Discrete Mathematics

CHAPTER 02 증명

함채원 • 홍영진

INFINITYBOOKS
인피니티북스

학습개요

- 수학적 귀납법
  - ◆ 수학적 귀납법과 이를 이용한 증명 과정을 이해한다
- 직접증명법
  - ◆ 명제의 함축이 참이 됨을 증명하는 방법을 익힌다
- 간접증명법
  - ◆ 직접증명법 외의 다양한 증명 방법들을 익힌다
- 재귀법
  - ◆ 재귀법과 재귀 알고리즘을 이해한다
- 프로그램 검증
  - ◆ 프로그램을 검증하는 방법을 익힌다

Section 01 수학적 귀납법 (1)

- 증명(proof)
  - 명제를 참으로 확정하는 과정

정리 2.1

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$에 대하여 다음 두 조건이 성립한다고 하자.

(1) $p(1)$은 참이다.

(2) 임의의 k에 대하여 $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다.

이때 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다. 이를 수학적 귀납법(mathematical induction)이라고 한다.

Section 01 수학적 귀납법 (2)

【증명】 집합 $F=\{n\in N \mid p(n): False\}$라고 하고 명제 $p(n)$이 조건 (1), (2)를 만족한다고 할 때 $F=\varnothing$ 임을 증명하자.

만일 $F\neq\varnothing$이라면 정수의 정렬성에 의해 최소 원소인 정수 l이 F에 존재한다. 조건에서 명제 $p(n)$이 (1)을 만족하므로 $l\neq 1$, $l>1$이다. 그런데 l은 F의 최소 원소므로 $(l-1)\notin F$다. 즉 $p(l-1)$은 참이다.

조건 (2)에 의해 $p(l-1)$이 참이면 $p(l-1+1)=p(l)$도 참이다. 그런데 F는 거짓인 명제들의 집합이므로 $p(l)$이 참인 것은 $l\in F$인 것에 모순이다. 따라서 $F=\varnothing$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

Section 01 수학적 귀납법 (3)

예제 2.1

n이 양의 정수일 때 다음 식이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하여라.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

풀이

먼저 $n=1$일 때 $(2\cdot 1-1)=1^2$이 되어 식이 성립한다.

이제 $n=k$일 때 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 $1+3+5+\cdots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)\\&=k^2+(2(k+1)-1)\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2\end{aligned}$$

그러므로 n이 양의 정수일 때 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립한다.

Section 01 수학적 귀납법 (4)

예제 2.4

n이 양의 정수일 때 n^3+2n이 3의 배수임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하여라.

풀이

먼저 $n=1$일 때 $1^3+2\cdot 1=3$이 되어 3의 배수다.

이제 $n=k$일 때 k^3+2k가 3의 배수라고 가정하고, $n=k+1$일 때 $(k+1)^3+2(k+1)$도 3의 배수임을 보이자.

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1)&=k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\&=(k^3+2k)+3(k^2+k+1)\end{aligned}$$

여기서 귀납법 가정에 의해 $n=k$일 때 k^3+2k는 3의 배수고, $3(k^2+k+1)$도 3의 배수다. 따라서 합계인 $(k^3+2k)+3(k^2+k+1)$도 3의 배수가 된다.

그러므로 양의 정수 n에 대하여 n^3+2n은 3의 배수다.

Section 01 수학적 귀납법 (5)

예제 2.9

명제의 논리적 동치법칙 중에서 분배법칙

$$p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n) = (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_n)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하여라.

풀이

먼저 $n=2$일 때 $p \wedge (q_1 \vee q_2) = (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2)$는 명제의 논리적 동치법칙에 의해 성립함을 알 수 있다.

이제 $n=k$일 때 $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_k) = (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_k)$가 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 식이 성립함을 보이자.

Section 01 수학적 귀납법 (6)

이때 $(q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_k)$는 합성명제고 이를 $A=(q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_k)$라고 하면

$$\begin{aligned} p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_{k+1}) &= p \wedge (A \vee q_{k+1}) \\ &= (p \wedge A) \vee (p \wedge q_{k+1}) \\ &= [p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_k)] \vee (p \wedge q_{k+1}) \\ &= (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_k) \vee (p \wedge q_{k+1}) \end{aligned}$$

이 되어 $n=k+1$일 때 식이 성립함을 알 수 있다.

그러므로 분배법칙 $p \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_n) = (p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2) \vee \cdots \vee (p \wedge q_n)$ 이 성립한다.

Section 01 수학적 귀납법 (7)

제2 수학적 귀납법 / 강귀납법

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$에 대하여 다음 두 가지 조건이 성립한다고 하자.

① $p(1)$은 참이다.

② 임의의 자연수 $k \geq 1$에 대해 $p(1) \wedge p(2) \wedge \cdots \wedge p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다. 이때 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$은 참이다.

제2 수학적 귀납법을 이용한 증명은 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $\cdots$, $p(k)$가 모두 참임을 이용하여 $p(k+1)$도 참이 됨을 보이면 된다.

Section 01 수학적 귀납법 (8)

예제 2.11

$n \geq 14$인 자연수는 3, 8 또는 그 둘의 합으로 나타낼 수 있음을 제2 수학적 귀납법을 이용하여 증명하여라.

풀이

먼저 $n \geq 14$일 때 $14 = 8 + 3 + 3$이 되어 3과 8의 합으로 나타낼 수 있다.

이제 $14 \leq j \leq k$인 자연수 j가 모두 3과 8의 합으로 나타난다고 가정하고, $k+1$일 때도 성립함을 보이자.

$k+1 = (k-2) + 3$이고 k보다 작은 자연수 $(k-2)$는 귀납법 가정에 의해 3과 8의 합으로 나타낼 수 있다. 즉 $(k-2)$에 3을 더하면 나타낼 수 있는 수인 $k+1$도 3과 8의 합으로 나타낼 수 있다.

그러므로 $n \geq 14$인 자연수는 3, 8 또는 그 둘의 합으로 나타낼 수 있다.

Section 02 직접증명법 (1)

- 직접증명법(direct proof)
  - 명제의 함축 $p \rightarrow q$가 참이 됨을 증명하는 방법
  - 명제 p를 참이라고 가정하고, 여러 가지 정리와 식을 이용하여 명제 q 또한 참이 됨을 증명

Section 02 직접증명법 (2)

예제 2.14

임의의 자연수 k에 대하여 $4k+1$의 제곱은 다시 $4k+1$ 형태로 나타낼 수 있음을 직접증명법을 이용하여 증명하여라.

풀이 먼저 $4k+1$의 제곱은 다음과 같다.

$$(4k+1)^2=16k^2+8k+1=4(4k^2+2k)+1$$

여기서 k가 자연수일 때 $4k^2+2k$도 자연수다.

따라서 임의의 자연수 k에 대하여 $4k+1$의 제곱은 다시 $4k+1$ 형태로 나타낼 수 있다.

Section 02 직접증명법 (3)

예제 2.17

유리수 x의 정의는 다음과 같다.

$$x=\frac{b}{a} \ (a, b\in Z, a\neq 0)$$

이를 이용하여 두 유리수의 합은 유리수임을 직접증명법으로 증명하여라.

풀이 두 유리수 x, y는 유리수의 정의에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x=\frac{p}{q}, y=\frac{s}{t} \ (p, q, s, t\in Z, q\neq 0, t\neq 0)$$

이때 x와 y의 합은 다음과 같다.

$$x+y=\frac{p}{q}+\frac{s}{t}=\frac{pt+sq}{qt}$$

여기서 q와 t가 0이 아니므로 $qt\neq 0$이고 $pt+sq, qt\in Z$다.

그러므로 유리수의 정의에 의해 $x+y$는 유리수다.

Section 03 간접증명법 (1)

- 간접증명법(indirect proof)
  - 증명하고자 하는 명제를 논리에 어긋나지 않는 범위에서 증명하기 쉬운 명제로 변환하여 증명하는 방법
  - 종류
    - 대우증명법
    - 모순증명법
    - 반례증명법

Section 03 간접증명법 (2)

- 대우증명법(proof by contraposition)
  - 명제의 함축 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우인 $\neg q \rightarrow \neg p$ 도 참이고 두 명제가 서로 동치라는 점을 이용
  - 주어진 명제의 대우명제가 참임을 증명함으로써 증명하고자 하는 명제도 참임을 증명하는 방법

예제 2.19

임의의 정수 n에 대하여 n^2이 홀수면 n이 홀수임을 대우증명법을 이용하여 증명하여라.

Section 03 간접증명법 (3)

풀이

명제 p, q는 다음과 같다.

p: n^2은 홀수

q: n은 홀수

대우증명법을 이용하기 위해 $\neg p$, $\neg q$를 구하면 다음과 같다.

$\neg p$: n^2은 짝수

$\neg q$: n은 짝수

이제 $p \rightarrow q$가 참임을 보이기 위해 $\neg q \rightarrow \neg p$가 참임을 보이자.

n이 짝수라면 $n=2k$(k는 정수)다. 따라서

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$$

이 되어 n^2도 짝수다. 즉 주어진 명제의 대우명제 $\neg q \rightarrow \neg p$가 참이므로 $p \rightarrow q$도 참이다.

그러므로 임의의 정수 n에 대하여 n^2이 홀수면 n은 홀수다.

Section 03 간접증명법 (4)

예제 2.21

만약 r^2이 무리수면 r도 무리수임을 증명하여라.

풀이

명제 p, q는 다음과 같다.

p: r^2은 무리수

q: r은 무리수

대우증명법을 이용하기 위해 $\neg p$, $\neg q$를 구하면 다음과 같다.

$\neg p$: r^2은 유리수

$\neg q$: r은 유리수

이제 $p \rightarrow q$가 참임을 보이기 위해 $\neg q \rightarrow \neg p$가 참임을 보이자.

Section 03 간접증명법 (5)

r이 유리수라면 유리수의 정의에 의해 다음을 만족하는 정수 n, m이 존재한다.

$$r=\frac{n}{m}\ (n, m \in Z, m \neq 0)$$

따라서

$$r^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{n^2}{m^2}$$

이다. 여기서 $m \neq 0$이므로 $m^2 \neq 0$이다. 또한 $n, m \in Z$면 $n^2, m^2 \in Z$므로 유리수의 정의에 의해 r^2도 유리수다. 즉 주어진 명제의 대우명제 $\neg q \rightarrow \neg p$가 참이므로 $p \rightarrow q$도 참이다.

그러므로 r^2이 무리수면 r도 무리수다.

Section 03 간접증명법 (6)

- 모순증명법(proof by contradiction)
  - 명제를 부정한 뒤 그 식을 전개할 때 결론이 모순임을 보여 명제가 참임을 증명하는 방법
  - 함축 p→q와 ¬(p∧¬q)가 동치라는 점을 이용

예제 2.24

$\sqrt{2}$ 는 유리수가 아님을 증명하여라.

Section 03 간접증명법 (7)

풀이 $\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면 유리수의 정의에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}\ (n, m\in Z, m\neq 0)$$

이때 $\sqrt{2}$가 유리수라면 공통인수를 갖지 않는 정수들로 나타낼 수 있으므로 n과 m은 공통인수를 갖지 않는 수다.

주어진 식을 제곱하여 정리하면 $2m^2=n^2$이다.

여기서 $2m^2$이 짝수므로 n^2도 짝수다. 또한 n^2이 짝수면 n도 짝수인데 이는 [예제 2.19]를 이용하면 증명할 수 있다.

n이 짝수므로 $n=2k(k\in Z)$가 된다. 이를 다시 식에 대입하면 $2m^2=(2k)^2=4k^2$이 되고, $m^2=2k^2$이 된다.

즉 m^2은 짝수고 m도 짝수다. 그런데 n과 m 모두 짝수면 2로 나누어지므로 $\sqrt{2}$가 유리수라는 가정에서 n과 m이 공통인수를 갖지 않는다는 사실에 모순이다.

그러므로 $\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.

Section 03 간접증명법 (8)

예제 2.25

n이 양의 정수일 때 $6n+5$인 형태의 소수가 무한히 존재함을 증명하여라.

풀이 n이 양의 정수일 때 $6n+5$인 형태의 소수가 유한 개 존재한다고 가정하고, 이런 소수들을 $p_1, p_2, \cdots, p_s$라고 하자. 이때 양의 정수 N을

$$N=6p_1p_2\cdots p_s-1=6(p_1p_2\cdots p_s-1)+5$$

라고 하고, 여기서 다시 N을 소수들의 곱으로 소인수분해하여 나타내자.

$$N=q_1q_2\cdots q_r \ (q_1, q_2, \cdots, q_r\text{은 소수})$$

즉 양의 정수 N은 $6n+5$인 형태의 홀수므로 $q_1, q_2, \cdots, q_r$은 각각 $6n+1$ 또는 $6n+5$인 형태의 홀수다. 참고로 $6n+3$인 형태의 홀수는 3의 배수므로 $q_1, q_2, \cdots, q_r$이 소수라는 가정에 모순이다. 즉 $q_1, q_2, \cdots, q_r$은 $6n+3$인 형태의 홀수는 아니다.

Section 03 간접증명법 (9)

그런데 $6n+1$인 형태의 홀수들의 곱은

$$(6n+1)(6n+1)=36n^2+12n+2$$
$$=2(18n^2+6n+1)$$

이 되어 짝수가 되므로 $q_1, q_2, \cdots, q_r$은 반드시 적어도 하나의 $6n+5$인 형태의 홀수를 포함한다.

결국 $q_1, q_2, \cdots, q_r$ 중 하나인 q_i를 $6n+5$인 형태의 홀수라고 하면 $q_i|N$이다. 또한 $p_1, p_2, \cdots, p_s$는 $6n+5$인 형태의 유한 개의 소수들이라고 가정했으므로 q_i는 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 중의 하나와 같으며, $q_i|6p_1 p_2 \cdots p_s$다.

즉 $q_i|N$이고 $q_i|6p_1p_2\cdots p_s$인데 $N=6p_1p_2\cdots p_s-1$이라고 했으므로 $q_i|1$이어야 한다. 이를 만족하는 q_i는 1이고 소수가 아니므로 q_i가 소수라는 가정에 모순이다.

그러므로 n이 양의 정수일 때 $6n+5$인 형태의 소수는 무한히 존재한다.

Section 03 간접증명법 (10)

- 반례에 의한 증명법(proof by counter-example)
  - 명제에 모순이 되는 간단한 예를 하나 보임으로써 명제의 참과 거짓을 증명하는 방법

예제 2.28

다음 명제의 반례를 들어라.

모든 실수 x에 대하여 $x>y$면 $x^2>y^2$이다.

풀이 주어진 명제는 다음과 같은 양의 실수에 대해서 성립한다.

만일 $x=3$, $y=2$면 $x=3>2=y$고 $x^2=3^2=9>4=2^2=y^2$이 되므로 명제가 성립한다.

그러나 $x=1$, $y=-2$면 $x=1>-2=y$가 되지만 $x^2=1^2=1<4=(-2)^2=y^2$이 되므로 명제가 성립하지 않는다.

Section 03 간접증명법 (11)

예제 2.30

다음 명제가 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 들어라.

양의 정수 p에 대하여 $x=p^2+1$이면 x는 소수다.

풀이 증명하기에 앞서 몇 가지 경우를 살펴보자.

$p=1$이면 $x=1^2+1=2$가 되어 소수다.
$p=2$면 $x=2^2+1=5$가 되어 소수다.
$p=4$면 $x=4^2+1=17$이 되어 소수다.

하지만 만일 $p=3$이면 $x=3^2+1=10$이 되어 소수가 아니다.

그러므로 주어진 명제는 거짓이다.

Section 04 재귀법 (1)

- 재귀법(recursion)
  - 하나의 문제를 그보다 작은 값을 가지는 동일한 문제로 계속 단순화시켜 해결하는 방법

예제 2.31

재귀법을 이용하여 양의 정수 n에 대한 팩토리얼(factorial) 값을 구해주는 함수를 정의하여라.

풀이 구하는 함수의 이름을 $factorial(n)=n!$이라고 하자.

이 함수는 $factorial(0)=0!=1$이라는 초기 조건을 갖는다.

또한 구하는 함수의 재귀 조건은 $n\geq 1$일 때 다음과 같다.

$$factorial(n)=n\cdot factorial(n-1)$$

재귀법을 이용한 정의가 맞는지 확인하기 위해 $factorial(2)$를 구해보자.

Section 04 재귀법 (2)

$$
\begin{aligned}
factorial(2) &= 2 \cdot factorial(2-1) \\
&= 2 \cdot factorial(1) \\
factorial(1) &= 1 \cdot factorial(1-1) \\
&= 1 \cdot factorial(0) \\
factorial(0) &= 1
\end{aligned}
$$

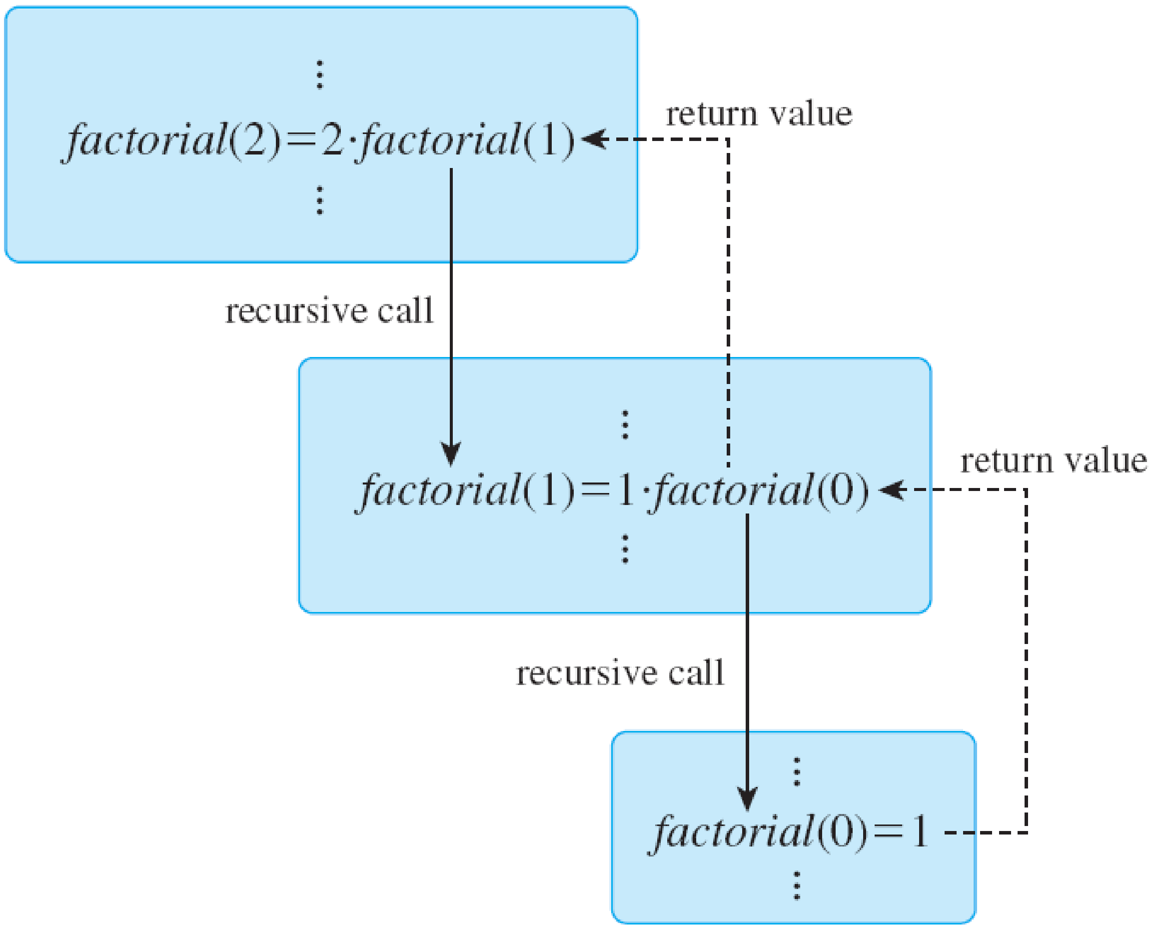
정의에 따라 $factorial(2)$의 값을 구하기 위해서는 $factorial(1)$의 값이 필요하고, $factorial(1)$의 값을 구하기 위해서는 $factorial(0)$의 값이 필요하다. 그리고 계산 결과는 함수를 호출한 곳으로 반환하고 있다. 따라서

$$
\begin{aligned}
& factorial(0) = 1 \\
& factorial(1) = 1 \cdot factorial(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\
& factorial(2) = 2 \cdot factorial(1) = 2 \cdot 1 = 2
\end{aligned}
$$

이 되어 $factorial(2)$의 값이 계산된다.

그러므로 재귀법을 이용한 팩토리얼 정의가 올바르게 동작함을 알 수 있다.

Section 04 재귀법 (3)



Section 04 재귀법 (4)

- 재귀 알고리즘
  - 재귀법을 이용한 프로그램 알고리즘

예제 2.34

1부터 자연수 n까지의 합을 구하는 재귀 알고리즘을 구하여라.

풀이

```
Algorithm sum(n)
Begin
   if n=1 then
        sum(n)=1
   else
        sum(n)=n+sum(n-1)
End
```

Section 04 재귀법 (5)

예제 2.36

실수 x의 x^n을 구하는 재귀 알고리즘을 구하여라.

풀이 먼저 x^n을 재귀법을 이용하여 정의하면 다음과 같다.

$$x^0 = 1$$
$$x^n = x \cdot x^{n-1},\ n \geq 1$$

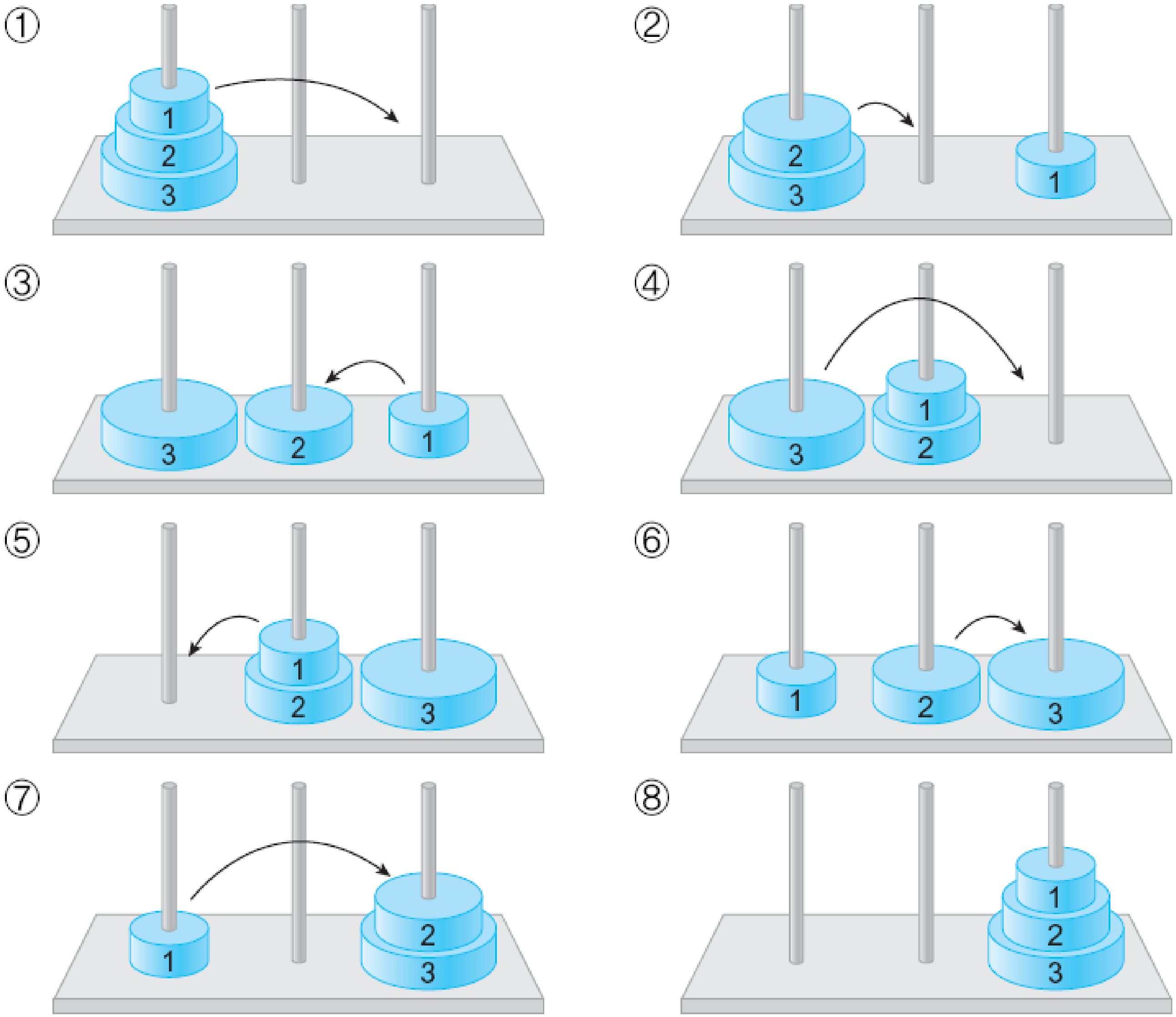
위 정의를 이용하여 다음과 같은 재귀 알고리즘을 구할 수 있다.

```
Algorithm power(x, n)
Begin
  if n=0 then
     power(x, n)=1
  else
     power(x, n)=x·power(x, n−1)
End
```

Section 04 재귀법 (6)

- 하노이 탑(tower of Hanoi)
  - 바닥에 3개의 기둥이 세워져 있고 가장 왼쪽 기둥에 크기가 다른 n개의 원판이 가장 큰 원판을 맨 아래로 하여 크기가 작은 순으로 쌓여있다고 할 때 이 원판들을 가장 오른쪽 기둥으로 그대로 옮기는 과정에서의 최소 이동 횟수를 구하는 문제
  - 추가조건
    - 원판은 한 번에 하나씩만 옮길 수 있다
    - 원판은 기둥과 기둥으로만 옮길 수 있다
      - 바닥에 내려놓을 수 없다
    - 큰 원판은 작은 원판 위에 올 수 없다

Section 04 재귀법 (7)



Section 04 재귀법 (8)

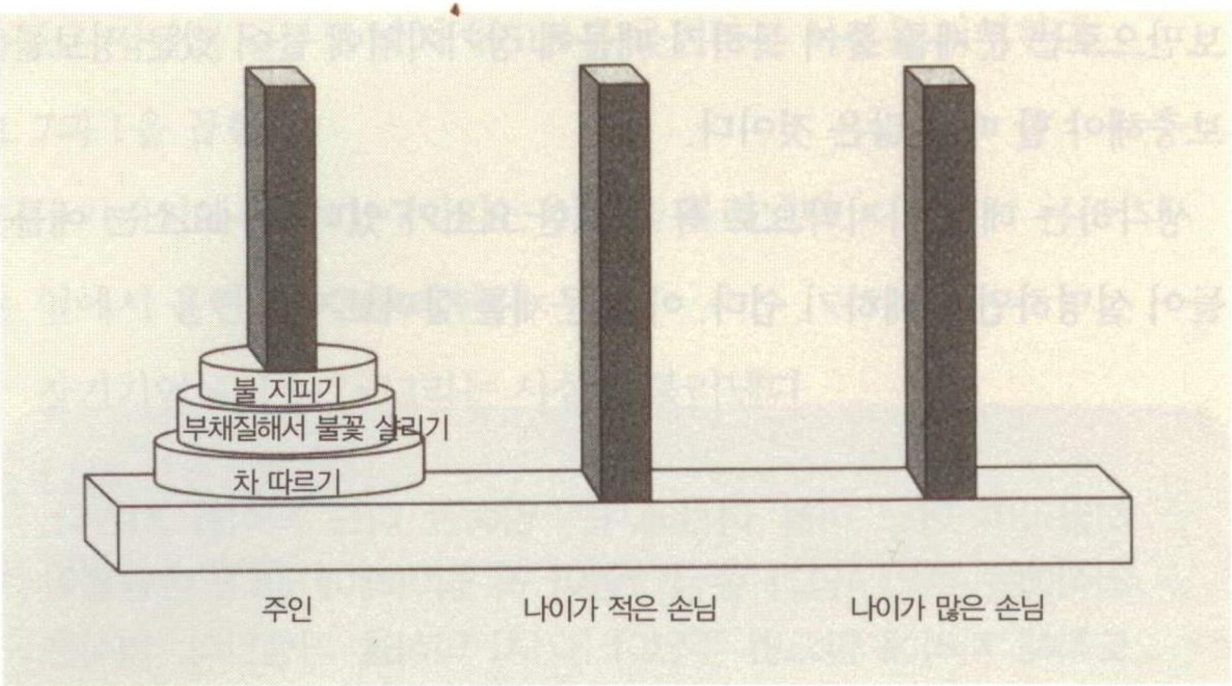
예제 2.38

하노이 탑 문제의 재귀 알고리즘을 구하여라.

풀이

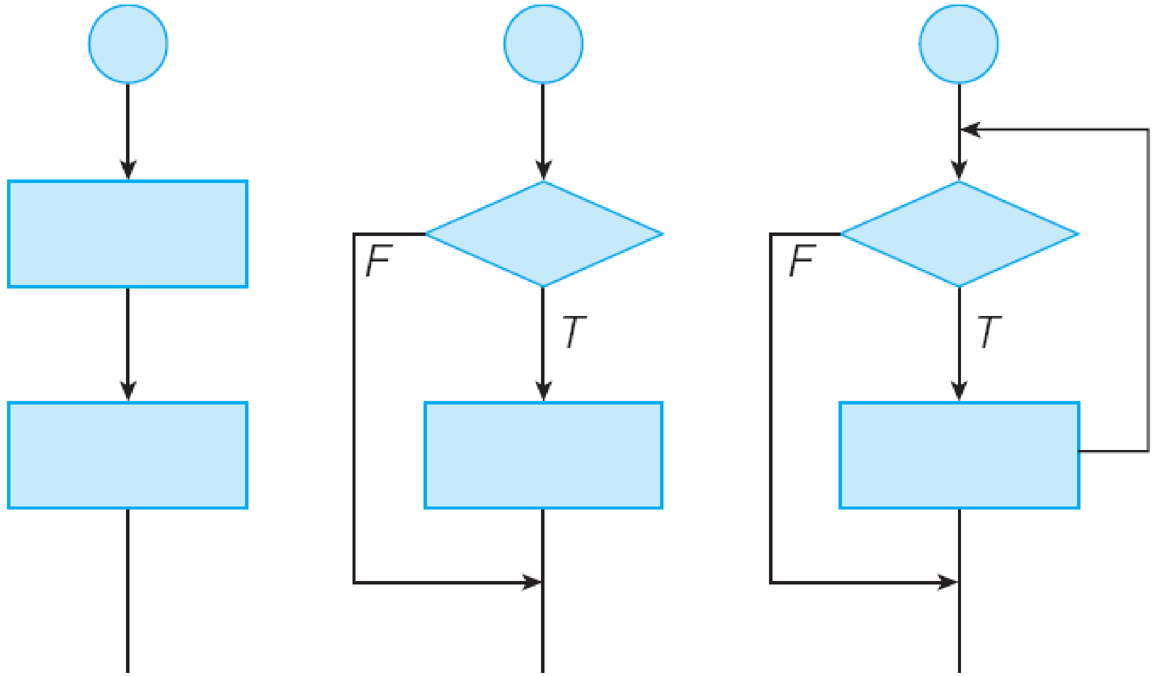
```
Algorithm hanoi(from, to, by, n, c)
Begin
  c=0
  if n=1 then
  begin
     move(1, from, to)
     c=c+1
  endif
  else
  begin
     hanoi(from, by, to, n−1, c)
     move(n, from, to)
     c=c+1
     hanoi(by, to, from, n−1, c)
  endelse
End
```

히말라야 어느 마을 여관에서는 엄숙한 다도 의식을 치른다. 의식에는 주인 1명과 손님 2명이 꼭 참여해야 한다. 손님들이 도착해 자리에 앉으면 주인이 3가지 의식을 거행한다. 의식은 히말라야에서 정한 고귀함의 순서를 따른다. 불을 지핀 후 부채질을 해서 불꽃을 살리고 차를 따른다. 의식을 진행하는 동안 그 자리에 있는 사람은 누구나 다른 사람에게 이렇게 물을 수 있다. "선생님, 번거로운 일을 제가 해 드릴까요?" 다만 상대가 수행하는 의식에서 가장 서열이 낮은 일만 요청할 수 있다. 게다가 어떤 의식을 행하고 있다면 자기가 이미 수행한 의식 중에서 서열이 가장 낮은 의식보다 고귀한 의식을 요청해서는 안 된다. 관례에 따라 다도 의식이 끝날 무렵에는 모든 의식이 주인에게서 손님 중 연장자에게로 넘어가 있어야 한다. 어떻게 해야 할까?[3]


불 지피기
부채질해서 불꽃 살리기
차 따르기
주인
나이가 적은 손님
나이가 많은 손님

Section 05 프로그램 검증 (1)

- 프로그램 명령문 순서도(순서문, 조건문, 반복문)



Section 05 프로그램 검증 (2)

예제 2.40

다음 알고리즘을 실행한 후에 x, y의 값은 어떻게 되는지 검증하여라.

```
Begin
    tmp=x
    x=y
    y=tmp
End
```

Section 05 프로그램 검증 (3)

풀이 프로그램 검증을 위해 x에는 초기값 x_1을 입력하고, y에는 초기값 y_1을 입력하자.

$tmp=x$를 수행하면 tmp에는 x가 가지고 있는 값 x_1이 할당된다. 그리고 $x=y$를 수행하면 x에는 다시 y가 가지고 있는 값 y_1이 할당된다. 마지막으로 $y=tmp$를 수행하면 y에는 tmp가 가지고 있던 값 x_1이 할당된다. 결국 x에는 y_1이, y에는 x_1이 할당되어 있으므로 이 프로그램은 두 변수에 있던 값을 서로 교환하는 프로그램임을 알 수 있다.

Section 05 프로그램 검증 (4)

예제 2.44

0 이상인 정수 n에 대하여 실수 x의 n제곱을 구하는 알고리즘이 정확하게 수행되는지 검증하여라.

```
Begin
    power=1
    i=1
    while i≤n
    begin
        power=power·x
        i=i+1
    endwhile
End
```

Section 05 프로그램 검증 (5)

풀이

증명할 명제는 다음과 같으며 수학적 귀납법을 이용한다.

$$p: power = x^n,\ n \geq 0$$

먼저 $n=0$일 때 반복문의 조건 $i \leq n$이 거짓이 되므로 반복문을 수행하지 않는다. 따라서 변수 $i=1$이고 $power=1=x^0$이 되어 명제 p는 참이 된다.

이제 $n=k$일 때 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 보이자. 이를 위해 $n=k$일 때 변수 $power$를 $power_k$라 하고 $n=k+1$일 때 $power_{k+1}$이라고 하자.

$$\begin{aligned} power_{k+1} &= power_k \cdot x && (\because power = power \cdot x) \\ &= x^k \cdot x && (\because power_k = x^k) \\ &= x^{k+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때 $power_{k+1}=x^{k+1}$이 되어 명제 p는 참이 된다.

Section 05 프로그램 검증 (6)

또한 조건 $i \leq n$에서 i의 값을 점검하면 i의 값은 1부터 시작하여 1씩 증가하면서 n이 될 때까지 수행한 후에 $n+1$이 되면 거짓($i=n+1>n$)이 되어 더 이상 반복문을 수행하지 않고 정상 종료된다.

그러므로 0 이상인 정수 n에 대하여 실수 x의 n제곱을 구하는 알고리즘은 정상적으로 수행된다.

Discrete Mathematics

The End

INFINITYBOOKS
인피니티북스

함채원 • 홍영진