Discrete Mathematics

CHAPTER 04 관계

INFINITYBOOKS 인피니티북스

함채원 • 홍영진

학습개요

- 기본 개념
  - 집합의 원소들 사이의 연관성을 나타내기 위한 구조인 관계의 개념을 파악한다
- 관계의 표현
  - 화살도표, 좌표도표, 관계행렬, 방향그래프를 통하여 관계를 도식화한다
- 관계의 성질
  - 반사관계, 대칭관계, 추이관계로부터 관계의 성질을 이해한다
- 관계의 연산
  - 관계들을 결합하는 합성관계와 여러 가지 연산을 이해한다
- 관계의 폐포
  - 반사폐포, 대칭폐포, 추이폐포를 통하여 새로운 관계를 만든다
- 동치관계
  - 반사관계, 대칭관계, 추이관계가 모두 성립하는 관계에 대하여 살펴본다
- 부분순서관계
  - 하세도표 등을 이용하여 부분순서관계를 이해한다

Section 01 기본 개념 (1)

- 곱집합(Cartesian product)

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

  - *A*와 *B*는 각각 집합
  - *A*, *B*가 유한집합일 때의 원소의 개수

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$A \times B \neq B \times A$$

  - *A* x *A*를 A^2으로 나타내기도 함
  - $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$

Section 01 기본 개념 (2)

예제 4.1

두 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$에 대하여 $A\times B$, B^2, $|A\times B|$를 구하여라.

풀이

$A\times B=\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B^2=\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

$|A\times B|=|A|\cdot|B|=3\cdot 2=6$

정의 4.1

두 집합 A, B에 대하여 A에서 B로의 이항관계(binary relation)는 $A\times B$의 부분집합이다. 이때 $a\in A$고 $b\in B$인 $(a, b)\in R$를 a는 b에 대해 R의 관계가 있다고 하며 ${}_aR_b$로 나타내고, $(a, b)\notin R$일 경우에는 ${}_a\not{R}_b$ 또는 ${}_a\overline{R}_b$로 나타낸다. 또한 관계 R의 순서쌍에서 모든 첫 번째 원소의 집합을 정의역(domain)이라고 하고 모든 두 번째 원소의 집합을 치역(range)이라고 하며, 각각 $dom(R)$, $ran(R)$로 나타낸다.

Section 01 기본 개념 (3)

예제 4.3

두 집합 $A=\{0, 1\}$, $B=\{0, 1, 2\}$에 대한 이항관계 R은 다음과 같다.

$$R=\{(a, b)\in A\times B \mid a\in A, b\in B, a\geq b\}$$

(1) 관계 R을 순서쌍으로 나타내어라.

(2) ${}_0R_0$, ${}_0R_1$, ${}_0R_2$, ${}_1R_0$, ${}_1R_1$, ${}_1R_2$가 각각 성립하는가?

(3) 정의역과 치역을 구하여라.

풀이 (1) 첫 번째 원소가 두 번째 원소보다 크거나 같은 순서쌍들의 집합이다.

$$R=\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$$

Section 01 기본 개념 (4)

(2) $(0, 0) \in R$이므로 ${}_0R_0$는 성립한다.

$(0, 1) \notin R$이므로 ${}_0R_1$은 성립하지 않는다.

$(0, 2) \notin R$이므로 ${}_0R_2$는 성립하지 않는다.

$(1, 0) \in R$이므로 ${}_1R_0$는 성립한다.

$(1, 1) \in R$이므로 ${}_1R_1$은 성립한다.

$(1, 2) \notin R$이므로 ${}_1R_2$는 성립하지 않는다.

(3) 정의역 $dom(R)$과 치역 $ran(R)$은 각각 다음과 같다.

$$dom(R) = \{0, 1\}$$
$$ran(R) = \{0, 1\}$$

정의 4.2

집합 $A_1, A_2, \cdots, A_n$에 대한 n항관계(n-ary relation)는 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$의 부분집합이다.

Section 01 기본 개념 (5)

- 학번, 이름, 전공, 주소 사이의 관계
  - 4항관계

학번	이름	전공	주소
201011011	김성민	경제학	서울
201112032	박진희	컴퓨터공학	춘천
201213043	이나연	수학	대전

- *n*항관계는 데이터베이스를 표현하는 데 자주 사용

Section 01 기본 개념 (6)

예제 4.4

두 집합 $A=\{a, b\}$, $B=\{1, 2\}$일 때 $A\times B$를 구하고, A에서 B로의 관계를 모두 나타내어라.

풀이

$A\times B=\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$다. 또한 $A\times B$의 모든 부분집합이 A에서 B로의 관계기 때문에 모든 관계의 수는 $2^4=16$이고, 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\varnothing, \{(a, 1)\}, \{(a, 2)\}, \{(b, 1)\}, \{(b, 2)\},\\
&\{(a, 1), (a, 2)\}, \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(a, 1), (b, 2)\},\\
&\{(a, 2), (b, 1)\}, \{(a, 2), (b, 2)\}, \{(b, 1), (b, 2)\},\\
&\{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\}, \{(a, 1), (a, 2), (b, 2)\},\\
&\{(a, 1), (b, 1), (b, 2)\}, \{(a, 2), (b, 1), (b, 2)\},\\
&\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}
\end{aligned}
$$

Section 01 기본 개념 (7)

정의 4.3

집합 A에서 집합 B로의 관계 R에 대한 역관계(inverse relation)는 R^{-1}로 나타내며, 다음과 같이 정의한다.

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

예제 4.5

두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$일 때 관계 $R = \{(1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 4)\}$라면 관계 R의 역관계 R^{-1}을 구하여라.

풀이 $R^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (5, 2), (3, 3), (4, 3)\}$

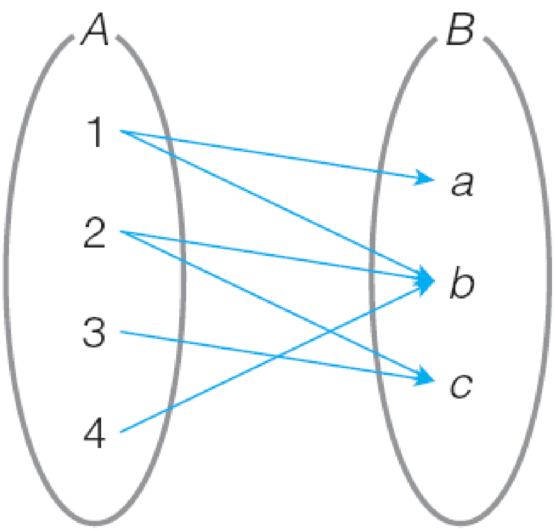
Section 02 관계의 표현 (1)

- 화살도표(arrow diagram)

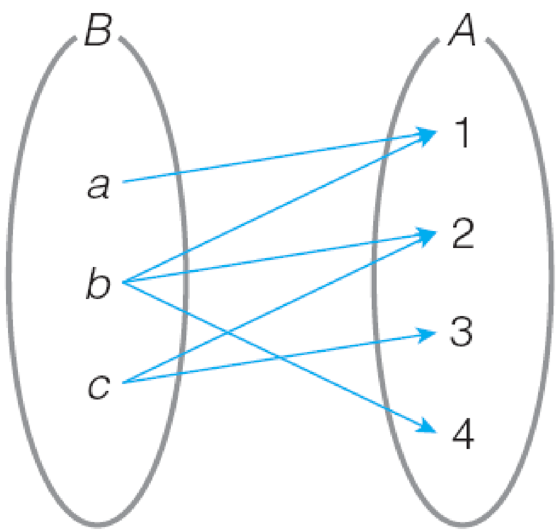
예제 4.7

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 집합 $B=\{a, b, c\}$고 A와 B 사이의 관계 $R=\{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, c), (4, b)\}$일 때 관계 R과 역관계 R^{-1}을 화살도표를 이용하여 나타내어라.

풀이 관계 R의 화살도표는 다음과 같다.



역관계 R^{-1}의 화살도표는 다음과 같다.



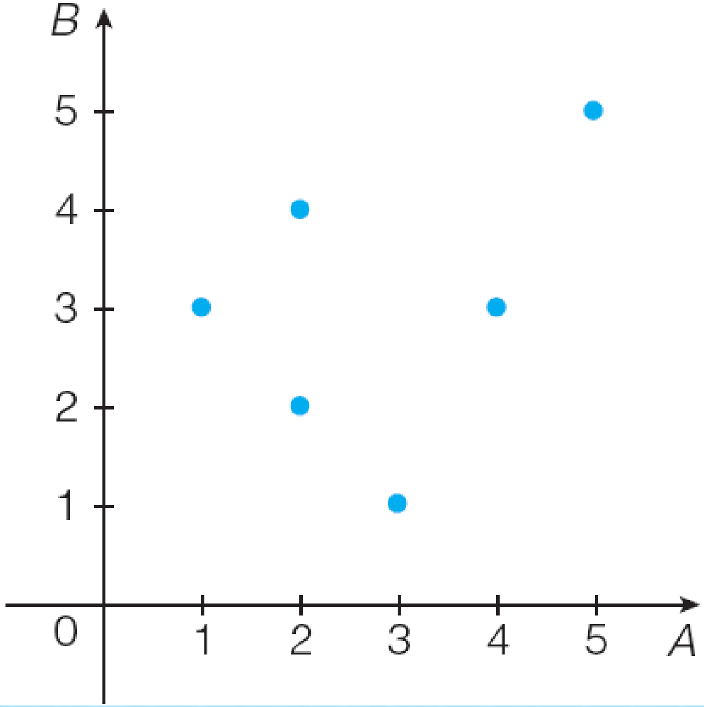
Section 02 관계의 표현 (2)

- 좌표도표(coordinate diagram)

예제 4.8

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$고 집합 A에서 B로의 관계 $R=\{(1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3), (5, 5)\}$일 때 관계 R을 좌표도표를 이용하여 나타내어라.

풀이



Section 02 관계의 표현 (3)

- 관계행렬(relation matrix)
  - 부울행렬(boolean matrix)
    - 행렬 안의 모든 원소들이 0 또는 1인 행렬

예제 4.9

두 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$에 대해서 관계 $R=\{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$일 때 이를 관계행렬로 나타내어라.

풀이 관계행렬 M_R은 다음과 같다.

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

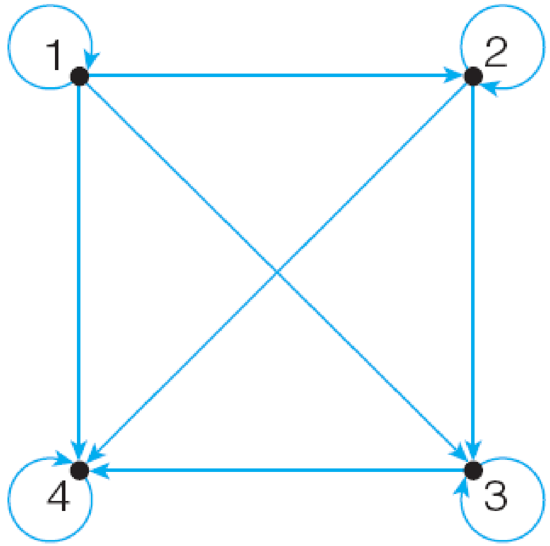
Section 02 관계의 표현 (4)

방향그래프(directed graph)

예제 4.10

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$고 관계 $R=\{(a, b) \mid a\in A, b\in A, a\leq b\}$일 때 관계 R에 대한 방향그래프를 그려라.

풀이 $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ 므로 방향그래프는 다음과 같다.



Section 03 관계의 성질 (1)

정의 4.4

집합 A에 대한 관계 R은 다음과 같이 분류된다.

(1) 모든 $a \in A$에 대하여 $_aR_a$일 때 R은 반사관계(reflexive relation)다.

(2) 모든 $a, b \in A$에 대하여 $_aR_b$면 $_bR_a$일 때 R은 대칭관계(symmetric relation)다.

(3) 모든 $a, b, c \in A$에 대하여 $_aR_b$고 $_bR_c$면 $_aR_c$일 때 R은 추이관계(transitive relation)다.

정의 4.5

집합 A에 대한 관계 R은 다음과 같이 분류된다.

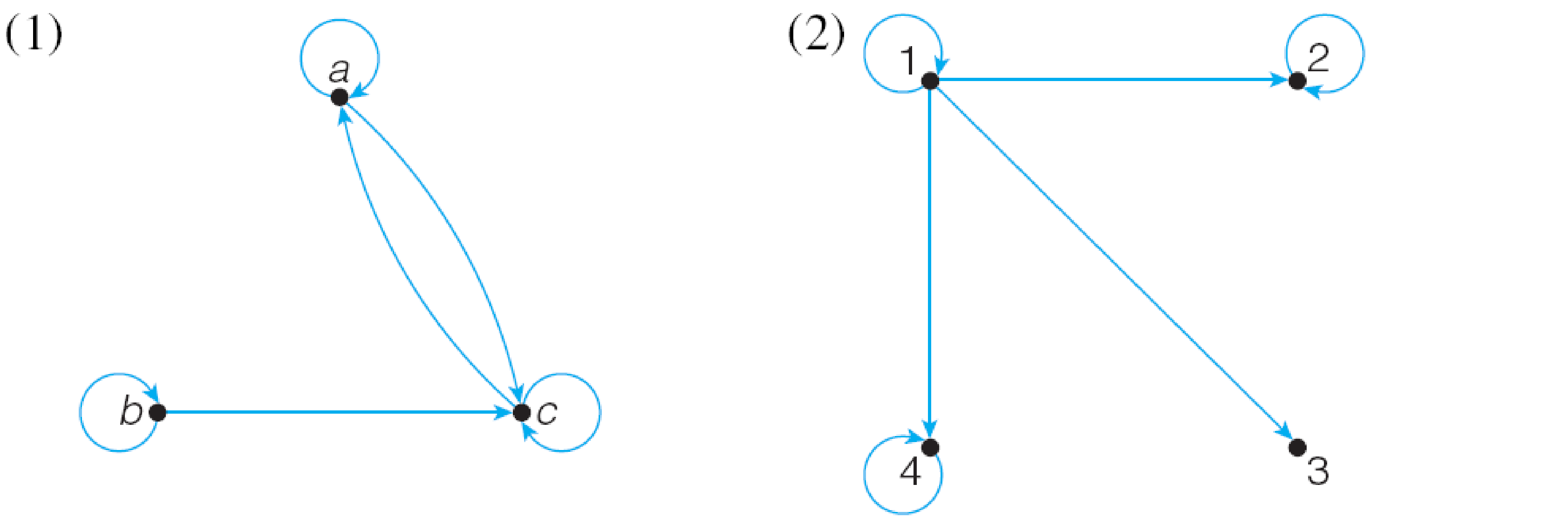
(1) 모든 $a \in A$에 대하여 $_a\not{R}_a$일 때 R은 비반사관계(irreflexive relation)다.

(2) 모든 $a, b \in A$에 대하여 $_aR_b$고 $_bR_a$면 $a=b$일 때 R은 반대칭관계(antisymmetric relation)다.

Section 03 관계의 성질 (2)

예제 4.12

다음 방향그래프는 반사관계가 성립하는가?



풀이

(1) 방향그래프에 대한 관계 $R=\{(a, a), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$며, 이때 각 원소들이 자기 자신으로의 관계를 가지므로 반사관계가 성립한다.

(2) 방향그래프에 대한 관계 $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (4, 4)\}$다. 반사관계가 성립하지 않는다.

Section 03 관계의 성질 (3)

예제 4.14

집합 $A=\{a, b, c, d\}$에 대한 다음 관계가 반사관계인지 비반사관계인지 구분하고 관계행렬로 나타내어라.

(1) $R_1=\{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d)\}$

(2) $R_2=\{(a, a), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

(3) $R_3=\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$

풀이 (1) 관계 안에 순서쌍 (a, a)는 있으나 (b, b), (c, c), (d, d)의 순서쌍이 없으므로 반사관계도 비반사관계도 아니다. 관계행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Section 03 관계의 성질 (4)

(2) 네 개의 순서쌍 $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)$가 모두 관계 안에 있으므로 반사관계다. 관계행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 네 개의 순서쌍 $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)$가 모두 관계 안에 없으므로 비반사관계다. 관계행렬로 나타내면 다음과 같다.

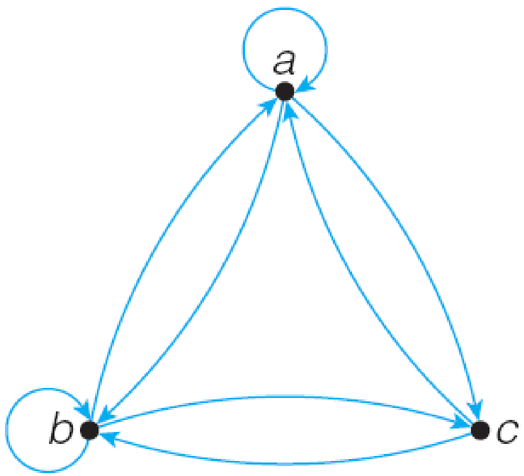
$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Section 03 관계의 성질 (5)

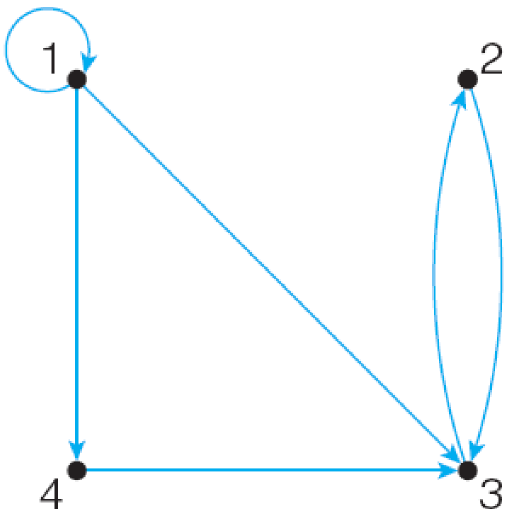
예제 4.15

다음 방향그래프는 대칭관계가 성립하는가?

(1)



(2)



풀이

(1) 방향그래프에 대한 관계 $R=\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b)\}$며, 대칭관계가 성립한다.

(2) 방향그래프에 대한 관계 $R=\{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$이다. 대칭관계가 성립하지 않는다.

Section 03 관계의 성질 (6)

예제 4.17

집합 $A=\{x, y, z\}$에 대한 다음 관계가 대칭관계인지 반대칭관계인지 구분하고 관계행렬로 나타내어라.

(1) $R_1=\{(x, z)\}$

(2) $R_2=\{(y, z), (z, y)\}$

(3) $R_3=\{(x, x), (y, y), (z, z)\}$

(4) $R_4=\{(x, y), (x, z), (y, x), (z, z)\}$

풀이

(1) 관계 R_1는 $(x, z)\in R_1$이지만 $(z, x)\notin R_1$이므로 대칭관계가 아니다. 그러나 $(x, z)\in R_1$이고 $x\neq z$일 때 $(z, x)\notin R_1$이므로 반대칭관계다. 관계행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Section 03 관계의 성질 (7)

(2) 관계 R_2는 $(y, z) \in R_2$고 $(z, y) \in R_2$므로 대칭관계다. 그러나 $y \neq z$므로 반대칭관계는 아니다. 관계행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 관계 R_3는 대칭관계며, $(a, b) \in R_3$고 $(b, a) \in R_3$일 때 $a = b$므로 반대칭관계도 성립한다. 관계행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 관계 R_4는 $(x, z) \in R_4$지만 $(z, x) \notin R_4$므로 대칭관계가 아니며, $(x, y) \in R_4$고 $x \neq y$일 때 $(y, x) \in R_4$므로 반대칭관계도 아니다. 관계행렬로 나타내면 다음과 같다.

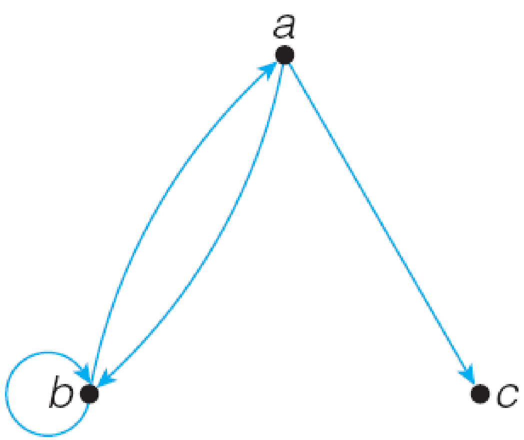
$$M_{R_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Section 03 관계의 성질 (8)

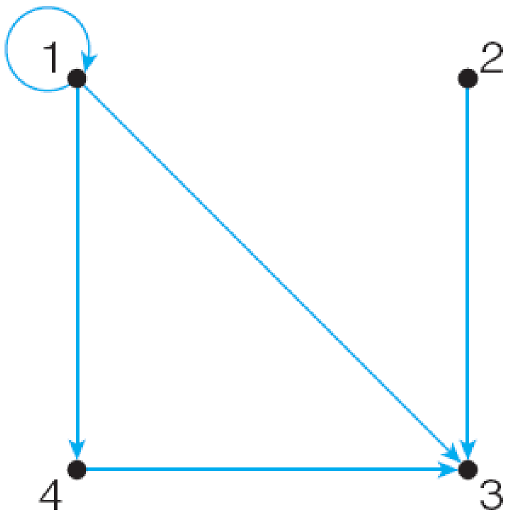
예제 4.19

다음 방향그래프는 추이관계가 성립하는가?

(1)



(2)



풀이

(1) $(b, a) \in R$이고 $(a, c) \in R$일 때 $(b, c) \notin R$이므로 추이관계가 성립하지 않는다.

(2) $(1, 4) \in R$이고 $(4, 3) \in R$일 때 $(1, 3) \in R$이므로 추이관계가 성립한다.

Section 03 관계의 성질 (9)

예제 4.22

모든 정수의 집합에 대하여 관계 R이 $(a, b) \in R$일 때 반사관계, 대칭관계, 반대칭관계, 추이관계 중에서 어떤 관계가 성립하는지 판별하여라.

(1) $a \geq b^2$

(2) $ab \geq 1$

풀이

(1) 관계 $R = \{(0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (4, -2), (4, -1), (4, 0), (4, 1), (4, 2), \cdots\}$과 같이 나타낼 수 있다. 반대칭관계와 추이관계가 성립한다.

(2) 관계 $R = \{\cdots, (-1, -3), (-1, -2), (-1, -1), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \cdots\}$과 같이 나타낼 수 있다. 대칭관계와 추이관계가 성립한다.

Section 04 관계의 연산 (1)

정의 4.6

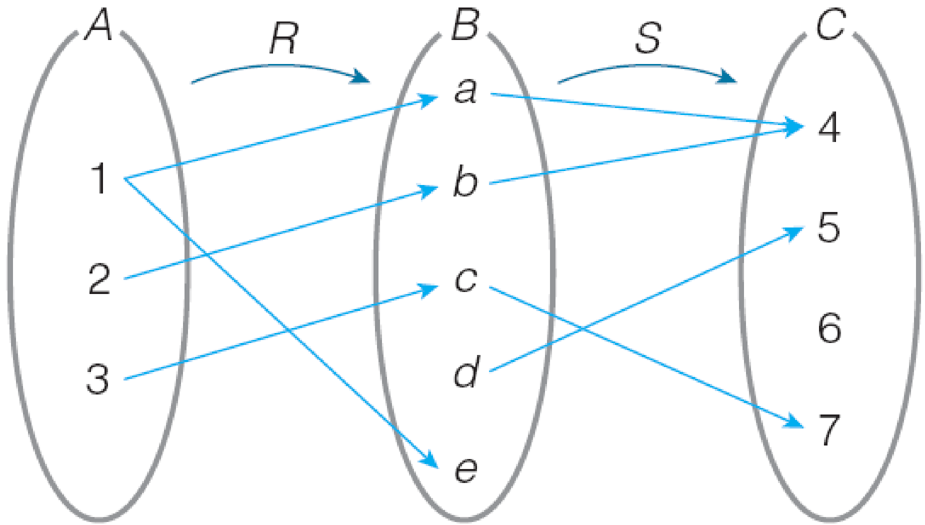
집합 A에서 B로의 관계를 R이라 하고, 집합 B에서 C로의 관계를 S라고 하자. R과 S의 합성관계(composition relation)는 $a \in A$고 $c \in C$일 때 ${}_aR_b$고 ${}_bS_c$인 $b \in B$가 존재하는 순서쌍 (a, c)로 구성되는 관계며, $S \circ R$로 나타낸다.

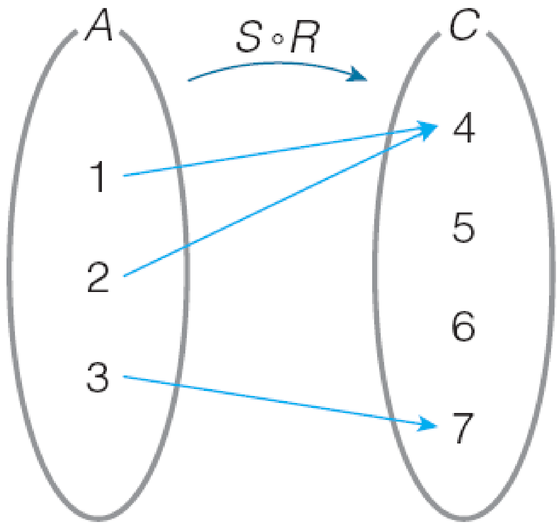
예제 4.23

집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$일 때 A에서 B로의 관계 $R = \{(1, a), (1, e), (2, b), (3, c)\}$고, B에서 C로의 관계 $S = \{(a, 4), (b, 4), (c, 7), (d, 5)\}$다. 합성관계 $S \circ R$을 구하여라.

Section 04 관계의 연산 (2)

풀이





합성관계에 있는 모든 순서쌍은 $S \circ R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 7)\}$이다.

Section 04 관계의 연산 (3)

- 부울곱(boolean product): $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$

예제 4.24

관계 R과 S에 대한 관계행렬 M_R과 M_S는 다음과 같다.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R과 S의 합성관계 $S \circ R$을 관계행렬로 나타내어라.

풀이

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Section 04 관계의 연산 (4)

정리 4.1

집합 A, B, C, D에 대하여 집합 A에서 B로의 관계를 R, 집합 B에서 C로의 관계를 S, 집합 C에서 D로의 관계를 T라고 할 때 $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$이다.

[증명] $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$임을 증명하기 위해서는 $T \circ (S \circ R) \subset (T \circ S) \circ R$과 $T \circ (S \circ R) \supset (T \circ S) \circ R$이 모두 만족되는 것을 보이면 된다. 먼저 $T \circ (S \circ R)$의 각 순서쌍이 $(T \circ S) \circ R$에 속함을 보여 $T \circ (S \circ R) \subset (T \circ S) \circ R$이 만족함을 보이면 다음과 같다.

순서쌍 $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$이라고 가정하면 순서쌍 $(a, c) \in S \circ R$이고 순서쌍 $(c, d) \in T$인 $c \in C$가 존재한다. 또한 $(a, c) \in S \circ R$이므로 $(a, b) \in R$이고 $(b, c) \in S$인 $b \in B$가 존재한다. 여기서 $(b, c) \in S$고 $(c, d) \in T$므로 $(b, d) \in T \circ S$를 얻을 수 있고, $(a, b) \in R$이고 $(b, d) \in T \circ S$므로 $(a, d) \in (T \circ S) \circ R$을 얻을 수 있다. 그러므로 $T \circ (S \circ R) \subset (T \circ S) \circ R$이 성립한다.

위와 마찬가지 방법으로 $T \circ (S \circ R) \supset (T \circ S) \circ R$을 증명한다.

Section 04 관계의 연산 (5)

정의 4.7

집합 A에 대한 관계 R에 대하여 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 거듭제곱 R^n은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

$$R^n = \begin{cases} R & n=1\text{일 때} \\ R^{n-1} \circ R & n>1\text{일 때} \end{cases}$$

예제 4.25

집합 $A=\{1, 2, 3\}$에서의 관계 $R=\{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$이다. 이때 관계행렬을 사용하여 R^2, R^3를 구하여라.

풀이

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Section 04 관계의 연산 (6)

$$M_{R^2}=(M_R)^{[2]}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{R^3}=(M_R)^{[3]}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$R^2=R\circ R=\{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$R^3=R^2\circ R=\{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Section 04 관계의 연산 (7)

정리 4.2

집합 A에 대한 관계 R이 추이관계일 때 모든 양의 정수 n에 대하여 $R^n \subseteq R$이다.

【증명】 $n=1$일 때 $R^1 \subseteq R$은 성립한다. 이제 임의의 양의 정수 k에 대하여 $R^k \subseteq R$이라고 가정하고, $R^{k+1} \subseteq R$임을 증명하도록 한다.

먼저 $(x, y) \in R^{k+1}$이라고 하면 $R^{k+1} = R^k \circ R$이므로 $(x, y) \in R^k \circ R$이 되고, 정의에 의해서 $(x, z) \in R^k$고 $(z, y) \in R$인 A의 원소 z가 존재한다. 그러나 귀납법 가정에 의해서 $R^k \subseteq R$이라고 했으므로 $(x, z) \in R$이다. 이와 같이 $(x, z) \in R$이고 $(z, y) \in R$이므로 추이관계에 의해 $(x, y) \in R$이 된다. 즉 $R^{k+1} \subseteq R$이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $R^n \subseteq R$이 성립한다.

예제 4.28

집합 $\{1, 2, 3\}$에 대한 두 관계 $R_1=\{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, $R_2=\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$일 때 $R_1 \cup R_2$와 $R_1 \cap R_2$를 관계행렬을 사용하여 구하여라.

풀이

$$M_{R_1 \cup R_2}=M_{R_1} \vee M_{R_2}=\begin{bmatrix} 1\vee1 & 1\vee0 & 0\vee1 \\ 0\vee0 & 0\vee1 & 1\vee1 \\ 0\vee0 & 0\vee0 & 0\vee1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2}=M_{R_1} \wedge M_{R_2}=\begin{bmatrix} 1\wedge1 & 1\wedge0 & 0\wedge1 \\ 0\wedge0 & 0\wedge1 & 1\wedge1 \\ 0\wedge0 & 0\wedge0 & 0\wedge1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \cup R_2=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

$R_1 \cap R_2=\{(1, 1), (2, 3)\}$

Section 05 관계의 폐포 (1)

- 반사폐포(reflexive closure)
  - R이 집합 A에 대한 관계일 때 R의 반사폐포

$$R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

예제 4.29

집합 $A=\{a, b, c, d\}$에 대한 관계 $R=\{(a, b), (a, c), (c, b), (d, a), (d, d)\}$의 반사폐포를 구하여라.

풀이

$$\{(a, b), (a, c), (c, b), (d, a), (d, d)\} \cup \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$
$$=\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$$

Section 05 관계의 폐포 (2)

- 대칭폐포(symmetric closure)
  - R이 집합 A에 대한 관계일 때 R의 대칭폐포

$$R \cup \{(b, a) \in A \times A \mid (a, b) \in R\}$$

예제 4.31

집합 $A=\{0, 1, 2, 3\}$에 대한 관계 $R=\{(0, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$의 대칭폐포를 구하여라.

풀이

$$\{(0, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\} \cup \{(1, 0), (2, 1)\}$$
$$=\{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

Section 05 관계의 폐포 (3)

- 추이폐포(transitive closure)
  - 새로운 순서쌍을 더 추가할 필요가 없을 때까지 반복적으로 순서쌍 추가

정의 4.8

방향그래프 G에서 a에서 b로의 경로(path)는 $x_0=a, x_n=b$라고 할 때 한 개 이상의 에지 $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{n-1}, x_n)$으로 구성된다. 그리고 길이가 n인 경로는 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$으로 나타낸다.

정의 4.9

집합 A에 대한 관계 R이 있을 때 연결관계(connectivity relation) R^*는 관계 R에 적어도 길이가 1이면서 a에서 b로의 경로가 있는 쌍 (a, b)로 구성된다. 또한 R^n은 길이가 n이면서 a에서 b로의 경로가 있는 쌍 (a, b)로 구성되므로 R^*는 R^n의 합집합이 되며, 다음과 같다.

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Section 05 관계의 폐포 (4)

정리 4.3

연결관계 R^*는 관계 R의 추이폐포다.

【증명】 정의에 의해 R^*는 R을 포함한다. R^*가 R의 추이폐포임을 보이기 위해서는 R^*가 추이관계임을 보이고, S가 R을 포함하는 추이관계일 때 $R^* \subseteq S$임을 보여야한다.

먼저 R^*가 추이관계임을 보이자. $(a, b) \in R^*$고 $(b, c) \in R^*$면 R에는 a에서 b로, b에서 c로의 경로가 있다. 이때 a에서 c로의 경로가 생기므로 $(a, c) \in R^*$다. 즉 R^*는 추이관계가 성립한다.

이제 S가 R을 포함하는 추이관계라고 하자. S가 추이관계므로 S^n도 추이관계며, [정리 4.2]에 의해 $S^n \subseteq S$가 된다. 또한 $S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$고 $S^k \subseteq S$므로 $S^n \subseteq S$가 된다. 그리고 R에서의 경로는 S에서도 하나의 경로므로 $R \subseteq S$면 $R^* \subseteq S^*$다. 즉 $R^* \subseteq S^* \subseteq S$다.

이와 같이 R을 포함하는 추이관계는 R^*를 포함해야하므로 R^*는 R의 추이폐포다.

Section 05 관계의 폐포 (5)

예제 4.34

집합 $\{1, 2, 3, 4\}$에서의 관계 $R=\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$이다. 추이폐포 R^*를 구하여라.

풀이

$$M_{R^*}=M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

즉 추이폐포 $R^*=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$다.

Section 06 동치관계 (1)

정의 4.10

반사관계, 대칭관계, 추이관계가 모두 성립하는 관계 R을 동치관계(equivalence relation)라고 한다.

예제 4.35

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대한 다음 관계가 동치관계인지 판별하여라.

(1) $R_1=\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

(2) $R_2=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

풀이

(1) 관계 R_1은 동치관계다.

(2) 관계 R_2는 대칭관계가 성립하지 않으므로 동치관계가 아니다.

Section 06 동치관계 (2)

정의 4.11

집합 A에 대한 관계 R이 동치관계일 때 집합 A의 각 원소 a에 대하여 $[a]$를 R에 대한 a의 동치류(equivalence classes)라고 하며, 다음과 같이 정의한다.

$$[a]=\{x \mid (a, x) \in R\}$$

예제 4.38

정수의 집합에 대한 관계 $R=\{(a, b) \mid a \equiv b (\text{mod m})\}$에서 $m=5$일 때 동치류를 구하여라.

풀이

$$[0]=\{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$$
$$[1]=\{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11, \cdots\}$$
$$[2]=\{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}$$
$$[3]=\{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$$
$$[4]=\{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}$$

Section 07 부분순서관계 (1)

정의 4.12

집합 A에 대한 관계 R이 반사관계, 반대칭관계, 추이관계가 성립하면 관계 R을 부분순서관계(partial order relation)라고 한다. 그리고 이때 A를 부분순서집합(partially ordered set, poset)이라고 하며, (A, R)로 나타낸다.

예제 4.40

집합 X의 부분집합 간의 포함관계 $\subseteq$는 부분순서관계인가?

풀이

임의의 부분집합 A에 대하여 $A \subseteq A$므로 반사관계가 성립하고, 부분집합 A, B에 대하여 $A \subseteq B$고 $B \subseteq A$면 $A = B$므로 반대칭관계도 성립한다. 또한 부분집합 A, B, C에 대하여 $A \subseteq B$고 $B \subseteq C$면 $A \subseteq C$므로 추이관계도 성립한다. 따라서 부분순서관계다.

Section 07 부분순서관계 (2)

- 부분순서관계는 관계 ≤를 일반화하는 것
  - *a*가 *b*보다 우선한다(*a* precedes *b*)

$$a \preceq b \text{고 } a \neq b \text{면 } a \prec b$$

정의 4.13

집합 A에 대한 관계 R이 부분순서관계고 $a, b \in A$일 때 $a \preceq b$ 또는 $b \preceq a$면 a와 b는 비교가능(comparable)하다고 하고, $a \npreceq b$ 또는 $b \npreceq a$면 a와 b는 비교불가능(noncomparable)하다고 한다. 이때 집합 A에 속하는 원소들의 모든 쌍이 비교가능하면 R을 완전순서관계(total order relation) 또는 선형순서관계(linear order relation)라고 하며, 집합 A를 완전순서집합(totally ordered set) 또는 선형순서집합(linearly ordered set)이라고 한다.

Section 07 부분순서관계 (3)

정의 4.14

두 부분순서집합 $(A, \leq_1)$과 $(B, \leq_2)$가 있을 때 곱집합 $A \times B$에 대한 사전식 순서(lexicographic order) $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$는 $a_1 < a_2$인 경우 또는 $a_1 = a_2$고 $b_1 < b_2$인 경우에 정해진다.

예제 4.43

부분순서집합 $(Z \times Z \times Z, \leq)$에서 다음에 대한 사전식 순서를 정하여라.

(1) (2, 4, 3), (3, 2, 2)

(2) (3, 4, 6), (3, 4, 8)

풀이

(1) (2, 4, 3)의 첫 번째 값 2가 (3, 2, 2)의 첫 번째 값 3보다 작으므로 사전식 순서는 $(2, 4, 3) \leq (3, 2, 2)$다.

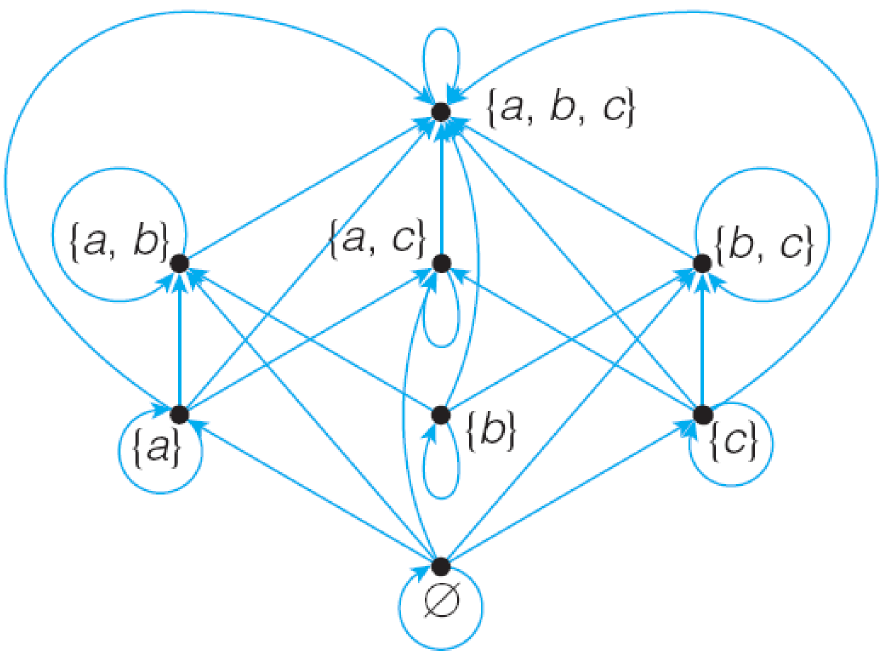
(2) (3, 4, 6)와 (3, 4, 8)의 첫 번째와 두 번째 값은 같으므로 세 번째 값을 비교하면 6이 8보다 작으므로 사전식 순서는 $(3, 4, 6) \leq (3, 4, 8)$이다.

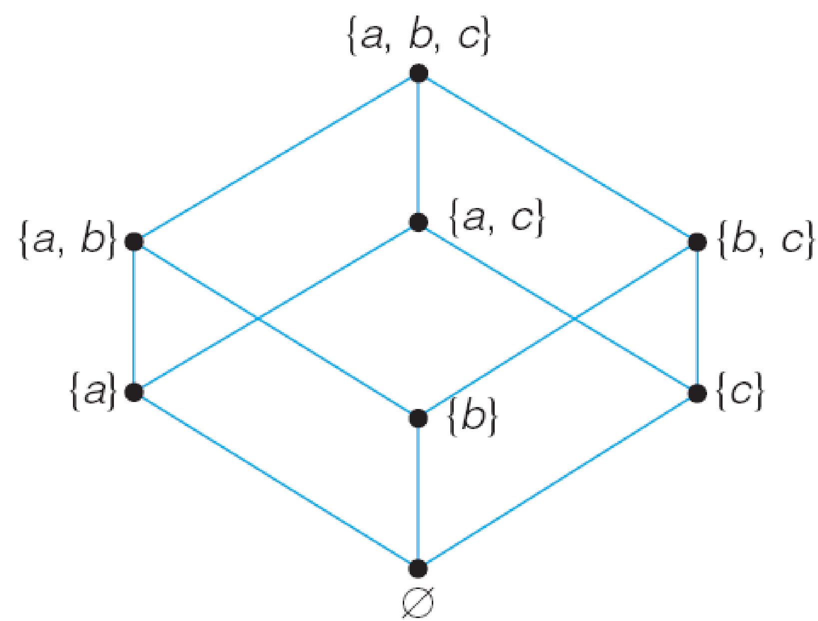
Section 07 부분순서관계 (4)

예제 4.46

집합 $\{a, b, c\}$에 대한 멱집합(power set)을 A라고 할 때 부분순서집합 $(A, \subseteq)$에 대한 하세도표를 그려라.

풀이 집합 $\{a, b, c\}$의 부분집합은 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$다.





Section 07 부분순서관계 (5)

정의 4.15

부분순서집합 $(A, \preceq)$가 있을 때 A의 원소 a에 대하여 $a \prec b$인 원소 b가 A에 존재하지 않으면 원소 a를 극대원소(maximal element)라고 하며, $b \prec a$인 원소 b가 A에 존재하지 않으면 원소 a를 극소원소(minimal element)라고 한다.

정의 4.16

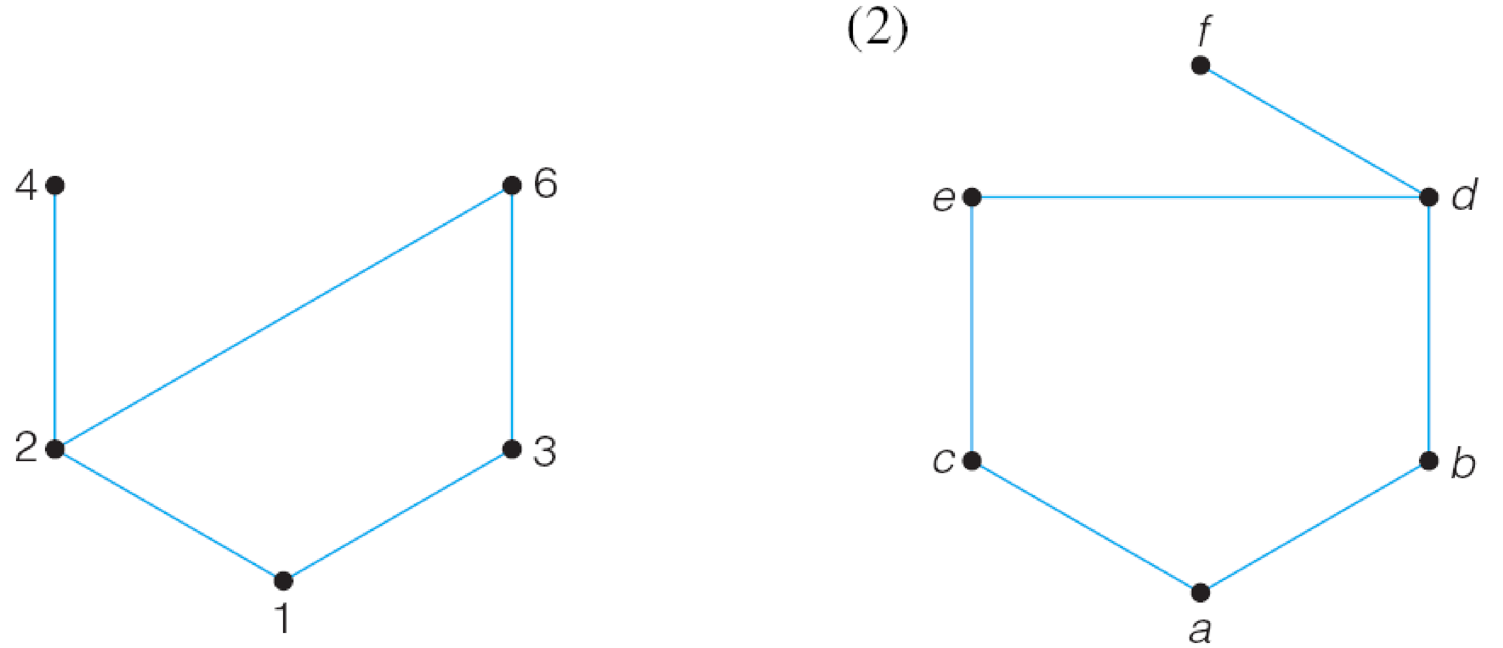
부분순서집합 A의 모든 원소 b에 대하여 $b \preceq a$인 A의 원소 a를 최대원소(greatest element)라고 하며, $a \preceq b$인 A의 원소 a를 최소원소(least element)라고 한다.

Section 07 부분순서관계 (6)

예제 4.48

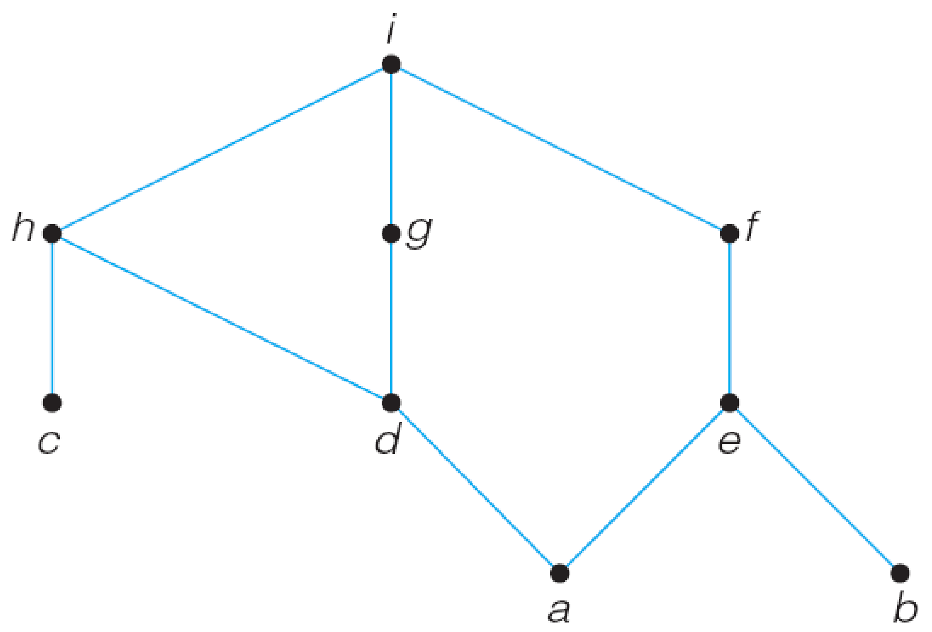
다음의 하세도표에서 극대원소, 극소원소, 최대원소, 최소원소를 찾아라.

(1) (2)



Section 07 부분순서관계 (7)

(3)



풀이

(1) 극대원소는 4와 6이고, 극소원소는 1이다. 그리고 최대원소는 없고, 최소원소는 1이다.

(2) 극대원소와 최대원소는 f고, 극소원소와 최소원소는 a다.

(3) 극대원소는 i고, 극소원소는 a, b, c다. 그리고 최대원소는 i고, 최소원소는 없다.

Section 07 부분순서관계 (8)

정리 4.4

공집합이 아니고 유한한 모든 부분순서집합 $(A, \leq)$는 극소원소를 갖는다.

[증명] A의 원소 a_1이 있을 때 만일 a_1이 극소원소가 아니면 $a_2 < a_1$을 만족하는 A의 원소 a_2가 존재한다. 여기서 만일 a_2가 극소원소가 아니면 A에는 $a_3 < a_2$를 만족하는 원소 a_3가 존재한다. 그리고 a_3가 또 극소원소가 아닐 경우에는 이 과정을 계속 반복하게 된다. 그러나 A의 원소 개수는 유한하므로 $a_n < a_{n-1} < \cdots < a_3 < a_2 < a_1$을 만족하는 a_n에서 끝나게 된다. 따라서 a_n은 극소원소다.

Section 07 부분순서관계 (9)

정의 4.17

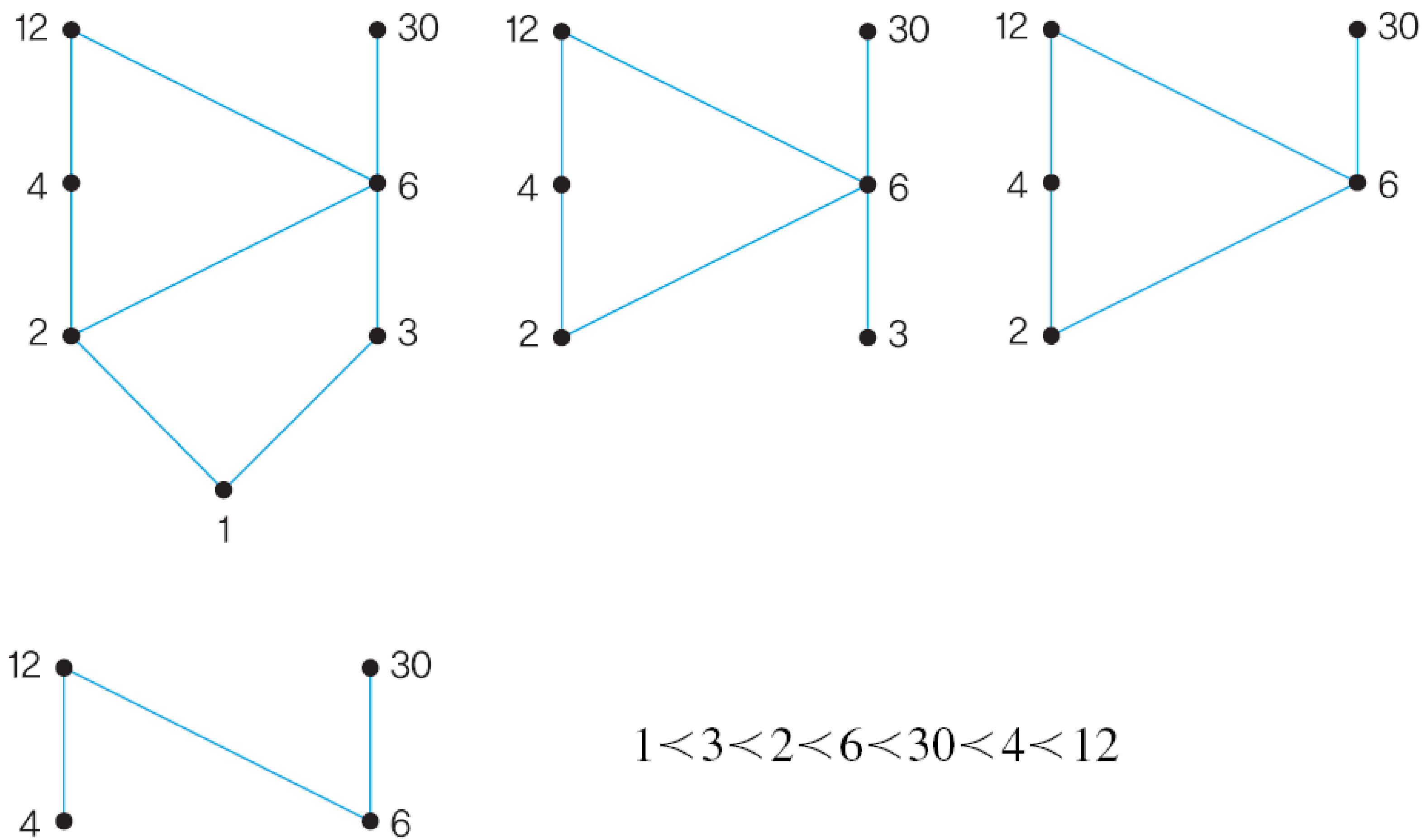
$\preceq_1$과 $\preceq_2$가 집합 A에 대한 부분순서관계라고 하자. 이때 A의 모든 원소 a와 b에 대하여 $a \preceq_1 b$면 $a \preceq_2 b$를 만족할 때 $\preceq_2$는 $\preceq_1$과 양립(compatible)한다고 한다. 그리고 $\preceq_2$가 $\preceq_1$과 양립할 수 있는 완전순서관계면 $\preceq_2$는 $\preceq_1$에 대한 위상정렬(topological sorting)이라고 한다.

예제 4.49

부분순서집합 $(\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 30\}, |)$의 원소들을 위상정렬하여라. 여기서 $|$는 a가 b로 나누어떨어지는 관계$(b|a)$다.

Section 07 부분순서관계 (10)

풀이



$1 < 3 < 2 < 6 < 30 < 4 < 12$

Discrete Mathematics

The End

INFINITYBOOKS
인피니티북스

함채원 • 홍영진