Zestaw 6 - Zadanie 6

Metody probabilistyczne w uczeniu maszynowym

Łukasz Trzos

Treść zadania

Niech dany będzie skończony zbiór D. Zdefiniujmy funkcję κ na zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(D)$ zbioru D w następujący sposób:

$$\kappa(A_1, A_2) = 2^{|A_1 \cap A_2|}$$

Wykaż, że κ jest poprawnie zdefiniowaną funkcją jądrową.

Rozwiązanie

κ jest funkcją jądrową, jeśli istnieje funkcja $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ taka, że $\forall_{x,z \in \mathbb{R}^k} : \kappa(x, z) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle$.
Definiujemy funkcję $\phi : \mathcal{P}(D) \to \mathbb{R}^{2^{|D|}}$. Dla podzbioru D produkuje ona wektor indeksowany wszystkimi podzbiorami D:

$$\forall_{B \subseteq D} : \phi(X)_B = \begin{cases} 1, B \subseteq X \\ 0, wpp \end{cases}$$

Dla dowolnych $X, Z \subseteq D$:

$$\langle \phi(X), \phi(Z) \rangle = \sum_{B \subseteq D} \mathbf{1}[B \subseteq X]\mathbf{1}[B \subseteq Z] = \sum_{B \subseteq X \cap Z} 1 = 2^{|X \cap Z|}$$

Zatem κ jest poprawnie zdefiniowaną funkcją jądrową. $\square$