Appunti di Analisi 4

Osea

Primo semestre, A.A. 20242025

Il corso tratterà sostanzialmente due tematiche:

– **Misura e Integrale di Lebesgue**

– Rudimenti di **Analisi Funzionale**, in particolare spazi di Hilbert e serie di Fourier e qualcosa relativa agli spazi normati.

In particolare legati dagli **spazi** L^p che rientrano in entrambe le categorie. Purtroppo non c'è un testo che contiene tutti e soli gli argomenti del corso, ma sul kiro c'è molto materiale didattico che può essere utilizzato.

Indice

1 Misura e integrazione di Lebesgue

Il libro era di Haim Brezis e si chiamava *Analisi Funzionale e Applicazioni*, era la versione in italiano ed era edita da Liguori. Aveva un'appendice curata da Carlo Sbordone (?). Di tale libro esiste la versione in inglese che è molto più ricca e completa.

1.1 Algebre, σ-algebre, misure

Sia Ω un insieme ambiente, e sia $\mathcal{M}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω, ossia $\mathcal{M} \subseteq 2^{\Omega}$.

Definizione 1.1: Algebra

Una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω si dice **algebra** se

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$
2. Se $A \in \mathcal{M}$ allora $A^C \in \mathcal{M}$
3. Se $A, B \in \mathcal{M}$ allora anche $A \cup B \in \mathcal{M}$

Osservazione. Poiché $\varnothing \in \mathcal{M}$, anche $\Omega \in \mathcal{M}$ perché il complementare di $\varnothing$.

Osservazione. Se $A, B \in \Omega$, anche $(A^C \cup B^C)^C = A \cap B \in \mathcal{M}$

Osservazione. Se $A, B \in \mathcal{M}$ anche $A \cap B^C = A \smallsetminus B \in \mathcal{M}$

In pratica un'algebra è una famiglia di sottoinsiemi di Ω chiusa rispetto alle comuni operazioni di insiemi.

Esempio 1.1. $P(\Omega)$ è banalmente un'algebra perché contiene tutti i sottoinsiemi.
Anche $\{\varnothing, \Omega\}$ lo è poiché la loro unione è Ω.

Esempio 1.2. In $\Omega = \mathbb{R}^2$ consideriamo $\mathcal{M}$ costituita dai rettangoli. Allora $\mathcal{M}$ è un'algebra? NO, perché per quanto potrei metterci l'insieme vuoto e tutto $\mathbb{R}^2$, se considero ad esempio $[0,1] \times [0,2] \cup [0,2] \times [0,1]$ ottengo un poligono che non è un rettangolo.

Invece, potrei considerare la famiglia delle unioni finite di rettangoli, anche non limitati, e considerando anche l'insieme vuoto. Questa è un'algebra perché l'intersezione di due rettangoli è un rettangolo, e il complementare di un'unione finita di rettangoli è un'intersezione di finiti rettangoli.

Definizione 1.2: funzione finitamente additiva

Sia Ω un'insieme e $\mathcal{M}$ un'algebra di sottoinsiemi di Ω.
Una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ si dice **finitamente additiva** se

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap B = \varnothing$ allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Va inteso che se per uno dei due $\mu(A) = +\infty$ allora $\mu(A \cup B) = +\infty$

Esempio 1.3. Nel caso dell'algebra delle unioni finite di rettangoli, potrei considerare la funzione che restituisce la somma delle aree dei rettangoli.

Proposizione 1.1. *Se μ è una funzione finitamente additiva su $\mathcal{M}$ algebra allora*

1. *(monotonia) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$*
2. *(sottrattività) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq B$ e $\mu(A) < +\infty$ allora $\mu(B \smallsetminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*

3. *(sub-additività) Se* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ *allora* $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

Dimostrazione.

1. $B = A \cup (B \setminus A)$, quindi $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$
2. Da sopra, ma necessito di aggiungere l'ipotesi $\mu(A) < +\infty$ per evitare di sottrarre $+\infty$
3. Considero $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$ ecc. ponendo sempre $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$, per cui $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e so che $\mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n B_i \leq \sum_{i=1}^n A_i$ dove prima si è usata la finita additività essendo B_i a due a due disgiunti, e la disuguaglianza per la monotonia.

□

Definizione 1.3: Misura

Sia Ω insieme, $\mathcal{M}$ algebra su Ω, allora $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ si dice **misura** se:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. (Numerabile additività / σ-additività) Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi di $\mathcal{M}$ a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$ allora $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$

Osservazione. È evidente che la σ-additività implica l'additività finita, poiché si può prendere $A_1 = A$, $A_2 = B$ e $A_i = \varnothing$ per ogni $i \geq 3$

Il problema delle algebre in questo caso è che bisogna specificare nella definizione di misura che l'unione della successione deve essere nell'algebra, il che motiva la seguente definizione.

Definizione 1.4: σ-algebra

Sia Ω un insieme, $\mathcal{M}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω. Allora $\mathcal{M}$ si dice **σ-algebra** se:

1. $\varnothing \in \mathcal{M}$
2. Se $A \in \mathcal{M}$ allora anche $A^C \in \mathcal{M}$
3. Se $A_n \in \mathcal{M}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$

Osservazione. Di nuovo è evidente che una σ-algebra è un'algebra.

Osservazione. Se $A_n \in \mathcal{M} \forall n \in \mathbb{N}$ posso concludere che $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$, sì, poiché è il complementare dell'unione dei complementari, come prima.

Esempio 1.4. $\mathcal{M} = P(\Omega)$ è anche una σ-algebra. Vale lo stesso anche per $\mathcal{M} = \{\varnothing, \Omega\}$.

Esempio 1.5. L'unione finita di rettangoli, anche non limitati, che include l'insieme vuoto, invece non lo è, poiché un aperto qualunque di $\mathbb{R}^2$ è esprimibile come unione numerabile di rettangoli.

Teorema 1.2

Dato Ω e una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di Ω, esiste sempre una σ-algebra $\mathcal{M}$ che contiene $\mathcal{F}$ ed è contenuta in ogni σ-algebra che contiene $\mathcal{F}$, e viene denotata $\sigma(\mathcal{F})$

Dimostrazione. Data $\mathcal{F}$, allora esiste almeno $P(\Omega) \supseteq \mathcal{F}$. Prendo allora tutte le σ-algebre che contengono $\mathcal{F}$ e l'intersezione è una σ-algebra ed è contenuta in tutte. □

Esempio 1.6. Dato un insieme Ω, sia τ la collezione di aperti di Ω. La σ-algebra $\sigma(\tau)$ generata da τ viene detta σ-algebra di Borel e contiene tutti gli aperti, tutti i chiusi e tutte le unioni e intersezioni numerabili di aperti e chiusi.

Dato Ω un insieme e una σ-algebra $\mathcal{M}$ su Ω, la coppia $(\Omega, \mathcal{M})$ viene detta **spazio misurabile** e la terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, dove μ è una misura su $\mathcal{M}$ viene detta **spazio di misura**.

Uno spazio di misura si dice **finito** se $\mu(\Omega) < +\infty$ e uno spazio di misura si dice **σ-finito** se $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ con $B_n \in \mathcal{M} \forall n \in \mathbb{N}$ e $\mu(B_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre se $\mu(A) = 0$ allora A si dice **trascurabile**. Ancora una proprietà si dice **vera quasi ovunque** se vale per ogni $x \in \Omega \smallsetminus A$ dove A è trascurabile.

Esempio 1.7. $\Omega = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{R}^N}$, sia O l'origine. Allora δ_O è la misura che ha valore 1 se e solo se $O \in A \in \mathcal{M}$, altrimenti 0. Allora questa è una misura perché data una successione di insiemi a due a disgiunti della σ-algebra la misura della loro unione è 1 se e solo se uno degli insiemi contiene O, e nel caso può essere solo uno, perché tali insiemi sono a due a due disgiunti. In particolare questa è una misura finita.

Esempio 1.8 (Misura del contare #)**.** Consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$, dove per un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\#(A) = \begin{cases} n & \text{se } A \text{ ha } n \text{ elementi} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo che si tratta di una misura:

1. $\#(\varnothing) = 0$ ovviamente.
2. Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi a due a due disgiunti, allora

   $$\#A := \#\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \#(A_i)$$

   Infatti si possono verificare due casi: se $\#A < \infty$ allora significa che ogni A_i è finito oppure vuoto e solo un numero finito di A_i (al massimo $\#A$ insiemi) sono diversi dall'insieme vuoto, e quindi il numero di elementi di A è la somma dei numeri di elementi degli A_i.

   L'altro caso è quando $\#A = +\infty$ che si può realizzare in diversi modi: se nella successione abbiamo un insieme A_i con un numero infinito di elementi e in tal caso l'eguaglianza è immediatamente soddisfatta, oppure si ha che $\#A_i < +\infty$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ ma la serie non può convergere, poiché significherebbe che esiste una sottosuccessione di elementi non vuoti, e tutti hanno almeno un elemento.

Notare che questo **non** è uno spazio di misura finito, ma è uno spazio di misura σ-finito perché $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n\}$ dove naturalmente ogni singoletto ha $\#\{n\} = 1$. Inoltre è interessante notare che in questo spazio l'unico insieme trascurabile è l'insieme vuoto.

Teorema 1.3: Continuità della misura

Sia $\Omega, \mathcal{M}, \mu$ uno spazio di misura e sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi di $\mathcal{M}$.

1. Se $\{A_n\}$ è crescente, ossia $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, allora

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

2. Se $\{A_n\}$ è decrescente, ossia $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\mu(A_1) < +\infty$, allora

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Dimostrazione.

1. Noto che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \cdots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \ldots$$

E che gli insiemi nelle parentesi in questa espressione sono tutti a due a due disgiunti. Allora abbiamo per la σ-additività che

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_1) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{k+1} \setminus A_k)\right)$$

Ma ora possiamo riapplicare la σ-additività della misura all'interno al limite ottenendo che

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots \cup (A_{n+1} \setminus A_n)\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1})$$

2. Vogliamo costruire una successione crescente. Poniamo $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \setminus A_2$, $B_3 = A_1 \setminus A_3$ ecc. Allora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $B_n \subseteq B_{n+1}$. Allora per la continuità della misura crescente $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ da cui la tesi, poiché essendo $\mu(A_1) < +\infty$ possiamo scrivere

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

ma anche

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_1) - \mu(A_n)\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

da cui la tesi.

□

Osservazione. Notiamo che se fosse $\mu(A_1) = +\infty$ il risultato non segue necessariamente. Ad esempio nello spazio di misura $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$ Possiamo considerare la successione $A_1 = \mathbb{N}$, $A_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $A_3 = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ecc. Allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ ma $\mu(A_n) = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi il limite delle misure è $+\infty$ ma la misura dell'intersezione è 0

1.2 Misura esterna

Definizione 1.5: Misura esterna

Sia Ω un insieme e consideriamo l'algebra 2^Ω, allora $\lambda : 2^\Omega \to [0, +\infty]$ si dice **misura esterna** se

1. $\lambda(\varnothing) = 0$
2. (monotonia) Se $A \subseteq B$ allora $\lambda(A) \leq \lambda(B)$
3. (sub-additività) Se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi di 2^Ω allora

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

Ora vogliamo introdurre su $\mathbb{R}^N$ una misura esterna, che chiameremo $\mu^\star$. Lavoriamo con intervalli di $\mathbb{R}^n$, ossia prodotti cartesiani di intervalli reali di estremi sinistri $\{a_1, \dots, a_N\}$ e sinistri $\{b_1, \dots, b_N\}$ di ogni tipologia. Naturalmente abbiamo che $a_i \leq b_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$. Un un intervallo I di $\mathbb{R}^n$ è dunque il prodotto cartesiano degli n intervalli di estremi a_i e b_i, con $i \in \{1, \dots, N\}$. Per questi intervalli possiamo definire $|I| = \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i)$ la misura elementare. Allora definiamo

$$\mu^\star(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

Procediamo ora col verificare che questa è una misura esterna.

1. Naturalmente $\mu^\star(\varnothing) = 0$ perché l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme, in particolare per ogni ε posso creare una successione di intervalli con $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$
2. Se $A \subseteq B$ allora $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(B)$. Infatti tutte le successioni di intervalli che ricoprono B ricoprono anche A.
3. Abbiamo $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e vogliamo mostrare che $\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n)$. Possiamo supporre che la serie converga finita e tutti gli $\mu^\star(A_n)$ siano quindi finiti, perché altrimenti la disuguaglianza è banalmente soddisfatta. Allora per la definizione di $\mu^\star$ abbiamo che per ogni n e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{I_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $A_n \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \mu^\star(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Allora la successione $\{I_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ ricopre A. Allora per la definizione di $\mu^\star$ sicuramente abbiamo che

$$\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{n,k}| < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^\star(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n)$$

   Dove sommare su k e poi su n è equivalente a ogni altro modo di svolgere la somma perché la serie è assolutamente convergente.

Si può verificare che $\mu^\star(I) = |I|$ per gli intervalli, infatti naturalmente $\mu^\star(I) \leq |I|$ perché il ricoprimento $\{I\}$ fa parte dell'insieme su cui si fa l'inf. Per l'altra disuguaglianza, consideriamo per ogni $\varepsilon > 0$ una successione $\{I_i\}$ di intervalli tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \mu^\star(I) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora dico che esiste una successione di intervalli aperti J_i tale che $I_i \subseteq J_i$ e inoltre $\sum_{i=1}^{\infty} |J_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| + \frac{\varepsilon}{2}$ (basta richiedere che $|J_i| \leq |I_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$). Succede allora che

$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. Ora diciamo che esiste un intervallo chiuso $K \subseteq I$ tale che $|K| \geq |I| - \varepsilon$, succede quindi che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, dunque essendo K compatto e J_i aperti esiste un sottoricoprimento finito di K. A meno di riordinare i J_i quindi $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} J_i$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$. Allora abbiamo

$$|I| - \varepsilon \leq |K| \leq \sum_{i=1}^{k} |J_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |J_i| \leq \mu^\star(I) + \varepsilon$$

che essendo vero per ogni ε ci porta a ottenere la disuguaglianza $|I| \leq \mu^\star(I)$.

1.3 Misura di Lebesgue

Ora invece vogliamo costruire la misura di Lebesgue e gli insiemi misurabili secondo Lebesgue, ma prima introduciamo un po' di proposizioni.

Proposizione 1.4. *Per $\delta > 0$ fissato e per $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha che*

$$\mu^\star(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad diam(I_n) \leq \delta \right\}$$

Dimostrazione. Se io prendo un qualunque ricoprimento di A con intervalli, posso costruirne uno analogo dove il diametro di ogni intervallo è $\leq \delta$. Questo si può fare eventualmente "spezzando" gli intervalli in intervalli più piccoli, tenendo la somma della serie uguale. □

Proposizione 1.5. *Se $F_1, \ldots, F_n$ sono insiemi chiusi, limitati e disgiunti a due a due, allora la*

$$\mu^\star\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^\star(F_i)$$

Dimostrazione. Iniziamo con due insiemi, F_1 e F_2 chiusi e limitati, con $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Allora per la subadditività della misura esterna $\mu^\star(F_1 \cup F_2) \leq \mu^\star(F_1) + \mu^\star(F_2)$. Inoltre, $\forall \varepsilon > 0$ esiste (per la definizione con l'inf) un ricoprimento $\{I_n\}$ di $F_1 \cup F_2$ tale che $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$, chiediamo inoltre che $\operatorname{diam}(I_n) \leq \frac{d}{3}$, con d la distanza tra F_1 e F_2.

Tutti gli I_n tali che $I_n \cap F_1 \neq \varnothing$ danno un ricoprimento di F_1, e similmente tutti gli I_m tali che $I_m \cap F_2 \neq \varnothing$ danno un ricoprimento di F_2. Allora necessariamente

$$\mu^\star(F_1) + \mu^\star(F_2) \leq \sum_{I_n \cap F_1 \neq \varnothing} |I_n| + \sum_{I_m \cap F_2 \neq \varnothing} |I_m| \leq \mu^\star(F_1 \cup F_2) + \varepsilon$$

Infine procedendo per induzione si ottiene il risultato con n insiemi. □

Proposizione 1.6. *$\forall$ aperto limitato G e $\forall \varepsilon > 0$, esiste $F \subseteq G$ chiuso tale che*

$$\mu^\star(F) > \mu^\star(G) - \varepsilon$$

Dimostrazione. Costruisco una successione I_n di intervalli disgiunti tali che $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\mu^\star(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_n|$ (notare che vengono presi tutti i punti perché G è aperto usando la reticolazione in figura 1). Dico che esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{i=1}^{\overline{n}} |I_n| > \mu^\star(G) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Per ognuno degli I_i fisso un intervallo chiuso $J_i \subseteq I_i$ e tale che $|J_i| > |I_i| - \frac{\varepsilon}{2\overline{n}}$. In questo modo ho che evidentemente i J_i sono chiusi, limitati e disgiunti a due a due. Allora $F = \bigcup_{i=1}^{\overline{n}} J_i$. Allora per la proposizione precedente $\mu^\star(F) = \sum_{i=1}^{\overline{n}} \mu^\star(J_i) = \sum_{i=1}^{\overline{n}} |J_i| > \sum_{i=1}^{\overline{n}} |I_i| - \frac{\varepsilon}{2} > \mu^\star(G) - \varepsilon$. □

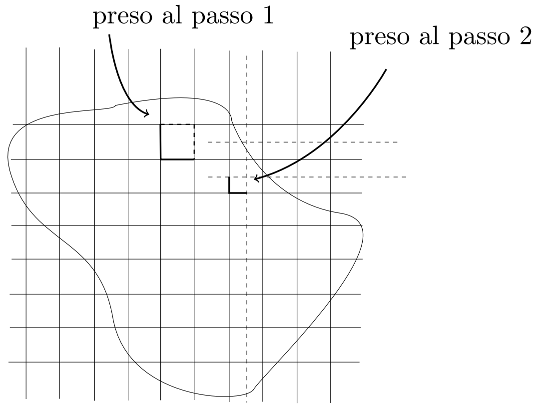


Figura 1: Reticolazione usata per costruire I_n della dimostrazione della Proposizione 1.6

Proposizione 1.7. *$\forall$ aperto limitato G, $\forall$ chiuso $F \subseteq G$, allora $\mu^\star(G \setminus F) = \mu^\star(G) - \mu^\star(F)$.*

Dimostrazione. Applico la proposizione 1.6 a $G \setminus F$, ottenendo che esiste un chiuso $F_1 \subseteq G \setminus F$ tale che $\mu^\star(F_1) > \mu^\star(G \setminus F) - \varepsilon$. Allora $\mu^\star(F) + \mu^\star(F_1) = \mu^\star(F \cup F_1)$, da cui

$$\mu^\star(F) + \mu^\star(G \setminus F) < \mu^\star(F) + \mu^\star(F_1) + \varepsilon = \mu^\star(F \cup F_1) + \varepsilon \leq \mu^\star(G) + \varepsilon$$

Inoltre $\mu^\star(G) \leq \mu^\star(F) + \mu^\star(G \setminus F)$ da cui l'uguaglianza. Poiché sono tutti valori finiti, posso sottrarre $\mu^\star(F)$ da ambo i lati ottenendo la tesi. □

Definizione 1.6: Misurabilità secondo Lebesgue

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è **misurabile secondo Lebesgue** se $\forall \varepsilon > 0$ esistono un chiuso $F_\varepsilon \subseteq A$ e un aperto $G_\varepsilon \supseteq A$ tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$

Osservazione. La misura esterna $\mu^\star$ ristretta alla classe degli insiemi misurabili sarà una misura.

Teorema 1.8

La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è un'algebra.

Dimostrazione.

1. $\varnothing$ è misurabile, poiché $F = \varnothing$ e $G = \varnothing$ soddisfano la definizione.
2. Se A è misurabile, allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono $F_\varepsilon \subseteq A$ chiuso e $G_\varepsilon \supseteq A$ aperto tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Allora $F_\varepsilon^C \supseteq A^C$ aperto e $G_\varepsilon^C \subseteq A^C$ chiuso, e $\mu^\star(G_\varepsilon^C \setminus F_\varepsilon^C) = \mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$.
3. Se A, B sono misurabili, allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono $F_\varepsilon \subseteq A$ chiuso e $G_\varepsilon \supseteq A$ aperto tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, e $F'_\varepsilon \subseteq B$ chiuso e $G'_\varepsilon \supseteq B$ aperto tali che $\mu^\star(G'_\varepsilon \setminus F'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Allora

$$\text{chiuso } F_\varepsilon \cap F'_\varepsilon \subseteq A \cap B \subseteq G_\varepsilon \cap G'_\varepsilon \text{ aperto}$$

e

$$\mu^\star(G_\varepsilon \cap G'_\varepsilon \setminus F_\varepsilon \cap F'_\varepsilon) \leq \mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) + \mu^\star(G'_\varepsilon \setminus F'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

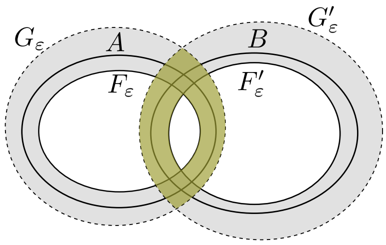


Figura 2: $G_\varepsilon \cap G'_\varepsilon \setminus F_\varepsilon \cap F'_\varepsilon \subseteq (G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \cup (G'_\varepsilon \setminus F'_\varepsilon)$

$\square$

Proposizione 1.9. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è limitato, allora A è misurabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F_\varepsilon \subseteq A$ chiuso tale che $\mu^\star(F_\varepsilon) > \mu^\star(A) - \varepsilon$*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Se A è misurabile, allora $\forall \varepsilon > 0$ esistono $F_\varepsilon \subseteq A$ chiuso e $G_\varepsilon \supseteq A$ aperto tali che $\mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Allora $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(F_\varepsilon) + \mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \leq \mu^\star(F_\varepsilon) + \varepsilon$

$\Longleftarrow$ Dico che esiste una successione I_n di intervalli aperti e di diametro ≤ 1 tali che $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |I_n| < \mu^\star(A) + \varepsilon$. Prendo come G_ε l'unione di tutti gli I_n tali che $I_n \cap A \neq \varnothing$. Allora G_ε è aperto limitato contenente A, questo perché avendo diametro minore o eguale a 1 l'unione si "distacca" da A al più di 1. Allora

$$\mu^\star(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu^\star(G_\varepsilon) - \mu^\star(F_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_n| - \mu^\star(F_\varepsilon) < \mu^\star(A) + \varepsilon - \mu^\star(F_\varepsilon) < 2\varepsilon$$

Dove nell'ultima diseguaglianza si è usata l'ipotesi.

$\square$

Teorema 1.10

La famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra e inoltre $\mu^\star$ è σ-additiva su $\mathcal{M}$. In altre parole, $\mu^\star$ ristretto a $\mathcal{M}$ è una misura.

Dimostrazione. Divideremo la dimostrazione in tre parti.

1. Sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_n \cap A_m = \varnothing$, $\forall n \neq m$ e $\exists I$ intervallo tale che $A_n \subseteq I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Allora $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq I$. Ora possiamo usare la proposizione 1.9 per dire che, dato $\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste un $F_n \subseteq A_n$ chiuso tale che $\mu^\star(F_n) > \mu^\star(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Inoltre $\mu^\star(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i)$ allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{i=1}^{k} \mu^\star(A_i) > \mu^\star(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ per il limite. Allora sia $F = \bigcup_{n=1}^{k} F_n$ chiuso. Allora possiamo dire che $\mu^\star(F) = \sum_{i=1}^{k} \mu^\star(F_i) > \sum_{i=1}^{k} \mu^\star(A_i) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu^\star(A) - \varepsilon$. Ora poiché abbiamo trovato un chiuso contenuto in A con la proprietà richiesta, allora A è misurabile, poiché è limitato (proposizione 1.9).

Ora se k è generico

$$\sum_{i=1}^{k} \mu^\star(A_i) < \sum_{i=1}^{k} \mu^\star(F_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu^\star\left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu^\star(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Da cui trovo che, per $\varepsilon \to 0$ e $k \to \infty$

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i) \geq \mu^\star(A)$$

dove la seconda uguaglianza è per la subadditività della misura esterna.

2. Sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ con $A_n \cap A_m = \varnothing$, $\forall n \neq m$. Di nuovo sia $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

   Reticoliamo $\mathbb{R}^N$ con intervalli $\{I_j\}$ tali che $I_i \cap I_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j = \mathbb{R}^N$. Ci interessiamo agli insiemi $B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap I_i)$. Allora i B_j sono misurabili per il punto 1, infatti $(A_i \cap I_j) \subseteq I_j$ e sono disgiunti a due a due. Ora notiamo che $B_j \cap B_i = \varnothing$ $\forall A j \neq i$. Inoltre $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$. Ora per $\varepsilon > 0$ fissato e $\forall j$ esistono F_j chiuso e G_j aperto tali che $F_j \subseteq B_j \subseteq G_j$ e $\mu^\star(G_j \setminus F_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$. A questo punto abbiamo

$$F := \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \subseteq A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j =: G$$

   È evidente che G è aperto. Inoltre F è chiuso, perché data una successione $\{x_n\}$ convergente in $\mathbb{R}^N$ e a valori in F. Poiché è convergente è limitata, e allora i suoi valori cadono in un numero finito di insiemi F_j. Poiché l'unione di quegli F_j è chiusa allora $x \in F$ è chiuso.

   Adesso prendiamo

$$G \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty}(G_j - F) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}(G_j - F_j)$$

   che ha misura $\mu^\star(G \setminus F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$ quindi A è misurabile.

   Ora vogliamo mostrare la σ-additività. Possiamo assumere che $\mu^\star(A_i) < +\infty$ per ogni i, altrimenti la tesi è banale. Ora supponiamo che $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i) = +\infty$, allora ne deduciamo che

$$\sum_{i=1}^{k} \mu^\star(A_i) \overset{\mathcal{M} \text{ è un'algebra}}{=} \mu^\star\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \mu^\star(A) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

   e quindi $\mu^\star(A) = +\infty$.

   Supponiamo infine che $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i)$ converga, allora poiché $\mu^\star(A_i)$ è minore o eguale a $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_i \cap I_j)$ abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(A_i \cap I_j) \overset{1.}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^\star(B_j)$$

   Ora analizziamo la ridotta

$$\sum_{j=1}^{n} \mu^\star(B_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(F_j) + \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(G_j \setminus F_j) \leq \mu^\star\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \mu^\star(A) + \varepsilon$$

Dove nella diseguaglianza centrale si è usata la proposizione 1.5. Mettendo tutto assieme e avendo $n \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$ otteniamo che $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i) \le \mu^\star(A)$ e naturalmente l'altra diseguaglianza è data dalla sub-additività.

3. Sia $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ e $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ e vogliamo provare che $A \in \mathcal{M}$.

   Costruisco un'altra successione $\{B_n\} \subseteq \mathcal{M}$ di insiemi a due a due disgiunti. Definisco $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \smallsetminus A_1$, $B_3 = A_3 \smallsetminus (A_1 \cup A_2)$, ecc. Sono misurabili perché sappiamo già che $\mathcal{M}$ è un'algebra. Ora poiché $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_j$, A è misurabile per il punto 2.

□

Quindi ora possiamo considerare lo spazio di misura di Lebesgue $\left(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}, \mu\right)$ con $\mathcal{M}$ gli insiemi misurabili secondo Lebesgue e $\mu = \mu^\star$ la misura esterna.

Teorema 1.11: Caratterizzazione degli insiemi misurabili

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile se e solo se A può essere rappresentato come

- Unione numerabile di chiusi e di un insieme trascurabile

oppure

- Intersezione numerabile di aperti meno un trascurabile

Dimostrazione. Gli intervalli sono misurabili, l'insieme vuoto è misurabile. Sia N un insieme trascurabile, allora N è misurabile. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ prendo $\varnothing =: F \subseteq N \subseteq G := \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ con I_i intervalli aperti e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(I_i) < \varepsilon$, a questo punto naturalmente quindi $\mu^\star(G \smallsetminus F) < \varepsilon$. Gli aperti sono misurabili, infatti se è limitato si scrive come unione numerabile di intervalli. Ora se A è un aperto qualunque $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A \cap (-n, n)^N\right)$ e quindi è misurabile. Inoltre tutti i chiusi sono misurabili in quanto complementare di aperti. Ne consegue che la σ-algebra $\mathcal{B}$ di Borel generata dalla famiglia τ degli aperti di $\mathbb{R}^n$ è contenuta in $\mathcal{M}$.

Ne consegue che se scrivo A come unione numerabile di chiusi e di un trascurabile allora A è misurabile. Stessa cosa se scrivo A come intersezione numerabile di aperti meno un trascurabile.

Per il viceversa, supponiamo A misurabile, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono chiuso F_n e aperto G_n con $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ e $\mu^\star(G_n \smallsetminus F_n) < \frac{1}{n}$. Ora considero $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e sia $N = A \smallsetminus F$. N è allora trascurabile perché $\mu^\star(N) = \mu^\star(A \smallsetminus F) \le \mu^\star(G_n \smallsetminus F) \le \mu^\star(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$ per ogni n quindi $\mu^\star(N) = 0$. In pratica quindi $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \cup N$ unione numerabile di chiusi e di un trascurabile. Il complementare di A quindi si può rappresentare come $A^C = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^C \cap N^C = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^C\right) \smallsetminus N$ ossia nel secondo modo. □

Proposizione 1.12. *Vale la seguente proprietà:*

$$\mu^\star(A) = \inf\{\mu(G) : G \text{ aperto }, G \supseteq A\} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Se inoltre $A \in \mathcal{M}$ allora

$$\mu(A) = \mu^\star(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ chiuso e limitato}, F \subseteq A\}$$

Dimostrazione. La prima è una conseguenza della rappresentabilità di un aperto tramite intervalli. Fissato ora $\varepsilon > 0$ e posto $A_n = A \cap (-n, n)^N$, per$A$ misurabile abbiamo

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Se $\mu(A) < +\infty$ esiste n tale che $\mu(A_n) > \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ e A_n contiene un chiuso F tale che $\mu(F) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}$. Se invece $\mu(A) = +\infty$ esiste n con $\mu(A_n) > \varepsilon$ e A_n contiene un chiuso F tale che $\mu(F) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2}$, pertanto $\mu(F) > \frac{\varepsilon}{2}$.

□

1.4 Insiemi Trascurabili

Si tratta di insiemi la cui misura esterna è nulla, vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.9. In $\mathbb{R}$ i punti sono trascurabili e le unioni numerabili di trascurabili è trascurabile per σ-additività. In particolare quindi $\mathbb{Q}$ è trascurabile in $\mathbb{R}$

La funzione di Dirichlet è un esempio di funzione che non è integrabile secondo Riemann, ma è integrabile secondo Lebesgue. Vedremo più avanti in dettaglio ma per ora notiamo che la funzione di Dirichlet è

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Allora $d = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$.

Esempio 1.10. In $\mathbb{R}^2$ segmenti e rette sono insiemi trascurabili. Quindi ad esempio l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$$

è trascurabile in $\mathbb{R}^2$ poiché unione numerabile di rette $x = q$ con $q \in \mathbb{Q}$

Esempio 1.11 (Insieme di Cantor)**.** L'insieme di Cantor è un trascurabile che ha la cardinalità del continuo. Si costruisce prendendo una successione di insiemi chiusi in $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

C_n è composto da 2^n intervallini ciascuno di lunghezza $\frac{1}{3}^n$ L'insieme di Cantor è definito come

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Allora C è chiuso perché ogni C_n è chiuso, e C è non vuoto perché ad esempio $0 \in C$.

C_n è una successione decrescenti di insiemi, di cui $\mu(C_0) = 1 < +\infty$. Allora per continuità della misura esterna

$$\mu(C) = \lim_{n \to \infty} \mu(C_n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 0$$

quindi C è trascurabile.

Ora vogliamo dimostrare che ha la cardinalità del continuo. Consideriamo di usare la base ternaria, quindi ogni numero in $[0, 1]$ può essere scritto come $0.c_1c_2c_3 \dots c_n \dots_3$ con $c_i \in \{0, 1, 2\}$ ed è equivalente a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$. Quindi ad

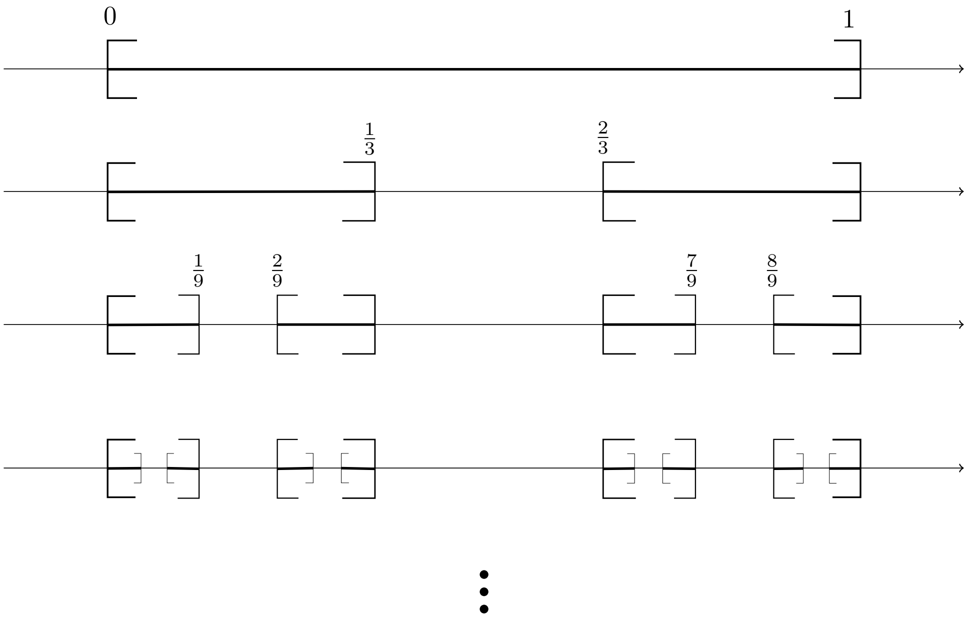


Figura 3: Successione la cui intersezione è l'insieme di Cantor

esempio il punto $\frac{1}{3}$ si può scrivere come 0.1 oppure $0.\overline{2}$ dove la barra indica la periodicità. Notare ora che i punti dell'insieme di Cantor si possono rappresentare in base ternaria utilizzando le sole cifre 0 e 2.

I punti dell'intervallo $[0,1]$ si possono rappresentare anche in base binaria, quindi $y \in [0,1]$ si può scrivere come $0.d_1 d_2 \ldots d_n \ldots_2$ dove $d_i \in \{0,1\}$ per ogni i e $y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n 2^{-n}$. Ad esempio $1 = 0.\overline{1}_2$.

Adesso possiamo quindi costruire una funzione suriettiva dall'insieme di Cantor ai punti di $[0,1]$ in questo modo:

$$x \in C \longmapsto y \in [0,1]$$
$$x = 0.c_1 c_2 \ldots c_n \ldots_3 \longmapsto y = 0.d_1 d_2 \ldots d_n \ldots_2$$
$$d_n = \frac{c_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ossia associamo a ogni punto dell'insieme di Cantor il numero reale ottenuto dividendo ogni sua cifra in base ternaria per due e leggendolo in base binaria. È una funzione suriettiva perché per ogni punto $y \in [0,1]$ possiamo ottenere un $x \in C$ moltiplicando per due ogni cifra e leggendo il numero in base ternaria. Notare che questa funzione non è iniettiva poiché, ad esempio, sia $\frac{1}{3} = 0.0\overline{2}_3$ che $\frac{2}{3} = 0.2_3$ hanno come immagine $\frac{1}{2} = 0.1_2 = 0.0\overline{1}_2$. Non è difficile comunque trovare una funzione iniettiva, ad esempio l'inclusione da C a $[0,1]$ è una funzione iniettiva e quindi abbiamo che C e $[0,1]$ hanno la stessa cardinalità.

1.5 Funzioni misurabili

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Definizione 1.7: Funzione misurabile

La funzione $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ si dice **misurabile** se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$$

La definizione verrà parzialmente motivata dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.13. *Ciascuna delle seguenti affermazioni implica le altre:*

i) $f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) $f^{-1}([\alpha,+\infty]) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii) $f^{-1}([-\infty,\alpha)) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $f^{-1}([-\infty,\alpha]) \in \mathcal{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Dimostriamo che $i) \implies ii) \implies iii) \implies iv) \implies i)$.

Scriviamo quindi

$$f^{-1}([\alpha,+\infty]) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \Omega : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

che è intersezione numerabile di insiemi misurabili (se vale la i)), quindi è misurabile.

Se ora vale la ii), allora

$$f^{-1}([-\infty,\alpha)) = \left(f^{-1}([\alpha,+\infty])\right)^C \in \mathcal{M}$$

per cui vale la iii). Analogamente alla prima implicazione, se vale la iii) allora

$$f^{-1}([-\infty,\alpha]) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \Omega : f(x) > \alpha + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$$

e quindi vale la iv). Infine se vale la iv) allora, analogamente alla seconda implicazione,

$$f^{-1}((\alpha,+\infty]) = \left(f^{-1}([-\infty,\alpha])\right)^C \in \mathcal{M}$$

e quindi vale la i). □

Grazie alla proposizione so che f è misurabile se e solo se le controimmagini di tutte le semirette sono misurabili. A questo punto però anche tutti i segmenti sono misurabili, infatti ad esempio $[a,b] = [a,+\infty] \cap [-\infty,b]$ quindi se le controimmagini di $[a,+\infty]$ e di $[-\infty,b]$ sono misurabili, allora anche la controimmagine di $[a,b]$ è misurabile, in quanto l'intersezione delle due. Ora avendo quindi che le controimmagini degli intervalli sono misurabili, abbiamo che anche le controimmagini dei borelliani sono misurabili, in quanto i borelliani sono unioni numerabili di intervalli.

Praticamente ogni funzione che possa venire in mente a chiunque è misurabile, e costruire una funzione non misurabile è un'operazione non banale e richiede l'assioma della scelta. Ora procediamo con alcune proprietà della classe delle funzioni misurabili.

Proposizione 1.14. *Siano f, g funzioni misurabili. Allora anche* $\max(f,g)$ *e* $\min(f,g)$ *sono misurabili.*

Dimostrazione.

$$\{x \in \Omega : \max(f,g)(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in \Omega : g(x) > \alpha\}$$

che è unione di insiemi misurabili, quindi è misurabile. Analogamente per il minimo con l'intersezione. □

Proposizione 1.15. *Sia f una funzione misurabile, allora anche $-f, f^+, f^-, |f|$ sono misurabili*

Dimostrazione. Per $-f$:

$$\{x \in \Omega : -f(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega : f(x) < -\alpha\}$$

che è misurabile per ipotesi.

Naturalmente anche la funzione 0 è misurabile, poiché la controimmagine delle semirette è $\varnothing$ oppure Ω che sono entrambi misurabili. Quindi anche $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = -\min(f, 0)$ sono misurabili per sopra e per la proposizione precedente.

Per $|f|$:

$$\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\} = \begin{cases} \{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in \Omega : f(x) < -\alpha\} & \alpha \geq 0 \\ \Omega & \alpha < 0 \end{cases}$$

□

Proposizione 1.16. *Se f_n è una successione di funzioni misurabili allora*

$$g(x) = \sup_n f_n(x), \quad h(x) = \inf_n f_n(x), \quad u(x) = \limsup_n f_n(x), \quad v(x) = \liminf_n f_n(x)$$

sono tutte misurabili

Corollario 1.16.1. *Se f_n converge puntualmente a f allora f è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $g(x) = \sup_n f_n(x)$, allora

$$\{x \in \Omega : g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) > \alpha\}$$

poiché significa che esiste almeno un n tale che $f_n(x) > \alpha$.

Sia $h(x) = \inf_n f_n(x)$, consideriamo

$$\{x \in \Omega : h(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) > \alpha\}$$

poiché significa che per ogni n vale $f_n(x) > \alpha$.

Per quanto riguarda $u(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x)$ e $v(x) = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k(x)$ si ha quindi che sono il sup e l'inf di successioni di funzioni misurabili per la prima parte della proposizione, quindi sono misurabili per la prima parte della proposizione.

Il corollario segue ovviamente poiché se la funzione converge allora il limite è ad esempio uguale al $\liminf$ □

Proposizione 1.17. *Siano f, g misurabili. Allora la somma $f + g$, se è ben definita*[1]*, è misurabile.*

Dimostrazione.

$$\{x \in \Omega : f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\{x \in \Omega : f(x) > \alpha - q\} \cap \{x \in \Omega : g(x) > q\}\big)$$

che è unione numerabile di insiemi misurabili, quindi è misurabile. L'eguaglianza è giustificata dal fatto che se $f(x) + g(x) > \alpha$ e $|g(x)| < \infty$ allora ad esempio $f(x) > \alpha - g(x) > \alpha - q$ per qualche $q < g(x)$ razionale, che esiste perché sicuramente tra $\alpha - f(x)$ e $g(x)$ esiste un razionale per densità di $\mathbb{Q}$, mentre se $f(x) = +\infty$ allora sicuramente $f(x) > \alpha - q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ quindi basta sceglierne uno tale che $g(x) > q$ che è fattibile sempre poiché per ipotesi $g(x) > -\infty$. L'altra implicazione invece è data dal fatto che se, per qualche q, $f(x) > \alpha - q$ e $q < g(x)$ allora

[1] ossia quando non succede mai che una delle due faccia $+\infty$ e l'altra $-\infty$

$f(x) > \alpha - g(x)$ da cui $x \in (f+g)^{-1}((\alpha, +\infty])$. Infine se invece $g(x) = +\infty$ allora qualsiasi x è in $(f+g)^{-1}((\alpha, +\infty])$, ed esiste sempre un q tale che $f(x) > \alpha - q$ poiché $f(x) > -\infty$. È facile similmente notare che se $f(x)$ oppure $g(x)$ sono eguali a $-\infty$ allora entrambi gli insiemi sono $\varnothing$. $\square$

Proposizione 1.18. *Siano f, g misurabili. Allora $f \cdot g$ è misurabile, purché l'operazione sia ben definita.*

Proposizione 1.19. *Iniziamo provando che se h è misurabile allora h^2 è misurabile. Questo perché $h^2(x) > \alpha \iff |h(x)| > \sqrt{\alpha}$ se α è positivo (altrimenti la controimmagine è banalmente misurabile). Ma allora chiedere che h^2 sia misurabile è equivalente a chiedere che lo sia $|h|$.*

Inoltre se h è misurabile, allora ch, con $c \in \mathbb{R}$ è misurabile in quanto $c \cdot h(x) > \alpha \iff h(x) > \frac{\alpha}{c}$.

Notare adesso che $\dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$.

Proposizione 1.20. *Siano f, g misurabili. Allora $\frac{f}{g}$ è misurabile, purché l'operazione sia ben definita.*

Dimostrazione. Basta controllare che se h è misurabile e $h \neq 0$ allora anche $\frac{1}{h}$ è misurabile, poi usare la proposizione precedente. Infatti $\frac{1}{h(x)} > \alpha$ se e solo se

- $0 < h(x) < \frac{1}{\alpha}$ se $\alpha > 0$
- $h(x) < \frac{1}{\alpha}$ o $h(x) > 0$ se $\alpha < 0$
- $h(x) > 0$ se $\alpha = 0$

In tutti i tre e casi gli x che soddisfano tale requisito formano per ipotesi un insieme misurabile. $\square$

Definizione 1.8: Funzione semplice

Consideriamo uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Le **funzioni semplici** sono le funzioni che assumono un numero finito di valori reali. Quindi $s : \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice se si può scrivere come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche. Quindi abbiamo

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$$

dove $E_1, \dots, E_n$ sono sottoinsiemi di Ω e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.
Inoltre la funzione è semplice misurabile se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}$.

Esiste sempre una rappresentazione in tale modo di s dove i coefficienti $c_1, \dots, c_n$ sono diversi tra loro e gli insiemi $E_1, \dots, E_n$ sono a due a due disgiunti. Queste funzioni sono particolarmente utili nell'approssimare funzioni. Più precisamente

Proposizione 1.21. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Allora esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tali che $s_n \to f$ puntualmente. Se f è misurabile, allora anche le s_n possono essere scelte tutte misurabili. Inoltre se $f \geq 0$ ($f \leq 0$) in Ω, allora la successione $\{s_n\}$ può essere presa non decrescente (non crescente).*

Dimostrazione. Cominciamo da f non negativa. Per n fissato scegliamo gli insiemi in base ai valori di f. Quindi scegliamo $i = 1, \dots, n2^n$ e prendiamo

$$E_{n,i} = \left\{ x \in \Omega : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, \dots, n2^n\}$$

Inoltre sia
$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\}$$

Ora possiamo scrivere

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x)$$

Ora abbiamo chiaramente per costruzione che $s_n \leq f$. Vogliamo mostrare che per ogni $x \in \Omega$ abbiamo $s_n(x) \to f(x)$.

- Se $f(x) = +\infty$ allora $s_n(x) = n \to +\infty$
- Se $f(x) = 0$ allora $s_n(x) = 0 \to 0$
- Se $n \leq f(x) < n+1$ allora $|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$

È chiaro che se f è misurabile allora ogni s_n è misurabile, gli insiemi scelti sono controimmagini di segmenti e una retta.

Ora dobbiamo controllare che la successione s_n che abbiamo costruito sia crescente. Infatti passando da s_n a s_{n+1} abbiamo un intervallo in più $[n, n+1)$, inoltre se $f(x) < n$ allora $s_{n+1}(x) = s_n(x)$ oppure $s_{n+1}(x) = s_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}}$. In conclusione quindi la successione è non decrescente.

Consideriamo ora f di segno qualsiasi. Abbiamo $f = f^+ - f^-$ e osservo che f^+ e f^- sono non negative. Costruisco due successioni di funzioni semplici s_n^+ e s_n^- che convergono rispettivamente a f^+ e f^- e osservo che $s_n = s_n^+ - s_n^-$ è ancora una successione di funzioni semplici che converge a f. □

Osservazione. Se f è limitata allora la successione s_n converge uniformemente a f, infatti se $f = f^+ - f^-$ e sia f^+ che f^- sono limitate, per cui succede che $|f^+ - s_n^+| \leq \frac{1}{2^n}$ definitivamente e analogamente per f^-.

Lemma 1.22. *Sia ora $\Omega = \mathbb{R}^N$ e sia $\mathcal{L}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Allora valgono tutte le considerazioni della proposizione precedente e inoltre la successione $\{s_n\}$ può essere scelta in modo che tutte le s_n siano nulle al di fuori di un compatto*

Dimostrazione. Posso considerare una successione K_n di compatti che invade tutto $\mathbb{R}^N$ (esempio le palle, gli ipercubi, ecc) e operiamo come prima ma con una modifica (caso $f \geq 0$):
$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i} \cap K_n}(x) + n\chi_{F_n \cap K_n}(x)$$
□

1.6 Integrale di Lebesgue

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Cominciamo dalle funzioni semplici misurabili non negative, ossia

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \quad c_i \geq 0 \; E_i \in \mathcal{M} \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Allora definiamo un *integrale elementare* su $E \in \mathcal{M}$

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

Dove per convenzione $c_i \mu(E \cap E_i) = 0$ se $c_i = 0$ e $\mu(E \cap E_i) = +\infty$.

Esempio 1.12. In $\mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue, se prendo $s = \chi_{[0,+\infty)}$, allora $I_{\mathbb{R}}(s) = \mu([0,+\infty)) = +\infty$

Definizione 1.9: Integrale di Lebesgue

Sia $f : \Omega \to [0,+\infty]$ misurabile e non negativa. Allora per ogni $E \in \mathcal{M}$ definiamo

$$\int_E f\,d\mu = \sup\{I_E(s) : s \text{ semplice misurabile }, 0 \le s \le f \text{ in } E\ \}$$

Se ora f è misurabile e di segno qualunque allora scrivendo $f = f^+ - f^-$ che noto sono misurabili e non negative, quindi, se almeno uno tra $\int_E f^+ d\mu$ e $\int_E f^- d\mu$ è finito definiamo

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu$$

Se entrambi f^+ e f^- hanno integrale finito su E allora dico che f è **integrabile** su E e scrivo $f \in L^1(E)$.

Intanto quell'insieme non è vuoto, poiché la funzione $0 \le f$ è una funzione semplice. Inoltre il sup può essere sia finito che $+\infty$. Se f è una funzione semplice, allora $\int_E f\,d\mu = I_E(f)$, infatti $f \le f$ è semplice e per ogni s misurabile e tale che $0 \le s \le f$ in E avrò che $I_E(s) \le I_E(f)$.

NB: *Sommabile* è un sinonimo di *integrabile* e capiterà di usarlo.

Proprietà dell'integrale

1. Se $f \in L^1(E)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f \in L^1(E)$ e $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

   Dimostrazione. Sia f misurabile e non negativa, sia $\alpha > 0$. Allora $\forall s$ semplice con $0 \le s \le f$ in E si ha che $I_E(\alpha s) = \alpha I_E(s)$ e che $0 \le \alpha s \le \alpha f$; procedendo con il sup il lato sinistro diventa $\alpha \int_E f d\mu$ e il lato destro notiamo che ogni αs è una funzione semplice u che rispetta la definizione di integrale per αf, quindi procedendo con il sup otteniamo la proprietà. Similmente otteniamo

   Ora possiamo estendere a f misurabile e $\alpha \in \mathbb{R}$ scrivendo $f = f^+ - f^-$ e osservando che $\alpha f = \text{sign}(\alpha)|\alpha| f^+ - \text{sign}(\alpha)|\alpha| f^-$ dove se $\alpha < 0$ allora $-\text{sign}(\alpha) f^-$ e $-\text{sign}(\alpha) f^+$ sono non negative e misurabili. □

2. Se f, g in $L^1(E)$ e $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in E$ allora $\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu$

   Dimostrazione. Sia $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$. Allora naturalmente $f^+ \le g^+$ perché la funzione $x \mapsto x^+$ è non decrescente e $f^- \ge g^-$ perché la funzione $x \mapsto x^-$ è non crescente. Necessariamente ora $\int_E f^+ d\mu \le \int_E g^+ d\mu$ per definizione col sup e similmente $\int_E g^- d\mu \le \int_E f^- d\mu$ e infine dalle due diseguaglianze si ottiene quella richiesta. □

3. Se $\mu(E) < +\infty$, f è misurabile, e esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \le f(x) \le b$ per ogni $x \in E$ allora $f \in L^1(E)$ e $a\mu(E) \le \int_E f d\mu \le b\mu(E)$

   Dimostrazione. $f = f^+ - f^-$ e abbiamo che $0 \le a^+ \le f^+ \le b^+$ e $a^- \ge f^- \ge b^- \ge 0$. Le funzioni che valgono a^+, b^+, a^-, b^- su E sono funzioni semplici misurabili con integrale dato da $a^+\mu(E), b^+\mu(E), a^-\mu(E), b^-\mu(E)$ rispettivamente. Ora per definizione con il sup abbiamo che $\int_E f^+ d\mu \ge a^+\mu(E)$ e $\int_E f^- d\mu \ge b^-\mu(E)$. Sempre pensando alla definizione col sup notiamo che se s è una funzione semplice misurabile tale che $0 \le s \le f^+$ allora $s \le b^+$ e quindi necessariamente $\int_E f^+ d\mu \le \int_E b^+ d\mu = I_E(b^+) = b^+\mu(E)$. Similmente si trova anche $\int_E f^- d\mu \le a^-\mu(E)$. Il risultato segue. □

4. Se $f \in L^1(E)$, $A \in \mathcal{M}$ e $A \subseteq E$ allora $f \in L^1(A)$

   Dimostrazione. Abbiamo che $\int_E f^+ d\mu$ e $\int_E f^- d\mu$ sono entrambi finiti e

   $$\int_A f^+ d\mu = \int_E f^+ \chi_A d\mu \leq \int_E f^+ d\mu$$

   Similmente per f^-. □

5. Se $\mu(E) = 0$ e f è misurabile allora $f \in L^1(E)$ e $\int_E f d\mu = 0$

   Dimostrazione. Consideriamo la definizione col sup di $\int_E f^+ d\mu$ e allora per ogni s semplice misurabile tale che $0 \leq s \leq f^+$ abbiamo che
   $I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_1 \mu(E \cap E_i) = 0$ □

Teorema 1.23: Teorema di generazione di misure

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : \Omega - > [0, +\infty]$ una funzione misurabile e non negativa. Allora la funzione di insieme

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

è una misura

Dimostrazione. 1. $\nu(\varnothing) = \int_\varnothing f d\mu = 0$

2. Siano $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ con $A_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti, vogliamo provare che

   $$\nu(A) = \int_A f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$$

   Innanzitutto assumeremo che tutti i $\nu(A_n) < +\infty$ per ogni n, altrimenti naturalmente $\nu(A) = +\infty$ poiché $A_n \subseteq A$. Se $f = s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ semplice misurabile non negativa allora

   $$\int_A s d\mu = I_A(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k \cap E_i)$$

   Dove si è usata la σ-additività di μ. Ora scambiando la somma e la serie, che possiamo fare perché se sono tutte convergenti allora ok, se invece anche solo una di quelle con $c_i > 0$ dovesse divergere allora necessariamente l'integrale originale è $+\infty$, ma anche la serie ottenuta scambiando somma e serie diverge, poiché ha termine generale maggiore di quello della serie divergente.

   $$I_A(s) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_k \cap E_i) = \sum_{k=1}^\infty I_{A_k}(s) = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} s d\mu$$

   Ora se f è misurabile e non negativa e $0 \leq s \leq f$ in A abbiamo che

   $$I_A(s) = \sum_{k=1}^\infty I_{A_k}(s) \leq \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} f d\mu$$

Ora procedendo con il sup otteniamo la diseguaglianza

$$\int_A f d\mu \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$$

Ora vogliamo trovare l'altra diseguaglianza. Per ogni $\varepsilon > 0$ e $k = 1, \dots, m$ esistono $s_1, \dots, s_m$ semplici, misurabili e $0 \le s_i \le f$ in A_i tali che

$$\int_{A_i} f d\mu \le \int_{A_i} s_i d\mu + \frac{\varepsilon}{m}$$

Osservo ora la funzione $s(x) = s_i(x)$ se $x \in A_i$ per $i = 1, \dots, m$. Allora s è semplice, misurabile e $0 \le s \le f$ in $\bigcup_{i=1}^m A_i$. A questo punto

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} f d\mu - m\frac{\varepsilon}{m} \le \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} s_i d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^m A_i} f d\mu \le \int_A f d\mu$$

Da cui troviamo che

$$\varepsilon + \int_A f d\mu \ge \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i} f d\mu \quad \forall \varepsilon > 0\,, \forall m \in \mathbb{N}$$

e con $\varepsilon \to 0$ e $m \to +\infty$ otteniamo l'altra diseguaglianza.

□

Corollario 1.23.1 (σ-additività dell'integrale)**.** *Se $f \in L^1(A)$ e $\{A_n\}$ è una successione di insiemi disgiunti a due a due, con $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, allora $f \in L^1(A_n)$ per ogni n e*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

Dimostrazione. Sia $f = f^+ - f^-$ e per f^+ e f^- vale il teorema di generazione di misure. □

Corollario 1.23.2. *Se $f, g \in L^1(\Omega)$ e $f = g$ quasi ovunque in Ω, allora*

$$\forall E \in \mathcal{M} \qquad \int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

Dimostrazione. Se $f = g$ quasi ovunque allora esiste un insieme $F \in \mathcal{M}$ con $\mu(F) = 0$ tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \Omega \setminus F$. Allora abbiamo

$$\int_E f d\mu = \int_{E\cap F} f d\mu + \int_{E\setminus F} f d\mu = \int_{E\cap F} g d\mu + \int_{E\setminus F} g d\mu = \int_E g d\mu$$

Dove i due integrali su $E \cap F$ sono uguali in quanto entrambi integrali su un trascurabile quindi uguali a 0 □

Proposizione 1.24. *Sia $f \in L^1(E)$. Allora $|f| \in L^1(E)$ e*

$$\left| \int_E f d\mu \right| \le \int_E |f| d\mu$$

Dimostrazione. $|f|$ è misurabile perché f è misurabile. Ora sia $A = \{x \in E : f(x) \ge 0\}$ e $B = \{x \in E : f(x) < 0\}$ sono entrambi misurabili per la misurabilità di f. Allora abbiamo che

$$\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty$$

dove gli ultimi due integrali sono finiti per ipotesi.

La diseguaglianza è ovvia, infatti

$$\left|\int_E f d\mu\right| = \left|\int_A f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu\right| \leq \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu = \int_E |f| d\mu$$

$\square$

Teorema 1.25: CNES per l'integrabilità

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ misurabile. Allora f è integrabile se e solo se esiste g integrabile tale che $|f| \leq g$ quasi ovunque.

$$f \in L^1(\Omega) \iff \exists g \in L^1(\Omega) \quad |f| \leq g \quad \text{q.o.}$$

Nota. In questi casi si usa dire che f è "dominata" da g. L'enunciato precedente quindi si può anche dire f è integrabile se e solo se è misurabile e dominata da una funzione integrabile.

Dimostrazione. Se f è integrabile, allora è misurabile e dominata da $|f|$. Viceversa, se $|f| \leq g$ in Ω allora $f^+ < g$ e $f^- < g$. Allora $f^+, f^- \in L^1(\Omega)$ e dunque $f \in L^1(\Omega)$ $\square$

Corollario 1.25.1. *In particolare se $|f|$ è integrabile e f è misurabile allora f è integrabile.*

Con questo risultato l'integrale di Lebesgue si distingue molto dall'integrale di Riemann. Ad esempio la funzione definita su $[0, 1]$ come 1 sui razionali e -1 su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è integrabile secondo Riemann ma lo è secondo Lebesgue perché $|f| = 1$ è integrabile.

Integrale di Riemann L'integrale di Lebesgue che abbiamo introdotto è un'estensione dell'integrale di Riemann, cioè *ogni funzione R-integrabile è anche L-integrabile e i due integrali coincidono.* Infatti una funzione f si dice R-integrabile in E se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una somma inferiore S e una somma superiore T tali che $T - S < \varepsilon$. Per ogni somma (superiore e inferiore) io posso considerare la funzione a scala che su ogni elemento di suddivisione (intervallino, quadratino, ecc) prende il valore specifico che appare nella somma.

Osservazione. Le funzioni a scala sono particolari funzioni semplici, anche se la "filosofia" è diversa: per le funzioni a scala si divide il dominio, mentre per le funzioni semplici si guardano i valori assunti dalla funzione e poi si costruiscono gli insiemi su cui la funzione assume quei valori.

ora diciamo

$$I_R = \sup_{\substack{s \text{ a scala} \\ s \leq f}} \int_E s dx = \inf_{\substack{S \text{ a scala} \\ t \geq f}} \int_E t dx$$

Invece f è L-integrabile se $f^+, f^- \in L^1(E)$. Se f è R-integrabile allora anche f^+ e f^- lo sono. Basta quindi mostrare che se$g$ è non-negativa e R-integrabile allora è anche L-integrabile e i due integrali coincidono. Esiste quindi $I_R(g) = \int_E g dx$ integrale di Riemann. Per g tale esiste anche

$$I_L(g) = \sup\left\{\int_E s d\mu : s \text{ semplice, misurabile, e } 0 \leq s \leq g \text{ in E}\right\}$$

Dobbiamo quindi provare che $I_R(g) = I_L(g)$. A tale scopo possiamo controllare che sia $I_R(g) < I_R(g)$ che $I_R(g) < I_L(g)$ portano a contraddizioni. Nel primo caso abbiamo $I_R(g) < I_L(g)$ quindi esiste una funzione a scala t tale che $t \geq g$ in E e $I_R(g) \leq \int_E tdx < I_L(g)$. Per tale funzione a scala, essendo t anche semplice abbiamo che $\int_E tdx = \int_E td\mu$ ma allora ogni s nell'insieme il cui sup è $I_L(g)$ verifica $0 \leq s \leq t$ e quindi

$$\int_E sd\mu \leq \int_E td\mu < I_L(g)$$

e quindi $\int_E td\mu$ è un maggiorante dell'insieme, per cui $I_L(g)$ non ne può essere il sup.

Supponiamo ora invece che $I_R(g) > I_L(g)$, allora esiste una funzione a scala s tale che $s \leq g$ in E e $I_L(g) < \int_E sd\mu \leq I_R(g)$. Ma allora s appartiene all'insieme il cui sup è $I_L(g)$ e ha un integrale più grande del sup stesso.

Ne consegue necessariamente che $I_L(g) = I_R(g)$

1.7 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Teorema 1.26: Beppo Levi - versione base

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione non decrescente di funzioni misurabili e non negative su Ω. Posto $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \Omega$, allora $\forall E \in \mathcal{M}$ si ha

$$\int_E fd\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Sia $\alpha := \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$, dove $\alpha \in [0, +\infty]$. Abbiamo necessariamente che

$$\int_E fd\mu \geq \alpha = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Vogliamo dimostrare l'altra diseguaglianza. Prendo s semplice, misurabile e tale che $0 \leq s \leq f$ in E. Sia poi $\delta \in (0, 1)$. Siano

$$E_n := \{x \in E : f_n(x) \geq \delta s(x)\}$$

Se x è tale che $f(x) < +\infty$ allora sicuramente esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $f_n(x) \geq \delta s(x)$ per ogni $n \geq \overline{n}$. Se invece $f(x) = +\infty$ allora poiché s assume solo valori finiti vale lo stesso senza bisogno di ricorrere all'uso del δ.

Osservo quindi che $E_n \subseteq E_{n+1}$ e che $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Quindi abbiamo che

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \delta \int_{E_n} sd\mu$$

Per $n \to +\infty$ otteniamo quindi

$$\alpha \geq \delta \int_E sd\mu \quad \forall \delta \in (0, 1)$$

Per definizione di α e per continuità della misura data da s. Ora poiché vale per ogni $\delta in (0, 1)$ deve valere anche per $\delta = 1$. Otteniamo quindi

$$\alpha \geq \int_E sd\mu \quad \forall s \text{ semplice, misurabile e } 0 \leq s \leq f \text{ in } E$$

Ora procedendo con il sup otteniamo la diseguaglianza desiderata. □

Lemma 1.27: Lemma di Fatou - versione base

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili e non negative su Ω. Allora, per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Sia $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Allora ogni g_n è non negativa e di funzioni misurabili, inoltre $0 \leq g_n \leq f_n$ e $g_n \leq g_{n+1}$. Quindi g_n è una successione non decrescente e per il teorema di Beppo Levi abbiamo che

$$\int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu$$

Ora poiché $g_n \leq f_n$ per ogni n, e poiché $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sup_{n\in N} g_n(x) =$
$= \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dove l'ultima diseguaglianza è data dal fatto che $\lim = \liminf$ se il limite esiste e il $\liminf$ conserva le diseguaglianze di successioni. □

Proposizione 1.28 (Linearità dell'integrale di Lebesgue)**.** *Se $f_1, f_2 \in L^1(E)$ allora $f = f_1 + f_2 \in L^1(E)$ e inoltre*

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu$$

Dimostrazione. Siano u, v misurabili e non negative. Posto $w = u + v$ si ha

$$\int_E w d\mu = \int_E u d\mu + \int_v d\mu \tag{1}$$

Infatti esistono due successioni s_n e t_n di funzioni semplici tali che $s_n \to u$ e $t_n \to v$ puntualmente e sia $\{s_n\}$ che $\{t_n\}$ sono crescenti. Definiamo $h_n := s_n + t_n$ ottenendo ancora una successione crescente di funzioni semplici misurabili non negative. Notiamo che

$$\int_E h_n d\mu = \int_E s_n d\mu + \int_E t_n d\mu$$

perché sono funzioni semplici. Ora portiamo al limite e applichiamo Beppo Levi, ossia 1.26 ottenendo (1).

Ora se siano f_1, f_2 integrabili, quindi misurabili. Inoltre $|f_1|, |f_2| \in L^1(E)$. Poiché $|f| = |f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$ che è integrabile perché ricade nel caso precedente, anche $|f|$ è integrabile e quindi f, per la CNES 1.25. Sappiamo che

$$f^+ - f^- = f_1^+ - f_1^- + f_2^+ - f_2^- \iff f^+ + f_1^- + f_2^- = f_1^+ + f_2^+ + f^-$$

che è un uguaglianza tra due funzioni somme di funzioni misurabili non negative, per cui posso applicare la prima parte, ottenendo

$$\int_E f^+ d\mu + \int_E f_1^- d\mu + \int_E f_2^- d\mu = \int_E f_1^+ d\mu + \int_E f_2^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$$

da cui, riordinando i termini otteniamo la tesi. □

Ricordando il lemma di Fatou 1.27, avevamo che la diseguaglianza è spesso un'uguaglianza. In particolare ovviamente ogni volta che la successione f_n è crescente abbiamo un uguale (Beppo Levi 1.26) e i $\liminf$ sono dei lim. Ci sono però anche casi in cui vale la diseguaglianza stretta.

Esempio 1.13. Sia $\Omega = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue. Sia $f_n(x) = x\chi_{[-n,n]}$. Allora $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ e $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = 2n$ otteniamo quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = +\infty = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

Confermando Beppo Levi

Esempio 1.14. Sia $\Omega = \mathbb{R}$ con la misura di Lebesgue. Sia $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Allora $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty$ otteniamo quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty$$

Una variante è $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ per cui

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = 0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = 1$$

Se ho una funzione integrabile su E, questa può prendere i valori $+\infty$ e $-\infty$? Sì, ma solo in un sottoinsieme trascurabile. In caso contrario la funzione non sarebbe integrabile perché f^+ oppure f^- sarebbero non limitate

Lemma 1.29 (Lemma di Fatou - versione estesa)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su Ω. Allora*

1. *Se esiste g integrabile su E tale che $g \leq f_n$ su E allora*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

2. *Se esiste h integrabile in E tale che $f_n \leq h$ su E allora*

$$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione parte 1. Poniamo $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x)$ per $x \in E$. Possiamo considerare la successione $u_n(x) = f_n(x) - g(x)$ che verifica le ipotesi di Fatou base 1.27 in E e allora

$$\liminf_{n\to\infty} u_n(x) = f(x) - g(x) \implies \int_E (f-g)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n - g)d\mu$$

usando la linearità dell'integrale abbiamo

$$\int_E f d\mu - \underbrace{\int_E g d\mu}_{\text{finito}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E f_n d\mu - \underbrace{\int_E g d\mu}_{\text{finito}} \right) = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E g d\mu$$

da cui otteniamo la tesi. $\square$

Dimostrazione parte 2. La successione $v_n = -f_n$ verifica $v_n \geq -h$ in E dove $-h$ è una funzione integrabile. Allora possiamo applicare la parte 1 a v_n ottenendo

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} v_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E v_n d\mu$$

poiché $\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\limsup_{n\to\infty} f_n$ segue che

$$\int_E -\limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \leq -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \iff \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

□

Lemma 1.30: Lemma di Fatou - definitivo

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni integrabili in E tali che $\{\int_E f_n d\mu\}$ sia limitata. Allora

1. Se esiste $g \in L^1(E)$ tale che $g \leq f_n$ in Ω per ogni n, allora $\liminf_{n\to\infty} f_n$ è integrabile in E e
$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$
2. Se esiste $h \in L^1(E)$ tale che $f_n \leq h$ in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $\limsup_{n\to\infty} f_n$ è integrabile in E e
$$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Segue semplicemente da Fatou esteso 1.29, e il liminf è integrabile perché

$$-\infty < \int_E g d\mu \leq \int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu < +\infty$$

dove le prime diseguaglianze sono per integrabilità di g e $g \leq f_n$ e l'ultima perché la successione degli integrali è limitata.

Similmente per il caso 2. □

Teorema 1.31: Beppo Levi - seconda versione

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $\{f_n\}$ una successione monotona di funzioni integrabili in $E \in \mathcal{M}$ tali che la successione degli integrali $\{\int_E f_n d\mu\}$ sia limitata. Allora posto

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$$

si ha che $f \in L^1(E)$ e inoltre

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Osservazione. Si potrebbe estendere l'enunciato al caso di una successione che sia monotona solo quasi ovunque, cioè che esista $N \subseteq \Omega$ trascurabile tale che $f_n(x) \lesseqgtr f_{n+1}(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \Omega \setminus N$

Dimostrazione. Assumiamo f_n una successione decrescente. Quindi $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots$. Tutte le f_n sono integrabili e inoltre $f \leq f_n \leq f_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e f_1 è integrabile. Allora $f = \limsup_{n\to\infty} f_n$ e dunque è integrabile per la parte 2 del lemma di Fatou 1.30. Ora possiamo applicare la parte 1 del lemma di Fatou 1.30 ottenendo

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

poiché $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n = f$ segue la tesi. □

Corollario 1.31.1 (Beppo Levi per le serie)**.** *Sia f_n una successione di funzioni misurabili e non negative. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a una funzione $s : \Omega \to [0, +\infty]$ tale che*

$$\int_E s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

In particolare se la serie degli integrali converge allora $s \in L^1(E)$

Dimostrazione. Si consideri la successione s_n delle ridotte, questa costituisce una successione crescente di funzioni misurabili e non negative e si può quindi applicare Beppo Levi base 1.26 ottenendo la tesi. Se poi la serie degli integrali converge allora la successione degli integrali delle ridotte è limitata e si può applicare Beppo Levi 1.31 □

Teorema 1.32: Convergenza Dominata di Legesgue

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili tale che $f_n \to f$ puntualmente. Inoltre sia g una funzione integrabile in $E \in \mathcal{M}$ tale che

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora $f \in L^1(E)$ e inoltre

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Dimostrazione. Per poter applicare il lemma di Fatou abbiamo bisogno che f_n siano integrabili questo è vero perché sappiamo che $|f_n| \leq g$ e dunque $f_n \in L^1(E)$ per la CNES 1.25.

Ora per sappiamo che

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$$

possiamo allora applicare Fatou 1.30 che ci dice che $f = \liminf_{n\to\infty} f_n =$
$= \limsup_{n\to\infty} f_n$ è integrabile in E e inoltre

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

ma poiché $\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = f$ otteniamo la tesi. □

Notare come non abbiamo mai richiesto la convergenza uniforme, cosa che invece era essenziale per lo stesso risultato nell'integrale di Riemann

Nota. La convergenza puntuale, l'integrabilità di f_n e la limitatezza della successioni $\{f_n\}$ non bastano per passare al limite sotto il segno di integrale. Basti pensare all'esempio 1.14

Osservazione. Come nel teorema di Beppo Levi 1.31 possiamo estendere il teorema della convergenza dominata rilassando le ipotesi $f_n \to f$ puntualmente a $f_n \to f$ q.o. e $|f_n| \leq g$ q.o.

Funzioni $\frac{1}{x^\alpha}$ Consideriamo le funzioni $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, con $\alpha > 0$ sia su $(0, 1)$ che in $(1, +\infty)$. Queste funzioni sono non limitate oppure hanno dominio non limitato, e possiamo estendere Riemann per integrarle in senso improprio in alcuni casi. In particolare

- $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $(0, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$
- $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$

dove l'integrale in senso improprio è definito come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Se io ora vado a considerare le funzioni

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } \varepsilon \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < \varepsilon \end{cases}$$

allora la famiglia di funzioni $\{f_\varepsilon\}$ risulta monotona rispetto a $\varepsilon \to 0^p$ ossia $\forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ con $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ si ha che

$$f_{\varepsilon_1}(x) \geq f_{\varepsilon_2}(x) \quad \forall x \in (0, 1)$$

se ora passo al limite per $\varepsilon \to 0^+$ per il teorema di Beppo Levi concludo che la funzione limite $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è L-integrabile se e solo se $\alpha < 1$.

Queste informazioni sono molto utili quando dobbiamo valutare l'integrabilità di una funzione. Ad esempio data una qualunque funzione misurabile $f(x)$ definita in $(1, +\infty)$ tale per cui esistano $C > 0$ e $\alpha > 1$ tali che $|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha}$ per ogni $x \in (1, +\infty)$ allora questa è integrabile. D'altro canto se $g(x)$ è una funzione su $(1, +\infty)$ tale che $g(x) \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$ per ogni $x > \overline{x}$ allora necessariamente g non è integrabile.

Esempio 1.15. Consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ in $2, +\infty$. Sappiamo che $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ ossia $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{x}$ tale che $\forall x \geq \overline{x}$ si ha che $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon$ ossia $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{\varepsilon \sqrt{x}}$. Quindi g non è L-integrabile in $(1, +\infty)$.

Ora consideriamo la funzione g su $(1, 2)$. Sappiamo che $\ln x \sim x - 1$ per $x \to 1^+$. Ma sappiamo che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è integrabile perché $\frac{1}{x-1}$ non è L-integrabile in $(1, 2)$

Esercizio 1.1

Studiare l'integrabilità della funzione

$$f_\alpha(x) = |\log x|^\alpha \quad x \in (0, 1)$$

quindi quand'è che $f_\alpha \in L^1(0, 1)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

- se $\alpha = 0$ è chiaramente $f_0 = 1$ integrabile
- se $\alpha > 0$ dobbiamo studiare il comportamento vicino a 0. Vogliamo confrontare la funzione con $\frac{1}{x^\beta}$ che sappiamo essere integrabile per $\beta \in (0, 1)$.

Abbiamo quindi ad esempio, per $\beta = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln x|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{(-\ln x)^\alpha}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{-\alpha(-\ln x)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = 2\alpha\frac{(-\ln x)^{\alpha-1}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

procedendo con l'Hôpital finché l'esponente non diventa negativo otteniamo che il limite non è più una forma indeterminata. Quindi otteniamo che il limite è 0. Abbiamo dunque che $\sqrt{x}|\ln x|^\alpha$ è limitata in $(0,1)$ e quindi $\exists C > 0$ tale che

$$|\ln x|^\alpha \leq \frac{C}{\sqrt{x}} \text{ che è integrabile } \quad \forall x \in (0,1)$$

Quindi $f_\alpha \in L^1(0,1)$ per ogni $\alpha > 0$.

– se $\alpha < 0$ Sia $\alpha = -\gamma$, con $\gamma > 0$. Abbiamo dunque

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{|\ln x|^\gamma} \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

ora poiché $\ln x \sim x - 1$ per $x \to 1$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{|x-1|^\gamma}$$

che è integrabile per $\gamma < 1$. Quindi $f_\alpha \in L^1(0,1) \iff \alpha > -1$.

Osservazione. Ci sono funzioni integrabili in senso improprio che non L-integrabili. Il prossimo esempio ne è un esempio (scusate il gioco di parole)

Esempio 1.16. Sia $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ in $[\frac{\pi}{2}, +\infty]$. Allora

1. f è integrabile in senso improprio:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\cos(x)}{x}dx = \frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{R} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\sin x}{x^2}dx = \frac{\sin R}{R} - \frac{2}{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\sin x}{x^2}dx$$

Per $R \to \infty$ otteniamo che l'integrale converge in quanto anche il secondo integrale converge perché il suo valore assoluto è maggiorato da $\frac{1}{x^2}$.

2. f non è integrabile in senso di Lebesgue. Infatti se così fosse allora anche $|f| = |\cos x|/x$ sarebbe integrabile

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{|\cos x|}{x}dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{|\cos x|}{x}dx \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \int_{\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} |\cos x|dx$$

dove l'eguaglianza è data dalla minorazione per il minimo. Ora evidentemente tutti gli integrali sono uguali e valgono

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} |\cos x|dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos x dx = 2$$

quindi la ridotta della serie ora vale

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \to +\infty$$

e quindi $|f|$ e f non sono integrabili.

Esempio 1.17. Quali sono le funzione integrabili per la misura di Dirac? Consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{R}^N, 2^{\mathbb{R}^N}, \delta_O)$. Allora ogni funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è misurabile perché ogni insieme è misurabile. Se f è non negativa allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\delta_O = \sup\{I(s) : s \text{ semplice tale che } 0 \leq s \leq f\}$$

Ora quindi $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$ e $I(s) = \sum_{i=1}^n c_i \delta_O(E_i)$ che diventa quindi

$$I(s) = \sum_{i:O \in E_i} c_i \leq f(O)$$

dove l'ultima uguaglianza è data da $0 \leq s \leq f$ Ne concludiamo dunque che

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\delta_O = f(O)$$

Se ora f è di segno qualunque allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\delta_O = f^+(O) - f^-(O) = f(O)$$

Dunque f è integrabile se e solo se $f(O) \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.18. Consideriamo ora la misura del contare e lo spazio $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$. Ora le funzioni sono le funzioni sono le successioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Di nuovo tutte sono misurabili perché tutti gli insiemi sono misurabili. Procediamo a capire quali sono le f integrabili. Sia ora $f \geq 0$. Allora

$$\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sup\{I(s) : s \text{ semplice tale che } 0 \leq s \leq f\}$$

dove $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}(x)$ dove chiediamo che gli E_i siano a due a due disgiunti. Osservo che $\sum_{i=1}^k c_i \chi_{\{i\}}(x)$ sono particolari funzioni semplici. Deve essere $c_i \leq f(i)$ per $i = 1, \ldots, k$. Ne concludiamo che ha senso che sia

$$\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sum_{i=1}^{+\infty} f(i) \#(\{i\}) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(i)$$

Se $f(i) = +\infty$ per qualche i oppure la serie diverge allora l'integrale è $+\infty$. Concludiamo f non negativa, allora $f \in L^{1(\mathbb{N})}$ se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge. Se ora f è di segno qualunque allora $f \in L^1(\mathbb{N})$ se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f^+(n) < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f^-(n) < +\infty$$

Notare che è verificata la proprietà $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$.

Esercizio 1.2

per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{|\ln(n^7 x^2)|}{3 + n^4 x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a) Per quali n f_n è integrabile su $\mathbb{R}$? Succede che esiste C_n tale che

$$|\ln(n^7x^2)| \leq \frac{C_n}{\sqrt{|x|}} \quad \forall x \in (-1,1)\setminus\{0\}$$

Quindi f_n è integrabile in tutto $(-1,1)$. Ora poiché

$$\frac{f_n}{x^{-\frac{3}{2}}} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

da cui

$$\exists \overline{x} > 0 \text{ tale che } \forall x \geq \overline{x} \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

dunque f_n è integrabile su tutto $\mathbb{R}$

b) Consideriamo ora la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

e sia C l'insieme di convergenza della serie, allora $s : C \to \mathbb{R}$ sia la somma della serie. Discutiamo ora la misurabilità di C e di s. Se $x = 0$ chiaramente diverge, mentre se $x \neq 0$ allora

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|7\ln n + 2\ln|x|}{3 + n^4x^2}$$

Quindi $C = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ è misurabile, inoltre s è misurabile in quanto limite di una successione di ridotte tutte misurabili.

c) Vale l'uguaglianza

$$\int_C s dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n dx \ ?$$

SÌ alla grande per Beppo Levi, infatti $f_n \geq 0$ e nel nostro caso i termini della serie sono tutti finiti.

Vogliamo ora vedere se $s \in L^1(C)$ sfruttando l'uguaglianza.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln(n^7x^2)}{3 + n^4x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n^2} \frac{|\ln(n^3t^2)|}{3 + t^2} dt \leq \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|3\ln n + 2\ln|t||}{3 + t^2} dt$$

operando la sostituzione $n^2x = t$, $n^2dx = dt$. Ora nuovamente maggioriamo dividendo la frazione con la diseguaglianza triangolare

$$\leq \frac{3|\ln n|}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3 + t^2} dt + \frac{2}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\ln|t||}{3 + t^2} dt$$

che sono entrambi termini generali di serie convergente. Quindi $s \in L^1(C)$

1.8 Convergenze di funzioni misurabili

Definizione 1.10: Convergenza quasi ovunque

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una successione di funzioni misurabili $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ converge quasi ovunque a $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se esiste un insieme $F \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(F) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus F$

Definizione 1.11: Convergenza quasi uniforme

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una successione di funzioni misurabili $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ converge quasi uniformemente a $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $F \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(F) < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente in $\Omega \setminus F$.

Definizione 1.12: Convergenza in misura

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una successione di funzioni misurabili $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ converge in misura a $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se per ogni $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Esempio 1.19. Consideriamo la successione $f_n(x) = x^n$ in $[0,1]$. Allora $f_n \to 0$ q.o. in $[0,1]$, perché per ogni $x \in (0,1)$ $f_n(x) \to 0$ e chiaramente $\mu[0,1] \setminus (0,1) = \mu(\{0,1\}) = 0$. Ma anche $f_n \to f$ quasi uniformemente, infatti per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo $[1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1]$ e in questo intervallo c'è convergenza uniforme. Infine

$$\{x \in [0,1] : |x^n| > \varepsilon\} = \{x \in [0,1] : |x| > \varepsilon^{\frac{1}{n}}\} = (\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1]$$

e poiché $\mu(\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1] = 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} \to 0$ allora $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Esempio 1.20. Consideriamo la successione $f_n(x) = \frac{x}{n}$ in $\mathbb{R}$. Allora $f_n \to 0$ q.o. in $\mathbb{R}$. Anche qui non abbiamo convergenza uniforme, e neanche quasi uniforme, in quanto ogni insieme su cui c'è convergenza uniforme è limitato e ha complementare di misura non finita. Infine $\{x \in \mathbb{R} : |\frac{x}{n}| > \varepsilon\} = (-\infty, -\varepsilon n) \cup (\varepsilon n, +\infty)$ che ha sempre misura infinita, quindi $f_n \not\to f$ in misura.

Dal precedente esempio possiamo dedurre che q.o. $\not\Longrightarrow$ q.u. e che q.o. $\not\Longrightarrow$ in misura. Ora invece mostriamo le implicazioni che valgono.

Teorema 1.33: $f_n \xrightarrow{q.u.} f \implies f_n \xrightarrow{q.o.} f$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili tale che $f_n \xrightarrow{q.u.} f$ funzione misurabile. Allora $f_n \xrightarrow{q.o} f$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme $E_k \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(\Omega \setminus E_k) < \frac{1}{k}$ e $f_n \to f$ uniformemente, quindi anche puntualmente, in E_k. Ora prendiamo

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$$

allora dico che $f_n \to f$ puntualmente in E. Infatti per ogni punto $x \in E$ esiste k tale che $x \in E_k$ e quindi $f_n(x) \to f(x)$. Infine

$$\mu(E^C) = \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E^C\right) \leq \mu(E^C) < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e quindi necessariamente $\mu(E^C) = 0$ e quindi $f_n \to f$ q.o. $\square$

Teorema 1.34: Severini-Egorov

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finito, ossia $\mu(\Omega) < +\infty$. Se allora $f_n \to f$ q.o in Ω, $f_n \to f$ q.u. in Ω.

Dimostrazione. Iniziamo fissando $\varepsilon > 0$. $f_n \xrightarrow{q.o.} f$ in Ω, quindi esiste N trascurabile tale che $f_n \to f$ puntualmente in $\Omega \setminus N$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ introduciamo gli insiemi

$$A_m = \bigcap_{n \geq m} \left\{ x \in \Omega \setminus N : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

Gli insiemi A_m formano una successione crescente e inoltre $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m = \Omega \setminus N$ infatti se $x \in A_m$ per m fissato, allora succede che $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $n \geq m$, quindi $f_n(x) \to f(x)$. Ora per continuità della misura

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_m) = \mu(\Omega \setminus N) = \mu(\Omega)$$

dunque esisterà certamente un m_k tale che A_{m_k} ha complementare di misura minore di $\frac{\varepsilon}{2^k}$ $(\star)$. In A_{m_k} succede che $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $n \geq m_k$ e per ogni $x \in A_{m_k}$. Poniamo allora

$$E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{m_k}$$

Allora su E c'è convergenza uniforme di f_n a f perché se $x \in E$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $m_k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq m_k$ si ha che $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$.

Vogliamo ora mostrare che $\mu\big(E^C\big) < \varepsilon$. Abbiamo

$$\mu(E^C) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{A_m\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{m_k}^C) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

$\square$

Nota. L'ipotesi di $\mu(\Omega) < +\infty$ è stata usata in $(\star)$, perché noi sappiamo che

$$\mu(A_{m_k}) + \mu\big(A_{m_k}^C\big) = \mu(\Omega)$$

e per dire che $\mu\big(A_{m_k}^C\big) \to 0$ dobbiamo poter sottrarre $\mu(A_{m_k})$ da entrambi i lati dell'uguaglianza.

Teorema 1.35: $f_n \xrightarrow{q.u.} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Se $f_n \to f$ quasi uniformemente allora $f_n \to f$ in misura.

Dimostrazione. $\forall \sigma > 0$ esiste $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu\big(E^C\big) < \sigma$ e $f_n \to f$ uniformemente in E, quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$ e $\forall x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Proseguendo

$$\begin{aligned}\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = &\underbrace{\{x \in E : |f_n(x) - f(x) > \varepsilon|\}}_{\text{vuoto per } n \geq n_\varepsilon} \cup \\ \cup \quad &\underbrace{\{x \in E^C : |f_n(x) - f(x) > \varepsilon|\}}_{\text{sottoinsieme di } E^C \text{, quindi di misura } < \sigma}\end{aligned}$$

ma allora abbiamo provato che

$$\forall \sigma > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \quad \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \sigma$$

e quindi $f_n \to f$ in misura. $\square$

Teorema 1.36: $f_n \xrightarrow{\mu} f \implies f_{n_k} \xrightarrow{q.o.} f$

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia f_n una successione di funzioni misurabili e f una funzione misurabile. Allora se $f_n \to f$ in misura, allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge quasi ovunque a f.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k : \forall n \geq n_k \quad \mu\left(\left\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{k^2}$$

Definisco $E_k := \left\{x \in \Omega : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$ e l'insieme $E = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} E_k$. Noto ora che $\mu(E) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ che tende a 0 per $m \to \infty$ in quanto coda di serie convergente e per $x \in E^C$ ho che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ in quanto

$$E^C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq m} \left\{x \in \Omega : |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

ossia esiste un m tale che per ogni $k \geq m$ si ha che $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ e quindi $f_{n_k} \to f$ in E^C. In questo modo abbiamo trovato una sottosuccessione f_{n_k} che converge quasi ovunque a f. $\square$

Esempio 1.21. È importante evidenziare che la convergenza in misura non implica la convergenza quasi ovunque, ma solo la convergenza di una sottosuccessione, ad esempio se $\Omega = [0, 1]$ e prendiamo

$$\begin{aligned}
&f_1 = \chi_{[0,1]} \\
&f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \quad f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]} \\
&f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{3}]}, \quad f_5 = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, \quad f_6 = \chi_{[\frac{2}{3},1]} \\
&f_7 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, \quad f_8 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{2}{4}]}, \quad f_9 = \chi_{[\frac{2}{4},\frac{3}{4}]}, \quad f_{10} = \chi_{[\frac{3}{4},1]} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Allora $f_n \to 0$ in misura, infatti

$$\mu\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

ma non c'è convergenza quasi ovunque, infatti fissato $x \in [0, 1]$, la successione numerica $f_n(x)$ non ha limite, perché purché assuma principalmente il valore 0, ogni tanto assume il valore 1, e per ogni n esiste un $\overline{n} \geq n$ tale che $f_{\overline{n}}(x) = 1$, per cui non può esistere il limite. Poiché questo è vero per ogni $x \in [0, 1]$, non c'è convergenza puntuale in nessun sottoinsieme.

Esercizio 1.3

Sia

$$f_n(x) = \frac{2n\sqrt[3]{x}+3}{1+(nx)^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

studiare:

a) per n fissato la misurabilità e l'integrabilità di f_n

$$f_n \sim c_n \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} \sim c_n \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \qquad \text{per } x \to \pm\infty$$

Quindi f_n è integrabile su tutto $\mathbb{R}$ in quanto $\frac{5}{3} > 1$

b) Dimostrare che $|f_n(x)| \leq \frac{5}{n}$ per ogni x con $|x| \geq 1$

$$|f_n(x)| \leq \frac{2n|x|^{\frac{1}{3}+3}}{1+n^2x^2} \leq \frac{\frac{2}{n}|x|^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \leq \frac{2}{n}\frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \frac{\frac{3}{n^2}}{1} \leq \frac{2}{n}\cdot 1 + \frac{3}{n} = \frac{5}{n}$$

c) f_n converge quasi ovunque in $\mathbb{R}$? E quasi uniformemente? E in misura?

$f_n \overset{\text{q.o.}}{\to} 0$. Infatti per $x = 0$ $f_n(0) \to 3$ mentre per $x \neq 0$ abbiamo che $f_n(x) \to 0$.

Il punto b) ci dice che f_n converge quasi uniformemente a 0 in $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$. Ora possiamo considerare che in $(-1,1)$ $f_n \to$ q.o., per cui per Severini-Egorov $f_n \to 0$ quasi uniformemente. Infine avendo convergenza q.u. in $(-1,1)$ e convergenza q.u. in $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ allora abbiamo convergenza q.u. in $\mathbb{R}$. Infine $f_n \overset{\mu}{\to} 0$ in quanto la convergenza uniforme implica la convergenza in misura.

d) C'è convergenza in L^1? Ossia è vero che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - 0| d\mu = 0 \quad ?$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2n|x|^{\frac{1}{3}}}{1+n^2x^2} dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{3}{1+n^2x^2} dx}_{\leq \frac{3}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ per Lebesgue } \to 0}$$

Invece per il primo integrale operiamo la sostituzione $nx = t$, $ndx = dt$

$$\frac{1}{\cancel{n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\cancel{n}\sqrt[3]{\frac{t}{n}}}{1+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt[3]{t}}{1+t^2} dt \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

poiché l'integrale è finito.

1.9 Teoremi di Fubini e Tonelli

Vogliamo analizzare gli integrali multipli, considerando gli spazi prodotto. Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi di misura σ-finiti. Vogliamo costruire uno spazio di probabilità prodotto Allora l'insieme ambiente è $X \times Y$ e definiamo $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ come la σ-algebra generata da tutti gli insiemi del tipo $A \times B$, con $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$. Adesso quindi $(X \times Y, \mathcal{M} \times \mathcal{N})$ è uno spazio misurabile con una misura indotta da μ e ν. A tale scopo introduciamo nuovi insiemi e costruzioni. Sia $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Allora per ogni $(x, y) \in X \times Y$ abbiamo i due insiemi $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ e

$E_y := \{x \in X : (x, y) \in E\}$. Per definire la misura prodotto quindi ricorriamo alla seguente proposizione

Proposizione 1.37. *Per ogni $x \in X$ si ha che $E_x \in \mathcal{N}$ e per ogni $y \in Y$ si ha che $E_y \in \mathcal{M}$. Inoltre le funzioni $x \mapsto \nu(E_x)$ e $y \mapsto \mu(E_y)$ risultano misurabili in $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ rispettivamente. In aggiunta*

$$\int_X \nu(E_x)d\mu = \int_Y \mu(E_y)d\nu =: (\mu \times \nu)(E)$$

Per la dimostrazione di questa proposizione si usano le *famiglie monotone* di misure.

Definizione 1.13: Famiglia monotona

Una collezione $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme ambiente Ω si dice *famiglia monotona* se per ogni successione $\{A_n\}$ crescente di insiemi in $\mathcal{A}$ e per ogni successione $\{B_n\}$ decrescente di insiemi in $\mathcal{A}$ si ha che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

Data una collezione $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di Ω, si definisce $\nu(\mathcal{F})$ famiglia monotona generata da $\mathcal{F}$ come la più piccola famiglia monotona di insiemi contenente $\mathcal{F}$.

Osservazione. Dato $\mathcal{F}$, si possono definire $\sigma(\mathcal{F})$ e $\nu(\mathcal{F})$, con $\sigma(\mathcal{F})$

Lemma 1.38. *Se $\mathcal{F}$ è un'algebra, allora $\nu(\mathcal{F})$ è anche una σ-algebra e coincide con $\sigma(\mathcal{F})$.*

Possiamo ora utilizzare questo lemma perché $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ è anche la σ-algebra generata dalle unioni finite di insiemi "rettangolari", ossia del tipo $A \times B$, con $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$, che formano un'algebra di insiemi.

Notiamo che

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(E) &= \int_X \nu(E_x)d\mu = \int_Y \mu(E_y)d\nu = \int_{X\times Y} \chi_E(x, y)d(\mu \times \nu) \\ &= \int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y)d\nu\right)d\mu = \int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y)d\nu\right)d\mu\end{aligned}$$

Teorema 1.39: Tonelli

Sia F una funzione misurabile in $(X \times Y, \mathcal{M} \times \mathcal{N})$ e non negativa. Allora

- $F(x, y)$ è misurabile sia rispetto a x per q.o. y che rispetto a y per q.o. x
- La funzione $x \mapsto \displaystyle\int_Y F(x, y)d\nu$ è misurabile in $(X, \mathcal{M})$.
- La funzione $y \mapsto \displaystyle\int_X F(x, y)d\mu$ è misurabile in $(Y, \mathcal{N})$.
- Valgono le seguenti uguaglianze

$$\int_{X\times Y} Fd(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y F(x, y)d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X F(x, y)d\mu\right) d\nu$$

dove il secondo e il terzo integrale vengono chiamati *integrali iterati*. In particolare se esiste finito uno degli integrali iterati, allora $F \in L^1(X \times Y)$ e esiste finito anche l'altro integrale iterato.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema di Tonelli per funzioni semplici. Sia $F = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i \times B_i}$. Allora

$$\int_{X\times Y} F d(\mu \times \nu) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)\nu(B_i) = \int_X \left(\int_Y F(x,y) d\nu \right) d\mu$$

Ora per passare da funzioni semplici a funzioni non negative, consideriamo una successione crescente di funzioni semplici $F_n \nearrow F$. Allora per il teorema di Beppo Levi abbiamo che

$$\int_{X\times Y} F d(\mu \times \nu) = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} F_n d(\mu \times \nu) = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y F_n(x,y) d\nu \right) d\mu$$

Ora per il teorema di Beppo Levi abbiamo che

$$\int_X \left(\int_Y F_n(x,y) d\nu \right) d\mu = \int_X \left(\int_Y F(x,y) d\nu \right) d\mu$$

e quindi abbiamo dimostrato il teorema di Tonelli per funzioni non negative. Ora per il caso generale, consideriamo $F = F^+ - F^-$ e applichiamo il teorema di Tonelli per funzioni non negative. □

Osservazione. La non-negatività di F è essenziale per il teorema di Tonelli. Si consideri come esempio $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ su $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Allora f è L-integrabile su $\mathbb{R}$ rispetto a x e a y, e l'integrale vale 0. Otteniamo quindi che

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx = 0$$

eppure f non è L-integrabile su $\mathbb{R}^2$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \right| d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{r^2} |\cos\theta \sin\theta|}{r^{\cancel{4}}} \cancel{r} dr d\theta$$

e rispetto a r viene l'integrale di $\frac{1}{r}$ né in un intorno di 0 né in un intorno di $+\infty$.

Teorema 1.40: Fubini

Sia $F \in L^1(X \times Y)$. Allora

- per q.o. $x \in X$, $F(x,\cdot) \in L^1(Y)$ e per q.o. $y \in Y$, $F(\cdot, y) \in L^1(X)$
- La funzione $x \mapsto \int_Y F(x,y) d\nu$ è integrabile su X e la funzione $y \mapsto \int_X F(x,y) d\mu$ è integrabile su Y
- Valgono le seguenti uguaglianze

$$\int_{X\times Y} F d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y F(x,y) d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X F(x,y) d\mu \right) d\nu$$

Dimostrazione. Sia $F = F^+ - F^-$, e in particolare $F^+, F^- \in L^1(X \times Y)$. Allora per il teorema di Tonelli abbiamo che

$$\int_{X\times Y} F^+ d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y F^+(x,y) d\nu \right) d\mu$$

e

$$\int_{X\times Y} F^- d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y F^-(x,y) d\nu \right) d\mu$$

e infine per sottrazione e linearità dell'integrale deduciamo l'uguaglianza finale. □

Esercizio 1.4

Si considerino in $\mathbb{R}^2$ le funzioni del tipo $(x_1, x_2) \mapsto |x|^{-\alpha}$, dove $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Per quali α queste funzioni sono integrabili in $B_1(0)$? E in $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$?

Definizione 1.14: Convoluzione

Siano due funzioni $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Allora la funzione

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy$$

viene detto **prodotto di convoluzione** di f e g.

Proposizione 1.41. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (ed è ben definita).*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $F(x,y) = f(x-y)g(y)$. Allora chiaramente $|F(x-y)| = |f(x-y)||g(y)|$. Allora abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu$$

E abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu dy = \int_{\mathbb{R}^N} |g| d\mu \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu$$

che è finito, quindi per il teorema di Tonelli abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)| d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)| dy dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu \int_{\mathbb{R}^N} |g| d\mu < +\infty$$

Quindi ora sapendo che $F \in L^1$, possiamo applicare il teorema di Fubini e ottenere che $f \star g \in L^1$. □

Esercizio 1.5

La precedente proprietà non è vera per il prodotto normale di funzioni, trovare un controesempio dove $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ma $f \cdot g \notin L^1(\mathbb{R})$.

1.10 Misure Relative

Definizione 1.15: Misura Relativa

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Sia $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ si dice **misura relativa** se valgono le seguenti proprietà:

1. $\varphi(\varnothing) = 0$
2. Se $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}$ è una successioni di insiemi a due a due disgiunti, allora

$$\varphi\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

Ora procediamo con alcune osservazioni sulle misure relative

1. Le misure relative possono assumere valori negativi, ma sono sempre finite
2. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ è una serie convergente come conseguenza della σ-additività
3. Le misure finite sono anche misure relative
4. *($\neg$monotonia)* Infatti se $B \in \mathcal{M}$ tale che $\varphi(B) < 0$ abbiamo che $\varnothing \subseteq B$ ma $0 > \varphi(B)$
5. *(sottrattività)* Per la stessa dimostrazione di prima vale ancora, quindi se $A \subseteq B$ sono misurabili, allora abbiamo che $\varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A)$
6. *($\neg$subadditività)* Consideriamo lo spazio di misura relativa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_1 + \delta_{-1} - \delta_0)$, che mostreremo più avanti che è una misura. Sia $A = [-1, 0], B = [0, 1]$. Allora $A \cap B = \{0\}$ e $A \cup B = [-1, 1]$.

$$1 = 1 + 1 - 1 = \varphi(A \cup B) > \varphi(A) + \varphi(B) = (1 - 1) + (-1 + 1) = 0$$

7. *(continuità)* La dimostrazione del teorema 1.3, parte 1, non usava la positività né la monotonia, né la subadditività, ma solo σ-additività, ossia abbiamo che se A_n è una successione crescente di insiemi misurabili,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

Per quanto riguarda le successioni decrescenti la dimostrazione del teorema 1.3 usava solo σ-additività e sottrattività, quindi abbiamo anche che se A_n è una successione decrescente di insiemi misurabili,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

notare che non necessitiamo di aggiungere l'ipotesi $\varphi(A_1) < +\infty$

Esempio 1.22. La misura δ_O di Dirac è una misura finita quindi è una misura relativa, mentre la misura del contare e la misura di Lebesgue non sono misure relative, perché $\#\mathbb{N} = +\infty$ e $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$.

Proposizione 1.42. *Se $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ sono misure finite su $(\Omega, \mathcal{M})$, allora*

$$\begin{aligned} \varphi_+ := \varphi_1 + \varphi_2 : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto (\varphi_1 + \varphi_2)(E) = \varphi_1(E) + \varphi_2(E) \end{aligned}$$

è una misura finita (e quindi relativa).

$$\begin{aligned} \varphi_- := \varphi_1 - \varphi_2 : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto (\varphi_1 - \varphi_2)(E) = \varphi_1(E) - \varphi_2(E) \end{aligned}$$

è una misura relativa

Dimostrazione. La prima parte, φ_+ misura finita, è ovvio. Procediamo con la seconda.

1. $(\varphi_1 - \varphi_2)(E) = \varphi_1(E) - \varphi_2(E) \in \mathbb{R}$ per ogni $E \in \mathcal{M}$
2. $(\varphi_1 - \varphi_2)(\varnothing) = \varphi_1(\varnothing) - \varphi_2(\varnothing) = 0$
3. Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi disgiunti. Allora

$$\begin{aligned} (\varphi_1 - \varphi_2)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \varphi_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \varphi_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_1(A_i) - \varphi_2(A_i) \end{aligned}$$

□

Proposizione 1.43 (Generazione misura relativa)**.** *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione, con $f \in L^1$. Allora*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto \varphi(E) = \int_E f d\mu \end{aligned}$$

è una misura relativa

Dimostrazione.

1. $\varphi(E) \in \mathbb{R}$ poiché $f \in L^1$
2. $\varphi(\varnothing) = \int_\varnothing f d\mu = 0$
3. Sia $\{E_n\}$ una successione disgiunta di insiemi misurabili. Allora

$$\varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \varphi(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n)$$

□

Definizione 1.16: Insiemi positivi e negativi

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora

- diciamo che $P \in \mathcal{M}$ è positivo per φ se

$$\forall E \in \mathcal{M}, \quad E \subseteq P, \quad \varphi(E) \geq 0$$

– diciamo che $N \subseteq \mathcal{M}$ è negativo per φ se

$$\forall E \in \mathcal{M}, \quad E \subseteq N, \quad \varphi(E) \leq 0$$

Osservazione. $\varnothing$ è sia positivo che negativo per ogni misura relativa.

Teorema 1.44: Teorema di decomposizione di Hahn

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora esistono due insiemi $A, B \in \mathcal{M}$ tali che $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \varnothing$, A è positivo e B è negativo.

Osservazione. La decomposizione di Hahn **non** è unica. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0 - \delta_1)$. Allora $(A, B) = (\{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ è una buona decomposizione di Hahn, ma anche $(A, B) = (\mathbb{R} \setminus \{1\}, \{1\})$ lo è. In generale basta prendere $1 \notin A \ni 0$ e $B = A^C$.

Lemma 1.45. *Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora se esiste $A \in \mathcal{M}$ tale che $\varphi(A) > 0$ allora esiste $P \subseteq A$, con $P \in \mathcal{M}$ tale che P è positivo per φ e $\varphi(P) > 0$.*

Dimostrazione. Se A è positivo ho concluso, supponiamo quindi che A non sia positivo. Allora esiste un sottoinsieme di A con misura negativa.

$$n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} : \exists A' \in \mathcal{M}, \quad A' \subseteq A, \quad \varphi(A') < -\frac{1}{n}\}$$

trovo quindi $A_1 \subseteq A$, con $A_1 \in \mathcal{M}$ e tale che $\varphi(A_1) < -\frac{1}{n_1}$.

Se $A \setminus A_1$ è positivo ho concluso, infatti $\varphi(A \setminus A_1) = \varphi(A) - \varphi(A_1) > \varphi(A) > 0$, supponiamo quindi che $A \setminus A_1$ non sia positivo e ripetiamo il procedimento.

$$n_2 := \min\{n \in \mathbb{N} : \exists A' \in \mathcal{M}, \quad A' \subseteq A \setminus A_1, \quad \varphi(A') < -\frac{1}{n}\}$$

trovo quindi $A_2 \in \mathcal{M}$ con $A_2 \subseteq A - A_1$ e $\varphi(A_2) < -\frac{1}{n_2}$.

Ora se $A \setminus (A_1 \cup A_2)$ è positivo concludiamo, altrimenti ripetiamo. Se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $A \setminus (\bigcup_{i=1}^N A_i)$ è positivo abbiamo concluso, infatti

$$\varphi(A \setminus \bigcup_{i=1}^N A_i) = \varphi(A) - \sum_{i=1}^N \varphi(A_i) > \varphi(A) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} > 0$$

Supponiamo quindi che non esista un tale N. Otteniamo una successione $\{A_k\}$ di insiemi $A_k \in \mathcal{M}$ e con

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j, \quad \varphi(A_k) < -\frac{1}{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$n_k := \min\{n \in \mathbb{N} : \exists A' \in \mathcal{M}, \quad A' \subseteq A - \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right), \quad \varphi(A') < -\frac{1}{n}\}$$

Allora il claim è che $P = A \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_K\right) \in \mathcal{M}$ sia positivo e abbia misura positiva.

$$\varphi(P) = \varphi(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k) > \varphi(A) > 0$$

Ci rimane da verificare che P sia positivo. Suppongo per assurdo che esista un $E \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq P$ e $\varphi(E) < -\varepsilon$. Abbiamo che

$$\mathbb{R} \ni \varphi(P) = \varphi(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$$

quindi la serie è convergente, per cui $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$ e quindi esiste un $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n_{\overline{k}-1}} < \varepsilon \implies \varphi(E) < -\varepsilon < -\frac{1}{n_{\overline{k}-1}}$$

ma ora sappiamo che

$$E \subseteq A \smallsetminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \right) \subseteq A \smallsetminus \left(\bigcup_{k=1}^{\overline{k}-1} A_k \right)$$

□

Lemma 1.46. *Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ con misura relativa $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ e sia $\{P_k\}$ una successione di insiemi positivi. Allora*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k \text{ è positivo}$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione $\tilde{P}_k$, dove $\tilde{P}_1 = P_1$, $\tilde{P}_2 = P_2 \smallsetminus P_1$ e in genere

$$\tilde{P}_{k+1} = P_{k+1} \smallsetminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} P_i \right)$$

Abbiamo che $\tilde{P}_k \subseteq P_k$ e quindi $\tilde{P}_k$ è positivo. Inoltre per ogni $i \neq j$ abbiamo che $\tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j = \varnothing$. Infine l'unione dei $\tilde{P}_k$ è uguale all'unione dei P_k, ossia

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{P}_k$$

Sia $E \in \mathcal{M}$ con $E \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$. Allora

$$\varphi(E) = \varphi\left(E \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{P}_k \right) = \varphi\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(E \cap \tilde{P}_k \right) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\underbrace{E \cap \tilde{P}_k}_{\subseteq \tilde{P}_k}) > 0$$

□

Dimostrazione del teorema di decomposizione di Hahn. Sia

$$p := \sup\{\varphi(P) : P \in \mathcal{M}, \quad P \text{ positivo}\}$$

dove il sup è finito in quanto $\varphi(\varnothing) = 0$. Sia ora una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con A_n positivo tale che $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = p$. Allora $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ allora $A \in \mathcal{M}$ e A è positivo, per il lemma 2. Per definizione di p abbiamo che $\varphi(A) \leq p$. Inoltre

$$\varphi(A) = \varphi((A \smallsetminus A_n) \cup A_n) = \varphi(A \smallsetminus A_n) + \varphi(A_n) \geq \varphi(A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi $\varphi(A) \geq \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = p$. Abbiamo quindi che $\varphi(A) = p$.

Ora prendiamo $B = \Omega \smallsetminus A \implies A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$. Vogliamo mostrare che B è negativa. Assumiamo per assurdo che esista un insieme a misura positiva, e quindi per il lemma possiamo assumere che esista un insieme positivo $P \subseteq B$ con $P \in \mathcal{M}$. Allora $A \cup P$ è positivo e

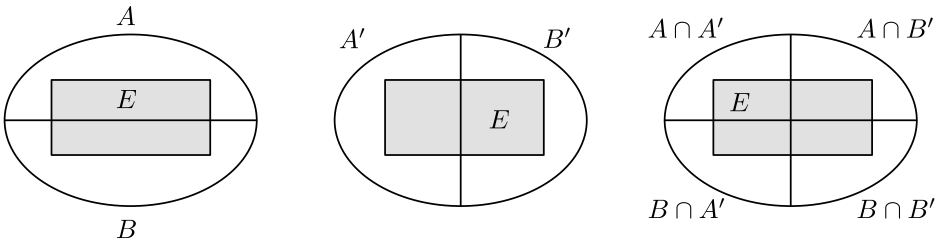
$$\varphi(A \cup P) = \varphi(A) + \varphi(P) = p + \varphi(P) > p$$

che è assurdo per la massimalità di p. Dunque B non ha sottoinsiemi di misura positiva ed è quindi negativo. □

Teorema 1.47: Invarianza della decomposizione di Hahn

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio di misura con $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Siano (A, B) e (A', B') due decomposizioni di Hahn di Ω rispetto a φ. Allora $\forall E \in \mathcal{M}$ si ha che

$$\varphi(A \cap E) = \varphi(A' \cap E) \quad \text{e} \quad \varphi(B \cap E) = \varphi(B' \cap E)$$



Dimostrazione. Partiamo dalla prima:

$$\varphi(A \cap E) = \varphi(A \cap A' \cap E) + \varphi((A \setminus A') \cap E)$$

ma allora poiché $(A \setminus A') \cap E \subseteq A \cap B'$ abbiamo che ha misura necessariamente 0 da cui $\varphi(A \cap E) = \varphi(A \cap A' \cap E)$. Analogamente si dimostra che $\varphi(A' \cap E) = \varphi(A \cap A \cap E)$ da cui la tesi. Similmente si dimostra l'altra eguaglianza. □

Definizione 1.17: Variazione superiore, inferiore, totale

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio di misura e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Sia (A, B) una decomposizione di *Hahn*. Allora

- φ^+, definita con $\varphi^+(E) = \varphi(A \cap E)$ è detta **variazione superiore**
- φ^-, definita con $\varphi^-(E) = -\varphi(B \cap E)$ è detta **variazione inferiore**
- $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$ è detta **variazione totale**

Osservazione. La precedente è una buona definizione, per il teorema di invarianza della decomposizione di Hahn.

Esempio 1.23. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ con la misura di Lebesgue, e sia $f \in L^1$. Allora $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ è una misura relativa. Consideriamo la decomposizione di Hahn $(A, B) = (\{f \geq 0, f \leq 0\})$. Allora

$$\varphi^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \varphi^-(E) = -\int_E f^- d\mu, \quad |\varphi|(E) = \int_E |f| d\mu$$

Esercizio 1.6

Come sono fatte le variazioni inferiori e totali della misura relativa data da somme di misure di Dirac?

Teorema 1.48

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio di misura con $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura relativa. Allora

1) $\varphi^+, \varphi^-, |\varphi|$ sono misure finite (positive)

2) $\forall E \in \mathcal{M}$ abbiamo che $\varphi(E) = \varphi^+(E) - \varphi^-(E)$ e $|\varphi(E)| \leq |\varphi|(E)$

Dimostrazione. 1. $\forall E \in \mathcal{M}$, tutte le $\varphi^+(E), \varphi^-(E), |\varphi|(E) \in [0, +\infty)$. Inoltre $\varphi^+(\varnothing) = \varphi^-(\varnothing) = |\varphi|(\varnothing) = 0$.

2. $\varphi(E) = \varphi((E \cap A) \cup (E \cap B)) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B) = \varphi^+(E) - \varphi^-(E)$ e $|\varphi(E)| = |\varphi^+(E) - \varphi^-(E)| \leq \varphi^+(E) + \varphi^-(E) = |\varphi|(E)$

□

Definizione 1.18: μ-Assoluta continuità

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia φ una misura (o misura relativa) su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora φ si dice μ-**assolutamente continua** (denotato μ-a.c.) se per

$$\mu(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0, \forall E \in \mathcal{M}$$

Esempio 1.24. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $f \in L^1(\Omega)$, con $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ misura relativa. Allora φ è assolutamente continua. Infatti preso un insieme $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ abbiamo che $\varphi(E) = 0$ perché integra su un insieme trascurabile.

Esempio 1.25. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ lo spazio misurabile di Lebesgue. Allora consideriamo su tale spazio due misure: δ_O delta di Dirac in $x = 0$ e $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ la misura di Lebesgue 1-dimensionale.

Allora δ_0 non è assolutamente continua, infatti $E = \{0\}$ allora $\mathcal{L}^1(E) = 0$ ma $\delta_0(E) = 1$. Similmente $\mathcal{L}^1$ non è δ_0-assolutamente continua, infatti preso $E = (1, 2)$ abbiamo che $\mathcal{L}^1(E) = 1$ ma $\delta_0(E) = 0$.

Esempio 1.26. Ora sempre su $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ consideriamo la misura $\mathcal{L}^1_\star(\mathbb{R}) : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita come $E \mapsto \mathcal{L}^1(E \cap [0, 1])$.

Allora $\mathcal{L}^1_\star$ è $\mathcal{L}^1$-assolutamente continua, infatti preso E trascurabile per $\mathcal{L}^1$ abbiamo che $E \cap [0, 1] \subseteq E$ quindi anche $\mathcal{L}^1_\star(E) = \mathcal{L}^1(E \cap [0, 1]) \leq \mathcal{L}^1(E) = 0$. $\mathcal{L}^1$ non è tuttavia $\mathcal{L}^1_\star$-assolutamente continua, infatti preso $E = (1, 2)$ abbiamo che $\mathcal{L}^1(E) = 1$ ma $\mathcal{L}^1_\star(E) = \mathcal{L}^1(\varnothing) = 0$.

Proposizione 1.49. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia φ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora sono equivalenti:*

i) φ è μ-assolutamente continua

ii) φ^+, φ^- sono μ-assolutamente continue

iii) $|\varphi|$ è μ-assolutamente continua

Dimostrazione. i) $\implies$ ii). Sia (A, B) una decomposizione di Hahn di Ω per φ. Supponiamo che φ sia μ-assolutamente continua. Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$ e quindi anche $\mu(E \cap A) = 0$ e $\mu(E \cap B) = 0$. Quindi per μ-a.c. $\varphi^+(E) = \varphi(E \cap A) = 0$ e similmente $\varphi^-(E) = -\varphi(E \cap B) = 0$.

ii) $\implies$ iii). Supponiamo che φ^+ e φ^- siano μ-assolutamente continue. Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$. Allora $\varphi^+(E) = 0$ e $\varphi^-(E) = 0$, ma allora $|\varphi|(E) = \varphi^+(E) + \varphi^-(E) = 0$.

iii) $\implies$ i). Supponiamo che $|\varphi|$ sia μ-assolutamente continua. Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) = 0$. Allora $|\varphi(E)| \leq |\varphi|(E) = 0$, quindi $\varphi(E) = 0$ □

Proposizione 1.50. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia φ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Se φ è μ-a.c. allora*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ t.c. \ \forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) < \delta \implies |\varphi|(E) < \varepsilon$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo quindi che valendo le ipotesi si abbia

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists E_n \in \mathcal{M} \quad \mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ e } |\varphi|(E_n) \geq \varepsilon$$

Sia

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$$

Dove la successione interna all'intersezione è una successione decrescente. Inoltre abbiamo che $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ che è finito. Possiamo quindi calcolarne la misura:

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

sicché l'ultimo passaggio è il resto di una successione convergente.

Ora per concludere vogliamo mostrare che $\varphi(E) \neq 0$ mostrando quindi che φ non è μ-a.c. Sappiamo che $|\varphi|$ è una misura finita. Allora per continuità abbiamo

$$|\varphi|(E) = \lim_{n\to\infty} |\varphi|\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \overset{\text{monotonia}}{\geq} \lim_{n\to\infty} |\varphi|(E_n) \geq \varepsilon > 0$$

ora per la proposizione precedente anche φ non è μ-a.c., arriviamo dunque a una contraddizione. □

Corollario 1.50.1. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f \in L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$. Allora*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) < \delta \implies \left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Data $f \in L^1$ possiamo associarle la misura relativa $\varphi(E) = \int f d\mu$ che è μ-a.c. Per la proposizione precedente sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) < \delta \implies |\varphi|(E) =< \varepsilon$$

Il corollario segue semplicemente da $\left|\int_E f d\mu\right| = |\varphi(E)| \leq |\varphi|(E)$ □

Definizione 1.19: Misura singolare

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia φ una misura o misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora φ è μ-**singolare** se esistono $A, B \in \mathcal{M}$ tali che

- $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$
- $\mu(A) = 0$ e $|\varphi|(B) = 0$

Osservazione. Se abbiamo μ, φ misure su $(\Omega, \mathcal{M})$ allora φ è μ-singolare se e solo se μ è φ-singolare (si dice che μ e φ sono mutuamente singolari).

Infatti se φ è μ-singolare allora esistono $A, B \in \mathcal{M}$, con $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$ tali che $\mu(A) = 0$ e $\varphi(B) = 0$. Allora chiaramente "scambiando" A e B si ottiene che μ è φ-singolare.

Proposizione 1.51. *Sia φ una misura o misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$ e sia μ una misura su $(\Omega, \mathcal{M})$. Se φ è μ-assolutamente continua e μ-singolare allora $\varphi = 0$.*

Dimostrazione. Sia φ μ-assolutamente continua e μ-singolare. Allora esistono $A, B \in \mathcal{M}$ decomposizione di Ω tali che $\mu(A) = 0$ e $|\varphi|(B) = 0$. Preso ora $E \in \mathcal{M}$ abbiamo che $\varphi(E) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B)$. Poiché $\mu(E \cap B) \leq \mu(A) = 0$ allora anche $\varphi(E \cap B) = 0$. Inoltre $|\varphi(E \cap B)| \leq |\varphi|(E \cap B) \leq |\varphi|(B) = 0$. Concludiamo che $\varphi(E) = 0$ □

Esempio 1.27. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu)$ lo spazio di misura di Lebesgue e sia δ_0 la misura di Dirac in $x = 0$. Allora δ_0 è μ-singolare. Infatti preso $A = \{0\}$ e $B = \mathbb{R} - \{0\}$ si ha che $A \cap B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$, $\mu(A) = 0$ e $\delta_0(B) = 0$. Inoltre μ è δ_0-singolare, per l'osservazione precedente ossia con $(A, B) = (B, A)$

Proposizione 1.52. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia φ una misura relativa su $(\Omega, \mathcal{M})$. Allora sono equivalenti:*

i) φ è μ-singolare

ii) φ^+, φ^- sono μ-singolari

iii) $|\varphi|$ è μ-singolare

Dimostrazione. i) $\implies$ ii) Sia A, B partizione per la μ-singolarità di φ. Allora $\mu(A) = 0$ e $|\varphi|(B) = 0$. Allora $|\varphi^+|(B) = \varphi^+(B) \leq |\varphi|(B) = 0$ e similmente per φ^-. Ne consegue che φ^+ e φ^- sono μ-singolari.

ii) $\implies$ iii) Sia (A, B) partizione di Ω tale che $\mu(A) = 0$ e $\varphi^+(B) = 0$. Siano (A', B') partizione di Ω con $\mu(A') = 0$ e $\varphi^-(B') = 0$. Prendiamo $(A \cup A', B \cap B')$ e mostriamo che è una decomposizione che rende φ μ-singolare. Infatti $(A \cup A') \cup (B \cap B') = (A \cup A' \cup B) \cap (A \cup A' \cup B') = \Omega \cap \Omega = \Omega$ e $(A \cup A') \cap (B \cap B') = ((A \cap B) \cup (A' \cap B)) \cap B' = A' \cap B \cap B' = \varnothing$. Ora si ha che $\mu(A \cup A') = \mu(A) + \mu(A') = 0 + 0 = 0$ e $|\varphi|(B \cap B') = \varphi^+(B \cap B') + \varphi^-(B \cap B') \leq \varphi^+(B) + \varphi^-(B') = 0 + 0 = 0$

iii) $\implies$ i) Ovvia. □

1.11 Derivata di Radon-Nikodym

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. L'obiettivo di questa sottosezione è definire la derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ di una misura relativa φ rispetto a una misura σ-finita μ su $(\Omega, \mathcal{M})$. Il significato di tale derivata è ancora sconosciuto a ogni essere mortale. Arriveremo a una definizione tramite 2 generalizzazioni: prima la definiamo per misure finite, poi per μ misura σ-finita e infine anche per φ relativa.

Teorema 1.53: Decomposizione di Lebesgue-Radon-Nikodym

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Siano μ e φ due misure finite su $(\Omega, \mathcal{M})$. Sia ora

$$\mathcal{F} := \{g : \Omega \to \mathbb{R} : g \geq 0 \ \mu\text{-q.o}, \ g \in L^1, \forall E \in \mathcal{M} \ \int_E g d\mu \leq \varphi(E)\}$$

Allora esiste unica (a meno di uguaglianza μ-q.o.) una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che

$$\int_\Omega f d\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu$$

Definizione 1.20: Derivata di Radon-Nikodym per misure finite

Siano μ e φ misure finite su $(\Omega, \mathcal{M})$. Chiamiamo **derivata di Radon-Nikodym** di φ rispetto a μ la funzione $f \in \mathcal{F}$ del teorema precedente e viene denotata con

$$f = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \quad ; \quad \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu = \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu$$

Dimostrazione del Teorema 1.53, ossia che 1.20 è ben definita.
Iniziamo dimostrando l'unicità. Sia

$$I = \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu = \int_\Omega f_1 d\mu = \int_\Omega f_2 d\mu$$

per due funzioni $f_1, f_1 \in \mathcal{F}$. Ora costruiamo la seguente partizione di Ω:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \Omega : f_1(x) > f_2(x)\} \\ E_2 &= \{x \in \Omega : f_1(x) < f_2(x)\} \\ E_3 &= \{x \in \Omega : f_1(x) = f_2(x)\} \end{aligned}$$

supponiamo ora per assurdo che $\mu(E_1) > 0$. Sia $h = \max\{f_1, f_2\}$, allora $h \in \mathcal{F}$, infatti $h \geq f_1 \geq 0$, $h \in L^1(\Omega)$, perché $f_1, f_2 \in L^1$ e per ogni $E \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \int_E h d\mu &= \int_{E\cap E_1} h d\mu + \int_{E \cap E_2} h d\mu + \int_{E\cap E_3} h d\mu = \\ &= \int_{E\cap E_1} f_1 d\mu + \int_{E\cap E_2} f_2 d\mu + \int_{E \cap E_3} f_1 d\mu \leq \\ &\leq \varphi(E \cap E_1) + \varphi(E \cap E_2) + \varphi(E \cap E_3) = \varphi(E) \end{aligned}$$

tuttavia

$$\int_\Omega h d\mu = \int_{E_1} f_1 d\mu + \int_{E_2 \cup E_3} f_2 d\mu > \int_{E_1} f_2 d\mu + \int_{E_2 \cup E_3} f_2 d\mu = \int_\Omega f_2 d\mu = I$$

ma la f_2 avrebbe dovuto realizzare il sup, assurdo. Ne consegue che $f_1 = f_2$ $\mu - q.o.$.

Ora mostriamo l'esistenza. Chiamiamo

$$I = \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_\Omega g d\mu$$

1. I esiste in quanto $\mathcal{F} \neq \varnothing$ perché $0 \in \mathcal{F}$.
2. $I \geq 0$ poiché $\int_\Omega g d\mu \geq 0$ per ogni $g \in \mathcal{F}$.
3. $I < +\infty$ poiché $\int_\Omega g d\mu \leq \varphi(\Omega)$ per ogni $g \in \mathcal{F}$.

quindi esiste una successione $\{g_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega g_n d\mu = I$$

allora ne estraiamo una sottosuccessione (poi rinominata g_n per comodità) tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : I - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega g_n d\mu \leq I$$

e costruiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la successione $f_n = \max\{g_1, \ldots, g_n\}$. Dimostriamo ora che $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$: $f_n \geq g_1 \geq 0$, $f_n \in L^1(\Omega)$ in quanto assume valori di funzioni integrabili e per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E \cap E_i} f_n d\mu$$

dove gli E_i, per $i = 1, \dots, n$ sono così definiti:

$$
\begin{aligned}
&E_1 = \{x \in \Omega : g_1(x) \geq g_j(x) \, \forall j = 1, \dots, n\} \\
&E_2 = \{x \in \Omega : g_2(x) \geq g_j(x) \, \forall j = 1, \dots, n\} \setminus E_1 \\
&E_3 = \{x \in \Omega : g_3(x) \geq g_j(x) \, \forall j = 1, \dots, n\} \setminus (E_1 \cup E_2) \\
&\quad \vdots \\
&E_n = \{x \in \Omega : g_n(x) \geq g_j(x) \, \forall j = 1, \dots, n\} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right)
\end{aligned}
$$

e quindi formano una partizione di Ω, ne consegue che

$$\int_E f_n d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E \cap E_i} f_n d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E \cap E_i} g_i d\mu \overset{g_i \in \mathcal{F}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \varphi(E \cap E_i) = \varphi(E)$$

quindi $f_n \in \mathcal{F}$ e inoltre

$$I - \frac{1}{n} \leq g_n \leq f_n \implies \int_\Omega g_n d\mu \leq \int_\Omega f_n d\mu \leq I \tag{2}$$

inoltre le f_n formano una successione monotona non decrescente, e quindi per il teorema di Beppo Levi 1.31 abbiamo che $f_n \to f : \Omega \to \mathbb{R}$ q.o. e tale che

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

Per poter finire la dimostrazione, vogliamo che $f \in \mathcal{F}$, che è vero perché $f_n \geq 0 \to f \leq 0$; $f \in L^1$ per Beppo Levi e $f_n \in L^1$; infine per ogni $E \in \mathcal{M}$ abbiamo che

$$\int_E f_n d\mu \leq \varphi(E) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu \leq \varphi(E)$$

e quindi possiamo concludere $f \in \mathcal{F}$ e inoltre da (2) otteniamo che

$$I - \frac{1}{n} \leq \int_\Omega f_n d\mu \leq I \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} I \leq \int_\Omega f d\mu \leq I$$

□

Ora vogliamo generalizzare la definizione di derivata di Radon-Nikodym ad avere μ che sia σ-finita, ossia $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per farlo dobbiamo prima mostrare tre lemmi.

Lemma 1.54. *Sia $\Omega, \mathcal{M}$ uno spazio misurabile e siano μ e φ due misure finite. Allora $\forall g \in \mathcal{F}$ si ha che*

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \geq g \quad \mu - q.o.$$

Dimostrazione. Fissiamo $g \in \mathcal{F}$. Chiamiamo $E_{\geq} = \{x \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial \mu}(x) \geq g(x)\}$ e $E_{<} = \Omega \setminus E_{\geq}$ similmente caratterizzato. Chiamiamo $h := \max\{f, g\}$. Allora $h \in \mathcal{F}$ perché $h \geq f \geq 0$, $h \in L^1$ perché $f, g \in L^1$ e $\forall E \in \mathcal{M}$ abbiamo

$$\int_E h d\mu = \int_{E \cap E_{\geq}} h d\mu + \int_{E \cap E_{<}} h d\mu = \int_{E \cap E_{\geq}} f d\mu + \int_{E \cap E_{<}} g d\mu \leq \varphi(E)$$

ma adesso assumiamo $\mu(E_{<}) > 0$ e abbiamo

$$\int_\Omega h d\mu = \int_{E_{\geq}} f d\mu + \int_{E_{<}} g d\mu > \int_{E_{\geq}} g d\mu + \int_{E_{<}} f d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

che è assurdo per la definizione di f. Quindi $\mu(E_{<}) = 0$ □

Lemma 1.55. *Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia μ una misura σ-finita. Allora esiste una famiglia $\{\Omega_n\}$ tale che*

$$\Omega_n \in \mathcal{M}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega, \quad \mu(\Omega_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \textit{gli } \Omega_n \textit{ sono } \textbf{\textit{disgiunti}}$$

Dimostrazione. Se abbiamo una misura σ-finita μ allora sicuramente esiste una famiglia $\{E_n\}$ che soddisfa le prime tre richieste. Se ora costruiamo

$$\Omega_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

otteniamo una famiglia disgiunta che soddisfa tutte le richieste. □

Lemma 1.56. *Sia $\Omega, \mathcal{M}$ uno spazio misurabile, sia μ una misura σ-finita su di esso e sia φ una misura. Esisterà una collezione Ω_n che soddisfa la tesi del lemma 1.55. Allora chiamiamo $\mu_n = \mu|_{\mathcal{M}_n}$ con $\mathcal{M}_n = 2^{\Omega_n} \cap \mathcal{M}$ e similmente $\varphi_n = \varphi|_{\mathcal{M}_n}$. Sia ora $\{\Theta_n\}$ una collezione di insiemi che ha le stesse proprietà del lemma 1.55 e definiamo come prima $\hat{\mu}_n = \mu|_{\hat{\mathcal{M}}_n}$ e $\hat{\varphi}_n = \varphi|_{\hat{\mathcal{M}}_n}$.*

Se definiamo ora

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu_n} \quad e \quad \hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Theta_n} \frac{\partial \hat{\varphi}_n}{\partial \hat{\mu}_n}$$

allora $f = \hat{f}$ μ-q.o.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $f = \hat{f}$ in $\Omega_i \cap \hat{\Omega}_j$. Questo è vero perché essendo in Ω_i, per il lemma 1.54 abbiamo che $f \geq \hat{f}$ μ_i-q.o. e essendo in $\hat{\Omega}_j$ abbiamo che $\hat{f} \geq f$ $\hat{\mu}_j$-q.o. ma poiché entrambe le misure sono proiezioni di μ, allora $f = \hat{f}$ μ-q.o. in $\Omega_i \cap \hat{\Omega}_j$. Poiché l'unione di tutti questi insiemi è Ω, segue la tesi. □

Definizione 1.21: Derivata di Radon-Nykodim con μ σ-finita

Sia $\Omega, \mathcal{M}$ lo spazio misurabile del lemma 1.56. Allora f come definita sopra è la **derivata di Radon-Nykodim** di φ misura finita rispetto a μ misura σ-finita, ossia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu_n}$$

e poiché le μ_n sono misure finite, ogni termine della sommatoria segue la definizione 1.20

Procedendo con la generalizzazione, vogliamo ora definire la derivata di una generica misura relativa φ rispetto a una misura σ-finita

Definizione 1.22: Derivata di Radon-Nykodim

Sia $\Omega, \mathcal{M}$ uno spazio misurabile, sia μ una misura σ-finita e sia φ una misura relativa. Allora $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ e definiamo la **derivata di Radon-Nykodim**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial \mu} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial \mu}$$

e poiché φ^+, φ^- sono misure finite, seguono la definizione 1.21

Teorema 1.57: Teorema di Radon-Nyokym meno bello

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Siano μ e φ rispettivamente una misura σ-finita e una misura relativa su esso. Sia φ μ-singolare. Allora

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = 0 \quad \mu - q.o.$$

Dimostrazione. Supponiamo μ, φ misure finite e sia φ μ-singolare, ossia esiste una partizione (A, B) di Ω dove $\mu(A) = 0$ e $\varphi(B) = 0$. Consideriamo ora $\mathcal{M} \ni E \subseteq B$, allora

$$0 \leq \int_E \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}}_{\in\mathcal{F} \implies \geq 0} d\mu \overset{\in\mathcal{F}}{\leq} \varphi(E) \leq \varphi(B) = 0$$

e quindi, essendo $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ positiva, vale 0 μ-q.o. su B, ed essendo A μ-trascurabile segue la tesi.

Supponiamo ora che μ sia σ-finita, φ misura finita e μ-singolare. Sia (A, B) la partizione di Ω tale che $\mu(A) = 0$ e $\varphi(B) = 0$. Sia $\{\Omega_n\}$ la partizione di Ω tale che $\mu(\Omega_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo $(A_n, B_n) = (\Omega_n \cap A, \Omega_n \cap B)$. Allora ogni (A_n, B_n) è una partizione di Ω_n e $\mu_n(A_n) \leq \mu(A) = 0$ e $\varphi_n(B_n) \leq \varphi(B) = 0$ per cui ogni φ_n e μ_n-singolare e per il punto precedente

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial\mu_n} = 0 \quad \mu_n\text{-q.o. } \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\Omega_n} \frac{\partial\varphi_n}{\partial\mu_n} = 0 \quad \mu\text{-q.o.}$$

Infine andiamo al caso generale, con μ misura σ-finita e φ misura relativa μ-singolare. Allora per la proposizione 1.52 abbiamo che φ^+ e φ^- sono μ-singolari e quindi per il caso precedente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \frac{\partial\varphi^+}{\partial\mu} - \frac{\partial\varphi^-}{\partial\mu} = 0 - 0 = 0 \quad \mu\text{-q.o.}$$

□

Teorema 1.58: Teorema di Radon-Nykodym più bello

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Siano μ e φ rispettivamente una misura σ-finita e una misura relativa. Sia φ μ-assolutamente continua. Allora

$$\forall E \in \mathcal{M} \quad \int_E \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu = \varphi(E)$$

Dimostrazione per φ, μ misure finite. Supponiamo per assurdo che esista un insieme $E_0 \in \mathcal{M}$ tale che $\int_{E_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu \neq \varphi(E_0)$, e quindi essendo $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \geq 0$ q.o. possiamo assumere che $\int_{E_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu > \varphi(E_0)$. Ne segue che $\varphi(E_0) > 0$ e per μ-a.c. anche $\mu(E_0) > 0$.

Siccome μ è finita

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \int_{E_0} \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} d\mu + \varepsilon\mu(E_0) = \int_{E_0} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu < \varphi(E_0) \tag{3}$$

Definiamo ora la misura $\tilde{\varphi}$ come

$$\tilde{\varphi}(E) = \varphi(E) - \int_E \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \varepsilon\right) d\mu \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

che essendo la differenza di due misure finite è una misura relativa. Sia quindi (A, B) una decomposizione di Hahn rispetto a $\tilde{\varphi}$. Abbiamo ora che $\tilde{\varphi}(E_0) > 0$ per (1) e $\tilde{\varphi}(A) \geq \tilde{\varphi}(A \cap E_0) \geq \tilde{\varphi}(A \cap E_0) + \tilde{\varphi}(B \cap E_0) = \tilde{\varphi}(E_0) > 0$, quindi

$$\varphi(A) > \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varepsilon\right) d\mu \geq 0 \overset{\mu-\text{a.c.}}{\Longrightarrow} \mu(A) > 0$$

Ora sia $f := \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varepsilon \chi_A$. Allora $f \geq 0$, in quanto somma di funzioni non negative; $f \in L^1$ in quanto somma di funzioni L^1 e, $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\int_E f d\mu = \int_{E \cap A} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varepsilon\right) d\mu + \int_{E \cap B} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu \leq \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B) = \varphi(E)$$

quindi abbiamo che $f \in \mathcal{F}$, ma

$$\int_\Omega f d\mu = \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) d\mu + \int_B \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu \overset{\varepsilon>0, \mu(A)>0}{>} \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu + \int_B \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu = \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu$$

che è assurdo perché sappiamo per definizione di $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ che $\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu$ è il sup di tutti gli integrali di funzioni in $\mathcal{F}$. $\square$

Dimostrazione per μ σ-finita e φ misura finita. Sia $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una partizione di Ω tale che $\mu(\Omega_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi le restrizioni $\mu_n, \varphi_n := \mu|_{\Omega_n}, \varphi|_{\Omega_n}$ sono misure finite e φ_n è μ_n-a.c. per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\forall e \in \mathcal{M}$,

$$\int_E \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu = \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu_n} \chi_{\Omega_n}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E \cap \Omega_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu_n} d\mu \underset{\text{finite}}{\overset{\text{misure}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(E \cap \Omega_n) =$$
$$= \varphi(E)$$

$\square$

Dimostrazione generale: μ σ-finita e φ misura relativa. Scomponendo $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ otteniamo che $\forall E \in \mathcal{M}$

$$\int_E \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_E \frac{\partial \varphi^+}{\partial \mu} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial \mu} d\mu = \int_E \frac{\partial \varphi^+}{\partial \mu} d\mu - \int_E \frac{\partial \varphi^-}{\partial \mu} d\mu \underset{\text{mis.}}{\overset{\varphi^\pm}{=}} \varphi^+(E) - \varphi^-(E) =$$
$$= \varphi(E)$$

infatti φ è μ-a.c. e quindi φ^+ e φ^- sono μ-a.c. $\square$

Teorema 1.59: Teorema di Lebesgue

Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, con μ misura e φ misura relativa. Allora esiste unica una misura φ_a μ-assolutamente continua e esiste unica una misura φ_s μ-singolare tali che

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_s$$

Esistenza, φ misura finita. Sia $K = \sup\{\varphi(N) : N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0\}$. Se $K = 0$ allora $\varphi = \varphi_a$ è μ-a.c. e $\varphi_s = 0$. Assumiamo quindi $K > 0$. Esiste quindi una successione E_n di insiemi misurabili tali che $\lim_{n \to \infty} \varphi(E_n) = K$ e $\mu(E_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia ora $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Allora $\mu(E) = 0 \implies \varphi(E) \leq K$ e $\varphi(E) \geq \varphi(E_n)$ per ogni n, quindi per l'arbitrarietà di n abbiamo che $\varphi(E) \geq K$. Ne consegue proprio $\varphi(E) = K$.

Sia ora

$$\begin{aligned} \varphi_a(E) &:= \varphi(A \smallsetminus E) && \forall A \in \mathcal{M} \\ \varphi_s(E) &:= \varphi(A \cap E) && \forall A \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Allora per ogni A misurabile abbiamo

- $\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \smallsetminus E) = (\varphi_s + \varphi_a)(A)$ ok.
- φ_a è μ-a.c. infatti se $N \in \mathcal{M}$ è tale che $\mu(N) = 0$ e se fosse vero che $\varphi_a(N) = \varphi(N \smallsetminus E) > 0$ allora avremmo $\varphi(E \cup N) = \varphi(N \smallsetminus E) + \varphi(E) > \varphi(E)$ che è assurdo
- φ_s è μ-singolare infatti presa la decomposizione $(E, \Omega \smallsetminus E)$ abbiamo che $\mu(E) = 0$ e $\varphi_s(\Omega \smallsetminus E) = \varphi((\Omega - E) \cap E) = \varphi(\varnothing) = 0$

$\square$

Esistenza, φ misura relativa. Sia $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ differenza di misure finite. Allora abbiamo

$$\begin{cases} \varphi^+ = \varphi_a^+ + \varphi_s^+ \\ \varphi^- = \varphi_a^- + \varphi_s^- \end{cases} \implies \varphi = \varphi^+ - \varphi^- = \underbrace{(\varphi_a^+ - \varphi_a^-)}_{:=\varphi_a} + \underbrace{(\varphi_s^+ - \varphi_s^-)}_{:=\varphi_s}$$

dove φ_a e φ_s sono rispettivamente μ-a.c. e μ-singolare perché differenze di misure μ-a.c. e μ-singolari. $\square$

Unicità. Sia $\varphi = \varphi_s + \varphi_a = \varphi'_s + \varphi'_a$, ne consegue che $\varphi_s - \varphi'_s = \varphi'_a - \varphi_a =: \varphi_0$ e quindi φ_0 è sia μ-a.c. che μ-singolare, quindi $\varphi_0 = 0$ e di conseguenza $\varphi_s = \varphi'_s$ e $\varphi_a = \varphi'_a$. $\square$

2 Analisi Funzionale

In tutti gli spazi vettoriali considerati in questa sezione, il campo su cui opereremo sarà $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2.1 Spazi normati

Definizione 2.1: Spazio normato

Uno spazio normato è uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ dotato di una norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

1. *(definita positività)* $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. *(omogeneità)* $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$
3. *(diseguaglianza triangolare)* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, y \in V$

Esempio 2.1. $V = \mathbb{R}$, con norma $|\cdot|$

Esempio 2.2. $V = \mathbb{C}$, con norma $|\cdot| : x \mapsto x\overline{x}$

Esempio 2.3. $V = \mathbb{R}^N$ o $\mathbb{C}^N$ con la norma euclidea, ossia $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2}$

Esempio 2.4. $V = C^0[-1, 1]$ spazio vettoriale reale delle funzioni $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue in ogni punto. La norma è data da $\|f\|_\infty = \max f([-1, 1])$. La norma $\|\cdot\|_\infty$ è detta **norma uniforme** o norma infinito, e non è l'unica norma. Ad esempio possiamo definire

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)|dx$$

che è una norma perché è sempre positiva, vale 0 se e solo se $f = 0$, nel caso di $f \in C^0$, per linearità dell'integrale segue l'omogeneità e per la diseguaglianza triangolare del modulo e la linearità dell'integrale abbiamo che vale anche la diseguaglianza triangolare.

Esercizio 2.1

Verificare che le precedenti norme sono effettivamente norme.

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, dove la distanza tra due punti è data dalla norma della loro differenza. Un problema interessante è valutare se diverse norme danno su uno spazio metrico la stessa topologia, ossia caratterizzare le norme equivalenti.

Ricordiamo che in uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ gli aperti sono così caratterizzati: un insieme $A \subseteq V$ è aperto se e solo se per ogni $x \in A$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq A$, dove $B_\varepsilon(x) = \{y \in V : \|y - x\| < \varepsilon\}$. Inoltre $C \subseteq V$ è chiuso se $V \smallsetminus C$ è aperto. $\{x_n\} \subseteq V$ è convergente se esiste $x \in V$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. C è chiuso se e solo se $\forall$ successione convergente contenuta in C, questa ha limite in C.

Le funzioni continue tra spazi normati $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ sono così caratterizzate: $f : V \to W$ è continua in $x_0 \in V$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad \|x - x_0\|_V < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_W < \varepsilon$$

Allora $f : V \to W$ è continua se è continua in ogni punto di V. Questo è equivalente alla definizione topologica, dove f è continua se per ogni aperto $A \subseteq W$ allora la controimmagine $f^{-1}(A) = \{x \in V : f(x) \in A\}$ è un aperto di V. Ancora questa è equivalente a dire che per ogni successione $\{v_n\}$ convergente in V, allora $f(v_n)$ converge in W a $f(\lim_{n\to\infty} v_n)$

Proposizione 2.1. *In uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$, la funzione $x \mapsto \|x\|$ è una funzione continua*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in V$ e $\varepsilon > 0$. Allora

$$\|x - x_0\| < \delta \implies |\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| < \delta$$

scegliendo $\delta = \varepsilon$ abbiamo la tesi. □

In uno spazio vettoriale V si possono considerare più norme, vediamo alcuni esempi di norme diverse su $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad p \in [1, +\infty)$$

Come sono fatte le palle? Vedasi figura 4 Data una coppia (p, q) e fissata la palla

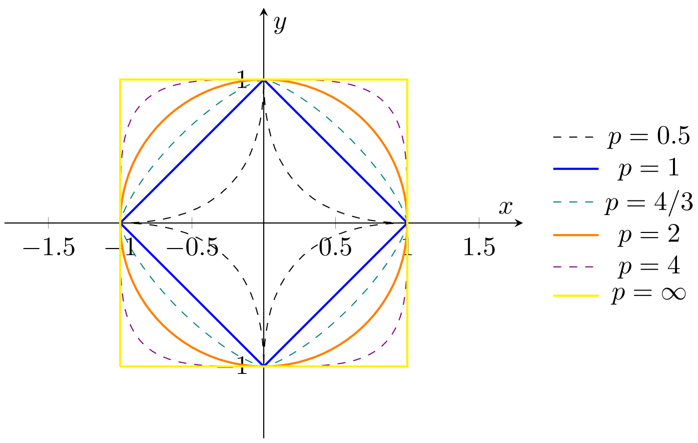


Figura 4: Palle $\|x\|_p < 1$ in $\mathbb{R}^2$

$\|x\|_p < 1$ esistono due palle $\|x\|_q < r$ e $\|x\|_q < R$ con R e r positivi, tali che la prima è contenuta in $\|x\|_p < 1$ e l'altra contiene $\|x\|_p < 1$.

Notare che si potrebbe in teoria prendere anche $p < 1$ ma non è più una norma perché non c'è la diseguaglianza triangolare.

Struttura topologica di uno spazio normato Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ è in particolare uno spazio metrico in cui la distanza d è quella indotta dalla norma, ossia $d(x, y) = \|x - y\|$. Questa è effettivamente una distanza, ad esempio per la disuguaglianza triangolare abbiamo che $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in V$. Possiamo quindi usare la struttura metrica per definire la topologia di V, ossia la topologia che ha come base le palle aperte rispetto alla distanza, ossia

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in V, \varepsilon > 0\}$$

Poiché gli aperti di una topologia che ha base $\mathcal{B}$ sono così caratterizzati:

$$A \text{ aperto} \iff \forall x \in A \quad \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq A$$

Infatti. Sia A aperto, allora $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $B_i \in \mathcal{B}$, e allora per ogni $x \in A$, deve essere che $x \in B_i$ per qualche i. Viceversa per ogni $x \in A$, sia B_x un aperto della base tale che $x \in B_x \subseteq A$, allora evidentemente $A = \bigcup_{x \in A} B_x$ è aperto □

ne consegue che gli aperti di uno spazio normato sono

$$A \subseteq V \text{ aperto} \iff \forall x \in A \quad \exists \delta > 0 : B_\delta(x) = \{y \in V : \|x - y\| < \delta\} \subseteq A$$

Una successione convergente in $(V, \|\cdot\|)$ è una successione di punti $\{x_n\} \subseteq V$ tale che esiste $x \in V$ tale che $\|x_n - x\| \to 0$ per $n \to \infty$.

Un chiuso $C \subseteq V$ è tale se $V \setminus C$ è aperto. Nel caso degli spazi normati, i chiusi sono così caratterizzati:

$$C \subseteq V \text{ chiuso} \iff \forall \{x_n\} \subseteq C \text{ convergente in } V \text{ si ha che } \lim_{n \to \infty} x_n \in C$$

Un **sottospazio** W di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è un sottoinsieme di V che è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V. Ossia è tale che $\forall x, y \in W$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ allora $\alpha x + \beta y \in W$. Inoltre un sottospazio vettoriale di uno spazio normato è a sua volta uno spazio normato, con la stessa norma ristretta al sottospazio.

Esempio 2.5. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidea e sia $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ il sottospazio delle ascisse. Allora W è uno spazio normato con la norma euclidea ristretta a W, ossia $\|x\| = |x|$. Anche il sottospazio $\{0\}$ costituito dal solo vettore nullo è un sottospazio di V.

Altri sottospazi di V sono ad esempio tutte le rette del tipo $\{\alpha x + \beta y = 0\}$ con α e β fissati

Possiamo chiederci quali di questi sottospazi siano chiusi. Allora chiaramente $\{0\}$ è chiuso (in qualsiasi spazio normato), in quanto controimmagine attraverso la funzione distanza da 0 del chiuso $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ (oppure perché normato $\implies$ metrico $\implies$ $T1$). I sottospazi di dimensione 1 sono anche chiusi, in quanto controimmagine di $\{0\}$ attraverso la funzione continua $(x, y) \mapsto \alpha x + \beta y$.

Esempio 2.6. Sia $V = C^0[0, 1]$ con la norma $\|f\|_\infty = \max f([0, 1])$. Prendiamo come sottospazio $X = \{$polinomi di qualunque grado su $[0, 1]$ $\}$. Allora X è un sottospazio vettoriale in quanto $X \subseteq V$ e se $f, g \in X$ allora $f + g \in X$ e $\alpha f \in X$.

È chiuso X in V? No. Infatti possiamo costruire successioni di polinomi che convergano in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ (convergenza uniforme) ma il cui limite non è in X. Ad esempio consideriamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

che nell'intervallo $[0, 1]$ le ridotte tendono alla funzione e^x uniformemente in $[0, 1]$, ma il limite e^x non è un polinomio.

Definizione 2.2: Norme equivalenti

Date $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ norme in V, queste si dicono **equivalenti** se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$C_1 \|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C_2 \|v\|_a \quad \forall v \in V$$

Osservazione. La precedente è una relazione di equivalenza, infatti

- *riflessiva* $\|v\|_a = \|v\|_a$

- *simmetrica* se $C_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C_2\|v\|_a$ allora $\frac{1}{C_2}\|v\|_b \leq \|v\|_a \leq \frac{1}{C_1}\|v\|_b$
- *transitiva* se $C_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C_2\|v\|_a$ e $C_3\|v\|_b \leq \|v\|_c \leq C_4\|v\|_b$ allora $C_1C_3\|v\|_a \leq \|v\|_c \leq C_2C_4\|v\|_a$

Proposizione 2.2. *Due norme equivalenti inducono la stessa topologia sullo spazio V: gli aperti rispetto a una norma sono aperti anche rispetto all'altra, e viceversa.*

Proposizione 2.3. *In uno spazio vettoriale V di dimensione finita tutte le norme sono tra loro equivalenti*

Dimostrazione. Sia V di dimensione N. Fissiamo una base $\{e_1, \dots, e_N\}$. Ogni elemento $v \in V$ si può scrivere come $v = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$ per opportuni scalari α_i. Sia $\|\cdot\|_1$ la norma 1, ossia $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|$. Allora questa è una norma perché è sempre positiva, vale 0 solo se tutti gli $\alpha_i = 0$, ossia $v = 0$, vale l'omogeneità perché il modulo è omogeneo e vale la diseguaglianza triangolare perché vale per il modulo.

Sia ora $\|\cdot\|$ una norma qualunque in V.

$$\|v\| = \left\|\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^N |\alpha_i|\|e_i\| \leq M \sum_{i=1}^N |\alpha_i| = M\|v\|_1$$

per $M = \max_{1\leq i\leq N} \|e_i\|$. Ora dobbiamo provare che

$$\exists m > 0 \quad \forall x \in V \text{tale che} \quad \|v\| \geq m\|v\|_1$$

e la dimostriamo per assurdo, ossia diciamo che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in V \text{ tale che } \|x_k\|_1 > k\|x_k\|$$

Notiamo che $\|x_k\|_1 > 0$ per ogni k, quindi possiamo definire per ogni k

$$u_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_1} \implies \|u_k\|_1 = 1 > k\|u_k\|$$

Rappresentiamo ora u_k come

$$u_k = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,k} e_i$$

e quindi abbiamo N successioni $\{\alpha_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ reali o complesse tali che $\sum_{i=1}^N |\alpha_{i,k}| = 1$ e quindi tutte le successioni sono limitate. Allora per compattezza ne esiste un'estratta $\{k_n\}$ tale che $\alpha_{i,k_n} \to \alpha_i$ in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Abbiamo ora la successione u_{k_n} che quindi converge a $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$ rispetto a entrambe le norme, abbiamo che

$$\|u\| \leq \|u - u_{k_n}\| + \|u_{k_n}\| < \|u - u_{k_n}\| + \frac{1}{k_n} \to 0$$

per cui $\|u\| = 0$ e quindi $u = 0$, ma d'altra parte

$$|\|u\|_1 - 1| = |\|u\|_1 - \|u_{k_n}\|_1| \leq \|u - u_{k_n}\|_1 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i - \alpha_{i,k_n}| \to 0$$

ma allora $\|u\|_1 = 1$ che è una contraddizione. □

Esempio 2.7 (Norme non equivalenti). Sia $V = C^0[-1,1]$ con le norme $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)|dx$ e $\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. Queste due norme non sono equivalenti,

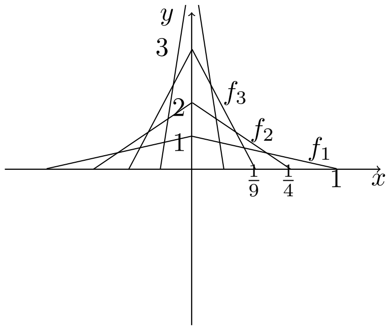


Figura 5: triangoli

infatti non è vero che esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ per ogni $f \in V$. In particolare vogliamo mostrare che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists f_k \in V : \|f_k\|_\infty > k\|f_k\|_1$$

Se prendiamo funzioni f_k come in figura 5 abbiamo che il massimo di f_k è k e l'integrale è $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k^2} \cdot k = \frac{1}{k}$. Allora abbiamo che

$$\frac{\|f_k\|_\infty}{\|f_k\|_1} = \frac{k}{\frac{1}{k}} = k^2 > k \text{ per ogni } k > 1$$

Definizione 2.3: Spazio di Banach

Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ si dice **di Banach** se è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma

Esempio 2.8. Gli spazi $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ sono spazi di Banach.

Esercizio 2.2

Mostrare che $C^0[-1, 1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach

Esempio 2.9. Su $V = C^0[-1, 1]$, la norma $\|\cdot\|_1$ non induce uno spazio di Banach. Dobbiamo trovare una successione di Cauchy che non converge in V, quindi ad esempio trovare una funzione che converga a una funzione non continua. Prendiamo

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(nx) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \text{sign}x \text{ q.o.}$$

allora f_n è una successione di Cauchy, ossia

$$I_{n,m} := \int_{-1}^{1} |f_n - f_m| = \int_{-1}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - \frac{2}{\pi} \arctan(mx) \right| dx \to 0 \text{ per } n, m \to \infty$$

infatti

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_{-1}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - \text{sign}x + \text{sign}x - \frac{2}{\pi} \arctan(mx) \right| \leq \\ &\leq \int_{-1}^{1} \left| \frac{2}{\pi} \arctan(nx) - \text{sign}x \right| dx + \int_{-1}^{1} \left| \text{sign}x - \frac{2}{\pi} \arctan(mx) \right| dx \end{aligned}$$

e vogliamo mostrare che entrambi gli integrali tendono a 0. Prendendo ad esempio il primo

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{2}{\pi}\arctan{(nx)}-\text{sign}x\right|dx = 2\int_{0}^{1}\left|\frac{2}{\pi}\arctan{(nx)}-1\right|dx \to 0 \text{ per } n\to\infty$$

dove per l'ultimo limite possiamo usare sia il teorema della convergenza dominata (1.32) che il teorema della convergenza monotona (1.31). Dunque la successione è di Cauchy, ma non converge ad una funzione in $C^0[-1,1]$

Esercizio 2.3

Sia V uno spazio vettoriale con due norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ e rispetto a $\|\cdot\|$ V è uno spazio di Banach. Mostrare che, se le due norme sono equivalenti, allora V è uno spazio di Banach anche con la norma $\|\cdot\|'$.

Osservazione. Se le norme non sono equivalenti, allora non si può dire nulla

Proposizione 2.4. *Se V è uno spazio normato e $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale allora W è uno spazio normato con la norma di V ristretta a W. Inoltre*

a. Se W ha dimensione finita allora W è necessariamente chiuso.

b. Se V è uno spazio di Banach, allora ogni sottospazio $W \subseteq V$ chiuso risulta esso stesso un Banach rispetto alla norma

Dimostrazione. È chiaro che se $(V, \|\cdot\|)$ è normato, la stessa norma su W è una norma, infatti chiaramente valgono ancora le tre proprietà della norma, dove semplicemente invece di $\forall x \in V$ avremo $\forall x \in W$ ma questo non cambia nulla. Inoltre

a. Sia $\{f_n\} \subseteq W$, con $f_n \to f$ in $(V, \|\cdot\|)$. Allora $f_n \to f$ in $(W \cup \{f\}, \|\cdot\|)$. Ma poiché $W \cup \{f\}$ ha dimensione finita, tutte le norme su di esso sono equivalenti, allora allora $f_n \to f$ anche rispetto ad altre norme. Supponiamo che $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ sia una base di W e supponiamo per assurdo che $f \notin W$. Allora ogni $f_n = 0 \cdot f + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^n e_i$ e poiché $f_n \to f$ in norma 1, allora

$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \iff 0 = \lim_{n\to\infty} |0-1| + \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i^n - 0| \geq 1$$

che è assurdo, quindi $f \in W$, ossia W è chiuso.

b. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in W con la norma $\|\cdot\|$. Quindi $f_n \in W$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\|f_n - f_m\| \to 0$ per $n, m \to \infty$. Segue quindi che f_n è di Cauchy in $(V, \|\cdot\|)$ e quindi, essendo V completo, esiste $f \in V$ tale che $\|f_n - f\| \to 0$ per $n \to \infty$. Dobbiamo mostrare che $f \in W$ ma poiché W è chiuso questo è ovvio.

□

Esempio 2.10 ($W \subseteq V$, W Banach, V no)**.** È possibile che W sia uno spazio di Banach mentre V no. Ad esempio sia $V = C^0[-1,1]$ con la norma $\|\cdot\|_1$. Sappiamo che non è uno spazio di Banach per l'esempio 2.9. Sia $W = \{f \in V : f(x) = \alpha \in \mathbb{R}\}$ il sottospazio delle funzioni costanti. È un sottospazio perché se $a, b \in W$ allora anche $\alpha a + \beta b$ è una funzione costante. Inoltre W è completo in quanto omeomorfo a $\mathbb{R}$ con la norma euclidea, che è completo.

Esempio 2.11. Prendiamo $V = C^0[-1,1]$ cone la norma $\|\cdot\|_\infty$ che rende V uno spazio di Banach. Consideriamo lo spazio W dei polinomi che non è chiuso in V perché contiene tutti i polinomi di Taylor di e^x ma non la funzione limite e^x. In realtà, W è **denso** in V, ossia

$$\forall f \in V \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in W : \|f - g\|_\infty < \varepsilon$$

oppure

$$\forall f \in V, \quad \exists \{g_n\} \subseteq W \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_\infty = 0$$

(poiché $W \neq V$ chiaramente se è denso non è chiuso)

Alcuni sottospazi chiusi di V invece sono ad esempio

- i sottospazi di dimensione finita (e.g. polinomi di grado 10)
- $Z = \{f \in C^0[-1,1] : f(0) = 0\}$ infatti se $f_n \to f$ in $(V, \|\cdot\|_\infty)$ allora $f_n \to$ uniformemente e quindi puntualmente e quindi $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$
- $T = \{f \in C^0[-1,1] : \int_{-1}^1 f(t)dt = 0\}$ è chiuso infatti se $f_n \to f$ uniformemente e $\int_{-1}^1 f_n(t)dt = 0 \to \int_{-1}^1 f(t)dt = 0$ perché c'è convergenza uniforme

2.2 Spazi L^p

Definizione 2.4: Spazio L^p

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Per $p \in [1, +\infty)$ definiamo lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ come lo spazio delle funzioni misurabili $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tali che

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty$$

Se $p = +\infty$ allora $L^{+\infty}(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è lo spazio delle funzioni misurabili $f : \Omega \to \mathbb{K}$ e **essenzialmente limitate**, ossia tali che

$$\exists M > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N, \quad \mu(N) = 0$$

ossia che f è limitata μ-q.o.

Nota. Se $p = 1$ allora $|f|$ è integrabile se e solo se f è integrabile, in altre parole $f \in L^1 \iff |f| \in L^1$. Questo è un caso particolare

Nota. Vedremo che, per $1 \leq p \leq p' < +\infty$ si ha che che $f \in L^{p'} \implies f \in L^p$. Questo non vale evidentemente per $p = \infty$. Infatti ad esempio per $f = 1$ su $\Omega = \mathbb{R}^N$ abbiamo che evidentemente f è limitata quindi $f \in L^{+\infty}$, ma $f \notin L^p$ per ogni $p \in [1, +\infty)$

Gli elementi degli spazi L^p non sono funzioni, ma classi di funzioni, equivalenti μ-q.o.

Osservazione. Ogni spazio L^p è uno spazio vettoriale. L'unica condizione che non è ovvia è verificare che se $f, g \in L^p$ allora $f + g \in L^p$. Infatti se $p = +\infty$ allora è ovvio che $f + g$ è limitata μ-q.o. Se $p < +\infty$ allora

$$|f + g|^p d\mu \leq (|f| + |g|)^p d\mu \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

Ne consegue che $f + g \in L^p$, infatti

$$\int_\Omega |f + g|^p d\mu \leq 2^p \int_\Omega (|f|^p + |g|^p) d\mu < 2^p \left(\int_\Omega |f|^p d\mu + \int_\Omega |g|^p d\mu \right) < +\infty$$

Proposizione 2.5. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora per ogni $p \in [1, +\infty]$ lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio normato con norma*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } p \in [1, +\infty) \\ \inf\{M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} & \text{se } p = +\infty \end{cases}$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione nel caso $p < +\infty$ e $p = +\infty$

Caso $p < +\infty$:

- La norma è ben definita perché se $f = g$ q.o. allora $|f|^p = |g|^p$ q.o. e quindi $\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Omega |g|^p d\mu$ e di conseguenza $\|f\|_p = \|g\|_p$
- *Definita positività* $\|f\|_p = 0 \iff \int_\Omega |f|^p d\mu = 0 \iff |f|^p = 0 \quad \mu\text{-q.o.} \iff |f| = 0 \quad \mu\text{-q.o.} \iff f = 0 \quad \mu\text{-q.o.}$
- *Omogeneità* $\|\lambda f\|_p = \left(\int_\Omega |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\lambda| |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|f\|_p$
- *Diseguaglianza triangolare* Difficile da dimostrare, è chiamata diseguaglianza di Minkowski e la dimostreremo più avanti.

Caso $p = +\infty$:

- La norma è ben definita perché se $f = g$ q.o. allora ogniqualvolta M è maggiorante quasi ovunque di f lo è anche di g, e quindi $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ perché sono l'inf dello stesso insieme. Inoltre in realtà è evidentemente un min.

- *Definita positività* $\|f\|_\infty = 0 \iff \inf\{M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = 0 \iff |f| \leq 0 \quad \mu\text{-q.o.} \iff f = 0 \quad \mu\text{-q.o.}$

- *Omogeneità* $\|\lambda f\|_\infty = \inf\{M > 0 : |\lambda f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = \inf\{|\lambda| M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = |\lambda| \inf\{M > 0 : |f| \leq M \quad \mu\text{-q.o.}\} = |\lambda| \|f\|_\infty$

- *Diseguaglianza triangolare* Evidente, infatti ogni costante che maggiori $|f| + |g|$ necessariamente maggiora $|f + g|$ ed è almeno $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

□

Proposizione 2.6 (Diseguaglianza di Young)**.** *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e p' tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, con la convenzione che $\frac{1}{\infty} = 0$. Allora per ogni $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vale che $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$.*

Dimostrazione. Se $a = 0$ o $b = 0$ allora la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo quindi che $a, b > 0$. Osserviamo che il logaritmo è una funzione concava su $R_{>0}$ e quindi $\ln(tx + (1-t)y) \geq t \ln x + (1-t) \ln y$ per ogni $x, y > 0$ e $t \in [0, 1]$. Applichiamo questa disuguaglianza con $x = a^p$, $y = b^{p'}$, $t = \frac{1}{p}$, $(1 - t) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$. Otteniamo

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \ln a + \ln b \implies \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \geq ab$$

dove l'ultima uguaglianza è per la monotonia del logaritmo. □

Definizione 2.5: Esponenti coniugati

Se $1 \leq p, p' \leq \infty$ verificano $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ anche in senso generalizzato, ossia se $p = 1$ e $p' = +\infty$ o $p = \infty$ e $p' = 1$, allora si dicono **esponenti coniugati**.

Teorema 2.7: Diseguaglianza di Hölder

Siano $p, p' \in [1, \infty]$ esponenti coniugati. Allora se $f \in L^1(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ allora $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e vale

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

Dimostrazione. Se $p = 1$ o $p = +\infty$ allora è semplice. Supponiamo ad esempio $p = 1$,

$$|fg|(x) \leq |f|(x)|g|(x) \leq |f|(g)\|g\|_\infty \quad \text{q.o.}$$

quindi fg è dominata da una funzione integrabile ed è dunque integrabile, inoltre

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

Sia ora $p \in (1, \infty)$. Se f o g è la funzione nulla allora la diseguaglianza è ovvia, quindi supponiamo $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_{p'}$. Ora dividiamo in due passi

1. u, v nelle stesse ipotesi di f e g ma con $\|u\|_p = 1 = \|v\|_{p'}$. Allora
$$|uv(x)| \leq \frac{1}{p}|u(x)|^p + \frac{1}{p'}|v(x)|^{p'} \quad \text{(Young 2.6)}$$
quindi $uv \in L^1(\Omega)$ in quanto dominata da funzione somma di funzioni integrabili. Allora abbiamo
$$\|uv\|_1 = \int_\Omega |uv| d\mu \leq \frac{1}{p} int_\Omega |u|^p d\mu + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

2. f, g generiche. Sia $M = \|f\|_p$ e $N = \|g\|_{p'}$. Allora $\frac{f}{M}, \frac{g}{N} \in L^p$ e $L^{p'}$ rispettivamente e $\left\|\frac{f}{M}\right\|_p = 1 = \left\|\frac{g}{N}\right\|_{p'}$. Applichiamo il punto precedente a $\frac{f}{M}$ e $\frac{g}{N}$ e otteniamo che $fg \in L^1$ e inoltre
$$\left\|\frac{f}{M} \cdot \frac{g}{N}\right\|_1 \leq 1 \implies \frac{1}{MN}\|fg\|_1 \leq 1 \implies \|fg\|_1 \leq MN = \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

□

Proposizione 2.8 (Minkovsky o disuguaglianza triangolare)**.** *Se* $f, g \in L^p(\Omega)$ *allora* $f + g \in L^p(\Omega)$ *e*
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Dimostrazione. Già sappiamo che $f + g \in L^p(\Omega)$. Allora
$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu = \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f+g| d\mu \leq \int_\Omega \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{:=w} |f| d\mu + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g| d\mu$$
$w \in L^{p'}(\Omega)$?
$$\int_\Omega |w|^{p'} d\mu = \int_\Omega |f+g|^{(p-1)p'} d\mu = \int_\Omega |f+g|^p d\mu$$
dove si è usato che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \implies p' + p = pp'$. Troviamo quindi
$$\|w\|_{p'} = \left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1}$$
Ora possiamo applicare Hölder e ottenere
$$\|f+g\|_p^p \leq \|w\|_{p'}\|f\|_p + \|w\|_{p'}\|g\|_p = \|f+g\|^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$
e infine dividendo per $\|f+g\|^{p-1}$ otteniamo la diseguaglianza triangolare □

Con la precedente proposizione abbiamo effettivamente finito di dimostrare la proposizione 2.5 che diceva che L^p è uno spazio normato.

Teorema 2.9: L^p è Banach

Per ogni $p \in [1, \infty]$, lo spazio $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di Banach

dimostrazione per $p = +\infty$. Sia $\{f_n\} \subseteq L^\infty(\Omega)$ una successione di Cauchy. Quindi
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n, m \geq n_k \implies \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k} \tag{4}$$

cioè $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $x \in \Omega \smallsetminus N_{k,n,m}$, con $N_{k,n,m}$ trascurabile. Consideriamo ora l'insieme

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n,m \geq n_k} N_{k,n,m}$$

perciò N è unione numerabile di trascurabili e quindi è trascurabile. Allora sappiamo che in (4) l'ultima diseguaglianza può significare $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$ per ogni $x \in \Omega \smallsetminus N$. Questo significa che $\{f_n(x)\} \in \mathbb{R}$ è di Cauchy e quindi convergente per ogni $x \in \Omega \smallsetminus N$ e introduciamo la funzione

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N$$

che è misurabile perché limite di funzioni misurabili. Ora portando $m \to \infty$ nella diseguaglianza precedente otteniamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N \tag{5}$$

ci resta da dimostrare che $f \in L^\infty(\Omega)$ e che $f_n \to f$ in $L^\infty(\Omega)$. La prima è vera, perché ad esempio

$$|f(x)| \leq |f_{n_k}(x)| + |f(x) - f_{n_k}(x)| \leq \|f_{n_k}\|_\infty + \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N$$

e la seconda pure, infatti ora riprendendo la (5) e la (4) otteniamo

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_k \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \smallsetminus N$$

□

dimostrazione con $1 \leq p < +\infty$. Sia f_n una successione di Cauchy in L^p, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad m, n \geq n_\varepsilon \implies \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon \tag{6}$$

Vogliamo dimostrare che esiste un'estratta convergente. Consideriamo l'n_1 dato dalla (6) per $\varepsilon = \frac{1}{2}$, e consideriamo f_{n_1}. Prendiamo ora $n_2 = \max n_{\varepsilon = \frac{1}{2^2}}, n_1 + 1$ e consideriamo f_{n_2}, dove il primo argomento è dato dal valore restituito dall'equazione 6. Procediamo in questo modo, ogni volta prendendo

$$f_{n_k} = f_{\max\{n_{\varepsilon = \frac{1}{2^k}}, n_{k-1}+1\}}$$

e abbiamo quindi che si verifica

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

definiamo ora $u_k := f_{n_k}$ e vogliamo mostrare che u_k converge in L^p a qualche elemento f. A tale scopo sia

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^{k} |u_{i+1}(x) - u_i(x)|$$

che è la ridotta di una serie a termini non negativi e inoltre ogni $g_k \in L^p(\Omega)$. Inoltre

$$\|g_k\|_p = \sum_{i=1}^{k} \|u_{i+1} - u_i\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \leq 1 \implies \int_\Omega \underbrace{|g_k|^p}_{=:h_k} d\mu \leq 1$$

Allora $h_k := |g_k|^p$ è una successione monotona crescente e sono tutte non negative. Quindi per Beppo Levi (Teorema 1.31) possiamo concludere che esiste h misurabile e non negativa tale che

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x) \text{ e } \int_\Omega h d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega h_k d\mu \leq 1$$

succede quindi che $g_k(x) \to g(x)$ per ogni $x \in \Omega$, con $g \in L^p$ perché $\int_\Omega |g(x)|^p d\mu \leq 1$. Abbiamo ora che, se $n > m$

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |u_{i+1} - u_i(x)| \leq g_{n-1}(x) - g_{m-1}(x) \leq g(x) - g_{m-1}(x) \quad (7)$$

per $x \in \Omega$ fissato $\{u_k(x)\}$ è una successione di Cauchy e dunque possiamo definire una funzione

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Infine vogliamo controllare che $f \in L^p(\Omega)$ e che $u_k \to f$ in $L^p(\Omega)$. Passando al limite per $n \to \infty$ in (7) otteniamo

$$|f(x) - u_m(x)| \leq g(x) - g_{m-1}(x) \leq g(x) \implies |f(x)| \leq |u_n(x)| + g(x)$$

e quindi $f \in L^p$ perché è dominata da una funzione L^p, in quanto somma di due tali funzioni. D'altra parte per la stessa equazione, portando anche $m \to \infty$ otteniamo che il secondo membro tende a 0, e quindi $u_m \to f$ q.o. in Ω. Inoltre

$$|f(x) - u_m(x)|^p \leq |g(x)|^p = g(x) \in L^1(\Omega)$$

e possiamo applicare il teorema 1.32 di convergenza dominata di Lebesgue per cui

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |f(x) - u_m(x)|^p \, d\mu = 0 \iff \|f - u_m\|_p^p \longrightarrow 0$$

□

Corollario 2.9.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione convergente a $f \in L^p(\Omega)$. Allora esistono una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ e una funzione $w \in L^p(\Omega)$ tali che*

1. *$f_{n_k} \to f$ q.o. in Ω*
2. *$|f_{n_k}(x)| \leq w(x)$ per q.o. $x \in \Omega$*

Dimostrazione. Se $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ allora è di Cauchy in L^p e quindi esiste sicuramente un'estratta $u_k := f_{n_k}$ tale che u_k converge q.o. a una funzione $\tilde{f}$ e inoltre

$$\left|\tilde{f}(x) - u_k(x)\right| \leq g(x) \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies |u_k(x)| \leq \left|\tilde{f}(x)\right| + g(x)$$

per cui possiamo prendere $w(x) = \left|\tilde{f}(x)\right| + g(x) \in L^p(\Omega)$. Ci rimane da controllare che $f \equiv \tilde{f}$ q.o. in Ω: questo è vero in quanto u_k converge in L^p sia a f (per ipotesi) che a $\tilde{f}$ (per quanto appena detto) dunque per l'unicità del limite f e $\tilde{f}$ devono appartenere alla stessa classe di funzioni in L^p.

Per $p = +\infty$ la tesi vale più banalmente. □

Osservazione. Convergenza in L^∞ implica convergenza quasi uniforme

Il corollario 2.9.1 si può espandere a dire che tutta la funzione converge quasi ovunque? No. Consideriamo ad esempio la successione

$$\begin{aligned} &f_1 = \chi_{[0,1]}, \quad f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \quad f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]} \\ &f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{3}]}, \quad f_5 = \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, \quad f_6 = \chi_{[\frac{2}{3},1]} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Questa successione converge a 0 in $L^p(0,1)$ per ogni $1 \leq p < \infty$, infatti

$$\int_0^1 |f_n - 0|^p dx = \int_0^1 |f_n|^p dx = \frac{1}{k_n} \to 0$$

tuttavia non converge quasi ovunque a 0, infatti per ogni $x \in (0,1)$ la successione $f_n(x)$ non ha limite perché non smette mai di assumere anche il valore 1.

Proposizione 2.10 (Convergenze)**.**

1. $$\textit{Conv. in } L^\infty \implies \textit{conv. q.u} \implies \begin{cases} \textit{conv. q.o.} \\ \textit{conv. in misura} \end{cases}$$

2. *Conv. in* $L^p(\Omega)$ *per* $1 \leq p < \infty \implies$ *conv. q.o. per un estratta (come la convergenza in misura)*

3. *Conv. in* $L^p(\Omega)$ *per* $1 \leq p < \infty \implies$ *Conv. in misura*

4. *Se* $\mu(\Omega) < +\infty$ *e* $1 \leq p < q \leq \infty$ *allora* $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ *e si ha che*

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega)$$

Dimostrazione. La terza è vera perché se $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ e definiamo $A_n = \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$

$$\varepsilon^p \mu(A_n) \leq \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \leq \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Per la quarta, sia $f \in L^q(\Omega)$. Allora, usiamo la diseguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{q-p}$

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu = \int_\Omega 1 \cdot |f|^p d\mu \leq \left(\int_\Omega 1^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}$$

Da cui troviamo

$$\|f\|_p^p \leq \mu(\Omega)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_q^p \implies \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Se $q = \infty$ invece abbiamo

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \int_\Omega \|f\|_\infty^p d\mu \leq \mu(\Omega)\|f\|_\infty^p \implies \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$$

□

Esempio 2.12. Nella 4. è importante richiedere $\mu(\Omega) < +\infty$. Ad esempio se $\Omega = \mathbb{R}$ e $f(x) = 1$ abbiamo che $f \in L^\infty$ ma $f \notin L^p(\mathbb{R})$ per ogni $1 \leq p < \infty$

Esempio 2.13. L'altra implicazione è normalmente falsa. Ad esempio se $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}\chi_{[-1,1]}(x)$ per $\alpha < 1$ è integrabile ma non è limitata, quindi $f \in L^1$ ma $f \notin L^\infty$

Dimostrazione. Se $\mu(\Omega) = +\infty$ e $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ allora $f \in L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p \leq +\infty$ e

$$\|f\|_p \leq \|f\|_1^\theta \|f\|_\infty^{1-\theta}$$

per un certo $\theta \in (0, 1)$. □

Dimostrazione. Notiamo che $|f|^p \leq |f||f|^{p-1} \leq |f|\|f\|_\infty^{p-1}$. Ne consegue che $|f|^p$ è integrabile e inoltre

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^{p-1} \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1$$

ora elevando il tutto alla $1/p$ otteniamo

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{1-1/p} \|f\|_1^{1/p}$$

ossia $\theta = \dfrac{1}{p}$ e $1 - \theta = \dfrac{1}{p'}$ □

Corollario 2.10.1. *Se $\mu(\Omega) = +\infty$ e $f_n \to f$ in $L^1(\Omega)$ e in $L^\infty(\Omega)$ allora $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in (1, \infty)$.*

Dimostrazione. Per la preposizione precedente

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f\|_1^{\frac{1}{p}} \|f_n - f\|_\infty^{1-\frac{1}{p}}$$

da qui la tesi. Notare che in realtà le ipotesi potrebbero essere alleggerite a chiedere solo una delle due convergenze, purché l'altra sia finita. □

Nota. Le convergenze q.o., q.u. e in misura non richiedono che le funzioni della successione o la funzione limite appartengano a un qualche spazio L^p.

2.3 Spazi di Hilbert

Per questo capitolo userò la notazione $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ quando non è importante specificare il campo su cui lavoriamo.

Definizione 2.6: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale H su $\mathbb{K}$ dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama **spazio prehilbertiano**. In particolare l'applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$$

verifica le seguenti proprietà:

i) *(positività)* $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

ii) *(definita positività)* $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

iii) *(linearità rispetto alla prima componente)* $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in H$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

iv) *(simmetria / coniugio)* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in H$

Ovviamente è giusto osservare che le proprietà *i) ii)* implicano che la funzione $x \mapsto \langle x, x \rangle$ è una norma.

Osservazione. Da *iii)* e *iv)* otteniamo che, per ogni $x, y, z \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \overset{iii)}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z \rangle} \overset{iv)}{=} \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

Teorema 2.11: Diseguaglianza di Schwarz

Se H è uno spazio prehilbertiano allora per ogni $x, y \in H$ vale la diseguaglianza

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

Dimostrazione. Considero l'elemento $x + \lambda \langle x, y\rangle y$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e calcolo il prodotto scalare con se stesso:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda \langle x, y\rangle y, x + \lambda \langle x, y\rangle y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + \lambda \langle x, y\rangle \langle y, x\rangle + \overline{\lambda} \langle y, x\rangle \langle x, y\rangle + |\lambda|^2 |\langle x, y\rangle|^2 \langle y, y\rangle = \\ &= \lambda^2 |\langle x, y\rangle|^2 \langle y, y\rangle + 2\lambda |\langle x, y\rangle|^2 + \langle x, x\rangle \end{aligned}$$

dove, se il coefficiente di λ^2 è diverso da 0, l'ultimo è un polinomio di secondo grado in λ, con tutti i coefficienti reali e non negativi, quindi il discriminante è non positivo, ossia

$$\frac{\Delta}{4} \leq 0 \iff |\langle x, y\rangle|^4 \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \langle x, x\rangle \leq 0$$

da cui $|\langle x, y\rangle| = 0$ oppure $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$. In entrambi i casi la tesi è vera.

Se invece il coefficiente di λ^2 è 0, allora $\langle x, y\rangle = 0$ e la tesi è vera, oppure $\langle y, y\rangle = 0$, allora $y = 0$ e la tesi è vera perché $\langle x, y\rangle = 0$. □

Proposizione 2.12. *Sia H uno spazio prehilbertiano con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Allora la funzione*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : H &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ v &\longmapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \end{aligned}$$

è una norma.

In particolare uno spazio prehilbertiano è uno spazio normato, con tale norma.

Dimostrazione. La definita positività corrisponde alle proprietà i) e ii) del prodotto scalare. L'omogenità segue dalla linearità:

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle v, v\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha| \|v\|$$

La diseguaglianza triangolare segue dalla diseguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\Re\langle v, w\rangle \leq \\ \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

per cui $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. □

Definizione 2.7: Spazio di Hilbert

Uno spazio prehilbertiano che sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare si chiama **spazio di Hilbert**.

Esempio 2.14. $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{C}^N$ sono spazi di Hilbert. Ad esempio in $\mathbb{C}^N$ il prodotto scalare standard è $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i}$ e induce la norma euclidea su $\mathbb{C}^N$. I dettagli sono facili e lasciati come esercizio.

Su $\mathbb{R}^N$ si può mettere come prodotto scalare anche ad esempio

$$(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con A una matrice simmetrica definita positiva.

Esempio 2.15. $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert se prendiamo come prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu$$

dove il coniugio è rilevante solo nel caso complesso. La norma associata a questo prodotto scalare è proprio la norma 2.

Proposizione 2.13 (Regola del Parallelogramma)**.** *Se H è uno spazio prehilbertiano allora vale l'identità*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$$

che vista graficamente (figura 6) significa che la somma dei quadrati costruiti sulle diagonali è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati.

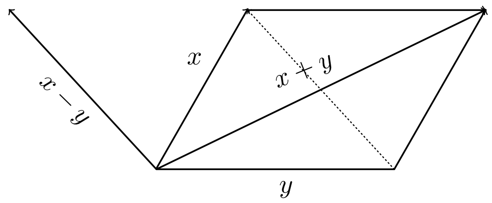


Figura 6: Regola del Parallelogramma

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \\ &+ \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\end{aligned}$$

□

Data una norma, se essa verifica l'identità del parallelogramma allora essa è una norma hilbertiana, cioè associata a un prodotto scalare

Proposizione 2.14. *Una norma $\|\cdot\|$ definita su uno spazio vettoriale V è hilbertiana se e solo se verifica l'identità del parallelogramma, ossia*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in V$$

in questo caso il prodotto scalare è definito da

$$\langle x, y\rangle = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2 \quad \forall x, y \in V$$

dove gli ultimi due termini non sono presenti nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Esempio 2.16. Gli spazi $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ non sono Hilbertiani. Basta trovare una coppia di funzioni f, g tali che

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 \neq 2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2$$

Ad esempio prendiamo $\Omega = [-1, 1]$ e prendiamo $f = \chi_{(-1,0)}$ e $g = \chi_{(0,1)}$ allora $f + g = 1$ q.o. e quindi

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = 4 + 4 \neq 2 + 2 = 2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2$$

Ora con le stesse funzioni mostriamo che neanche $L^\infty[-1, 1]$ ha una norma hilbertiana, infatti

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 + 1 \neq 2 + 2 = 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2$$

Definizione 2.8: Ortogonalità

Sia $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio prehilbertiano. Due vettori $x, y \in H$ si dicono **ortogonali** se $\langle x, y \rangle = 0$.

Esercizio 2.4

Mostrare che negli spazi prehilbertiani vale il teorema di Pitagora: per ogni coppia di vettori ortogonali $x, y \in H$ si ha

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2.4 Risultati di densità su $L^p(\Omega)$

In questa parte Ω sarà un aperto di $\mathbb{R}^N$ con la misura μ di Lebesgue. Inizieremo con il caso $\Omega = \mathbb{R}^N$

Proposizione 2.15. *Le funzioni semplici, misurabili e nulle al di fuori di un compatto sono dense in* $L^1(\mathbb{R}^N)$

Dimostrazione. Data $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ osservo che $f^+, f^- \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e sono non negative. Allora esistono 2 successioni s_n e t_n di funzioni semplici, misurabili, non negative e nulle fuori da un compatto che convergono q.o. rispettivamente a f^+ e f^- e queste successioni sono monotone crescenti. Ci rimane da controllare che $s_n \to f^+$ e $t_n \to f^-$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Sappiamo che $s_n \nearrow f^+$ e $t_n \nearrow f^-$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} |s_n - f^+| d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ - s_n d\mu \to 0$$

dove si è usato BL 1.31 perché la successione integranda è monotona decrescente e gli integrali sono tutti maggiorati da quello di f^+ che è finito. Altrimenti si può anche usare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue perché tutte le funzioni sono dominate da f^+. Lo stesso vale per t_n e f^-.

Allora la successione $\{s_n - t_n\}$ converge a f in $L^1(\mathbb{R}^N)$ □

Per $C^0_C(\Omega) \subseteq C^0(\Omega)$ si intende lo spazio di funzioni continue a supporto compatto

Proposizione 2.16. $C^0_C(\mathbb{R}^N)$ *è denso in* $L^1(\mathbb{R}^N)$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in C^0_C(\mathbb{R}^N) \quad \|f - g\|_1 < \varepsilon$$

Sappiamo per 2.15 già che esiste s semplice, misurabile e nulla al di fuori di un compatto tale che $\|f - s\|_1 < \varepsilon/2$. Ora sappiamo che

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

dove possiamo prendere $\alpha_i \neq 0$ per ogni i e A_i insiemi limitati. Dico allora che basta controllare che

$$\forall E \in \mathcal{M} \text{ limitato} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists g \in C^0_C(\mathbb{R}^N) \quad \|\chi_E - u\|_1 < \delta$$

E è un misurabile limitato, quindi $\forall \delta$ esistono un chiuso F e un aperto limitato G tali che $F \subseteq E \subseteq G$ e $\mu(G \setminus F) < \delta$. Consideriamo allora la funzione

$$u(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^N \setminus G)}{d(x, F) + d(x, \mathbb{R}^N \setminus G)}$$

dove se C è un chiuso, $d(x,C) = \inf_{y\in C} d(x,y)$ è la distanza tra un punto e un chiuso. Allora u è continua[2] e

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \in F \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus G \\ 0 \le u \le 1 & x \in G \setminus F \end{cases}$$

e quindi $u \in C^0_C(\mathbb{R}^N)$. Inoltre

$$\|\chi_E - u\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_E - u| d\mu = \int_{G\setminus F} |\chi_E - u| d\mu \le \int_{G\setminus F} d\mu = \mu(G\setminus F) < \delta$$

□

Proposizione 2.17. *$C^0_C(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $1 \le p < \infty$*

Dimostrazione. Vogliamo provare che

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in C^0_C(\mathbb{R}^N) \quad \|f - g\|_p < \varepsilon$$

1. Cominciamo ad approssimare f con una funzione $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$.

   Fissiamo un operatore di troncamento $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$T_n(r) = \begin{cases} n & r > n \\ r & |r| \le n \\ -n & r < -n \end{cases}$$

   allora $T_n \circ f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Allora $h_n(x) = T_n(f(x))\chi_{B_n}(x)$, con $B_n = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \le n\}$. Allora $h_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$. Succede che $h_n \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$, ossia

   $$\lim_{n\to\infty} \|h_n - f\|_p = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \int |h_n - f|^p d\mu = 0$$

   perché $h_n \to f$ q.o. per $n \to \infty$ e inoltre $|h_n - f|^p$ è dominata da $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ne consegue che

   $$\exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n \ge \overline{n} \quad \|h_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Per ogni $\delta > 0$ esiste una funzione $u \in C^0_C(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|h_{\overline{n}} - u\|_1 \le \delta$ (per 2.16). Considero $v = T_n(u)$ e dico che $\|v - h_{\overline{n}}\|_1 \le \|u - h_{\overline{n}}\|_1 \le \delta$. Infatti $v \in C^0_C(\mathbb{R}^N)$ e

   $$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v - h_{\overline{n}}| d\mu &= \left(\int_{-\overline{n} \le u \le \overline{n}} + \int_{u > \overline{n}} + \int_{u < -\overline{n}} \right) |v - h_{\overline{n}}| d\mu = \\ &= \int_{-\overline{n} \le u \le \overline{n}} |u - h_{\overline{n}}| d\mu + \int_{u > \overline{n}} (\overline{n} - h_{\overline{n}}) d\mu + \int_{u < -\overline{n}} (h_{\overline{n}} + \overline{n}) d\mu \le \\ &\le \left(\int_{-\overline{n} \le u \le \overline{n}} + \int_{u > \overline{n}} + \int_{u < \overline{n}} \right) |u - h_{\overline{n}}| d\mu \end{aligned}$$

[2] Sia X, d spazio metrico, $A \subseteq X$ e $d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x,y)$ distanza punto-insieme. Allora la funzione d_A è continua rispetto alla topologia indotta da d. Da qualche parte sugli appunti di topologia c'è la dimostrazione.

Osservo che $v - h_n \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e inoltre $|v - h_{\overline{n}}| \leq 2\overline{n}$. Allora

$$\|v - h_{\overline{n}}\|_p = \left(\int |v - h_{\overline{n}}|^{p-1}|v - h_{\overline{n}}|d\mu \leq\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|v - h_{\overline{n}}\|^{p-1}\|v - h_{\overline{n}}\|_1\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|v - h\|_\infty^{1/p'}\|v - h_{\overline{n}}\|_1^{1/p} \leq (2\overline{n})^{1/p'}\delta^{1/p} \overset{?}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}$$

dove al posto di ? intendiamo che $\delta^{1/p} = \dfrac{\varepsilon}{2(2\overline{n})^{1/p'}}$ dunque posso prendere $g = v$ e la tesi è dimostrata. □

Teorema 2.18: $\overline{C_C^0(\Omega)} = L^p(\Omega)$

Per $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $C_C^0(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$

Dimostrazione. Sia $f \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Prolunghiamo f a $\mathbb{R}^N$ con

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

Allora $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e per 2.17 esiste $g \in C_C^0(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|\tilde{f} - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Prendiamo una successione di insiemi

$$A_n := \left\{x \in \Omega : d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > \frac{1}{n}\ ;\ |x| < n\right\}$$

A_n sono sottoinsiemi aperti e limitati di Ω. Per ogni n posso considerare una funzione φ_n tale che

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{A_n} \\ 0 & x \in \Omega \setminus A_{n+1} \\ 0 \leq \varphi_n \leq 1 & x \in A_{n+1} \setminus \overline{A_n} \end{cases} \quad \text{e.g. } \varphi_n(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_{n+1})}{d(x, \overline{A_n}) + d(x, \mathbb{R}^N \setminus A_{n+1})}$$

allora $\{\varphi_n\}$ è una successione di funzioni in $C_C^0(\mathbb{R}^N)$ e hanno supporto compatto contenuto in Ω. Mi interessa trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|g\varphi_n - f\|_{p,\Omega} < \varepsilon \text{ (in } \Omega\text{, indico lo spazio in pedice)}$$

Intanto sappiamo che $\|g\varphi_n - g\|_{p,\Omega} \to 0$, infatti

$$\|g\varphi_n - g\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |g|^p(1 - \varphi_n)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

questo perché l'integranda è dominata da $|g|^p \in L^1(\Omega)$ e tende a 0 q.o. in $\mathbb{R}^N$, infatti se $x \in \Omega$, $\varphi_n(x) = 1$ definitivamente. Dunque esiste n_ε tale che $\|g\varphi_{n_\varepsilon} - g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e infine

$$\|g\varphi_{n_\varepsilon} - f\|_{p,\Omega} \leq \|g\varphi_{n_\varepsilon} - g\|_{p,\Omega} + \|g - f\|_{p,\Omega} \leq \|g\varphi_{n_\varepsilon} - g\|_{p,\Omega} + \|g - \tilde{f}\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

2.5 Operatori lineari e continui tra spazi normati

$$\|T\| = \inf\{C \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X\} = \\ = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}, \quad x \in X\setminus\{0_X\}\right\}$$

Nota. Nella definizione con l'inf, l'inf è in realtà un minimo $\|T\|$, infatti

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

tale norma è una norma, infatti

1. $\|T\| \geq 0$ per ogni $T \in \mathcal{L}(X, Y)$
2. $\|T\| = 0 \iff T \equiv 0$, infatti se $\|T\| = 0$ allora $\|Tx\|_Y \leq 0$
3. $\|\lambda T\| = \sup\limits_{X\setminus\{0_X\}} \dfrac{\|\lambda Tx\|_Y}{\|x\|_X} = |\lambda|\|T\|$
4. $\|T + S\| = \sup\limits_{X\setminus\{0_X\}} \dfrac{\|(T+S)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup\limits_{X\setminus\{0_X\}} \left(\dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} + \dfrac{\|Sx\|_Y}{\|x\|_X}\right) \leq$
   $\leq \|T\| + \|S\|$

Osservazione. $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y, x \in X : \|x\| = 1\}$ infatti se $z \in X\setminus\{0_X\}$ allora $\dfrac{\|Tz\|_Y}{\|z\|_X} = \left\|T\left(\dfrac{z}{\|z\|_X}\right)\right\|_Y$ dove l'argomento è un vettore di norma unitaria

Esercizio 2.5

Mostrare che

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1}\{\|Tx\|_Y\}$$

Esempio 2.17. I sistemi lineari da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1N}x_N \\ \vdots \\ y_M = a_{M1}x_1 + \ldots + a_{MN}x_N \end{cases}$$

anche scritto $\vec{y} = A\vec{x}$, con $\vec{x} = (x1, \ldots, x_N)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_M)$ e $A = (a_{ij})$ sono operatori lineari $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (y_1, \ldots, y_M)$.

La ricerca della norma di questo problema è un bel problema di massimo sulla palla chiusa di raggio 1 di $\mathbb{R}^N$.

Esempio 2.18. Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$. Allora l'inclusione $i : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < q \leq \infty$ è un operatore lineare. Sappiamo

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega)$$

e quindi necessariamente $\|i\| \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. La domanda ora si volge a capire se vale l'uguale o il minore. Dobbiamo trovare un elemento $0 \not\equiv f \in L^p(\Omega)$ che realizza l'uguaglianza per dire che vale l'uguaglianza. Sia $f = 1$, allora

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega 1^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} & \text{se } q < \infty \\ 1 & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

e quindi effettivamente

$$\|f\|_p = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \begin{cases} \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} & \text{se } q < \infty \\ 1 & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

Esempio 2.19. Sia $T : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$, $f \mapsto \chi_{[-1,1]}f$. Allora

$$\|Tf\|_1 = \int_{[-1,1]} |f| d\mu \leq 2\|f\|_\infty$$

e quindi $\|T\| \leq 2$

Esempio 2.20. $T : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ con $T(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$. Allora

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1 \implies \|T\| \leq 1$$

Similmente possiamo prendere $g \in L^\infty(\Omega)$ e considerare l'operatore

$$Tf(x) = \int_{(-\infty,x)} f(t)g(t)dt$$

e allora

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty \implies \|T\| \leq \|g\|_\infty$$

Importante! Se lo spazio di arrivo è $\mathbb{K}$, allora si parla di funzionali lineari e continui su X, e lo spazio $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ viene detto **spazio duale** e viene denotato con X' oppure X^*

Teorema 2.19

Se X è normato e Y è Banach, allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach

Dimostrazione. Sia T_n una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \overline{n} \quad \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$$

che a sua volta significa

$$\|(T_n - T_m)(x)\|_Y = \|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Fissiamo ora $x \in X$, allora $T_n(x)$ è una successione di Cauchy in Y. Poiché Y è Banach, tale successione converge, quindi esiste un elemento $y \in Y$ tale che $T_n(x) \to y$ in Y.

Definiamo ora l'applicazione $T : X \to Y$ tale che $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, che vogliamo mostrare essere lineare e continua. Allora $\forall u, v \in X$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$T(\alpha u + \beta v) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha u + \beta v) \overset{\star}{=} \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(u) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

dove in $\star$ si è usata contemporaneamente la linearità di T_n e la linearità del limite. Quindi T è lineare. Dalla diseguaglianza della successione di Cauchy abbiamo

$$\|T_{\overline{n}}x - T_m x\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \|T_{\overline{n}}x - Tx\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X$$

e quindi

$$\|Tx\|_Y \leq \|Tx - T_{\overline{n}}x\| + \|T_{\overline{n}}x\| \leq \varepsilon\|x\|_X + \|T_{\overline{n}}\|\|x\|_X \leq (\varepsilon + \|T_{\overline{n}}\|)\|x_X\|$$

da cui T è limitata e $\|T\| < \varepsilon + \|T_{\overline{n}}\|$, per cui $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Ci rimane solo da controllare che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$. Sappiamo che

$$\|T_n x - Tx\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X,\ \forall n \ge \overline{n}$$

ma allora

$$\|(T_n - T)(x)\|_Y \le \varepsilon \|x\|_X \implies \|T_n - T\| \le \varepsilon \quad \forall n \ge \overline{n}$$

□

Corollario 2.19.1. *Se X è normato, X' è sempre Banach*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{R}$ che $\mathbb{C}$ sono completi □

2.6 Spazi di successioni ℓ^p

Definizione 2.9: Spazi ℓ^p

Gli spazi di successioni ℓ^p sono definiti come

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\} \text{ se } 1 \le p < \infty$$
$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$$

con $x_n \in \mathbb{K}$, e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Altrimenti detto,

$$\ell^p := L^p\big(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#\big)$$

Sono tutti spazi di Banach, in quanto spazi L^p. La norma, se $1 \le p < \infty$, è

$$\|x\|_p = \left(\int_\Omega |x|^p d\#\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e se $p = \infty$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

Proposizione 2.20 (Inclusioni fra spazi ℓ^p)**.** *Se $1 \le p < q \le \infty$, allora $\ell^p \subseteq \ell^q$ e inoltre $\|x\|_q \le \|x\|_p$, $\forall x \in \ell^p$*

Dimostrazione. Chiaramente

$$|x_n|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \implies |x_n| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

Se $q = \infty$ allora

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \le \|x\|_p$$

Per $q < \infty$ allora

$$\|x\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{q-p}|x_n|^p \overset{\ell^q \subseteq \ell^\infty}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_\infty^{q-p} = \|x\|_\infty^{q-p}\|x\|_p^p \le$$
$$\overset{\ell^p \subseteq \ell^\infty}{\le} \|x\|_p^{q-p}\|x\|_p^p = \|x\|_p^q$$

da cui la tesi □

Esempio 2.21. Consideriamo la successione $x_n = \frac{1}{n}$. Allora $\{x_n\} \in \ell^p$, $\forall p \in (1, \infty]$, ma $p \notin \ell^1$.

Esempio 2.22. $i : \ell^p \overset{\ell^q}{\hookrightarrow}$ è lineare e limitato con norma $\|i\| \leq 1$. È proprio $\|i\| = 1$: Consideriamo la successione canonica

$$e^k = (0, 0, 0, \dots, \overset{(k)}{1}, 0, \dots)$$

allora la successione $\{e^k\}_k$ è detta successione canonica, $\{e^k\} \in \ell^p$ per ogni $p \in [1, \infty]$ e inoltre

$$\|e^k\|_p = 1 \quad \forall p \in [1, \infty]$$

dunque $\|e^k\|_p = \|e^k\|_q$ per $1 \leq p < q \leq \infty$ e allora

$$\|i\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|i(x)\|_q}{\|x\|_p} = 1$$

Consideriamo i seguenti spazi

$$\begin{aligned} c &= \{x = (x_n) : \text{ la successione } x_n \text{ è convergente } \} \\ c_0 &= \{x = (x_n) : \text{ la successione } x_n \text{ è infinitesima } \} \\ c_{00} &= \{x = (x_n) : \exists k \in \mathbb{N} : x_n = 0 \forall n > k\} \end{aligned}$$

allora se $p < \infty$ e $x \in \ell^p$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge e quindi $\lim_{n \to \infty} |x_n|^p = 0$ e allora $x = (x_n) \in c_0$. Ne consegue che

$$c_{00} \subseteq \ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$$

c_{00} è un sottospazio di ℓ^1 **denso**: infatti se $x = (x_n) \in \ell^1$ allora posso costruire la successione

$$x^k = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \in c_{00}$$

e chiaramente

$$\|x^k - x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n| = \sum_{n=k+1}^{\infty} |0 - x_n| \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

in quanto resto $k+1$-esimo di serie convergente. Se ora $p \in 1 < p < \infty$, con analoga dimostrazione provo anche che c_{00} è denso in ℓ^p.

Ovviamente invece c_{00} non è denso in ℓ^∞, è allora chiuso?

c_0 e c sono invece sottospazi di ℓ^∞ Sia $x^k = (x_n^k)$ una successione di elementi $x^k \in c_0 \, \forall k$ tale che $\exists x \in \ell^\infty$ con

$$\lim_{k \to \infty} \|x^k - x\|_\infty = 0$$

Ora dobbiamo mostrare che $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n| \leq \varepsilon$$

ma noi sappiamo che

$$|x_n| \leq |x_n^k| + |x_n - x_n^k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

questo perché ogni x^k è una successione infinitesima e per la convergenza uniforme di x_n^k a x_n. Quindi c_0 è **chiuso** in ℓ^∞.