Discrete Mathematics

CHAPTER 06 행렬

함채원 • 홍영진

INFINITYBOOKS
인피니티북스

학습개요

- 기본 개념
  - 2차원 배열의 형태인 행렬의 개념을 파악한다
- 행렬의 연산
  - 행렬의 합, 차, 곱에 관한 연산을 이해한다
- 여러 가지 행렬
  - 영행렬, 정방행렬, 단위행렬, 전치행렬, 대칭행렬을 살펴본다
- 행렬식
  - 정방행렬에서 정의되는 행렬식을 이해한다
- 역행렬
  - 행렬식을 이용하여 역행렬을 구해본다.
- 연립일차방정식
  - 연립일차방정식의 해를 다양한 방법으로 구해본다
- 부울행렬
  - 이산구조의 표현에 사용되는 부울행렬에 대해 살펴본다

Section 01 기본 개념

정의 6.1

실수들의 사각형 배열을 행렬(matrix)이라고 하며, m과 n을 양의 정수라고 할 때 m개의 행(row)과 n개의 열(column)을 가진 $m \times n$행렬은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

또한 i번째 행의 원소(element)면서 j번째 열의 원소를 a_{ij}로 나타내며, $a_{ij} \in R$(R은 실수)일 때 a_{ij}들을 원소로 갖는 행렬을 $[a_{ij}]$로 나타낸다.

정의 6.2

$m \times n$행렬 $A=[a_{ij}]$와 $r \times s$행렬 $B=[b_{ij}]$가 있을 때 $m=r, n=s$고, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$인 모든 i, j에 대하여 $a_{ij}=b_{ij}$면 A와 B는 같다고 하며, $A=B$로 나타낸다.

Section 02 행렬의 연산 (1)

정의 6.3

$m \times n$행렬 $A=[a_{ij}]$와 $B=[b_{ij}]$가 있을 때 A와 B의 두 행렬의 합(matrix addition)은 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$다.

정의 6.4

$m \times n$행렬 $A=[a_{ij}]$와 실수(스칼라) k가 있을 때 A와 k의 스칼라곱(scalar multiplication)은 $Ak=kA=[ka_{ij}]$다.

Section 02 행렬의 연산 (2)

예제 6.4

행렬 A, B, C가 다음과 같을 때 $A+B$, $A+C$, $A+2B$를 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

풀이

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A+2B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

$A+C$는 A와 C가 서로 다른 크기의 행렬이므로 정의되지 않는다.

Section 02 행렬의 연산 (3)

행렬의 성질

- A, B, C는 $m \times n$ 행렬 / c, d는 스칼라
- O는 행렬의 모든 원소가 0인 $m \times n$ 행렬

❶ $A+B=B+A$

❷ $A+(B+C)=(A+B)+C$

❸ $A+O=A=O+A$

❹ $A+(-A)=O=(-A)+A$

❺ $(-1)A=-A$

❻ $c(A+B)=cA+cB$

❼ $(c+d)A=cA+dA$

❽ $(cd)A=c(dA)$

Section 02 행렬의 연산 (4)

정의 6.5

$m \times n$행렬 $A=[a_{ij}]$와 $r \times s$행렬 $B=[b_{ij}]$가 있을 때 $n=r$이면 A와 B의 행렬의 곱 (matrix multiplication)을 AB로 나타내며, 다음과 같은 $m \times s$행렬 $AB=[c_{ij}]$로 정의할 수 있다.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

AB 행렬의 i행 j열의 원소, 즉 (i, j) 원소는 행렬 A의 i번째 행과 행렬 B의 j번째 열의 대응되는 원소 간의 곱들의 합이다. 만일 $n \neq r$이면 곱 AB는 정의되지 않는다.

Section 02 행렬의 연산 (5)

- $m \times n$행렬 $A=[a_{ij}]$와 $n \times s$행렬 $B=[b_{ij}]$에 대한 행렬의 곱을 $m \times s$행렬 $C=[c_{ij}]$로 나타내는 알고리즘

```
Algorithm product(A, B, C)
Begin
  for i=1 to m
     for j=1 to s
     begin
        c_ij=0
        for k=1 to n
           c_ij=c_ij+a_ik b_kj
     endfor
End
```

Section 02 행렬의 연산 (6)

예제 6.6

두 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$와 $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$의 곱 AB와 BA를 구하여라.

풀이

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Section 02 행렬의 연산 (7)

- 행렬의 곱이 갖는 성질
  - 세 개의 행렬 *A*, *B*, *C* / 스칼라 *k*

    ❶ $(AB)C=A(BC)$

    ❷ $A(B+C)=AB+AC$

    ❸ $(B+C)A=BA+CA$

    ❹ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

- 선형방정식 $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 4x-y+2z=1 \end{cases}$

- 행렬방정식 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

예제 6.8

다음 선형방정식을 $AX=B$의 형태로 나타내어라.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=1 \\ 2x_1-x_2+x_3&=4 \\ x_2-x_3&=2 \end{aligned}$$

풀이 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$므로 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$다.

Section 03 여러 가지 행렬 (1)

정의 6.6

$m\times n$행렬 $A=[a_{ij}]$가 있을 때 모든 i, j에 대하여 $a_{ij}=0$인 다음과 같은 행렬을 영행렬 (zero matrix)이라고 하고, $A=O$로 나타낸다.

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Section 03 여러 가지 행렬 (2)

정의 6.7

$m\times n$행렬 $A=[a_{ij}]$가 있을 때 $m=n$인 다음과 같은 행렬을 정방행렬(square matrix)이라고 하며, $n\times n$행렬로 나타낸다.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

이와 같이 n개의 행과 n개의 열로 구성된 정방행렬을 n차 정방행렬이라고 하며, 이 n 값을 행렬의 차수(order)라고 한다. 또한 대각선상의 원소 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$을 대각원소(diagonal element)라고 하며, 대각원소 이외의 모든 원소가 0인 다음과 같은 행렬을 대각행렬(diagonal matrix)이라고 한다.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Section 03 여러 가지 행렬 (3)

정의 6.8

정방행렬이면서 대각원소가 모두 1이고 그 외의 모든 원소가 0인 다음과 같은 대각행렬을 단위행렬(unit matrix, identity matrix)이라고 하며, I로 나타낸다.

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

정의 6.9

$m\times n$행렬 $A=[a_{ij}]$가 있을 때 A의 행과 열을 서로 바꾼 $n\times m$행렬을 전치행렬(transpose matrix)이라고 하며, A^T로 나타낸다. 만일 $m\times n$행렬 A에 대하여 행렬 $B=[b_{ij}]$가 전치행렬이면 모든 i, j에 대하여 $b_{ij}=a_{ji}$다. 또한 $A^T=A$인 행렬을 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다.

Section 03 여러 가지 행렬 (4)

- 전치행렬의 성질
  - *m* x *n*행렬 *A*, *B*

❶ $(A^T)^T = A$

❷ $(A+B)^T = A^T + B^T$

❸ $(kA)^T = kA^T$

❹ $(AB)^T = B^T A^T$

Section 04 행렬식 (1)

정의 6.10

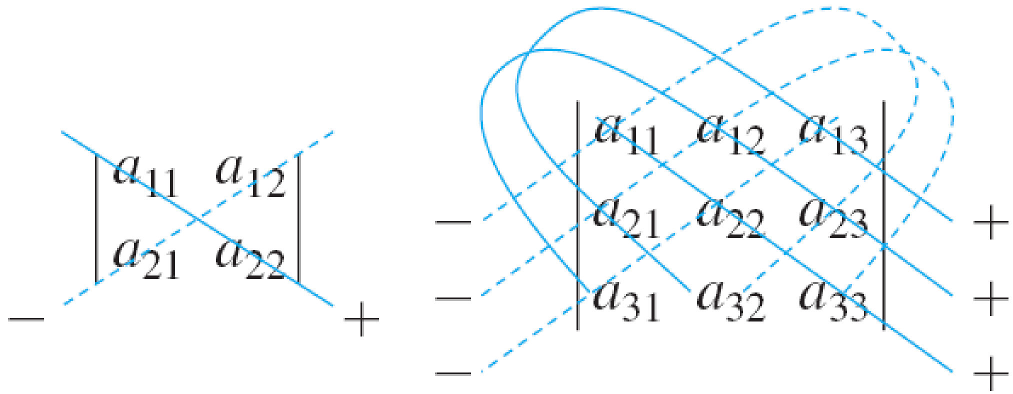
n차의 정방행렬 A의 행렬식(determinant)은 A에 대응하는 하나의 수며, $|A|$ 또는 $\det(A)$로 나타낸다.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

또한 n차의 정방행렬의 행렬식을 n차의 행렬식이라고 하는데, 특히 1차의 행렬 $[a]$의 행렬식은 a와 일치한다.

Section 04 행렬식 (2)

- 사루스(Sarrus)의 법칙



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Section 04 행렬식 (3)

정의 6.11

$n \times n$행렬 $A=[a_{ij}]$에서 r번째 행과 s번째 열을 제거해서 얻은 $[(n-1)\times(n-1)]$행렬을 A의 소행렬(minor matrix)이라고 하고, M_{rs}라고 나타낸다. 또한 $\det(M_{rs})$를 원소 a_{rs}의 소행렬식이라고 하며, $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$를 원소 a_{ij}의 여인수(cofactor)라고 한다.

예제 6.11

다음 행렬 A에 대하여 소행렬 M_{11}, M_{21}, M_{32}와 여인수 A_{11}, A_{21}, A_{32}를 각각 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Section 04 행렬식 (4)

풀이

$$M_{11}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ M_{21}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ M_{32}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

위의 소행렬에 대응하는 여인수 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$를 구하면 각각 다음과 같다.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=9-20=-11$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=-(6+4)=-10$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-(5-1)=-4$$

Section 04 행렬식 (5)

정의 6.12

$n\times n$행렬 $A=[a_{ij}]$의 행렬식은 다음과 같이 정의한다. 단, $1\leq j\leq n$일 때 A_{1j}는 a_{1j}의 여인수다.

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

예제 6.12

다음 행렬 A의 행렬식 $\det(A)$를 구하여라.

(1) $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Section 04 행렬식 (6)

풀이

(1) $\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$$=3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot 3-1\cdot 1+4\cdot(-2)=0$$

(2) $\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=2A_{11}+A_{12}-3A_{14}$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-15$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-18$$

$$A_{14}=-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-6$$

그러므로 $\det(A)=2A_{11}+A_{12}-3A_{14}=-30-18+18=-30$이다.

Section 05 역행렬 (1)

정의 6.13

n차의 정방행렬 A에 대하여 $AB=BA=I$를 만족하는 행렬 B가 존재할 때 A를 정칙행렬(nonsingular matrix, regular matrix)이라고 하며, B를 A의 역행렬(inverse matrix)이라고 하고 A^{-1}로 나타낸다. 즉 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$다.

- 2차 행렬 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 역행렬
  - $ad-bc\neq 0$일 때 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Section 05 역행렬 (2)

- $n \times n$정칙행렬 A의 역행렬
  - $\det(A) \neq 0$일 때 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[A_{ij}]^T$
  - 이때 $[A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$
  - 수반행렬(adjoint matrix)
    - 여인수 행렬의 전치행렬

Section 05 역행렬 (3)

예제 6.15

다음 행렬 A의 수반행렬과 역행렬을 구하여라.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

풀이 행렬 A에 대한 여인수를 모두 구하면 다음과 같다.

$$A_{11}=2,\ A_{21}=4,\ A_{31}=-3,$$
$$A_{12}=2,\ A_{22}=-11,\ A_{32}=6,$$
$$A_{13}=-3,\ A_{23}=6,\ A_{33}=-3$$

A의 행렬식의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\&=1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot(-3)\\&=-3\neq 0\end{aligned}$$

Section 05 역행렬 (4)

그러므로 수반행렬 $[A_{ij}]^T$와 역행렬 A^{-1}을 구할 수 있다.

$$[A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Section 05 역행렬 (5)

정리 6.1

$n \times n$행렬 A와 B가 정칙행렬일 때 다음이 성립한다.

(1) A^{-1}은 정칙행렬이며, $(A^{-1})^{-1}=A$다.

(2) AB는 정칙행렬이며, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이다.

【증명】 (1) $AA^{-1}=A^{-1}A=I$므로 A^{-1}의 역행렬은 A다.

즉 A^{-1}은 정칙행렬이며, $(A^{-1})^{-1}=A$다.

(2) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}=(AI)A^{-1}=AA^{-1}=I$다.

마찬가지로 $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$다.

따라서 [정의 6.13]에 의해 $B^{-1}A^{-1}$은 AB의 역행렬이다.

즉 AB는 정칙행렬이며, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이다.

Section 06 연립일차방정식 (1)

정의 6.14

계수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$과 상수 b가 기지수고 $x_1, x_2, \cdots, x_n$은 미지수일 때 다음과 같은 방정식을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 관한 일차방정식(linear equation)이라고 한다. 단, 계수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중에서 적어도 하나는 0이 아니다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

여기서 미지수 대신에 차례로 $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$을 대입했을 때 이 일차방정식을 만족하면 $s_1, s_2, \cdots, s_n$을 해(solution)라고 한다.

Section 06 연립일차방정식 (2)

정의 6.15

m개의 일차방정식으로 이루어진 다음과 같은 연립방정식을 연립일차방정식(system of linear equation)이라고 한다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

이 연립일차방정식에서

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Section 06 연립일차방정식 (3)

이라고 하면 이 연립일차방정식은 $AX=B$가 되며, 다음과 같은 행렬로 나타낼 수 있다.

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

여기서 행렬 $A=[a_{ij}]$는 계수행렬(coefficient matrix)이라고 하며, $[A\,|\,B]$는 첨가행렬(augmented matrix)이라고 한다. 그리고 $x_1=s_1,\ x_2=s_2,\ \cdots,\ x_n=s_n$이 주어진 연립일차방정식을 이루는 모든 일차방정식을 동시에 만족시킬 때 $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$을 해(solution)라고 하여 다음과 같이 나타내고, 이러한 해 전체의 집합을 이 연립일차방정식의 해집합(solution set)이라고 한다.

$$(x_1,\ \cdots,\ x_n)=(s_1,\ \cdots,\ s_n),\quad \begin{cases} x_1=s_1 \\ \quad\vdots \\ x_n=s_n \end{cases},\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

Section 06 연립일차방정식 (4)

- 연립일차방정식의 첨가행렬에 시행하는 연산들
  - 두 행을 교환한다
  - 한 행에 0이 아닌 상수를 곱한다
  - 한 행에 다른 행의 상수 배를 더한다
- 연산들을 유한 번 시행하여 변형시킨 첨가행렬

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} & \cdots & c_{3n} & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c_{(n-1)n} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_n \end{array}\right]$$

Section 06 연립일차방정식 (5)

- 첨가행렬에서 얻은 결과

$$
\begin{aligned}
x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+c_{14}x_4+\cdots+c_{1n}x_n&=d_1\\
x_2+c_{23}x_3+c_{24}x_4+\cdots+c_{2n}x_n&=d_2\\
x_3+c_{34}x_4+\cdots+c_{3n}x_n&=d_3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1}+c_{(n-1)n}x_n&=d_{n-1}\\
x_n&=d_n
\end{aligned}
$$

  - 이후에 후진대입법(back substitution) 사용
    - 가우스 소거법(Gaussian elimination)

Section 06 연립일차방정식 (6)

- 가우스 조르단 소거법(Gauss Jordan elimination)
  - 후진대입법을 사용하지 않는다

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & & 0 & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d_n \end{array}\right]$$

Section 06 연립일차방정식 (7)

예제 6.17

가우스 조르단 소거법을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=14 \\ 3x_1+x_2-x_3=-2 \end{cases}$$

풀이

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

두 번째 행의 x_1의 계수 2를 소거하기 위해 첫 번째 행에 -2를 곱한 후 두 번째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Section 06 연립일차방정식 (8)

세 번째 행의 x_1의 계수 3를 소거하기 위해 첫 번째 행에 -3을 곱한 후 세 번째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right]$$

세 번째 행에 $-\dfrac{1}{5}$을 곱한 후 두 번째 행과 교환한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

두 번째 행에 7을 곱한 후 세 번째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right]$$

Section 06 연립일차방정식 (9)

세 번째 행에 $\frac{1}{10}$ 을 곱한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

두 번째 행에 -2를 곱한 후 첫 번째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

세 번째 행에 -2를 곱한 후 두 번째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Section 06 연립일차방정식 (10)

마지막으로 세 번째 행을 첫 번째 행에 더하면 다음과 같은 첨가행렬을 얻을 수 있다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

그러므로 $x_1=1, x_2=-2, x_3=3$이다.

- 역행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해 구하기

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Section 06 연립일차방정식 (11)

크래머(Cramer)의 공식

정리 6.3

n개의 미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 관한 n개의 일차방정식으로 이루어진 연립일차방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

여기서 계수행렬 $A=[a_{ij}]$가 정칙행렬일 때, 즉 $\det(A)\neq 0$일 때 이 연립일차방정식은 하나의 해를 가지며 그 해는 다음과 같다.

Section 06 연립일차방정식 (12)

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (1 \le j \le n)$$

예제 6.19

크래머(Cramer)의 공식을 이용하여 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Section 06 연립일차방정식 (13)

풀이 $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$이라고 하면 $\det(A)=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2$므로

x_1, x_2, x_3는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{-4}{-2}=2 \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix}}{\det(A)}=\frac{-8}{-2}=4$$

Section 07 부울행렬 (1)

정의 6.17

행렬의 모든 원소의 값이 0 또는 1인 행렬을 부울행렬(boolean matrix, zero one matrix)이라고 한다. 행렬 $A=[a_{ij}]$와 $B=[b_{ij}]$가 부울행렬일 때 A와 B의 결합(join)은 (i, j)번째 원소가 $a_{ij} \vee b_{ij}$인 부울행렬이며, $A \vee B$로 나타낸다. 또한 A와 B의 만남(meet)은 (i, j)번째 원소가 $a_{ij} \wedge b_{ij}$인 부울행렬이며, $A \wedge B$로 나타낸다.

정의 6.18

$m \times n$부울행렬 $A=[a_{ij}]$와 $n \times s$부울행렬 $B=[b_{ij}]$의 부울곱(boolean product)은 $A \odot B$로 나타내며, 이 부울곱을 $m \times s$부울행렬 $C=[c_{ij}]$라고 할 때 c_{ij}는 다음과 같다.

$$c_{ij}=(a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{in} \wedge b_{nj})$$

Section 07 부울행렬 (2)

예제 6.21

부울행렬 A와 B가 다음과 같을 때 $A \odot B$와 $B \odot A$를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

풀이

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \odot A = \begin{bmatrix} (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Section 07 부울행렬 (3)

부울행렬의 성질

- *A*, *B*, *C*는 부울행렬

1. $A \vee A = A$
2. $A \vee B = B \vee A$
3. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
4. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
5. $A \wedge A = A$
6. $A \wedge B = B \wedge A$
7. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
8. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
9. $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

정의 6.19

$n \times n$부울행렬 A와 양의 정수 r에 대하여 A의 r번째 부울멱(boolean power)은 $A^{[r]}$로 나타내며, 다음과 같이 정의한다.

$$A^{[0]} = I$$

$$A^{[r]} = A^{[r-1]} \odot A \quad r \geq 1\text{일 때}$$

Discrete Mathematics

The End

함채원 • 홍영진

INFINITYBOOKS
인 피 니 티 북 스