Поверхностный интеграл первого рода.

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, задана гладкая поверхность Σ конечной площади и непрерывная функция 3-х переменных $f : \Sigma \subset D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
Если Σ гладкая поверхность то существует ограниченная замкнутая область $C \subset \mathbb{R}^2$, и непрерывно дифференцируемая в области C вектор – функция $\vec{r} = \vec{r}(u,v) : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} r_x(u,v) & r_y(u,v) & r_z(u,v) \end{bmatrix}^T$; координаты

вектор функции $\vec{r}$ скалярные функции 2-х переменных $r_x, r_y, r_z \in C_1(C \to \mathbb{R})$.
Также предполагается, что выполняется условие

$$\vec{r}_u'(\vec{p}) \times \vec{r}_v'(\vec{p}) \neq \vec{0}, \quad \forall(\bullet)\, \vec{p} = \begin{bmatrix} p_u & p_v \end{bmatrix}^T \in C \subset \mathbb{R}^2,$$

где $\vec{r}_u'(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial r_y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial r_z(u,v)}{\partial u} \end{bmatrix}^T$,

$\vec{r}_v'(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_x(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial r_y(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial r_z(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}^T$ частные производные функции $\vec{r}$.

Для гладкой поверхности Σ определяется понятие площади. Площадь обозначается как $S(\Sigma)$ или $|\Sigma|$

$$\boxed{|\Sigma| = \iint\limits_C \left\| \vec{r}_u'(\vec{p}) \times \vec{r}_v'(\vec{p}) \right\| ds,}$$

где $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ - длина вектора $\vec{a}$
Если $\vec{r}_u'(u,v)$ и $\vec{r}_v'(u,v)$ ортогональны для $\forall (u,v) \in C$ т.е $\left(\vec{r}_u'(u,v), \vec{r}_v'(u,v)\right) = 0$,
то справедлива формула

$$\boxed{|\Sigma| = \iint\limits_C \left\| \vec{r}_u'(\vec{p}) \right\| \left\| \vec{r}_v'(\vec{p}) \right\| ds,}$$

Теорема. Если Σ - гладкая поверхность, определяемая вектор-функцией $\vec{r}(u,v)$, а функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой области Ω, содержащей Σ, то

$$\boxed{\iint\limits_{\Sigma} f(P)d\sigma = \iint\limits_{C} f\left(r_x(u,v), r_y(u,v), r_z(u,v)\right)\left\|\vec{r}_u'(u,v)\times\vec{r}_v'(u,v)\right\|dudv}$$

где $\iint\limits_{\Sigma} f(P)d\sigma$ называется поверхностным интегралом первого рода.

Пример 4.1. Найти площадь поверхности геликоида:

$$\vec{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 4v]^T, \ 0 \le u \le 3, \ 0 \le v \le \pi.$$

$$\vec{r}_u'(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}[u\cos v, u\sin v, 4v]^T = [\cos v, \sin v, 0]^T$$

$$\vec{r}_v'(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}[u\cos v, u\sin v, 4v]^T = [-u\sin v, u\cos v, 4]^T$$

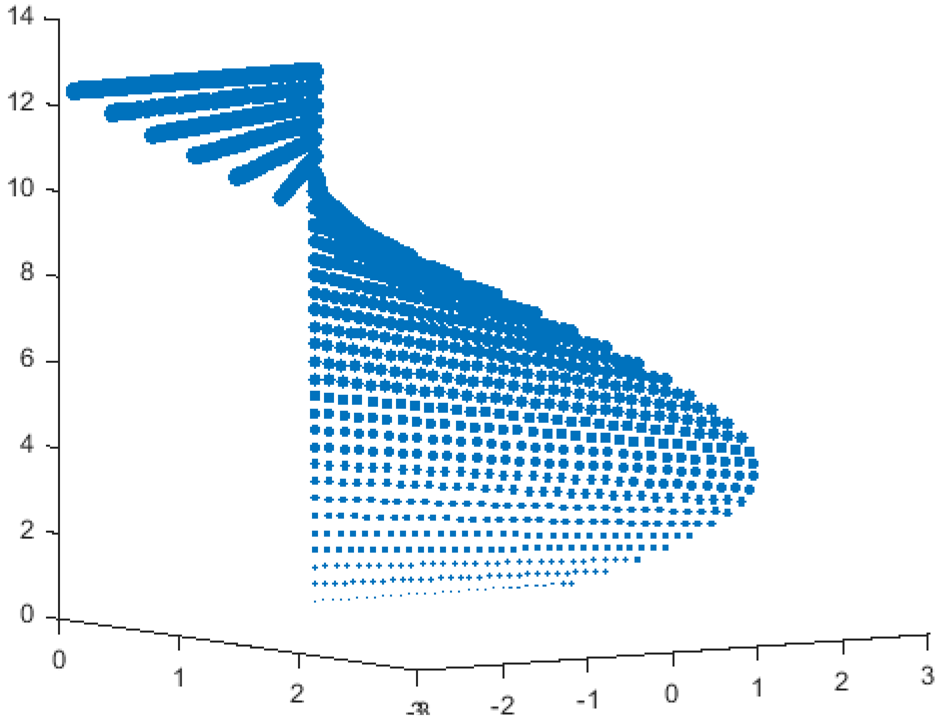
$$\left(\vec{r}_u'(u,v), \vec{r}_v'(u,v)\right) = -u\sin v\cos v + u\cos v\sin v + 4\cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

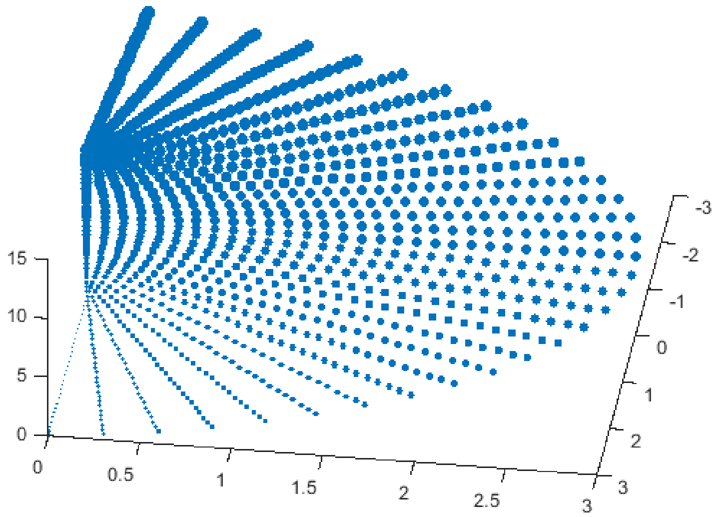
$$\Rightarrow \left\|\vec{r}_u'(u,v)\times\vec{r}_v'(u,v)\right\| = \left\|\vec{r}_u'(u,v)\right\|\left\|\vec{r}_v'(u,v)\right\| =$$

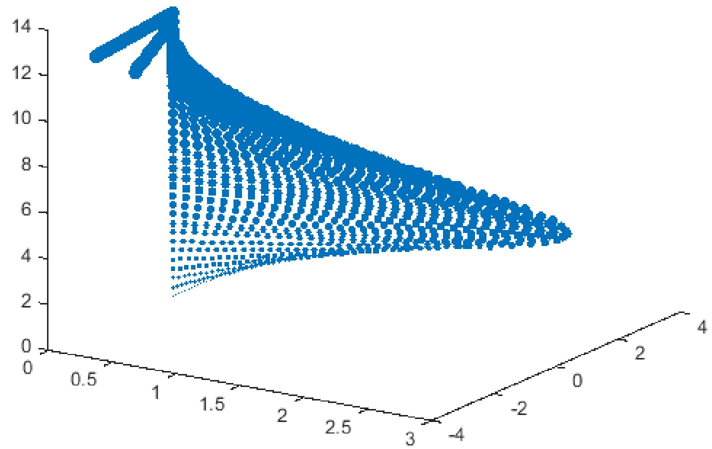
$$= \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v + 0^2}\sqrt{u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 4^2} = 1\cdot\sqrt{u^2 + 4^2} = \sqrt{u^2 + 16}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} d\sigma = \iint\limits_{C}\sqrt{u^2+16}\,dudv = \int\limits_0^{\pi} dv \int\limits_0^3 \sqrt{u^2+16}\,du = \pi\int\limits_0^3\sqrt{u^2+16}\,du =$$

$$= \pi\left(0.5u\sqrt{u^2+16} + 8\ln\left(u + \sqrt{u^2+16}\right)\right)\Bigg|_0^3 = \pi(15 + 16\ln 2)$$


14
12
10
8
6
4
2
0
0
1
2
-2
-1
0
1
2
3


15
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-3
-2
-1
0
1
2
3


14
12
10
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-4
-2
0
2
4

Если поверхность Σ представима как часть графика дифференцируемой функции $g(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (график функции g это множество $\Gamma_g\subset\mathbb{R}^3$)

$$\Gamma_g=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=g(x,y),\,(x,y)\in C\},$$

то поверхность Σ можно задать с помощью следующей вектор функции

$$\vec{r}=\vec{r}(x,y)=\begin{bmatrix}x & y & g(x,y)\end{bmatrix}^T;$$

при этом $\vec{r}_x'(x,y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}\end{bmatrix}^T$, $\vec{r}_y'(x,y)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\end{bmatrix}^T$,

$$\vec{r}_x'(x,y)\times\vec{r}_y'(x,y)=\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & 1\end{bmatrix}^T;$$

$$\left\|\vec{r}_x'(x,y)\times\vec{r}_y'(x,y)\right\|=\sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}$$

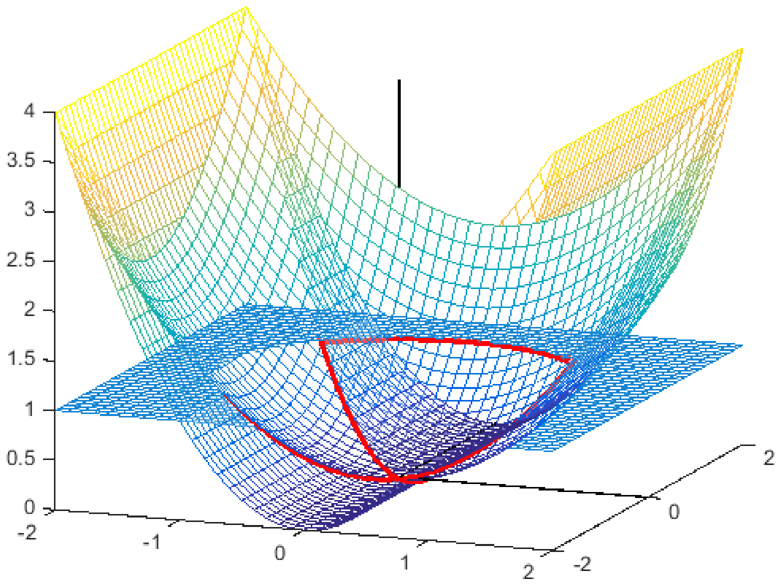
тогда

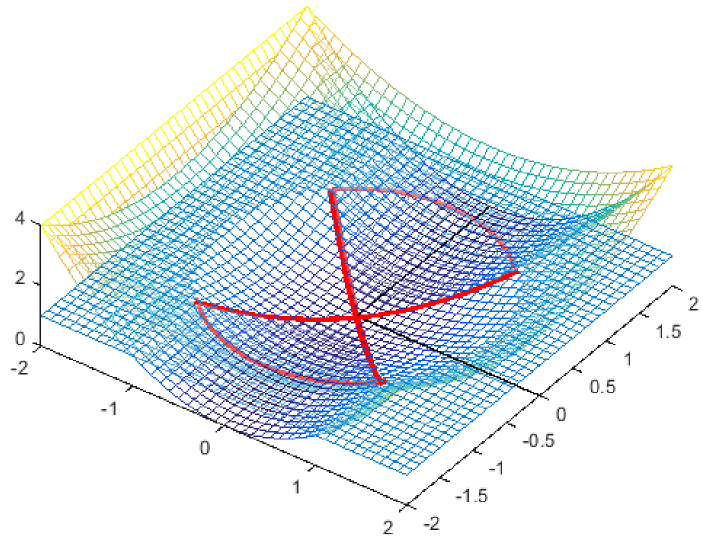
$$\boxed{\iint\limits_{\Sigma} f(P)d\sigma=\iint\limits_{C} f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy}$$

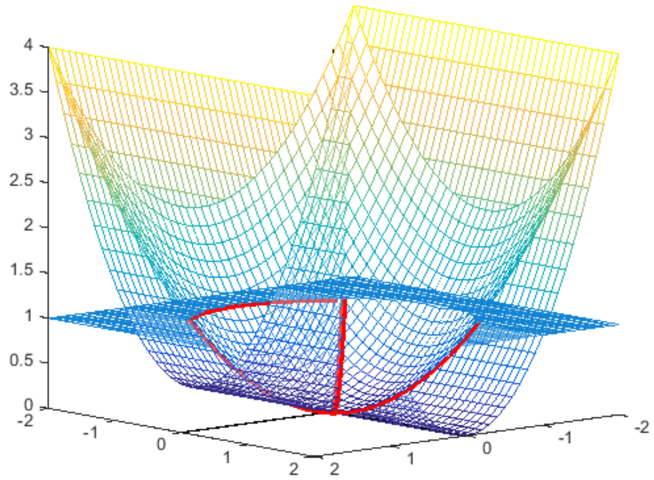
Пример 4.2. Найти площадь части поверхности параболоида $y^2+z^2=2ax$, заключенной между цилиндром $y^2=ax$ и плоскостью $x=a$ $(a>0)$.

$$g(x,y)=z=\sqrt{2ax-y^2}\quad x,y\ge 0$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\frac{a}{\sqrt{2ax-y^2}};\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{2ax-y^2}}\Rightarrow$$


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-2
-1
0
1
2
-2
0
2


4
2
0
-2
-1
0
1
2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

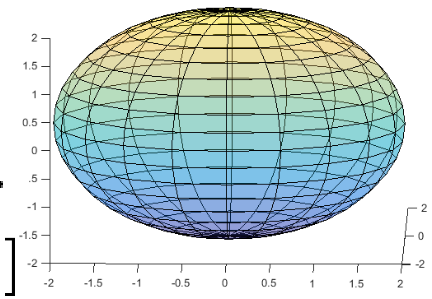

4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-2
-1
0
1
2
2
1
0
-1
-2

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{a^2+y^2+2ax-y^2}{2ax-y^2}}=\sqrt{\frac{a^2+2ax}{2ax-y^2}}$$

$$\iint_{\Sigma} d\sigma=\iint_{C}\sqrt{\frac{a^2+2ax}{2ax-y^2}}dxdy=2\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax}}\sqrt{\frac{a^2+2ax}{2ax-y^2}}dy=2\int_0^a \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2ax}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{ax}}\sqrt{a^2+2ax}dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^a\sqrt{a^2+2ax}dx=\frac{\pi}{6a}\left(a^2+2ax\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a=\pi a^2\frac{3\sqrt{3}-1}{6}$$

Вычислить площадь поверхности сферы радиуса R.



$$\vec{r}(\varphi,\theta)=\left[R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta\right]^T,\ \ \varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in[0,\pi]$$

$$\vec{r}'_{\varphi}(\varphi,\theta)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta\right]^T=\left[-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0\right]^T$$

$$\vec{r}'_{\theta}(\varphi,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta\right]^T=\left[R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta\right]^T$$

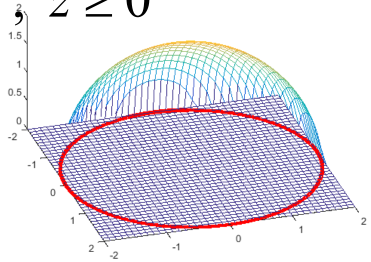
$$\left(\vec{r}'_{\varphi}(\varphi,\theta),\vec{r}'_{\theta}(\varphi,\theta)\right)=-R^2\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta+R^2\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta-R\sin\theta\cdot 0=0\Rightarrow$$

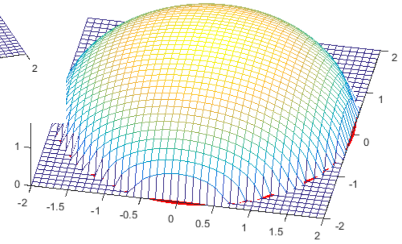
$$\Rightarrow\left\|\vec{r}'_{\varphi}(\varphi,\theta)\times\vec{r}'_{\theta}(\varphi,\theta)\right\|=\left\|\vec{r}'_{\varphi}(\varphi,\theta)\right\|\left\|\vec{r}'_{\theta}(\varphi,\theta)\right\|=$$

$$=\sqrt{R^2\sin^2\theta+0^2}\sqrt{R^2}=R^2\sin\theta$$

$$\iint_{\Sigma} d\sigma=\iint_{C} R^2\sin\theta d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}R^2\sin\theta d\theta=2\pi R^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=2\pi R^2\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}=4\pi R^2$$

Пример. Определить статический момент относительно плоскости OXY однородной полусферы $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0$





$$f(x,y,z)=z;\ \ g(x,y)=z=\sqrt{R^2-x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+R^2-x^2-y^2}{R^2-x^2-y^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma=\iint\limits_{C} g(x,y)\sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$\underset{\substack{x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi}}{=}\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}R\rho\,d\varphi=2\pi R\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^R=\pi R^3$$

Вычислить $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma$, где Σ – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.

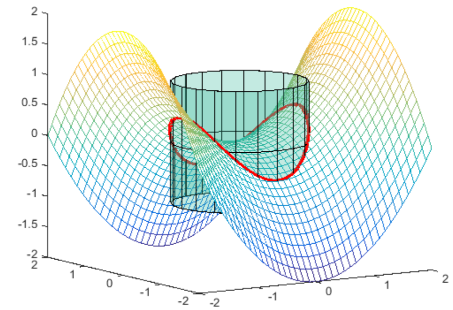
$$f(x,y,z)=x^2+y^2;\ g(x,y)=z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ z\ge 0;\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma=2\iint\limits_{C}(x^2+y^2)\sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}\,dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$\underset{\substack{x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi}}{=}2\int_0^a d\rho\int_0^{2\pi}\frac{a\rho^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\varphi=4\pi a\int_0^a\frac{\rho^3}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho=4\pi a\left(-\rho^2\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^a+8\pi a\int_0^a\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho=-\frac{8\pi a}{3}\left(a^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{8\pi a^4}{3}$$

4.4. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$.



$$f(x,y,z)=k|z|;\ g(x,y)=z=\frac{x^2-y^2}{2a};\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{a};\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{-y}{a}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}{a}$$

$$\iint_{\Sigma} k|z|\,d\sigma=\iint_{C} k\left|\frac{x^2-y^2}{2a}\right|\frac{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}{a}dxdy=\iint_{x^2+y^2\le a^2} k\frac{\left|x^2-y^2\right|}{2a^2}\sqrt{x^2+y^2+a^2}\,dxdy=$$

$$\underset{\substack{x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi}}{=} k\int_0^a d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\left|\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right|}{2a^2}\sqrt{a^2+\rho^2}\,\rho\,d\varphi=\frac{k}{2a^2}\int_0^a d\rho\int_0^{2\pi}\rho^3\left|\cos 2\varphi\right|\sqrt{a^2+\rho^2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{k}{2a^2}\int_0^a \rho^3\sqrt{a^2+\rho^2}\left(\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}}+\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\varphi=\frac{3\pi}{4}}^{\varphi=\frac{5\pi}{4}}+\left(\frac{-\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}}+\left(\frac{-\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\varphi=\frac{5\pi}{4}}^{\varphi=\frac{7\pi}{4}}\right)d\rho=$$

$$=\frac{2k}{a^2}\int_0^a \rho^3\sqrt{a^2+\rho^2}\,d\rho=\frac{2k}{3a^2}\left(\rho^2\left(a^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^a-\frac{4k}{3a^2}\int_0^a \rho\left(a^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}d\rho=\frac{4a^3k\sqrt{2}}{3}-\frac{4k}{15a^2}\left(a^2+\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^a=$$

$$=\frac{a^3k\left(20\sqrt{2}-16\sqrt{2}\right)}{15}+\frac{4k}{15}=\frac{4k}{15}\left(a^3+1\right)$$

4.7. Определить массу, распределенную по поверхности куба $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$, если поверхностная плотность в точке $P(x, y, z)$ равна $k\sqrt[3]{|xyz|}$ ($k = \text{const}$).

$$]x = a\ f(x,y,z) = k\sqrt[3]{|ayz|};\ \vec{r}(y,z) = [a \quad y \quad z]^T;\ \vec{r}_y'(y,z) = [0 \quad 1 \quad 0]^T;\ \vec{r}_z'(y,z) = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\left(\vec{r}_y'(y,z), \vec{r}_z'(y,z)\right) = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \Rightarrow \left\|\vec{r}_y'(y,z)\times\vec{r}_z'(y,z)\right\| = 1$$

$$\iint\limits_{\Sigma} k\sqrt[3]{|xyz|}\,d\sigma = 6\iint\limits_{\Sigma} k\sqrt[3]{|ayz|}\,d\sigma = 6\iint\limits_{\substack{-a\le y\le a\\ -a\le z\le a}} k\sqrt[3]{|ayz|}\,dydz = 24k\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a \sqrt[3]{ayz}\,dz = 24k\int\limits_0^a \sqrt[3]{ay}\left.\left(\frac{3z^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\right|_0^a dy =$$

$$= 18k\int\limits_0^a \sqrt[3]{a^5 y}\,dy = 18k\sqrt[3]{a^5}\left.\left(\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\right|_0^a = \frac{27k}{2}\sqrt[3]{a^9} = \frac{27ka^3}{2}$$

Поверхностный интеграл второго рода.

Пусть заданы двухсторонняя поверхность Σ и вектор-функция $\vec{f}(P):\Omega\to\mathbb{R}^3$, $\Sigma\subset\Omega$, P - точки пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами (x,y,z). Для поверхности Σ Выберем одно из двух вектор-функций $\vec{n}_+(P)$ или $\vec{n}_-(P)$, задающих нормаль к Σ в каждой точке $P\in\Sigma$. Поверхность Σ с заданной на ней функцией $\vec{n}(P)$ будем называть ориентированной поверхностью и обозначать Σ_+ (в случае $\vec{n}(P)=\vec{n}_+(P)$) или Σ_- (при $\vec{n}(P)=\vec{n}_-(P)$).

Поверхностным интегралом второго рода от функции $\vec{f}(P)$ по ориентированной поверхности Σ_+ называется число

$$I=\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}(P),\vec{n}_+(P)\right)d\sigma;$$

этот интеграл обозначается как: $I=\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}(P),\vec{ds}\right)$.

Из определения ясно, что $\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}(P),\vec{ds}\right)=-\iint\limits_{\Sigma_-}\left(\vec{f}(P),\vec{ds}\right)$, так как $\vec{n}_+(P)=-\vec{n}_-(P)$.

Поверхностный интеграл второго рода называют также потоком векторного поля $\vec{f}(P)$ через поверхность Σ. Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающее за единицу времени в заданном направлении через поверхность Σ. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому меняется и знак поверхностного интеграла второго рода

Поверхностный интеграл второго рода (продолжение).

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, задана гладкая поверхность Σ, делящая область D на 2 непересекающихся области $D \setminus \Sigma = D_1 \cup D_2;\ D_1 \cap D_2 = \varnothing$,
и непрерывная функция трех переменных $f: \Sigma \subset D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
Если Σ гладкая поверхность то существует ограниченная замкнутая область $C \subset \mathbb{R}^2$, и непрерывно дифференцируемая в области C вектор – функция $\vec{r} = \vec{r}(u,v): C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} r_x(u,v) & r_y(u,v) & r_z(u,v) \end{bmatrix}^T$; координаты

вектор функции $\vec{r}$ скалярные функции 2-х переменных $r_x, r_y, r_z \in C_1(C \to \mathbb{R})$.
Также предполагается, что выполняется условие

$$\vec{r}'_u(\vec{p}) \times \vec{r}'_v(\vec{p}) \neq \vec{0},\quad \forall(\bullet)\,\vec{p} = \begin{bmatrix} p_u & p_v \end{bmatrix}^T \in C \subset \mathbb{R}^2,$$

где $\vec{r}'_u(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_x(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial r_y(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial r_z(u,v)}{\partial u} \end{bmatrix}^T$,

$\vec{r}'_v(u,v) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_x(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial r_y(u,v)}{\partial v} & \dfrac{\partial r_z(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}^T$ частные производные функции $\vec{r}$.

Для гладкой поверхности Σ определяется нормаль задаваемая соотношениями

$$\vec{n}(u,v) = \pm\left(\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)\right),\quad (u,v) \in C \subset \mathbb{R}^2,$$

Пусть точка $P \in \Sigma \subset D$, пусть $B_\varepsilon(P) = \left\{(x,y,z) \in D : dist\left(P,(x,y,z)\right) < \varepsilon\right\}$ при этом $B_\varepsilon^{(1)}(P) = D_1 \cap B_\varepsilon(P),\ B_\varepsilon^{(2)}(P) = D_2 \cap B_\varepsilon(P)$ и число ε достаточно мало для того чтобы касательная плоскость к поверхности Σ в точке P - $\alpha_\Sigma(P)$

пересекалась бы только с $B_\varepsilon^{(1)}(P)$ та сторона Σ которая непосредственно граничит с $B_\varepsilon^{(1)}(P)$ называется внешней стороной поверхности Σ в окрестн. точки P и обозначается как $\Sigma_+(P)$ Тогда внешняя сторона Σ определяется с помощью соотношения: $$\Sigma_+ = \bigcup_{\vec{P}\in\Sigma} \Sigma_+(P)$$

пусть для определенности Σ_+ непосредственно граничит с областью D_1 тогда та нормаль $\vec{n}(u,v)$ конец вектора которой лежит внутри области D_1 называется внешней нормалью $\vec{n}_+(u,v)$

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода:

$$I = \iint\limits_{\Sigma_+} \left(\vec{f}(P), \overrightarrow{ds}\right) = \iint\limits_{\Sigma_+} \left(\vec{f}\left(\vec{P}\right), \vec{n}_+(P)\right) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_+} \left(f_x(P)\,dydz + f_y(P)\,dzdx + f_z(P)\,dxdy\right) =$$

$$= \pm\iint\limits_{C} f_x\left(r_x(u,v), r_y(u,v), r_z(u,v)\right) n_x(u,v)\,dudv \pm$$

$$\pm\iint\limits_{C} f_y\left(r_x(u,v), r_y(u,v), r_z(u,v)\right) n_y(u,v)\,dudv +$$

$$\pm\iint\limits_{C} f_z\left(r_x(u,v), r_y(u,v), r_z(u,v)\right) n_z(u,v)\,dudv,$$

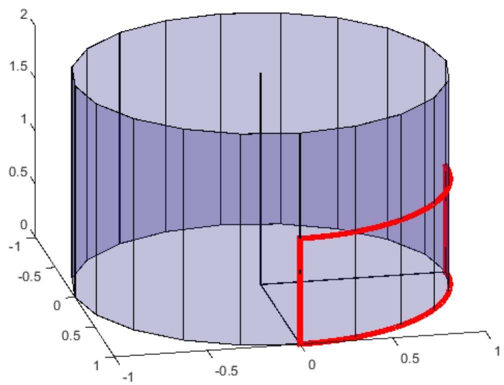
где $\vec{n}(u,v) = \left[n_x(u,v), n_y(u,v), n_z(u,v)\right]^T$.

Найти поток вектора $\vec{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}2x, & -y, & 0\end{bmatrix}^T$, через часть поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2,\ 0\le z\le H,\ x\ge 0,\ y\ge 0$, в направлении внешней нормали (через изогнутую боковую стенку цилиндра).

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2\le R^2,\ 0\le z\le H,\ x\ge 0,\ y\ge 0 \\ ]x=R\cos u,\ y=R\sin u,\ z=v \end{matrix}\right| \Rightarrow\ ]\vec{r}(u,v)=\begin{bmatrix} r_x(u,v) \\ r_y(u,v) \\ r_z(u,v) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=r_x(u,v), y=r_y(u,v), z=r_z(u,v),\ u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], v\in[0,H]\right\}$$

$$\vec{r}_u'(u,v)=\frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial u}=\begin{bmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{r}_v'(u,v)=\frac{\partial\vec{r}(u,v)}{\partial v}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\vec{n}(u,v)=\pm\left(\vec{r}_u'(u,v)\times\vec{r}_v'(u,v)\right)=\pm\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\pm\left(\vec{i}R\cos u-\vec{j}(-R\sin u)+\vec{k}\cdot 0\right)=\pm\begin{bmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}_+(u,v)=\begin{bmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$ т.к. в первой четверти у внешней нормали проекция

на ось OX и на ось $OY\ge 0$

$$\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}(P),\overrightarrow{ds}\right)=\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\vec{n}_+(P)\right)d\sigma=\iint\limits_{\substack{u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ v\in[0,H]}}\left(\vec{f}\left(r_x(u,v),r_y(u,v),r_z(u,v)\right),\begin{bmatrix}R\cos u\\ R\sin u\\ 0\end{bmatrix}\right)dudv=$$

$$=\iint\limits_{\substack{u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ v\in[0,H]}}\left(f_x\left(r_x(u,v),r_y(u,v),r_z(u,v)\right)R\cos u+f_y\left(r_x(u,v),r_y(u,v),r_z(u,v)\right)R\sin u\right)dudv+$$

$$+\iint\limits_{\substack{u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ v\in[0,H]}}f_z\left(r_x(u,v),r_y(u,v),r_z(u,v)\right)\cdot 0dudv=\iint\limits_{\substack{u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ v\in[0,H]}}\left(2R\cos uR\cos u-R\sin uR\sin u+0\cdot 0\right)dudv=$$

$$=R^2\int_0^H dv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2 u-\sin^2 u\right)du=R^2\int_0^H dv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}\cos 2u+\frac{1}{2}\right)du=R^2\int_0^H\left(\frac{3}{4}\sin 2u+\frac{1}{2}u\right)\Bigg|_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}}dv=\frac{\pi R^2}{4}\int_0^H dv=$$

$$=\frac{\pi R^2}{4}v\Big|_{v=0}^{v=H}=\frac{\pi R^2 H}{4}$$

Если поверхность Σ представима как часть графика дифференцируемой функции $g(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (график функции g это множество $\Gamma_g\subset\mathbb{R}^3$)

$$\Gamma_g=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=g(x,y)\right\}$$

то поверхность Σ можно задать с помощью следующей вектор функции

$$\vec{r}=\vec{r}(x,y)=\begin{bmatrix} x & y & g(x,y)\end{bmatrix}^T;$$

при этом $\vec{r}_x'(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}\end{bmatrix}^T, \vec{r}_y'(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\end{bmatrix}^T,$

$$\vec{n}(x,y)=\vec{r}_x'(x,y)\times\vec{r}_y'(x,y)=\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & -\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} & 1\end{bmatrix}^T;$$

тогда

$$\boxed{\begin{aligned} I&=\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}(P),\vec{ds}\right)=\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}(P),\vec{n}_+(P)\right)d\sigma=\\ &=\mp\iint\limits_{C}\left(f_x\left(x,y,g(x,y)\right)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}+f_y\left(x,y,g(x,y)\right)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)dxdy\pm\\ &\qquad\pm\iint\limits_{C}f_z\left(x,y,g(x,y)\right)dxdy\end{aligned}}$$

4.18. Найти поток вектора $\vec{f} = [x^2, y^2, z^2]^T$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, расположенную во втором октанте $(x < 0,\ y < 0,\ z > 0)$, в направлении внешней нормали.

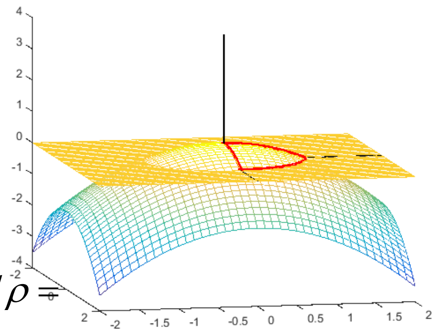
$$z = g(x,y) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2a};\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{a};\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{a};$$

$$I = \iint\limits_{\Sigma_+} \left(\vec{f}\left(\vec{P}\right), \vec{ds}\right) = \iint\limits_{\substack{a^2 = 2az + x^2 + y^2 \\ x \le 0, y \le 0, z \ge 0}} \left(\vec{f}\left(\vec{P}\right), \vec{n}_+\left(\vec{P}\right)\right) d\sigma = \iint\limits_{\substack{0 \le x^2 + y^2 \le a^2 \\ x \le 0, y \le 0}} \left. \left(x^2 \frac{x}{a} + y^2 \frac{y}{a} + z^2\right) \right|_{z = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2a}} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0 \le x^2 + y^2 \le a^2 \\ x \le 0, y \le 0}} \frac{x^3}{a} + \frac{y^3}{a} + \frac{\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^2}{4a^2} dxdy \underset{\substack{x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi}}{=} \frac{1}{a} \int\limits_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho^4 \left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) + \frac{\left(a^2 - \rho^2\right)^2}{4a} \rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{a} \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho^4 \left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)\left(\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi\right) + \frac{\left(a^2 - \rho^2\right)^2}{4a} \rho d\rho =$$

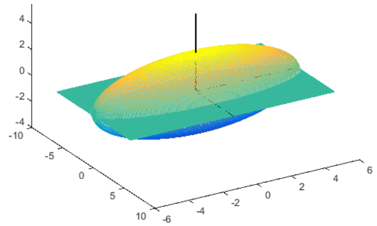
$$= \frac{1}{a} \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho^4 \left(-\frac{1}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\right) + \frac{\left(a^2 - \rho^2\right)^2}{4a} \rho d\rho =$$



$$= \frac{1}{a} \int\limits_0^a \left(\rho^4 \left. \left(\frac{3}{4}\left(\sin\varphi - \cos\varphi\right) + \frac{1}{12}\left(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi\right) \right) \right|_{\varphi = \pi}^{\varphi = \frac{3\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \frac{\left(a^2 - \rho^2\right)^2}{4a} \rho \right) d\rho = \frac{1}{a} \int\limits_0^a \left(-\frac{4}{3}\rho^4 + \frac{\pi}{2} \frac{\left(a^2 - \rho^2\right)^2}{4a} \rho \right) d\rho =$$

$$= -\frac{4}{15} a^5 + \frac{\pi}{16a} \int\limits_0^a \left(a^2 - \rho^2\right)^2 d\rho^2 = -\frac{4}{15} a^5 - \left. \frac{\pi\left(a^2 - \rho^2\right)^3}{48a} \right|_0^a = -\frac{4}{15} a^5 + \frac{1}{48} \pi a^5 = I$$

Пример 4.8. Найти поток вектора $\vec{f}(x,y,z) = [0,0,z]^T$ через внешнюю поверхность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

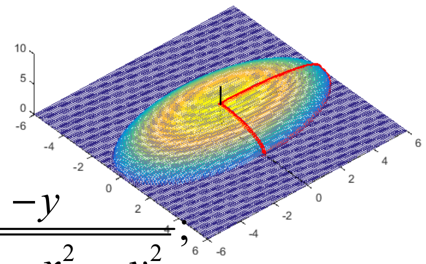


$$z = g(x,y) = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \pm\frac{-xc}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}};\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \pm\frac{-yc}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\vec{ds}\right) = -\iint\limits_{C}\left(f_x\left(x,y,g(x,y)\right)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + f_y\left(x,y,g(x,y)\right)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)dxdy + \iint\limits_{C} f_z\left(x,y,g(x,y)\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{0\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1\left(\begin{smallmatrix}-c\le z\le c\\ grad\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left[\frac{2x}{a^2}\ \frac{2y}{b^2}\ \frac{2z}{c^2}\right]\end{smallmatrix}\right)} z\Big|_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} dxdy = 2\iint\limits_{0\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy \underset{\substack{x=a\rho\cos\varphi\\ y=b\rho\sin\varphi}}{=} 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 c\sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\rho = 4\pi abc\left.\frac{-\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc$$

Пример 4.6. Найти поток вектора $\vec{f}(x,y,z) = [x,y,z]^T$ через часть поверхности эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.



$$z = g(x,y) = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{a^2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}};\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{b^2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\vec{ds}\right) = -\iint\limits_{C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,0\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le1,\,x\ge0,\,y\ge0\right\}}\left(f_x\left(x,y,g(x,y)\right)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + f_y\left(x,y,g(x,y)\right)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)dxdy +$$

$$+\iint\limits_{\substack{0\le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} f_z\left(x,y,g(x,y)\right)dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} \frac{x^2c}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}+\frac{y^2c}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy \underset{\substack{x=a\rho\cos\varphi\\ y=b\rho\sin\varphi}}{=}$$

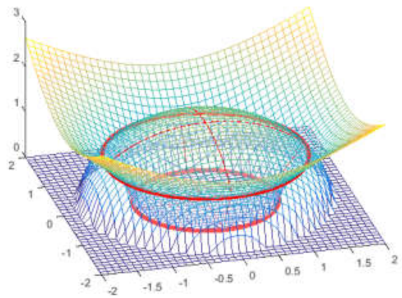
$$=c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^1\left(\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}+\sqrt{1-\rho^2}\right)ab\rho d\rho=\frac{\pi}{2}abc\left(\frac12\int\limits_0^1\left(\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)d\rho^2+\left.\frac{-\left(1-\rho^2\right)^{\frac32}}{3}\right|_0^1\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}abc\left(\frac13-\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\Big|_0^1+\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho^2\right)=\frac{\pi}{2}abc\left(\frac13-0-\frac23\left(1-\rho^2\right)^{\frac32}\Big|_0^1\right)=\frac{\pi}{2}abc\left(\frac13+\frac23\right)=\frac{\pi}{2}abc$$

Пример 4.7. Найти поток вектора $\vec{f}(x,y,z)=[x^2,-y^2,z^2]^T$ через всю поверхность тела $0\le x^2+y^2+z^2\le 3R^2$, $0\le z\le\sqrt{x^2+y^2-R^2}$ в направлении внешней нормали.

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3R^2\\ z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-3R^2=x^2+y^2-R^2\\ z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2R^2\\ z=R\end{cases};$$

$$\begin{cases}z=0\\ z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=0\end{cases};\ \begin{cases}z=0\\ x^2+y^2+z^2=3R^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\ x^2+y^2=3R^2\end{cases};\ \Bigg|\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\Sigma_+=\left\{(x,y,z):z=\sqrt{3R^2-x^2+y^2},0\le x^2+y^2\le 2R^2\right\}_+\cup\left\{(x,y,z):z=\sqrt{x^2+y^2-R^2},R^2\le x^2+y^2\le 2R^2\right\}_-\cup$$

$$\cup\left\{(x,y,z):z=0,0\le x^2+y^2\le R^2\right\}_-=\Sigma_+^{(1)}\cup\Sigma_-^{(2)}\cup\Sigma_-^{(3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\vec{ds}\right)=\iint\limits_{\Sigma_+^{(1)}}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\vec{ds}\right)+\iint\limits_{\Sigma_-^{(2)}}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\vec{ds}\right)+\iint\limits_{\Sigma_-^{(3)}}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\vec{ds}\right)$$

$$\Sigma_-^{(3)}=\left\{(x,y,z): z=g_3(x,y)=0, 0\le x^2+y^2\le R^2\right\}_- \quad \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y}=0;$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma_-^{(3)}}\left(\vec f(\vec P),\vec{ds}\right)=\iint\limits_{C=\{0\le x^2+y^2\le R^2\}}\left(f_x(x,y,g_3(x,y))\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x}+f_y(x,y,g_3(x,y))\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x}\right)dxdy-$$

$$-\iint\limits_{C=\{0\le x^2+y^2\le R^2\}} f_z(x,y,g_3(x,y))dxdy=\iint\limits_{C=\{0\le x^2+y^2\le R^2\}}\left(x^2 0-y^2 0\right)dxdy-\iint\limits_{C=\{0\le x^2+y^2\le R^2\}} z^2\Big|_{z=0}dxdy=0$$

$$\Sigma_-^{(2)}=\left\{(x,y,z): z=g_2(x,y)=z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}, R^2\le x^2+y^2\le 2R^2\right\}_-$$

$$\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}};\ \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}};$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma_-^{(2)}}\left(\vec f(\vec P),\vec{ds}\right)=\iint\limits_{C=\{R^2\le x^2+y^2\le 2R^2\}}\left(f_x(x,y,g_2(x,y))\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}+f_y(x,y,g_2(x,y))\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\right)dxdy-$$

$$-\iint\limits_{C=\{R^2\le x^2+y^2\le 2R^2\}} f_z(x,y,g_2(x,y))dxdy=\iint\limits_{C=\{R^2\le x^2+y^2\le 2R^2\}}\left(\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}-\frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}\right)-\left(x^2+y^2-R^2\right)dxdy \underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=}$$

$$=\iint\limits_{\substack{R\le r\le\sqrt2 R\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} r\left(\left(\frac{r^3\left(\cos^3\varphi-\sin^3\varphi\right)}{\sqrt{r^2-R^2}}\right)-\left(r^2-R^2\right)\right)drd\varphi=\int_R^{\sqrt2 R}dr\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4\left(\cos3\varphi+3\cos\varphi+\sin3\varphi-3\sin\varphi\right)}{4\sqrt{r^2-R^2}}+R^2r-r^3\right)d\varphi=$$

$$\int_R^{\sqrt2 R}\left(\frac{r^4\left((1/3)\sin3\varphi+3\sin\varphi-(1/3)\cos3\varphi+3\cos\varphi\right)}{4\sqrt{r^2-R^2}}+\left(R^2r-r^3\right)\varphi\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}dr=2\pi\int_R^{\sqrt2 R}\left(R^2r-r^3\right)dr=$$

$$=2\pi\left(\frac{R^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_R^{\sqrt2 R}=2\pi\left(\frac{2R^2R^2}{2}-\frac{4R^4}{4}-\frac{R^4}{2}+\frac{R^4}{4}\right)=-\frac{\pi R^4}{2}$$

$$\Sigma_+^{(1)}=\left\{(x,y,z): z=g_1(x,y)=z=\sqrt{3R^2-x^2-y^2}, 0\le x^2+y^2\le 2R^2\right\}_+$$

$$\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{3R^2-x^2-y^2}};\ \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{3R^2-x^2-y^2}};$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma_+^{(1)}}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\overrightarrow{ds}\right)=-\iint\limits_{C=\left\{0\le x^2+y^2\le 2R^2\right\}}\left(f_x\left(x,y,g_1(x,y)\right)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}+f_y\left(x,y,g_1(x,y)\right)\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\right)dxdy+$$

$$+\iint\limits_{C=\left\{0\le x^2+y^2\le 2R^2\right\}} f_z\left(x,y,g_2(x,y)\right)dxdy=\iint\limits_{C=\left\{0\le x^2+y^2\le 2R^2\right\}}\left(\frac{x^3}{\sqrt{3R^2-x^2-y^2}}-\frac{y^3}{\sqrt{3R^2-x^2-y^2}}+\left(3R^2-x^2-y^2\right)\right)dxdy\underset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=}$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\le r\le\sqrt{2}R\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} r\left(\left(\frac{r^3\left(\cos^3\varphi-\sin^3\varphi\right)}{\sqrt{3R^2-r^2}}\right)+\left(3R^2-r^2\right)\right)drd\varphi=\int\limits_0^{\sqrt{2}R}dr\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^4\left(\cos 3\varphi+3\cos\varphi+\sin 3\varphi-3\sin\varphi\right)}{4\sqrt{3R^2-r^2}}+3R^2r-r^3\right)d\varphi=$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}R}\left(\frac{r^4\left((1/3)\sin 3\varphi+3\sin\varphi-(1/3)\cos 3\varphi+3\cos\varphi\right)}{4\sqrt{3R^2-r^2}}+\left(3R^2r-r^3\right)\varphi\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}dr=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}R}\left(3R^2r-r^3\right)dr=$$

$$=2\pi\left(\frac{3R^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}R}=2\pi\left(\frac{3R^2 2R^2}{2}-\frac{4R^4}{4}\right)=4\pi R^4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\iint\limits_{\Sigma_+}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\overrightarrow{ds}\right)=\iint\limits_{\Sigma_+^{(1)}}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\overrightarrow{ds}\right)+\iint\limits_{\Sigma_-^{(2)}}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\overrightarrow{ds}\right)+\iint\limits_{\Sigma_-^{(3)}}\left(\vec{f}\left(\vec{P}\right),\overrightarrow{ds}\right)=4\pi R^4-\frac{\pi R^4}{2}+0=\frac{7\pi R^4}{2}$$