Zestaw 5 - Zadanie 2

Metody probabilistyczne w uczeniu maszynowym

Łukasz Trzos

Treść zadania

Rozważmy naiwny klasyfikator bayesowski dla trzech klas i zmiennych wejściowych o dwóch cechach: jednej o rozkładzie zero-jedynkowym i jednej o rozkładzie normalnym:

$$y \sim \text{Mult}(y|0.5, 0.25, 0.25),$$

$$x_1|y = c \sim \text{Bern}(x_1|0.5) \quad \text{dla } c \in \{1, 2, 3\},$$

$$x_2|y = c \sim \mathcal{N}(x_2|1 - c, 1) \quad \text{dla } c \in \{1, 2, 3\}.$$

Wyznacz:
(a) $p(y|x_1 = 0, x_2 = 0)$,
(b) $p(y|x_1 = 0)$,
(c) $p(y|x_2 = 0)$.

Rozwiązanie

Podpunkt A

Dla $c \in \{1, 2, 3\}$ z tw. Bayesa mamy:

$$p(y = c|x_1 = 0, x_2 = 0) = \frac{p(x_1 = 0, x_2 = 0|y = c)p(y = c)}{p(x_1 = 0, x_2 = 0)} = \frac{p(x_1 = 0|y = c)p(x_2 = 0|y = c)p(y = c)}{\sum_{i=1}^{3} p(x_1 = 0, x_2 = 0|y = c)p(y = c)} =$$

$$= \frac{p(x_1 = 0|y = c)p(x_2 = 0|y = c)p(y = c)}{p(x_1 = 0|y = c)\sum_{i=1}^{3} p(x_2 = 0|y = i)p(y = i)} = \frac{p(x_2 = 0|y = c)p(y = c)}{\sum_{i=1}^{3} p(x_2 = 0|y = i)p(y = i)}$$

gdzie w 2 równości korzystamy z naiwności klasyfikatora, czyli niezależności cech warunkowo od klasy, a później zauważamy, że $\forall_{c \in \{1,2,3\}} : p(x_1 = 0|y = c) = \frac{1}{2}$. Obliczamy po kolei, korzystając z funkcji gęstości zmiennej o rozkładzie normalnym z parametrem wariancji równym 1:

$$f_{x_2|y=c}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$\sum_{i=1}^{3} p(y = i)p(x_2 = 0|y = i) = 0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0.25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}} + 0.25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2} \approx 0.19945 + 0.06047 + 0.01349 = 0.27341$

- $p(y = 1|x_1 = 0, x_2 = 0) \approx \frac{0.19945}{0.27341} \approx 0.72949$
- $p(y = 2|x_1 = 0, x_2 = 0) \approx \frac{0.06047}{0.27341} \approx 0.22117$
- $p(y = 3|x_1 = 0, x_2 = 0) \approx \frac{0.01349}{0.27341} \approx 0.04933$

Podpunkt B

Ponownie, korzystając z tw. Bayesa:

$$p(y=c|x_1=0) = \frac{p(x_1=0|y=c)p(y=c)}{p(x_1=0)} = \frac{p(x_1=0|y=c)p(y=c)}{\sum_{i=1}^{3} p(x_1=0|y=i)p(y=i)} = \frac{p(x_1=0|y=c)p(y=c)}{p(x_1=0|y=c)\sum_{i=1}^{3} p(y=i)} = p(y=c)$$

korzystamy z faktów, że $\forall_{c\in\{1,2,3\}} : p(x_1=0|y=c) = \frac{1}{2}$, oraz $\sum_{i=1}^{3} p(y=i) = 1$ Zatem:

- $p(y=1|x_1=0) = 0.5$
- $p(y=2|x_1=0) = 0.25$
- $p(y=3|x_1=0) = 0.25$

Podpunkt C

Z twierdzenia Bayesa mamy:

$$p(y=c|x_2=0) = \frac{p(x_2=0|y=c)p(y=c)}{\sum_{i=1}^{3} p(x_2=0|y=i)p(y=i)}$$

a więc widzimy, że wynik będzie dokładnie taki sam, jak w podpunkcie A, w którym doszliśmy do takiej samej równości.

- $p(y=1|x_2=0) \approx \frac{0.19945}{0.27341} \approx 0.72949$
- $p(y=2|x_2=0) \approx \frac{0.06047}{0.27341} \approx 0.22117$
- $p(y=3|x_2=0) \approx \frac{0.01349}{0.27341} \approx 0.04933$