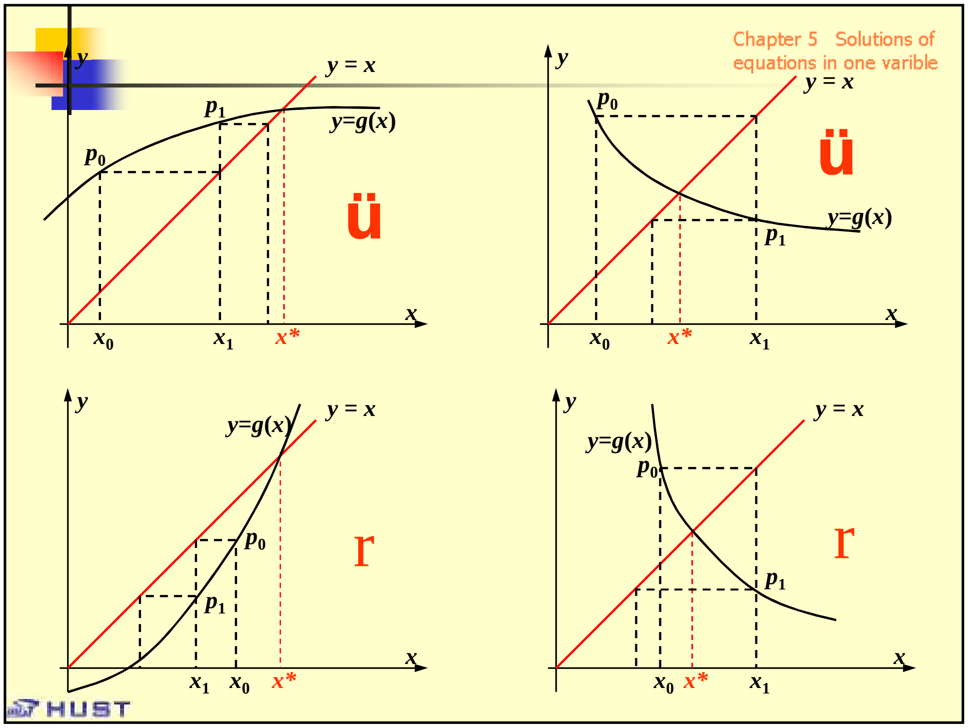
……

…$p_{k+1}(x_{k+1},g(x_{k+1}))$ $x_{k+1}=g(x_k)$



当由$x_{k+1}=g(x_k)$ 所决定的点列$x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$收敛到$x^*$.
则点$p_1,p_2,\ldots\ldots p_k,\ldots\ldots$逐步逼近交点p*.





例： 求 $x^3-x-1=0$ 在$x=1.5$ 附近的一个根（用六位有效数字近似）

解 I： $x^3-x-1=0$ 等价于 $x=\sqrt[3]{x+1}$ 取$g(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 取$x_0=1.5$ 则

$$x_1=\sqrt[3]{1.5+1}=1.35721 \qquad x_7=\sqrt[3]{x_6+1}=1.32472$$

$$x_2=\sqrt[3]{1.35721+1}=1.33086 \qquad x_8=\sqrt[3]{x_7+1}=1.32472=x_7$$

… $\Rightarrow x^*\approx 1.32472$

II： $x^3-x-1=0$ 等价于 $x=x^3-1$； $g(x)=x^3-1$

迭代格式为 $x_{k+1}=x_k^3-1$ $(k=0,1,2,\ldots)$

取$x_0=1.5$ 则 $x_1=1.5^3-1=2.375$， $x_2=x_1^3-1=12.3976$

…………

序列$\{x_k\}$ 发散

注：(1)必须适当选取x_0 及$g(x)$才能使迭代公式所求的序列$\{x_k\}$收敛；

(2)$\{x_k\}$收敛时，k 次迭代的结果的误差$\varepsilon_k=x_k-x^*=$?

HUST

迭代法收敛性分析

$f(x)=0$ ó $x=g(x)$, 从而有迭代格 $x_{k+1}=g(x_k)$ $k=0,1,2,.....$

Th5.3 设迭代函数 $g(x)$ 在$[a,b]$上具有连续的一阶导数，且当

(1) $x\in[a,b]$ 时，$a\leqslant g(x)\leqslant b$;

(2) 存在正数$L<1$，对 $x\in[a,b]$ 有$|g'(x)|\leqslant L<1$成立，

则 $x=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯S一解 x^*， 且对任意的初始近似值 $x_0\in[a,b]$迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)(k=0,1,2,.....)$ 收S敛且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x^*$

证明： ① x^*的存在性

作 $h(x)=x-g(x)$，则$h(x)$ 在$[a,b]$上连续；

而 $h(a)=a-g(a)\leqslant 0$，$h(b)=b-g(b)\geq 0$；

由连续函数性质，必有$x^*\in[a,b]$ 使 $h(x^*)=0$ 即$x^*=g(x^*)$ ü

② x^*的唯一性

若$x^\triangle\in[a,b]$,且$x^\triangle=g(x^\triangle)$，则$x^*-x^\triangle=g(x^*)-g(x^\triangle)$，

那么$x^*-x^\triangle=g'(\xi)(x^*-x^\triangle)$，$\xi$在$x^*$与$x^\triangle$之间且$\xi\in[a,b]$，

则$(x^*-x^\triangle)(1-g'(\xi))=0$，而$|g'(\xi)|\leq L<1$， $\therefore x^*=x^\triangle$ ü

③ 迭代过程的收敛性

$\because x^*-x_{k+1}=g(x^*)-g(x_k)=g'(\xi)(x^*-x_k)$，

由条件(1)知$x_k\in[a,b]$，则$\xi\in(a,b)$，

$\therefore |x^*-x_{k+1}|=|g'(\xi)||x^*-x_k|$

$\leq L|x^*-x_k|\leq L^2|x^*-x_{k-1}|\leq\ldots$

$\leq L^{k+1}|x^*-x_0|\to 0$, $(\because 0\leq L<1)$

$\therefore \lim\limits_{k->\infty} x_k=x^*$ ü

说明

Ø Th中条件(1) 迭代序列$\{x_k\}$ 均在$[a,b]$ 内；

Ø 条件(2)保证x_k与x^*间的距离随k增加而减少并最终趋于0。

Ø 对$x^3-x-1=0$ 的两种格式分析

$$g(x)=\sqrt[3]{x+1} \quad g(x)=x^3-1 \quad [a,b]=[1,2]$$

误差估计式

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

Th5.4 在 Th5.3的条件下，有如下误差估计式

$$|x^*-x_k| \le \frac{|x_{k+1}-x_k|}{1-L} \quad \text{后验估计}$$

$$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \quad \text{先验估计}$$

证:

$\because |x^*-x_{k+1}| \le L|x^*-x_k|$

$$\therefore |x_{k+1}-x_k| = |x^*-x_k-(x^*-x_{k+1})| \ge |x^*-x_k|-|x^*-x_{k+1}| \ge |X^*-X_K|- L|X^*-X_K| = (1-L)|X^*-X_K|$$

$$\therefore \quad |X^*-X_K| \le \frac{|X_{k+1}-X_K|}{1-L}$$

又 $|x_{k+1}-x_K|$

$$= |g(x_k)-g(x_{k-1})| = |g'(\xi)(x_k-x_{k-1})|,\ \xi \in (a,b), \le L|x_k-x_{k-1}| \le L^2|x_{k-1}-x_{k-2}| \cdots \le L^k|x_1-x_0|$$

$$\therefore \quad |x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

停机准则: ①先验估计 ②后验估计

Q$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \le \varepsilon$

$\therefore k > [\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|} \div \ln L]$

$|x^*-x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \le \varepsilon$ 若L不接近于1

实用方法：$|x_{k+1}-x_k| < \varepsilon$

HUST

Algorithm: Fixed-Point Iteration

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

Find a solution to $x = g(x)$ given an initial approximation x_0.

Input: initial approximation x_0; tolerance *TOL*; max. num. of iterations N_{max}.

Output: approximate solution x or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$;

Step 2 While (i £ N_{max}) do steps 3-6

Step 3 Set $x = g(x_0)$; /* compute x_i */

Step 4 If $|x - x_0| < TOL$ then Output (x); /* successful */
STOP;

Step 5 Set i ++;

Step 6 Set $x_0 = x$;
/* update x_0 */

当 x 很大时，此处可改为 $\left|\frac{x - x_0}{x}\right| < TOL$

Step 7 Output (The method failed after N_{max} iterations); /* unsuccessful */
STOP.

HUST

例5.3求方程 $x=e^{-x}$ 在 $x_0=0.5$ 附近的近似根,要求精确到小数后三位.

解：此时 $f(x)= x-e^{-x} =0$

$f(0.5)<0 \quad f(0.6)>0$

∴ [0.5,0.6] 为f(x)=0 的有根区间。

取 $g(x)=e^{-x}$；从而迭代格式 $x_{k+1}=e^{-x_k} \quad k=0,1,2,\cdots\cdots$

判定收敛性：

当 $x\in[0.5,0.6]$, $|g'(x)|=|-e^{-x}|=e^{-x}\le e^{-0.5} \approx 0.607<1$

∴ 迭代格式收敛

取 $x_0=0.5$，精度要求 $\varepsilon=10^{-3}/2=0.0005$ 迭代，

结果见p129表

k	x_k	x_k-x_{k-1}
0	0.5	
1	0.60653	0.10653
2	0.54524	−0.06129
3	0.57970	0.03446
4	0.56007	−0.01963
5	0.57117	0.0110
6	0.56486	−0.00631
7	0.56844	0.00358
8	0.56641	−0.00203
9	0.56756	0.00115
10	0.56691	−0.00065

注：定理条件非必要条件，可将 $[a, b]$ 缩小，定义局部收敛性。

局部收敛性

Th5.3 的迭代收敛条件之一**:** $x \in [a,b]$， $|g'(x)| \le L<1$

在[a,b]较大时，其该条件不易满足，考虑局部收敛性 ——

Def: 若在x^*的某邻域△:$|x-x^*|\le\delta$, 迭代过程对任意的初始值 $x_0\in$△均收敛，则称其具有局部收敛性。

Th5.5 设g(x)在x=g(x) 的根x^*邻近有连续的一阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$，则迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$具有局部收敛性。

局部收敛性

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

Th5.5 设g(x)在x=g(x) 的根x^*邻近有连续的一阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$，则迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$具有局部收敛性**.**

分析**:** 在△:$|x-x^*|\le\delta$即$[x^*-\delta, x^*+\delta]$应用**Th5.3**来证明.

证 $\because |g'(x^*)|<1$且$g'(x)$ 在x^*的邻近连续

$\therefore$ 存在充分小的邻域△：$|x-x^*|\le\delta$使

$x \in$△时，$|g'(x)| \le L<1$ （L为常数）

而 $g(x)-g(x^*)=g'(\xi)(x-x^*)$

又 $x \in$△时$\xi\in$△，有$|g'(\xi)| \le L<1$.

$\therefore |g(x)-x^*| = |g(x)-g(x^*)| \le L|x-x^*|<|x-x^*|\le\delta$，即$g(x) \in$△。

$\therefore$ g(x)在**x***的 δ 邻域△内满足**Th5.3**收敛条件(1) (2)；

$\therefore x_{k+1}=g(x_k)$ 对任意 $\mathbf{x_0}\in$ △ 收敛，即具有局部收敛性。

HUST

例5.4 求$x^3-2x-5=0$ 在$x_0=2$ 附近的实根。

解：由$x^3-2x-5=0$ 得 $x=\sqrt[3]{2x+5}$ $\Rightarrow$ $g(x)=\sqrt[3]{2x+5}$

$$\begin{cases} x_{k+1}=g(x_k)=\sqrt[3]{2x_k+5} \\ x_0=2 \end{cases} \quad g'(x)=\tfrac{2}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}}$$

∵ $g'(x_0)<1/6$ 且$g'(x)$在$x_0=2$邻近连续

∴ 迭代格式$x_{k+1}=g(x_k)$ 在$x_0=2$的邻域内具有局部收敛性

$x_1=\sqrt[3]{2x_0+5}=2.0800838$

$x_2=2.0923507,\ x_3=2.0942170,$

$x_4=2.0945006,\ x_5=2.0945438,$

$x_6=2.0945503,$

$x^*=2.0945514815$

误差逐步减小，减小速度为6^{-k}

注：构造 $x=\frac{1}{2}(x^3-5)$ $\quad g(x)=\frac{1}{2}(x^3-5)$ $\quad g'(x)=\frac{3}{2}x^2$ $\quad g'(2)=6>1$

如取 $x_0=2$，则 $x_1=1.5,\ x_2=-0.125,\ x_3=-2.500,$

$x_4=-10.312,\ x_5=-551.2,\ \ldots,$ 是发散序列。

迭代法在实时系统设计中的应用

假定实时系统由N个实时任务构成集合 $\Gamma=\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$

$\Gamma=\{t_i=\langle C_i, T_i, D_i, p_i\rangle \mid i=1, \ldots, N\}$

$R_i \le D_i,\ i=1, 2, \ldots, N$

$$R_i = C_i + \sum_{\forall t_j\in\Gamma,\, p_j>p_i} \left\lceil \frac{R_i}{T_j} \right\rceil C_j$$

$$R_i^{(n+1)} = C_i + \sum_{\forall t_j\in\Gamma,\, p_j>p_i} \left\lceil \frac{R_i^{(n)}}{T_j} \right\rceil C_j$$

取迭代初值 $R_i^{(0)}=0$

如果 $R_i^{(n+1)}=R_i^{(n)}$ 表明迭代收敛，$R_i=R_i^{(n+1)}$

如果 $R_i^{(n+1)}>D_i$ 表明任务t_i是不可调度的.

5.3.1 迭代过程的收敛速度

迭代格式 $x_{k+1}=g(x_k)$的收敛速度依赖于什么？ $|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

若$|g'(x)|\le L<1$:

当 $L\approx0$ 时　　收敛快,

当 $L\approx1$ 时　　收敛慢,

而 $L>1$ 时，　　不收敛(发散)

收敛速度用收敛阶来衡量

Def5.2 迭代序列$\{x_k\}$收敛于$f(x)=0$ 的根x^* ($x_k \to x^*$),

记第k 步迭代的误差为 $e_k=x_k-x^*(k=0,1,2,\ldots\ldots)$,

若有某个实数 $p\ge1$和非零常数C 使 $\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C\ (k\ne0)$

则称$\{x_k\}$ 是 p阶收敛的。

注：　p的大小反映收敛速度的快慢，p越大，收敛越快

$p=1$ —— 线性收敛；　$p=2$ —— 平方收敛

$p>1$ —— 超线性收敛

Th5.6 对于迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$，如果迭代函数g(x)在根x*的邻近有连续二阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$

(1) 当$g'(x^*)\ne0$ 时,迭代过程线性收敛;

(2) 当$g'(x^*)=0$ 而$g''(x^*)\ne0$ 时, 迭代过程平方收敛。

分析：　用泰勒公式证

（1）$\frac{e_{k+1}}{e_k}\to g'(x^*)$　　（2）$\frac{e_{k+1}}{e_k^2}\to\frac{g''(x^*)}{2}$

注：推广的结论Th5.7

HW:
作业五 **#2**

注：构造迭代函数的一般方法

$x=x+\lambda(x)f(x)$，　$g(x)=x+\lambda(x)f(x)$

由$|g'(x)|\le L<1$ → 选$\lambda(x)$