Zestaw 7 - Zadanie 2

Metody probabilistyczne w uczeniu maszynowym

Łukasz Trzos

Treść zadania

Wskazując odpowiedni algorytm wykaż, że klasa pojęć $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ jest PAC-nauczalna.

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że klasa pojęć $\mathcal{C}$ jest PAC-nauczalna, gdy istnieją algorytm A oraz funkcja wielomianowa $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $\epsilon > 0$ i $\delta > 0$, dowolnego rozkładu $\mathcal{D}$ na $\mathcal{X}$ oraz dowolnego pojęcia $c \in \mathcal{C}$ jeżeli liczność m próbki S spełnia $m \geqslant Q(\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\delta})$, to algorytm A zwraca hipotezę h_S, dla której prawdopodobieństwo błędnego sklasyfikowania nowej danej możemy ograniczyć w następujący sposób:

$$p(R(h_S) \leqslant \epsilon) \geqslant 1 - \delta$$

gdzie $R(h_S) = \mathbb{E}_{\mathcal{D}}[\mathbf{1}[h(x) \neq c(x)]]$.

Zastosujemy algorytm, który dla danej próbki wybiera najmniejszy przedział zawierający wszystkie elementy z klasy pozytywnej. To jest, dla próbki S oznaczamy przez $\hat{a}$ najmniejszy element należący do klasy pozytywnej, analogicznie przez $\hat{b}$ największy taki element, a następnie wybieramy przedział $[\hat{a}, \hat{b}]$. Istnienie odpowiedniego wielomianu pokażemy po wykonaniu niezbędnych obliczeń.

Weźmy dowolne $\epsilon, \delta > 0$, dowolny rozkład $\mathcal{D}$ na $\mathcal{X}$ oraz dowolne objaśniane pojęcie $c \in \mathcal{C}$. Jeśli $c = [a, b]$, a nasz algorytm zwrócił przedział $[\hat{a}, \hat{b}]$, to prawdopodobieństwo błędnej klasyfikacji nowego punktu wynosi $p(x \in [a, \hat{a}]) + p(x \in [\hat{b}, b])$. Wynika to z obserwacji, że algorytm może się pomylić tylko, jeśli błędnie sklasyfikuje punkt pozytywny jako negatywny. Punkty objęte tym ryzykiem są na dwóch nieodkrytych końcach przedziału $[a, b]$.

Możemy założyć, że $p(x \in [a, b]) \geqslant \epsilon$. Gdyby tak nie było, to ryzyko na pewno wynosiłoby co najwyżej ϵ, zatem $p(R(h_S) \leqslant \epsilon) = 1 \geqslant 1 - \delta$. Weźmy a' oraz b' takie, że $p(x \in [a, a']) = p(x \in [b', b]) = \frac{\epsilon}{2}$. Wiemy, że jeśli ryzyko dla nowego punktu jest większe lub równe ϵ, to nie wylosowaliśmy żadnego punktu z przedziału $[a, a']$ lub nie wylosowaliśmy nic z przedziału $[b', b]$. Zapiszemy to symbolicznie:

$$p(R(h_S) \geqslant \epsilon) \leqslant p(\hat{a} > a' \vee \hat{b} < b') \leqslant p(\hat{a} > a') + p(\hat{b} < b') = 2\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^m$$

Zatem musimy wziąć na tyle duże m, żeby zachodziło $2\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^m \leqslant \delta$.
Korzystamy z faktu, że dla $x \in [0, 1]$ zachodzi $1 - x \leqslant e^{-x}$, i przekształcamy równoważnie dane równanie:

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^m \leqslant \frac{\delta}{2}$$

$$e^{-\frac{m\epsilon}{2}} \leqslant \frac{\delta}{2}$$

$$-\frac{m\epsilon}{2} \leqslant ln\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$m \geqslant \frac{2}{\epsilon} ln\left(\frac{2}{\delta}\right)$$

Możemy zatem przykładowo wziąć funkcję wielomianową $Q(x, y) = 4xy$, która dostatecznie dobrze ogranicza m. Klasa $\mathcal{C}$ jest więc PAC-nauczalna. $\square$