Discrete Mathematics

CHAPTER 07 경우의 수

INFINITYBOOKS
인피니티북스

본 강의자료는 강의의 편의를 위해 교수님들께 제공되는 자료입니다. 자료의 글과 그림은 저작권이 저자에게 있으므로 대중적인 배포를 할 수 없음을 유의해주시길 바랍니다.

함채원 • 홍영진

학습개요

- 기본 개념
  - 경우의 수를 헤아릴 때 사용하는 다양한 법칙들을 익힌다
- 순열과 조합
  - 순열과 조합의 원리를 살펴보고 관련된 공식들을 습득한다
- 이항계수
  - 이항정리를 이용하여 복잡한 식들의 이항계수를 구한다
- 비둘기집 원리
  - 비둘기집 원리를 이해하고 다양한 예제를 익힌다

Section 01 기본 개념 (1)

정리 7.1

유한집합 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에서 i번째 집합 X_i가 m_i개의 원소를 가지고 있다고 하자. 만일 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$이 유한집합 X의 분할이면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}|X| &= |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| \\ &= |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n| \\ &= m_1 + m_2 + \cdots + m_n\end{aligned}$$

이를 덧셈법칙(addition principle)이라고 한다.

【증명】 수학적 귀납법을 이용하여 증명하면 다음과 같다.

먼저 m_1, m_2개의 원소를 갖는 집합 X_1, X_2에 대하여

$$|X| = |X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2|$$

가 성립함을 보이자.

Section 01 기본 개념 (2)

집합 X_1, X_2가 X의 분할이므로 X_1, X_2는 분할의 정의에 의해 서로소다. 따라서 $X_1 \cap X_2 = \varnothing$이므로

$$\begin{aligned} |X| &= |X_1 \cup X_2| \\ &= |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2| \\ &= |X_1| + |X_2| \end{aligned}$$

가 성립한다.

이제 집합 X의 분할에 대하여

$$|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$$

이 성립한다고 가정하고,

$$|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup X_{n+1}| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n| + |X_{n+1}|$$

이 성립함을 보이자.

Section 01 기본 개념 (3)

$\{X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}\}$은 집합 X의 분할이므로 $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \cap X_{n+1} = \varnothing$이 성립한다.

$$\begin{aligned} |X| &= |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup X_{n+1}| \\ &= |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| + |X_{n+1}| - |X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n \cap X_{n+1}| \\ &= |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| + |X_{n+1}| \\ &= |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n| + |X_{n+1}| \\ &= m_1 + m_2 + \cdots + m_n + m_{n+1} \end{aligned}$$

그러므로 $|X| = |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$이다.

Section 01 기본 개념 (4)

예제 7.3

두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우는 몇 가지가 있는가?

풀이 한 개의 주사위에서 나올 수 있는 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다. 이때 두 눈의 수의 합이 4의 배수가 되는 경우를 첫 번째 주사위의 눈을 기준으로 하여 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

첫 번째 주사위 눈이 1인 경우: (1, 3)
첫 번째 주사위 눈이 2인 경우: (2, 2), (2, 6)
첫 번째 주사위 눈이 3인 경우: (3, 1), (3, 5)
첫 번째 주사위 눈이 4인 경우: (4, 4)
첫 번째 주사위 눈이 5인 경우: (5, 3)
첫 번째 주사위 눈이 6인 경우: (6, 2), (6, 6)

따라서 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우는 9가지가 있다.

Section 01 기본 개념 (5)

정리 7.2

유한집합 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에 대해 i번째 집합 X_i가 m_i개의 원소를 가지고 있다고 가정하면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| &= |X_1||X_2|\cdots|X_n| \\ &= m_1 m_2 \cdots m_n\end{aligned}$$

이를 곱셈법칙(multiplication principle)이라고 한다.

[증명] 수학적 귀납법을 이용하여 증명하면 다음과 같다.

먼저 m_1, m_2개의 원소를 갖는 집합 X_1, X_2에 대하여

$$|X_1 \times X_2| = |X_1||X_2|$$

가 성립함을 보이자.

Section 01 기본 개념 (6)

집합 $X_2=\{y_1, y_2, \cdots, y_{m_2}\}$라고 하면 $\{X_1\times\{y_1\}, X_1\times\{y_2\}, \cdots, X_1\times\{y_{m_2}\}\}$는 $X_1\times X_2$의 분할이므로 덧셈법칙에 의해

$$\begin{aligned}|X_1\times X_2| &= |X_1\times\{y_1\}\cup X_1\times\{y_2\}\cup\cdots\cup X_1\times\{y_{m_2}\}|\\ &= |X_1\times\{y_1\}|+|X_1\times\{y_2\}|+\cdots+|X_1\times\{y_{m_2}\}|\\ &= |X_1|\times m_2\\ &= m_1\cdot m_2\end{aligned}$$

가 성립한다.

이제 $|X_1\times X_2\times\cdots\times X_n|=|X_1||X_2|\cdots|X_n|$이 성립한다고 가정하고

$$|X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\times X_{n+1}|=|X_1||X_2|\cdots|X_n||X_{n+1}|$$

이 성립함을 보이자.

Section 01 기본 개념 (7)

집합 X_{n+1}의 원소 $y_j(1 \leq j \leq m_{n+1})$에 대하여 집합 $\{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \{y_j\}\}$는 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1}$의 분할이다. 따라서 덧셈법칙에 의해

$$
\begin{aligned}
&|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times X_{n+1}| \\
&= \bigcup_{j=1}^{m_{n+1}} |X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \{y_j\}| \\
&= \sum_{j=1}^{m_{n+1}} |X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \times \{y_j\}| \\
&= \underbrace{|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| + \cdots + |X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n|}_{m_{n+1}\text{개}} \\
&= |X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| \times m_{n+1} \\
&= |X_1||X_2| \cdots |X_n| \times m_{n+1} \\
&= m_1 m_2 \cdots m_n\, m_{n+1}
\end{aligned}
$$

이 된다.

그러므로 $|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| = |X_1||X_2| \cdots |X_n|$이 성립한다.

Section 01 기본 개념 (8)

예제 7.5

세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 5자리의 수는 몇 가지가 있는가?

풀이 5자리의 수를 만들기 위해 주어진 숫자는 1, 2, 3이다. 즉 첫 번째 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3이고, 두 번째 자리에 올 수 있는 숫자도 1, 2, 3이다. 이와 같은 방식으로 마지막 다섯 번째 자리에 올 수 있는 숫자도 1, 2, 3이므로 곱셈법칙에 의해 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&(\text{첫 번째 자리에 올 수 있는 수})\times\cdots\times(\text{다섯 번째 자리에 올 수 있는 수})\\
&=3\times3\times3\times3\times3\\
&=243
\end{aligned}
$$

따라서 세 개의 숫자 1, 2, 3으로 만들 수 있는 5자리의 수는 243가지가 있다.

Section 01 기본 개념 (9)

예제 7.10

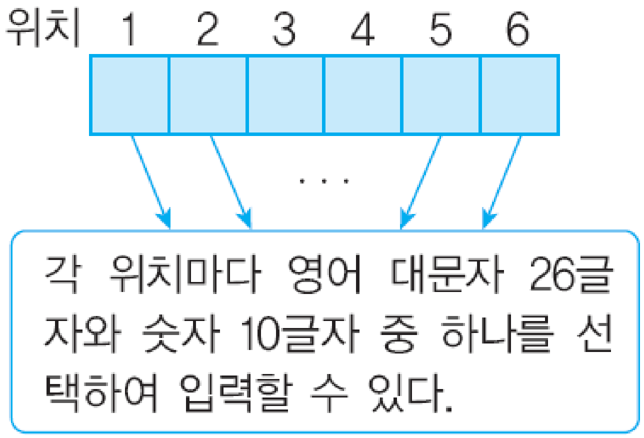
메일 서비스를 제공하는 인터넷업체 A사에서는 6~7자리로 된 사용자 ID를 사용한다. 각 ID는 영어 대문자와 숫자로 구성되고 적어도 하나의 영어 대문자와 숫자를 포함해야 한다. 사용 가능한 ID는 몇 가지가 있는가?

풀이

A사의 메일 서비스를 제공받기 위해 사용 가능한 ID의 수를 D라고 하자. 각각의 ID는 6~7자리로 구성되므로 6자리로 이루어진 ID의 수를 D_6, 7자리로 이루어진 ID의 수를 D_7이라고 하면 덧셈법칙에 의해 $D=D_6+D_7$이 된다.

적어도 하나의 영어 대문자와 숫자를 포함해야 하는 D_6는 6자리에서 영어 대문자와 숫자로만 되어있는 수들을 빼면 D_6를 구할 수 있다. D_6의 각 자리마다 올 수 있는 내용은 아래 그림과 같다.

Section 01 기본 개념 (10)



각 자리에 올 수 있는 글자의 수는 덧셈법칙에 의해 $26+10=36$이고, 6자리에 올 수 있는 전체 글자의 수는 곱셈법칙에 의해 36^6이 된다. 또한 영어 대문자로만 구성되는 글자의 수는 26^6, 숫자로만 구성되는 글자의 수는 10^6이므로 D_6는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
D_6 &= 36^6 - 26^6 - 10^6 \\
&= 2176782336 - 308915776 - 1000000 \\
&= 1866866560
\end{aligned}
$$

Section 01 기본 개념 (11)

마찬가지로 D_7은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
D_7 &= 36^7 - 26^7 - 10^7 \\
&= 78364164096 - 8031810176 - 10000000 \\
&= 70322353920
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
D &= D_6 + D_7 \\
&= 1866866560 + 70322353920 \\
&= 72189220480
\end{aligned}
$$

이므로 사용 가능한 ID는 72189220480가지가 있다.

Section 01 기본 개념 (12)

정리 7.3

집합 X_1과 X_2가 유한집합이라고 하면 다음 식이 성립한다.

$$|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$$

이를 포함 배제의 원리(inclusion exclusion principle)라고 한다.

【증명】 이에 대한 증명은 [정리 3.2]를 참고한다.

Section 01 기본 개념 (13)

예제 7.12

1로 시작하거나 1로 끝나는 7비트 문자열은 모두 몇 가지가 있는가?

풀이 1로 시작하는 비트열과 1로 끝나는 비트열을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

1					

					1

첫 번째 1로 시작하는 비트열의 수를 A라고 하고, 두 번째 1로 끝나는 비트열의 수를 B라고 하면 포함 배제의 원리를 이용하여 A와 B의 합에서 다음 그림과 같은 비트열의 수를 빼주면 원하는 답을 구할 수 있다.

Section 01 기본 개념 (14)

1					1

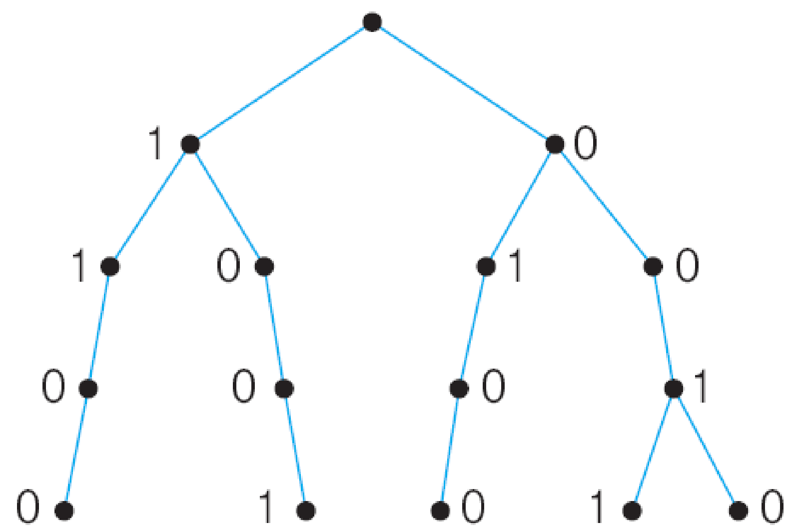
먼저 A는 첫 번째 비트를 1로 고정하고 나머지 6비트들은 0 또는 1을 선택하는 방법이므로 $2^6=64$(가지)가 된다. 마찬가지로 B는 마지막 비트를 1로 고정하고 앞의 6비트들을 0 또는 1로 선택하는 방법이므로 $2^6=64$(가지)가 된다. 마지막으로 1로 시작하고 1로 끝나는 비트열은 첫 번째 비트와 마지막 비트를 1로 고정하고 가운데 5비트들을 0 또는 1로 선택하는 방법이므로 $2^5=32$(가지)가 된다. 따라서 1로 시작하거나 1로 끝나는 7비트 문자열은 $64+64-32=96$, 즉 96가지가 있다.

Section 01 기본 개념 (15)

예제 7.14

연속된 2개의 0비트를 갖는 길이 4의 비트열의 개수를 구하여라.

풀이 트리도표를 이용하여 구해보자. 루트(root)로부터 시작하여 다음과 같이 분기된다.



그러므로 연속된 2개의 0비트를 갖는 길이 4의 비트열은 5개다.

Section 02 순열과 조합 (1)

정의 7.1

원소 n개를 갖는 집합에서 중복을 허용하지 않고 순서대로 r개의 원소를 선택하는 방법을 r-순열(r-permutation)이라고 하고, r-순열의 경우의 수를 $P(n, r)$로 나타낸다.

예제 7.17

집합 $A=\{x, y, z, w\}$에서 두 개의 원소를 선택하는 순열의 수를 구하여라.

풀이 중복을 허용하지 않는 순열이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

$$xy, xz, xw, yx, yz, yw, zx, zy, zw, wx, wy, wz$$

따라서 순열의 수는 12다.

Section 02 순열과 조합 (2)

정리 7.4

n개의 원소를 갖는 집합으로부터 순서대로 중복 없이 r개의 원소를 선택하는 r-순열의 경우의 수는 다음 공식을 따른다.

$$P(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

【증명】 n개의 원소 중에서 첫 번째 원소를 선택하는 경우의 수는 n이 된다. 두 번째 원소를 선택하는 경우의 수는 중복이 허용되지 않으므로 첫 번째 선택된 원소를 제외한 $(n-1)$이 된다. 마찬가지로 r번째 원소를 선택하는 경우의 수는 $(n-r+1)$이 된다. 따라서 곱셈법칙에 의해 다음 식이 성립한다.

$$P(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Section 02 순열과 조합 (3)

예제 7.20

8명의 사람을 순서대로 세우는 방법은 몇 가지가 있는가?

풀이 8명의 사람에게 각각 순서가 부여되는 순열이다.

$$P(8, 8) = \frac{8!}{(8-8)!} = 8! = 40320$$

따라서 8명의 사람을 순서대로 세우는 방법은 40320가지가 있다.

Section 02 순열과 조합 (4)

정의 7.2

원소 n개를 갖는 집합에서 중복을 허용하지 않고 순서에 상관없이 r개의 원소를 선택하는 방법을 r-조합(r-combination)이라고 하고, r-조합의 경우의 수를 $C(n, r)$로 나타낸다.

예제 7.21

집합 $A=\{x, y, z, w\}$에서 두 개의 원소를 선택하는 조합의 수를 구하여라.

풀이

조합은 선택된 순서와 상관없다. 즉 xy와 yx는 동일한 선택으로 간주된다. 따라서 집합 A에서 두 개의 원소를 선택하는 조합의 경우를 살펴보면 다음과 같다.

$$xy, xz, xw, yz, yw, zw$$

따라서 두 개의 원소를 선택하는 조합의 수는 6이다.

Section 02 순열과 조합 (5)

정리 7.5

n개의 원소를 갖는 집합으로부터 중복을 허용하지 않고 순서에 상관없이 r개의 원소를 선택하는 r-조합의 경우의 수는 다음 공식을 따른다.

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

[증명] r-조합의 경우의 수는 [정리 7.4]의 r-순열의 공식을 이용하여 구한다. r-순열을 다시 정의하면 원소의 개수가 n개인 집합에서 r-조합을 구한 후 각 조합마다 순서를 정하는 방법의 수와 같다. 즉 $P(n, r) = C(n, r)r!$이며, 다음 식이 성립한다.

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Section 02 순열과 조합 (6)

예제 7.23

1바이트로 표현 가능한 정수가 0부터 255까지라고 할 때 이 중에서 3개 비트의 값이 1인 정수는 몇 가지가 있는가?

풀이 1바이트는 8비트므로 8비트 중에서 3개 비트의 값이 1인 경우를 찾으면 된다. 이때 3개 비트 중에서 어느 비트의 값이 1인지는 고려할 사항이 아니므로 조합의 문제에 해당된다. 즉 8개 비트 중에서 3개 비트의 값이 1인 조합의 수를 구하면 된다.

$$C(8, 3) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

따라서 1바이트 중에서 3개 비트의 값이 1인 정수는 56가지가 있다.

Section 02 순열과 조합 (7)

정의 7.3

원소 n개를 갖는 집합에서 r개의 원소에 대하여 중복을 허용하고 순서대로 선택하는 방법을 r-중복순열이라고 한다.

예제 7.26

숫자 1, 2, 3, 4, 5를 이용하여 두 자리 수를 만드는 방법은 몇 가지가 있는가?

풀이 두 자리 수는 일의 자리와 십의 자리의 숫자로 구성된다. 각각의 자리에 올 수 있는 숫자를 나열하여 나타내면 다음과 같다.

11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55

따라서 25가지의 수를 만들 수 있다.

Section 02 순열과 조합 (8)

정리 7.6

원소 n개를 갖는 집합에서 r-중복순열의 경우의 수는 n^r이다.

【증명】 r-중복순열은 n개의 원소 중에서 r개를 차례대로 나열하는 방법을 말한다. r개를 차례대로 나열하는 것은 1단계부터 r단계까지 단계별로 나열하는 것을 의미하므로 1단계에 올 수 있는 원소의 개수는 n개가 되며, 2단계에 올 수 있는 원소의 개수 역시 중복이 허용되어 n개가 된다. 따라서 곱셈법칙에 의해 r개의 원소를 나열하는 경우의 수는 n^r이다.

Section 02 순열과 조합 (9)

예제 7.27

10비트로 만들 수 있는 이진수의 개수를 구하여라.

풀이

10비트로 만들 수 있는 이진수는 전체 10단계로 0 또는 1을 나열하는 것이다. 단계별로 나열할 수 있는 수는 각각 2가지므로 [정리 7.6]에 의해 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$2^{10}=1024$$

따라서 1024가지의 이진수를 만들 수 있다.

Section 02 순열과 조합 (10)

정의 7.4

원소 n개를 갖는 집합에서 r개의 원소에 대하여 중복을 허용하고 순서에 상관없이 선택하는 방법을 r-중복조합이라고 한다.

예제 7.30

집합 $S=\{a, b\}$에서 3-중복조합의 각 경우를 나열하고 경우의 수를 구하여라.

풀이 집합 S의 원소 a, b로 만들 수 있는 3자리의 중복조합의 경우는 다음과 같다.

$$aaa,\ aab,\ abb,\ bbb$$

따라서 집합 S의 2개 원소로 만들 수 있는 중복조합의 경우의 수는 4다.

Section 02 순열과 조합 (11)

정리 7.7

원소 n개를 갖는 집합에서 r-중복조합의 경우의 수는 다음과 같다.

$$C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$$

[증명] [예제 7.31]에서 알 수 있듯이 n개의 원소에서 r-중복조합을 구하는 문제는 r개의 √와 $n-1$개의 /를 $r+n-1$개의 빈칸에 넣는 문제와 같다. 즉 $r+n-1$개에서 r개 또는 $n-1$개를 선택하는 문제다. 그러므로 [정리 7.5]에 의해

$$C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$$

이 성립한다.

예제 7.34

7개의 사과를 5명의 학생들에게 나눠주려고 한다. 사과를 나눠주는 방법은 몇 가지가 있는가?

풀이 사과 7개를 5명의 학생들에게 나눠주는 것은 순서와는 무관하고 여러 개의 사과를 받는 학생이 있을 수도 있으므로 중복조합의 문제다.

$$C(7+5-1,\ 7)=C(11,\ 7)=\frac{11!}{7!4!}=330$$

따라서 사과를 나눠주는 방법은 330가지가 있다.

Section 03 이항계수 (1)

- 파스칼의 삼각형(Pascal's Triangle)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

예제 7.36

파스칼의 삼각형을 이용하여 $(a+b)^5$을 전개하여라.

풀이

파스칼의 삼각형에서 여섯 번째 줄의 수들을 계수로 하여 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Section 03 이항계수 (2)

정리 7.8

a와 b가 실수고, n이 양의 정수일 때 다음 식이 성립한다.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C(n, k)a^{n-k}b^k$$

이를 이항정리(binomial theorem)라고 하고, 이항인 $a+b$를 전개했을 때 나타나는 계수 $C(n, k)$를 이항계수(binomial coefficients)라고 한다.

[증명] 수학적 귀납법을 이용하여 증명하면 다음과 같다.

먼저 $n=1$일 때

$$(a+b)^1=\sum_{k=0}^{1} C(1, k)a^{1-k}b^k = C(1, 0)a^1b^0+C(1, 1)a^0b^1=a+b$$

가 성립한다.

이제 $n=m$일 때 식이 성립한다고 가정하고, $n=m+1$일 때 식이 성립함을 보이자.

Section 03 이항계수 (3)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)(a+b)^m \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{m} C(m, k)a^{m-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} C(m, k)a^{m+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{m} C(m, k)a^{m-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} C(m, k)a^{m+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{m+1} C(m, k-1)a^{m+1-k}b^k \\
&= C(m, 0)a^{m+1}b^0 + \sum_{k=1}^{m}[C(m, k)+C(m, k-1)]a^{m+1-k}b^k \\
&\quad + C(m, m)a^0b^{m+1} \\
&= C(m+1, 0)a^{m+1}b^0 + \sum_{k=1}^{m} C(m+1, k)a^{m+1-k}b^k \\
&\quad + C(m+1, m+1)a^0b^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} C(m+1, k)a^{m+1-k}b^k
\end{aligned}
$$

$n=m+1$일 때 식이 성립하므로 수학적 귀납법에 의해 이항정리가 성립한다.

Section 03 이항계수 (4)

예제 7.40

$(2a+2b)^3$을 전개하여라.

풀이 이항정리를 이용하면 전개식은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
(2a+2b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} C(3,\, k)(2a)^{3-k}(2b)^k \\
&= \sum_{k=0}^{3} C(3,\, k)2^{3-k}2^k a^{3-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{3} 2^3 C(3,\, k)a^{3-k}b^k \\
&= 2^3C(3,\, 0)a^3b^0 + 2^3C(3,\, 1)a^2b^1 + 2^3C(3,\, 2)a^1b^2 \\
&\quad + 2^3C(3,\, 3)a^0b^3 \\
&= 8a^3 + 24a^2b + 24ab^2 + 8b^3
\end{aligned}
$$

Section 03 이항계수 (5)

예제 7.43

이항정리를 이용하여 다음 식이 성립함을 보여라.

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

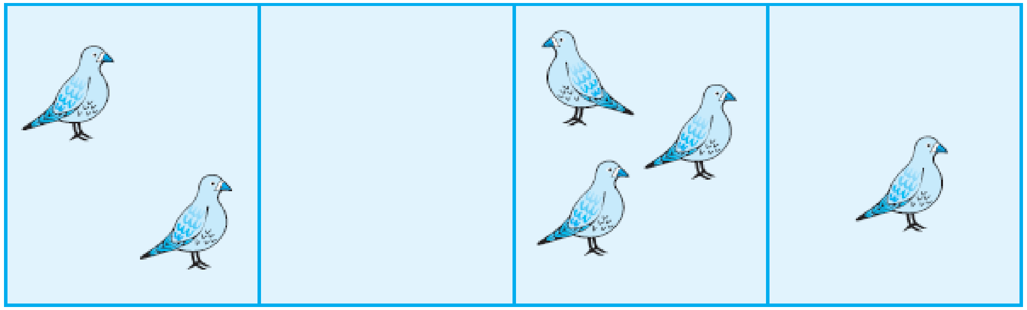
풀이 2^n은 $(1+1)^n$으로 쓸 수 있다. 이를 이항정리를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C(n, k) 1^{n-k} 1^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \end{aligned}$$

따라서 $2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$가 성립한다.

Section 04 비둘기집 원리 (1)

- 비둘기집 원리(pigeonhole principle)
  - k+1마리의 비둘기가 k개의 비둘기집에 들어갈 때 적어도 하나의 비둘기집에는 두 마리 이상의 비둘기가 들어갈 수밖에 없다



Section 04 비둘기집 원리 (2)

정리 7.9

집합 X와 Y가 $|X|=m$, $|Y|=n$, $m>n$인 집합일 때 X에서 Y로 가는 단사함수는 존재하지 않는다. 즉 f가 X에서 Y로 가는 함수라고 하면 X의 원소 x_1, x_2에 대해 $x_1 \neq x_2$지만 $f(x_1)=f(x_2)$인 x_1, x_2가 반드시 존재한다.

[증명] 집합 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$이고 f는 X에서 Y로 가는 단사함수라고 하면 단사함수의 정의에 의해 $f(x_i) \neq f(x_j)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$이고 $m \leq n$이 된다. 그런데 조건에서 $m>n$이라고 했으므로 단사함수가 존재한다면 조건에 모순이 된다. 따라서 함수 f는 단사함수가 아니며, $f(x_1)=f(x_2)$고 $x_1 \neq x_2$인 x_1, x_2가 반드시 존재한다.

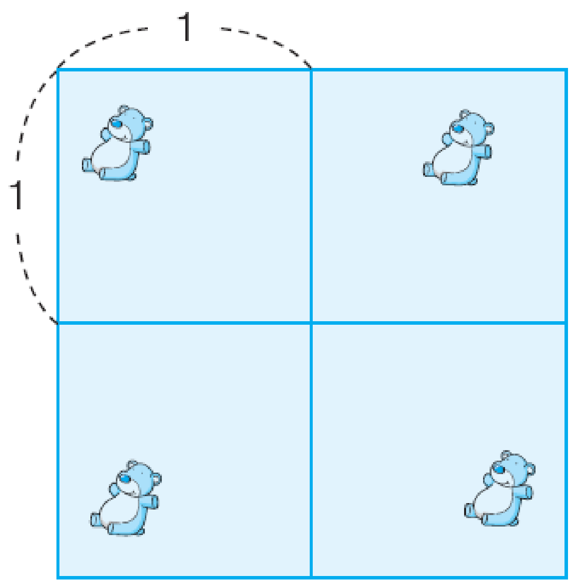
이를 집합 X는 비둘기의 모임, 집합 Y는 비둘기집의 모임이라고 하여 비둘기집 원리로 설명할 수 있다. 즉 비둘기 x를 비둘기집 $f(x)$에 할당하는 것이다. 비둘기 x가 비둘기집 $f(x)$보다 많으므로 적어도 서로 다른 X의 원소 2개는 같은 함수값 $f(x)$를 갖게 된다.

Section 04 비둘기집 원리 (3)

예제 7.47

가로, 세로 길이가 각각 2m인 방 안에 5개의 인형을 놓을 때 2개의 인형은 반드시 $\sqrt{2}$m 이내에 있게 됨을 보여라.

풀이 인형 사이의 간격을 최대한 넓히기 위해 방을 아래 그림과 같이 가로, 세로 길이가 각각 1m인 4개의 공간으로 나누고 각 공간에 인형을 나누어 놓는다.



Section 04 비둘기집 원리 (4)

그런데 방 안에 놓아야 할 인형의 개수는 5개고 방은 4개의 공간으로 나뉘어 있으므로 비둘기집 원리에 의해 인형 1개는 이미 다른 인형이 있는 가로, 세로 길이가 각각 1m인 공간 안에 놓을 수밖에 없다. 이때 두 인형 사이의 거리는 한 변의 길이가 1m인 정사각형의 대각선 길이인 $\sqrt{2}$ m를 넘지 못한다.

따라서 5개의 인형 중 최소한 2개의 인형은 거리가 $\sqrt{2}$ m 이내에 있게 된다.

Discrete Mathematics

The End

본 강의자료는 강의의 편의를 위해 교수님들께 제공되는 자료입니다. 자료의 글과 그림은 저작권이 저자에게 있으므로 **대중적인 배포를 할 수 없음**을 유의해주시길 바랍니다.

INFINITYBOOKS
인피니티북스

함채원 • 홍영진