

# Appunti di Analisi 3 - Analisi Complessa

Osea

Primo semestre A.A. 2024 - 2025, prof. Enrico Vitali

## 1 Convergenza puntuale e uniforme

Sia  $E$  un insieme (non vuoto) e  $\{f_n\}$  una successione di funzioni  $E \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $E \rightarrow \mathbb{R}^n$  o  $E \rightarrow \mathbb{C}$ ). Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Definizione 1.1: D

iciamo che  $\{f_n\}$  converge **puntualmente** ad  $f$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

**Esempio 1.1.**  $E = \mathbb{R}$  e  $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ ,  $f_n \rightarrow 0$  su  $\mathbb{R}$

**Esempio 1.2.**  $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow x^2$

**Esempio 1.3.**  $f_n(x) = x^2 - \frac{1}{n}$

**Esempio 1.4.**  $f_n(x) = e^{x-n}$   $f_n \rightarrow 0$

**Esempio 1.5.**  $E = [0, 1]$ ,  $f_n(x)$  funzione che è a triangolo con vertici  $(\frac{1}{4n}, 0)$ ,  $(\frac{1}{2n}, 1)$ ,  $(\frac{1}{n}, 0)$ . Allora  $f_n \rightarrow 0$

In questi esempi l'idea è che per ogni  $\varepsilon$  esiste un  $n_\varepsilon$  tale che per  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $f_n(x) < \varepsilon$ . La domanda è se si riesce a esprimere  $n_\varepsilon$  senza che dipenda da  $x$ . Nell'esempio di  $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$  si può perché  $f_n$  ha un massimo in  $x = 0$ , in tal caso infatti se prendo  $n_\varepsilon$  tale che  $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$  allora  $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ .

Nell'esempio 1.2 invece vogliamo un  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  ossia  $|\frac{1}{n} - \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}| \leq \varepsilon$ . Da questo troviamo che

$$\frac{1}{n^2} - \varepsilon \leq \frac{2x}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \varepsilon$$

Ma è sempre possibile, per qualsiasi  $\frac{1}{n^2} + \varepsilon$  è possibile trovare un  $x$  tale che sia maggiore, quindi non è possibile non esprimere  $n_\varepsilon$  anche in funzione di  $x$ .

### Definizione 1.2: S

ia  $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $E$  se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

*Osservazione.* La condizione della definizione di convergenza uniforme è equivalente a richiedere che  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Da questo concludiamo che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Allora con questa nuova osservazione è facile notare la non convergenza uniforme dell'esempio 1.2. Infatti se  $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$  e  $f(x) = x^2$  allora  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)| = |2 - \frac{1}{n}| \rightarrow 2 > 0$ .

Abbiamo però che converge uniformemente sugli insiemi limitati (esercizio). Similmente nell'esempio 1.4  $f_n$  converge uniformemente sugli insiemi  $(-\infty, a]$  infatti  $0 \leq f_n(x) \leq e^{a-n} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Geometricamente la convergenza uniforme dice che il grafico di  $f_n$  è contenuta in un intorno tubolare arbitrario di  $f$  per  $n$  sufficientemente grande.

**Proposizione 1.1** (Criterio di Cauchy / completezza di  $\mathbb{R}$ ). Se  $\{a_n\}$  è una successione di numeri reali si ha:  $a_n$  converge se e solo se  $a_n$  è una successione di Cauchy, ossia se  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  tale che  $\forall n_1, n_2 \geq n_\varepsilon, |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$

### Teorema 1.2: Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

Siano  $f, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f_n \rightarrow f$  in  $E$ . Allora la convergenza è uniforme in  $E$  se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$  Sia  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $E$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $n_\varepsilon$  tale che (convergenza uniforme)  $\forall k \geq n_\varepsilon$  e  $\forall x \in E, |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  allora presi  $n, m \geq n_\varepsilon$  ho che  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$  Valga la condizione di Cauchy. Allora  $\forall x \in E$  la successione  $\{f_n(x)\}$  è una successione di Cauchy, quindi è convergente, quindi  $\exists f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f_n \rightarrow f$ . Allora dalla condizione di Cauchy, tenendo  $n$  fisso e facendo tendere  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene esattamente la convergenza uniforme.

□

Fun fact: esistono dei cosiddetti “Spazi uniformi”, che sono spazi topologici ma non metrici.

**Esempio 1.6.** Sia  $f_n = \frac{n^2 - x}{n^3 + e^{nx}}$ . È evidente per  $x \in \mathbb{R}$  che  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

C'è convergenza uniforme sui limitati, infatti se  $|x| \leq M$  allora  $|f_n(x)| \leq \frac{n^2 + M}{n^3} \rightarrow 0$ . Consideriamo ora  $x \geq 0$  (esercizio). Invece per  $x \leq 0$ , posso prendere per ogni  $n$   $x_n = -n^4$  e allora ottengo che  $f_n(x_n) \rightarrow +\infty$

*Osservazione.* Sia  $f_n : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua, suppongo che  $\{f_n\}$  converga uniformemente a  $f$  in  $(a, b)$ . Allora converge uniformemente in  $[a, b)$

*Dimostrazione.* Per Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in (a, b), \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Per  $x \rightarrow a$  abbiamo per continuità che  $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$  per  $n, m \geq \bar{n} \in \mathbb{N}$ , quindi preso  $\tilde{n} = \max n_\varepsilon, \bar{n}$  si ha che  $f_n$  soddisfa il criterio di Cauchy in  $[a, b)$  e quindi converge uniformemente. □

Da questa osservazione noto anche che vale il contrapositivo: se  $f_n$  non converge uniformemente in  $[a, b)$  non può neanche convergere uniformemente in  $(a, b)$

**Esempio 1.7.**  $f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 \left(x - \frac{q}{\sqrt{n}}\right)^2}$ , allora ho che  $f_n(0) = \frac{1}{1 + n} \rightarrow 0$ , e per  $x \neq 0$  pure, infatti

$$0 \leq \frac{1}{1 + n^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \stackrel{\text{definitivamente}}{\leq} \frac{1}{1 + n^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)^2} \rightarrow 0$$

è convergente uniformemente su tutto  $\mathbb{R}$

Sia  $E$  un insieme non vuoto e sia  $\mathcal{B}(E)$  l'insieme delle funzioni reali e limitate su  $E$ .

### Definizione 1.3: Norma dell'estremo superiore

Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione. Allora

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)|$$

è la norma dell'estremo superiore (anche denotata semplicemente  $\|f\|$ ).

*Buona definizione.* Perché sia una buona definizione, serve che sia una norma.

- a.  $\|f\| \geq 0$  e  $\|f\| = 0 \iff f = 0$
- b.  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- c.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

□

**Proposizione 1.3.**  $\mathcal{B}(E)$  è uno spazio metrico normato con la norma dell'estremo superiore, e quindi distanza  $d(f, g) = \|f - g\|$

*Dimostrazione.* ovvio

□

## 1.1 Scambi di limite, derivate, integrali

**Esempio 1.8.** Dimostrare che se  $f \in C^0([a, b] \times [c, d])$  a valori reali e

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad y \in [c, d]$$

Allora  $g$  è continua in  $[c, d]$

Infatti  $\forall \bar{y} \in [c, d]$  abbiamo che comunque presa  $y_n \rightarrow \bar{y}$  chiaramente  $g(y_n) \rightarrow g(\bar{y})$ . Ponendo ora  $f_n = f(\cdot, y_n)$ . Allora vogliamo mostrare che  $f_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot, \bar{y})$  uniformemente in  $[a, b]$ . Poiché  $f$  è uniformemente continua in  $[a, b] \times [c, d]$  perché continua su un compatto, allora  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x, x' \in [a, b]$  e  $\forall y, y' \in [c, d]$  se  $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} < \delta$  allora  $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$ . Allora fissato  $\varepsilon > 0$  sia  $\delta$  come sopra; sia quindi  $n_\varepsilon$  tale che  $n \geq n_\varepsilon \implies |y_n - \bar{y}| \leq \delta$  e quindi, per ogni  $x \in [a, b]$  abbiamo  $|(x, y_n) - (x, \bar{y})| = |y_n - \bar{y}| \leq \delta$ , da cui  $|f_n(x, y_n) - f(x, \bar{y})| \leq \varepsilon$ . Abbiamo quindi mostrato l'uniforme convergenza.

**Proposizione 1.4** (Derivation under the integral sign). Sia  $f \in C^1([a, b] \times [c, d])$  e  $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  per  $y \in [c, d]$ , allora

$$g \in C^1([c, d]) \text{ e } g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $\bar{y} \in [c, d]$  e consideriamo

$$\frac{g(y) - g(\bar{y})}{y - \bar{y}} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} dx = \int_a^b \varphi(x, y) dx$$

con  $\varphi(x, y)$  l'integrando. Si appiama che  $\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \varphi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$  e vogliamo mostrare che questa convergenza è uniforme al variare di  $x$ . Per il teorema di Lagrange si ha che

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_{x,y}) \quad \xi_{x,y} \in (\bar{y}, y) \text{ oppure } (\bar{y}, y)$$

Poiché  $\frac{\partial f}{\partial y}$  è uniformemente continua in  $[a, b] \times [c, d]$  allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [a, b] \text{ e } \forall y, y' \in [c, d]$$

$$|(x, y) - (x', y')| < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') \right| < \varepsilon$$

e ora prendiamo come coppie  $(x, \bar{y})$  e  $(x, \xi_{x,y})$  e abbiamo

$$|(x, \xi_{x,y}) - (x, \bar{y})| = |\xi_{x,y} - \bar{y}| \leq |y - \bar{y}|$$

Ora come prima ciò dimostra che  $\varphi(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y})$  uniformemente in  $[a, b]$  e quindi

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

□

## 1.2 Serie di funzioni

I risultati visti per le successioni di funzioni danno luogo ad analoghi risultati per le serie di funzioni. Sia quindi  $E$  un insieme  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  (oppure  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}$ ) e si considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in E$$

che è una serie di funzioni.

### Definizione 1.4: D

iciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge puntualmente in  $E$  se la successione delle somme parziali converge puntualmente in  $E$ , ossia se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente in  $E$  se la successione delle somme parziali converge uniformemente in  $E$ ,

Ne consegue che alcuni risultati hanno rispettivi analoghi, ad esempio

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente in  $E$  se e solo se

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

converge uniformemente in  $E$  (definizione), ossia questo vale se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall N, M \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |s_N(x) - s_M(x)| < \varepsilon$$

Ora assumiamo senza perdita di generalità che  $N \leq M$ , allora chiamiamo  $M = N+p$  e otteniamo che l'ultima eguaglianza si scrive come

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Otteniamo

**Proposizione 1.5** (Criterio di Cauchy). *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente in  $E$  se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, p \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad (1)$$

**Corollario 1.5.1.** *Condizione necessaria affinché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converga uniformemente in  $E$  è che  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente in  $E$*

*Dimostrazione.* prendiamo  $p = 1$  in (1) e otteniamo  $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon$  ossia  $f_n \rightarrow 0$  uniformemente in  $E$   $\square$

**Esempio 1.9.** Supponiamo ora che esista una successione numerica  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$  per ogni  $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

vogliamo mostrare che allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente in  $E$ , usando (1), infatti abbiamo

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è utilizzato il criterio di Cauchy per le serie numeriche.

#### Definizione 1.5: Convergenza totale

Si dice che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge **totalmente** in  $E$  se esiste  $\{a_n\}$  in  $\mathbb{R}$  tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$  per ogni  $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Per quanto visto prima quindi

**Proposizione 1.6.** *Convergenza totale implica convergenza uniforme, e notando dalla dimostrazione prima abbiamo anche che implica la convergenza assoluta uniforme.*

**Esempio 1.10.** Non vale il contrario, un esempio di serie uniformemente convergente ma non totalmente convergente è

$$\sum_{n=1}^{\infty} -1 \cdot \frac{(-1)^n}{n}$$

dove  $f_n(x)$  è costante per ogni  $n$ . Allora la serie converge uniformemente in  $\mathbb{R}$  ovviamente perché è costante e converge in quanto a segno alternato, ma non converge totalmente perché la serie armonica diverge.

**Esempio 1.11.** Sia  $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ , per  $x \in \mathbb{R}$ . Allora usiamo il criterio della radice ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

quindi per  $|x| < 1$  la serie converge assolutamente, per  $|x| > 1$  la serie diverge, per  $x = -1$  la serie è la serie armonica che diverge, per  $x = 1$  la serie è una serie a segni alterni che converge.

Concludiamo quindi che la serie converge puntualmente in  $(-1, 1]$  e per ogni  $0 < \delta < 1$  la serie converge uniformemente in  $[-\delta, \delta]$ , infatti

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \leq \delta^n$$

la cui serie converge, quindi la serie converge totalmente.

Naturalmente però la serie non converge totalmente in  $[0, 1]$  poiché

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

ma comunque la serie converge uniformemente in  $[0, 1]$ , infatti usiamo il criterio di Cauchy.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq |s_{n+p} - S(x)| + |S(x) - s_n(x)| < \frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{x^n}{n}$$

che converge a 0 per  $n \rightarrow +\infty$  e si è usato il fatto che se  $S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$  è una serie convergente a segni alterni, con  $a_n > 0$ ,  $a_n \rightarrow 0$  allora  $|S - s_n| \leq a_{n+1}$

Procediamo a chiederci se la serie converge uniformemente in  $(-1, 0]$ . Utilizziamo allora la seguente osservazione dedotta direttamente dalle successioni

*Osservazione.* Sia  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ ,  $f_i \in C^0([a, b])$ . Se la serie converge uniformemente in  $(a, b]$  allora converge uniformemente in  $[a, b]$  (in particolare converge in  $x = a$ )

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $s_n(x)$  converge uniformemente in  $(a, b]$  e  $s_n$  sono funzioni continue in  $x = a$ , quindi per il risultato che avevamo già per le successioni (in breve basta enunciare il criterio di Cauchy e usare la continuità in  $x = a$ ) otteniamo che la serie converge uniformemente in  $[a, b]$   $\square$

Ne concludiamo che la serie non può convergere uniformemente in  $(-1, 0]$  altrimenti convergerebbe uniformemente in  $[-1, 0]$  ma sappiamo che in  $-1$  non abbiamo neanche convergenza puntuale.

**Esempio 1.12.** Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

## 2 Richiami su limiti e serie

**Proposizione 2.1.** Sia  $a_n$  una successione di numeri reali positivi. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*Dimostrazione.* Sia  $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Se  $L = +\infty$  non c'è nulla da dimostrare. Sia allora  $L < +\infty$ . Fissato un  $\varepsilon > 0$  quindi esiste  $n_\varepsilon$  tale che  $\forall n \geq n_\varepsilon$  si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon$$

Allora iterando otteniamo

$$a_n \leq (L + \varepsilon)^{n - n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon} \implies \sqrt[n]{a_n} \leq (L + \varepsilon)^{1 - \frac{n_\varepsilon}{n}} \sqrt[n]{a_{n_\varepsilon}} \rightarrow L + \varepsilon$$

Per  $n \rightarrow \infty$ , ora per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$  otteniamo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Similmente si dimostra anche l'altra uguaglianza, quella centrale è ovvia.  $\square$

**Esempio 2.1.** Sia  $a_n = n$ . Allora poiché  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$  abbiamo che anche  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

Sia  $a_n = n!$ . Allora  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1 \rightarrow +\infty$  e quindi anche  $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$

Sia  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

e quindi  $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$ .

*Osservazione.* In realtà (e potremmo vederlo più tardi), l'approssimazione di Stirling ci dice

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ora procediamo vedendo un criterio di convergenza (non assoluta) che sarà il criterio di convergenza di Abel. Procediamo a passi più piccoli.

### Lemma 2.2: Disuguaglianza di (Brunacci) Abel

Siano  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \mathbb{C}$  e siano  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell \in \mathbb{C}$ . Poniamo ora

$$w_m = \sum_{i=0}^m \zeta_i \quad m = 0, 1, \dots, \ell$$

Sia  $M > 0$  tale che

$$|w_m| \leq M \quad \forall m = 0, 1, \dots, \ell$$

Allora

$$\left| \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i \right| \leq (|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \dots + |\gamma_{\ell-1} - \gamma_\ell| + |\gamma_\ell|)M$$

*Dimostrazione.*

$$\sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i = \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i (w_i - w_{i-1}) = \sum_{i=0}^{\ell} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) w_i$$

Dove si intende che  $\gamma_{\ell+1} = 0$  e  $w_{-1} = 0$ . Ora semplicemente per disuguaglianza triangolare e applicando l'ipotesi definente  $M$  otteniamo la tesi.  $\square$

**Teorema 2.3: primo criterio di convergenza di Abel**

Sia  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$  una serie numerica. Se

- $z_n \in \mathbb{C}$  (oppure in  $\mathbb{R}^N$ )
- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  è una serie le cui somme parziali sono limitate
- $\{c_n\}$  è una successione di numeri reali non creascente e infinitesima

allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$  converge.

*Dimostrazione.* Utilizziamo il criterio di convergenza di Cauchy. Fissiamo  $N, p \in \mathbb{N}$  e consideriamo

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z_n \right| \leq 2M \sum_{n=N}^{N+p} |c_n - c_{n+1}| \quad (\text{diciamo } c_{N+p+1} = 0 \text{ per comodità notazionale})$$

Dove  $M$  è maggiorante per le somme parziali di  $z_n$ . Infatti abbiamo che

$$w_m = z_N + z_{N+1} + \cdots + z_{N+m} = \sum_{i=0}^{N+m} z_n - \sum_{i=0}^{N-1} z_n$$

per cui effettivamente  $|w_m| \leq 2M$  e possiamo applicare la disuguaglianza di Abel.

Ora possiamo, sapendo che  $c_k \rightarrow 0$  da sopra, ottenere che la serie precedentemente trovata è telescopica per  $N$  sufficientemente grande e quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z_n \right| \leq 2M |c_N| \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

e quindi per il criterio di Cauchy la serie converge.  $\square$

**Esempio 2.2.** Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad z \in \mathbb{C}$$

Allora se  $|z| > 1$  manca la condizione necessaria di convergenza.

Sia allora  $|z| \leq 1$ . Consideriamo prima il caso  $|z| < 1$ . Sia ha allora convergenza assoluta, perché

$$\frac{|z|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|z|^n} = |z| \frac{n}{n+1} \rightarrow 0$$

Consideriamo invine il caso  $|z| = 1$ . Se  $z = -1$  la serie non converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow -\infty$$



Ora consideriamo  $|z| = 1$  con  $z \neq -1$  e vogliamo applicare il criterio di Abel, con  $c_n = \frac{1}{n}$  e  $z_n = (-1)^{n+1} z^n$ . Chiaramente  $c_n$  è infinitesima non crescente reale. Inoltre

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_N| = \left| \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} z^i \right| = \left| \sum_{n=1}^N (-z)^N \right| = |z| \left| \frac{1 - (-z)^N}{1 - (-z)} \right| \leq \frac{z}{|1 + z|}$$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Abel e la serie converge.

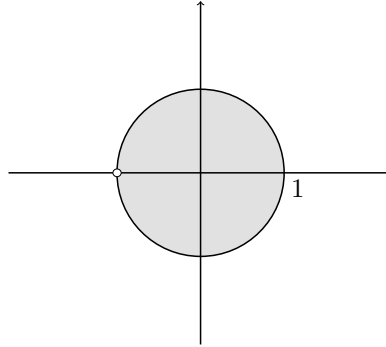


Figura 1: Punti del piano  $\mathbb{C}$  tali che la serie dell'esempio 2.2 converge

**Corollario 2.3.1** (Criterio di Leibniz). *Se una serie è a segni alterni del tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

*con  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n > 0$  non crescente. Allora abbiamo che  $z_n = (-1)^n$  e  $c_n = a_n$  soddisfano le ipotesi del criterio di Abel e quindi la serie converge.*

#### Teorema 2.4: Secondo criterio di convergenza di Abel

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$$

con

- $z_n \in \mathbb{C}$  (oppure in  $\mathbb{R}^N$ )
- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  è una serie convergente
- $\{c_n\}$  è una successione monotona e convergente

Allora la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$  converge.

*Dimostrazione.* Supponiamo  $c_n \rightarrow c$  non crescente. Allora

$$\sum_{n=0}^N c_n z_n = \sum_{n=0}^N (c_n - c) z_n + c \sum_{n=0}^N z_n$$

Ora per  $N \rightarrow \infty$  abbiamo che  $c_n - c \rightarrow 0$  decrescente e le somme parziali di  $z_n$  sono limitate, perché la serie converge. Quindi abbiamo che la prima serie converge per il primo criterio di Abel. Anche la seconda serie converge per ipotesi, quindi la tesi è dimostrata.  $\square$

Sappiamo che

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^M b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{N+M} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} z^n$$

è il prodotto di polinomi. Quindi formalmente, se  $z = 1$  e  $N, M \rightarrow \infty$  otteniamo

**Definizione 2.1: Serie prodotto alla Cauchy**

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

che è detta serie prodotto alla Cauchy delle serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

**Teorema 2.5: Mertens + Cauchy**

Se le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sono convergenti e almeno una è assolutamente convergente, allora la serie prodotto è convergente ed ha per somma il prodotto delle serie.

Se entrambe le serie sono assolutamente convergenti, allora tale è anche la serie prodotto.

Consideriamo serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \text{ con } c_n \in \mathbb{C} \text{ e } z, a \in \mathbb{C}$$

Abbiamo visto alcuni esempi:

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  converge se e solo se  $|z| < 1$
- b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ , converge se e solo se  $|z| \leq 1$  e  $z \neq -1$

In entrambi i casi (e vedremo in generale) la convergenza è nei punti di un disco (detto cerchio di convergenza) di centro  $z = a$ . Il comportamento sul bordo del cerchio varia da caso a caso.

**Teorema 2.6: Abel**

Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Se la serie converge in un punto  $z \in \mathbb{C}$  allora converge uniformemente su tutto il segmento di estremi  $a$  e  $z$ .

*Dimostrazione.* Il teorema è significativo quando  $z_1 \in \partial D_R(a)$  Non è restrittivo supporre  $a = 0$ . Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (tz_1)^n$$

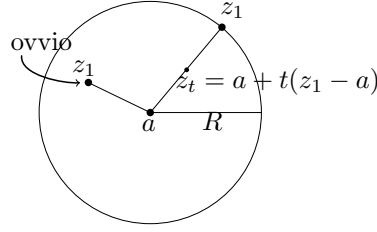


Figura 2: abel

utilizziamo il criterio di Cauchy per le convergenze uniformi: fissiamo  $\varepsilon > 0$ , vogliamo avere che per un  $n_\varepsilon$  allora per ogni  $N \geq n_\varepsilon$ ,  $p \in \mathbb{N}$  e  $t \in [0, 1]$  si abbia che

$$\left| \sum_{m=N}^{N+p} \underbrace{t^n}_{\gamma_{m-N}} \underbrace{c_n z_1^n}_{\zeta_{m-N}} \right| < \varepsilon$$

$$\leq M(|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \cdots + |\gamma_{p-1} - \gamma_p|)$$

con  $M$  un maggiorante per le somme parziali di  $c_n z_1^n$ . Ora poiché per ipotesi tale serie converge, esiste  $n_\varepsilon$  tale per cui per ogni  $N \geq n_\varepsilon$  e per ogni  $p \in \mathbb{N}$  si ha che

$$\left| \sum_{m=N}^{N+p} c_m z_1^m \right| \leq \varepsilon$$

ora poiché  $1 \geq t^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  abbiamo che la precedente disuguaglianza è soddisfatta per  $M = 1$ , quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} t^n c_n z_1^n \right| \leq t^N \varepsilon \leq \varepsilon$$

□

### Definizione 2.2: S

ia  $I$  un intervallo aperto. Diciamo che una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è analitica se per ogni  $x_0 \in I$  esiste  $\delta > 0$  tale che su  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  la funzione sia esprimibile come somma di una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (2)$$

Sia  $f$  come in (2); Sia  $R$  il raggio di convergenza della serie. Su ogni intervallo  $J$  tale che  $\overline{J} \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$  sappiamo che la serie converge totalmente. Consideriamo la serie delle derivate (cioè la *serie derivata*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza  $R$ , poiché

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}$$

Quindi la serie delle derivate è uniformemente convergente su ogni compatto di  $x_0 - R, x_0 + R$ .

**Lemma 2.7** (Teorema di derivazione per Serie). Sia  $f = \sum f_n$  convergente e  $g = \sum f'_n$  uniformemente convergente. Allora  $f$  è derivabile e  $f' = g$ .

Per il teorema di derivazione per serie,  $f$  è derivabile e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

A  $f'$  applichiamo lo stesso ragionamento visto su  $f$ :  $f'$  è derivabile e si ha che

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Procedendo induttivamente otteniamo che  $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$  e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}$$

In particolare abbiamo che  $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$  e quindi la serie di potenze è la serie di Taylor di  $f$  centrata in  $x_0$ . Più precisamente

### Teorema 2.8

Sia  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  per  $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ , con  $a_n \in \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Allora  $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$  e la serie è la serie di Taylor di  $f$  centrata in  $x_0$ .

*Dimostrazione.* Vedasi sopra. □

Non è vero che ogni funzione  $C^\infty$  sia sviluppabile in serie di Taylor.

**Esempio 2.3.** Sia  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  per  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $f(0) = 0$ . Allora

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 & x = 0 \\ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

eccetera anche per le altre derivate si ha che  $f^{(k)}(0) = 0$ . Quindi la serie di Taylor centrata in 0 è la serie nulla, ma  $f \neq 0$  in alcun intorno di 0.

### Teorema 2.9

Sia  $f \in C^\infty(I)$  con  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto per la quale esistano  $M, L > 0$  tali che per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in I \quad |f^{(k)}(x)| \leq M L^k$$

Allora  $f$  è analitica.

*Dimostrazione.* Sia  $x_0 \in I$  e consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad x \in I$$

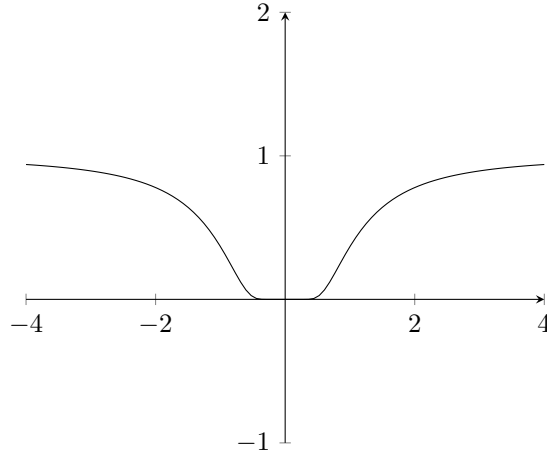


Figura 3:  $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Scriviamo lo sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) (x - x_0)^{n+1}$$

dove  $\xi_x \in (x_0, x)$  è un opportuno punto. Mostriamo ora che

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

□

**Esempio 2.4.** Le funzioni  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  sono analitiche.

## 2.1 $\mathbb{C}$ -differenziabilità

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

### Definizione 2.3: $\mathbb{C}$ -differenziabilità

Sia  $a \in \Omega$ . Diciamo che  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  se esiste

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) \quad (3)$$

o equivalentemente

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + (\varepsilon(z - a))(z - a) \quad (4)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \varepsilon(w) = 0 \quad (5)$$

Se poniamo  $\varepsilon(0) = 0$  allora la (1)' vale per ogni  $z \in \Omega$ , non solo  $z \neq a$ . Alcune proprietà:

- Se  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  allora è continua (da (1)')
- $f, g$   $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$ ; allora  $f \pm g$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile,  $\lambda f$ , con  $\lambda \in \mathbb{C}$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $fg$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile.

Se  $g(a) \neq 0$  allora  $\frac{f}{g}$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  e  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

**Esempio 2.5.**  $z \mapsto z$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Ne consegue dalle proprietà che i polinomi sono  $\mathbb{C}$ -differenziabili, e anche le funzioni razionali.

**Esempio 2.6.**  $z \mapsto \bar{z}$  **non** è  $\mathbb{C}$ -differenziabile. Infatti

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} = \frac{\overline{z - a}}{z - a}$$

che non ha limite perché assume valori diversi ad esempio sulla retta  $a + \delta$  e  $a + \delta i$  al variare di  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  può essere vista come  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tralasciando la struttura di campo di  $\mathbb{C}$ . Allora possiamo scrivere  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ , con  $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si utilizza spesso la scrittura

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

che è una sorta di “ibrido”. Possiamo ora scrivere  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  ecc.

Supponiamo ora che  $f$  sia  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a = x_0 + iy_0$ . Esiste quindi

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Guardiamo ora la retta  $z = a + \delta$ , con  $\delta \in \mathbb{R}$ , quindi

$$f'(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

In maniera analoga, per  $z = a + \delta i$  abbiamo

$$f'(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \delta i) - f(x_0, y_0)}{\delta i} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y} f(a)$$

In breve abbiamo che deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Che in termini di  $u$  e  $v$  equivale a dire che

$$u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

**Proposizione 2.10** (Condizioni necessarie). *Se  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$  allora valgono le condizioni di **Cauchy-Riemann**, cioè*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \text{ o equivalentemente } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Vedasi sopra. □

**Proposizione 2.11.** *Sia  $f$  differenziabile in  $a = (x_0, y_0)$  come funzione  $\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, allora  $f : C \supseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = x_0 + iy_0$*

*Dimostrazione.* Per ipotesi (con  $h = (h_1, h_2)$ )

$$f(a + h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + o(h)$$

Poiché  $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$  si ha

$$\begin{aligned} f(a + h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + i \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_2 + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(h_1 + ih_2) + o(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(z - a) + o(z - a) \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.12: Looman-Menchoff**

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua e dotata di  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  in  $z = a$ . Se valgono le condizioni di Cauchy Riemann, allora  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$

Abbiamo già visto sui reali che analitica implica  $C^\infty$ . Ora spiace lo spoiler ma dimostreremo che  $\mathbb{C}$ -differenziabile implica analitica, quindi  $\mathbb{C}$ -differenziabilità,  $C^\infty$ , analitica saranno nozioni equivalenti e gli assegneremo la dicitura di **olomorfe**.

**Definizione 2.4: Derivata complessa**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Ciò è motivato dal seguente passaggio formale: Sia  $z = x + iy$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ , allora  $f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right)$  e quindi si ottiene formalmente il risultato come sopra definito.

*Osservazione.* Le condizioni di Cauchy-Riemann diventano  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

**2.2  $\mathbb{C}$ -differenziabilità delle funzioni analitiche****Teorema 2.13**

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad c_n \in \mathbb{C}$$

con  $R$  il raggio di convergenza. Allora la serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza  $R$ . Inoltre se  $f(z)$  è la somma della serie data e  $g(z)$  la somma della serie derivata, allora avremo che  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $f'(z) = g(z)$  per ogni  $z \in D_R(a)$

*Dimostrazione.* Come nel caso reale,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

quindi i due raggi di convergenza coincidono. Supponiamo  $a = 0$ . Fissiamo  $w \in D_R(0)$  e consideriamo

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

con  $h$  tale che  $w+h \in D_R(0)$ . Scriviamo, per  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$f(z) = S_N(z) + R_N(z) \quad \text{con} \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n (z - a)^n$$

e  $R_N(z)$  il resto della serie. Sappiamo che

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} = S'_N(w) \rightarrow g(z) \text{ per } N \rightarrow \infty$$

Consideriamo il resto

$$\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n((w+h)^n - w^n))$$

essendo

$$(w+h)^n - w^n = (w+h-w) \left( (w+h)^{n-1} + (w+h)^{n-2}w + \dots + w^{n-1} \right)$$

ottengo

$$\left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| (|w+h|^{n-1} + |w+h|^{n-2}|w| + \dots + |w|^{n-1})$$

Ora, per  $h$  tale che  $w+h \in D_\rho(0)$ , con  $|w| \leq \rho < R$  si ha che  $|w+h|^{n-k}|w|^{k-1} \leq \rho^{n-1}$  quindi

$$\left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| n \rho^{n-1} \rightarrow 0$$

Poiché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \zeta^{n-1}$  la serie derivata converge assolutamente in  $D_R(0)$  in particolare per  $\zeta = \rho$ . Concludiamo ora

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(w) \right| &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} - S'_N(w) \right| + \\ &+ \limsup_{h \rightarrow 0} |S'_N(w) - g(w)| + \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} \right| = |S'_N(w) - g(w)| + \varepsilon \end{aligned}$$

per  $N$  sufficientemente grande. Si conclude per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$   $\square$

## 2.3 Integrazione su Curve

### Definizione 2.5: Curva in $\mathbb{C}$

Diremo **curva** in  $\mathbb{C}$  ogni funzione continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Si dice **chiusa** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Il **sostegno** di  $\gamma$  è l'immagine di  $\gamma$ , cioè  $\gamma([a, b])$ . Inoltre  $\gamma$  si dice  $C^1$  a tratti se esistono  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tali che

$$\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k]) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Diciamo **curva opposta** di  $\gamma$  la curva percorsa in "senso opposto" ossia:

$$-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad -\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$$

Chiamiamo **saldatura** di due curve  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ , la curva

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 + t - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases} \quad \forall t \in [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$$

(Notare che esiste anche la notazione moltiplicativa per saldatura e curva opposta). Siano ora  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  due curve. Allora diciamo che le due curve sono **equivalenti** se esiste  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$   $C^1$  a tratti, biettiva, con  $\varphi' > 0$ , tale che  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Per convenzione, se non espressamente specificato diversamente considereremo curve  $C^1$  a tratti.



### Definizione 2.6: Integrale su curva

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva  $C^1$  a tratti e sia  $f$  continua a valori in  $\mathbb{C}$  definita (almeno) sul sostegno di  $\gamma$ . Allora si definisce

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Abbiamo le seguenti proprietà:

- (linearità)  $\int_{\gamma} (\lambda f + \mu g) dz = \lambda \int_{\gamma} f dz + \mu \int_{\gamma} g dz$
- (additività)  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
- $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \text{lung}(\gamma) \cdot \max_{\text{spt } \gamma} |f|$
- $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$

Sia  $C$  una curva in  $\mathbb{C}$  assegnata come “oggetto geometrico”: circonferenza, rettangolo, segmento eccetera. Allora scriveremo  $\int_C f(z) dz$  purché il contesto chiarisca il tipo di parametrizzazione. Ad esempio  $\int_{\partial D_R}$  o  $\int_{\partial R}$  (rispettivamente integrale su circonferenza e su bordo di un rettangolo) si intenderà a meno di specificare in orientamento antiorario.

**Proposizione 2.14.** Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  due curve equivalenti. Allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  la funzione di equivalenza. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(t))) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

□

**Esempio 2.7.** Se consideriamo  $\int_{\partial D_R(a)}$  allora la parametrizzazione che prendiamo sarà  $\gamma(t) = a + Re^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Quindi abbiamo  $\gamma'(t) = iRe^{it}$  e

$$\int_{\partial D_R(a)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) iRe^{it} dt$$

ad esempio se  $f(z) = \frac{1}{z - a}$

$$\int_{\partial D_R(a)} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

**Esempio 2.8.** Se consideriamo  $R$  rettangolo,  $a \in R \setminus \partial R$ . Calcoliamo quindi

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z - a} dz$$

dove  $z = a + \rho(\theta)e^{i\theta}$  dove  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $\rho \in C^1$  a tratti. Allora otteniamo che

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(\theta)e^{i\theta}} i\rho(\theta)e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

*Osservazione.* Se ho  $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$   $C^1$  a tratti, allora  $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Infatti, fissato  $t_0 \in [a, b]$  Consideriamo

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

Ricordiamo che  $F(z) = F(a) + F'(a)(z-a) + (\varepsilon(z-a))(z-a)$  con  $\varepsilon(w)$  infinitesimo per  $w \rightarrow 0$  e  $\varepsilon(0) = 0$ . Allora

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0} = F'(\gamma(t_0)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varepsilon(\gamma(t) - \gamma(t_0)) \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

e passando al limite otteniamo la tesi.

*Osservazione.*  $\int_{\gamma} f(z)dz$  è l'integrale su un intervallo di una funzione vettoriale  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ . Come tale possiamo applicare i risultati visti di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Ad esempio supponiamo di avere  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  e una successione e una funzione  $f_n, f : \text{spt}\gamma \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente su  $\text{spt}\gamma$ . Allora

$$\int_{\gamma} f_n(z)dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz$$

Infatti per ipotesi sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall n \geq n_{\varepsilon} \forall z \in \text{spt}\gamma \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

ma quindi anche  $\forall t \in [a, b]$  abbiamo che  $|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon$  e quindi

$$|f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \max_{a \leq s \leq b} |\gamma'(s)| < M\varepsilon$$

cioè  $f_n(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot) \rightarrow f(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)$  uniformemente.

In particolare (come successione si consideri la successione delle somme parziali di una serie) si ha che se  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  converge uniformemente sul supporto di  $\gamma$  allora

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz$$

### Definizione 2.7: Primitiva

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **primitiva** di  $f$  se  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $F'(z) = f(z)$  per ogni  $z \in \Omega$ .

**Proposizione 2.15.** Sia  $F$  primitiva di  $f$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  una curva  $C^1$  a tratti. Allora

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

*Dimostrazione.*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

□

**Corollario 2.15.1.** Se  $F$  ammette primitiva in  $\Omega$  allora  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma$  in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* ovvia □

**Corollario 2.15.2.** Sia  $\Omega$  un aperto **connesso**, allora se  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $f' = 0$  allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Fissiamo  $z_0, z_1 \in \Omega$ , allora esiste (connessione per archi) una  $\gamma \subset \Omega$  a tratti (poligonale) con  $\gamma(a) = z_0$  e  $\gamma(b) = z_1$  e allora poiché  $f$  è primitiva di  $f'$  abbiamo che

$$0 = \int_{\gamma} f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(z_1) - f(z_0)$$

□

Ricordiamo la notazione “mista” per le funzioni  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Sia ora  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$  a tratti e la denotiamo  $\gamma(\cdot) = x(\cdot) + iy(\cdot)$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t))dt = \\ &= \int_a^b u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)dt + \\ &\quad + i \int_a^b u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)dt \end{aligned}$$

Se ora poniamo  $\omega_r(x, y) = u(x, y)dx - v(x, y)dy$  e  $\omega_i(x, y) = v(x, y)dx + u(x, y)dy$  allora otteniamo

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \omega_r + i \int_{\gamma} \omega_i$$

e anche

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))x'(t)dt + \\ &\quad + i \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))y'(t)dt = \\ &= \int_{\gamma} f(x, y)dx + i \int_{\gamma} f(x, y)dy \end{aligned}$$

**Proposizione 2.16.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

- a) Sia  $f$  continua. Allora  $f$  ammette primitiva se e solo se  $\omega_r$  e  $\omega_i$  sono esatte
- b) Sia  $f \in C^1$ . Allora  $f$  soddisfa le condizioni di Cauchy – Riemann (cioè è  $\mathbb{C}$ -differenziabile) se e solo se  $\omega_r$  e  $\omega_i$  sono chiuse

*Dimostrazione.*

- a)  $f$  ammette primitiva  $F = \varphi + i\psi$ ; si ha quindi che

$$u + iv = F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x \quad \text{e} \quad \begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x \end{cases}$$

Allora otteniamo che

$$\begin{cases} u = \varphi_x = \psi_y \\ v = \psi_x = -\varphi_y \end{cases}$$

ne consegue che

$$\begin{cases} \omega_r = udx - vdy = \varphi_x dx - \varphi_y dy = d\varphi \\ \omega_i = vdx + udy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi \end{cases}$$

sono esatte.

Viceversa, siano  $\omega_r$  e  $\omega_i$  esatte, quindi  $\omega_r = d\varphi$  e  $\omega_i = d\psi$ , per opportune  $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$ . Allora

$$\begin{cases} u = \varphi_x \\ -v = \varphi_y \end{cases} \quad \begin{cases} v = \psi_x \\ u = \psi_y \end{cases}$$

Ponendo ora  $F = \varphi + i\psi \in C^1$  si ha che

$$\begin{cases} \varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x \end{cases}$$

che sono esattamente le condizioni di Cauchy-Riemann per  $F$ . Allora  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x = u + iv = f$ , quindi  $F$  è primitiva di  $f$ .

b)  $f = u + iv$ . Le condizioni di Cauchy-Riemann sono

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \begin{cases} w_i = vdx + udy \text{ è chiusa} \\ w_r = udx - vdy \text{ è chiusa} \end{cases}$$

semplicemente per definizione

□

Ricordiamo che vogliamo cercare di invertire il risultato precedente, ossia il corollario 2.15.1. Per il viceversa quindi abbiamo che  $\int_\gamma f = 0$  per ogni  $\gamma$  chiusa in  $\Omega$ , ma ora poiché  $\int_\gamma f = \int_\gamma \omega_r + i \int_\gamma \omega_i$  ne consegue che

$$\int_\gamma \omega_r = \int_\gamma \omega_i = 0 \quad \forall \gamma \xrightarrow{\text{Teorema 3.1}} \omega_r, \omega_i \text{ esatte} \xrightarrow{\text{Proposizione}} f \text{ ammette primitiva}$$

Con questo abbiamo dimostrato

**Proposizione 2.17.** *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua, allora  $f$  ammette primitiva se e solo se*

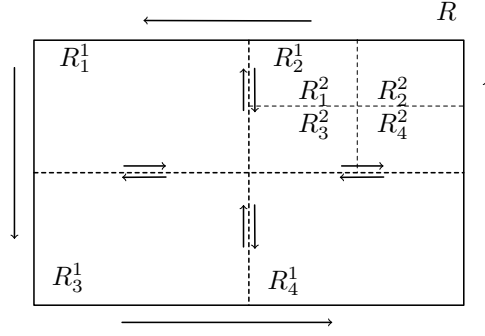
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiusa in } \Omega$$

Nella dimostrazione  $f \mathbb{C}$ -differenziabile  $\implies f$  analitica servirà avere che  $\int_\gamma f = 0$  per ogni  $\gamma$  chiusa in  $\Omega$  semplicemente connesso. Ma non possiamo usare (b) della proposizione 2.16 perché non possiamo assumere che  $f$  sia  $C^1$ . Allora mostriamo direttamente che  $\int_\gamma f = 0$  in un caso particolare, usando il seguente lemma

### Lemma 2.18: Cauchy-Goursat

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{C}$ -differenziabile. Sia  $R$  un rettangolo chiuso, con  $R \subseteq \Omega$ . Allora

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$



*Dimostrazione.* Sia  $A = \left| \int_{\partial R} f dz \right|$ . Per assurdo supponiamo sia  $A > 0$ . Ora suddividiamo  $R$  in quattro rettangoli  $R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1$  e abbiamo

$$A = \left| \int_{\partial R} f \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \int_{\partial R_i^1} f \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \int_{\partial R_i^1} f \right|$$

Allora abbiamo che per un qualche  $R_j^1$  si ha che

$$\left| \int_{\partial R_{j_1}^1} f \right| \geq \frac{A}{4}$$

Procediamo in questo modo suddividendo  $R_{j_1}^1$  in quattro rettangoli  $R_i^2$  per  $i = 1, 2, 3, 4$  e così procedendo si forma una successione di rettangoli

$$R_{j_1}^1 \supseteq R_{j_2}^2 \supseteq \dots \supseteq R_{j_n}^n$$

che hanno diametro  $\text{diam} R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{diam } R$  di lunghezza  $\text{lung} R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{lung} R$  e tali che

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

Ora essendo ogni rettangolo compatto, la loro intersezione non è vuota e anzi è un solo punto  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_{j_k}^k = \{a\}$ , avendo diametro 0. Poiché  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $z = a$ :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \varepsilon(z - a)(z - a) \quad \varepsilon(0) = 0 \quad \varepsilon(w) \rightarrow 0 \text{ per } w \rightarrow 0$$

Infine notiamo che

$$\int_{\partial R_{j_k}^k} f(z) dz = \int_{\partial R_{j_k}^k} (f(a) + f'(a)(z - a)) dz + \int_{\partial R_{j_k}^k} \varepsilon(z - a)(z - a) dz$$

dove il primo termine è uguale a 0 poiché la funzione integranda ammette primitiva  $f(a)z + \frac{1}{2}f'(a)(z - a)^2$ . Ora fissiamo  $\sigma > 0$ . Sia  $\delta > 0$  tale che  $|w| < \delta \implies |\varepsilon(w)| < \sigma$ . Per  $k$  sufficientemente grande abbiamo che  $\text{diam} R_{j_k}^k < \delta$  e allora  $|z - a| < \delta$  se  $z \in \partial R_{j_k}^k$ . Allora, per tali  $k$ :

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} \varepsilon(z - a)(z - a) dz \right| \leq \sigma \text{diam } R_{j_k}^k \text{lung} R_{j_k}^k = \sigma \cdot \frac{1}{2^k} \text{diam } R \cdot \frac{1}{2^k} \text{lung } \partial R$$

Ricordando che

$$\left| \int_{\partial R_k} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

e mettendo assieme i pezzi otteniamo che  $A = 0$  (per l'arbitrarietà di  $\sigma$ ), che è assurdo  $\square$

Estendiamo ora il risultato

**Proposizione 2.19.** *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Sia  $a \in \Omega$  e supponiamo che  $f$  sia  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $\Omega \setminus \{a\}$ . Allora*

$$\int_{\partial R} f = 0$$

per ogni rettangolo chiuso  $R$  in  $\Omega$

*Dimostrazione.* – Se  $a \notin R$  allora si usa il lemma di Cauchy-Goursat

- Se  $a \in \partial R$  si approssima  $R$  con una successione  $R_n$  di rettangoli internamente (come in figura 4) Risulta poi

$$0 = \int_{\partial R_n} f \rightarrow \int_{\partial R} f$$

(possiamo pensare ogni  $\partial R_n$  parametrizzato su un intervallo fisso  $[a, b]$  e c'è convergenza uniforme)

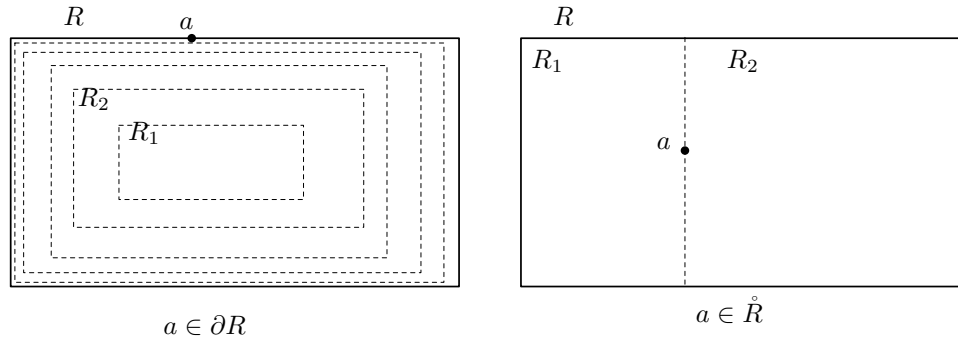


Figura 4: Approssimazione di  $R$  con  $R_n$  per  $a \in \partial R$  e decomposizione per  $a \in \mathring{R}$

- $a \in \mathring{R}$  Scomponendo  $R$  in due rettangoli  $R_1$  e  $R_2$  come in figura, con  $a \in \partial R_1 \cap \partial R_2$  si ha che

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R_1} f + \int_{\partial R_2} f = 0$$

per il caso precedente

$\square$

### Teorema 2.20: Formula di Cauchy per il rettangolo

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathbb{C}$ -differenziabile. Sia  $R \subseteq \Omega$  un rettangolo chiuso. Allora per ogni  $w \in \mathring{R}$  risulta

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

*Dimostrazione.* Sia

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

allora poiché  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile,  $g$  è continua su  $\Omega$ . Inoltre  $g$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $\Omega \setminus \{w\}$ . Allora per la proposizione 2.19 si ha che

$$0 = \int_{\partial R} g(z) dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{\partial R} \frac{1}{z-w} dz$$

Infine poiché  $\int_{\partial R} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$  per  $w \in \mathring{R}$  si ottiene la tesi.  $\square$

### Teorema 2.21

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione  $\mathbb{C}$ -differenziabile. Allora  $f$  è analitica in  $\Omega$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $a \in \Omega$  e mostriamo che  $f$  è sviluppabile in serie di potenze in un intorno di  $a$ . Sia  $R$  un rettangolo chiuso con  $a \in \mathring{R}$  e  $R \subseteq \Omega$ . Sia  $D_r(a)$  con

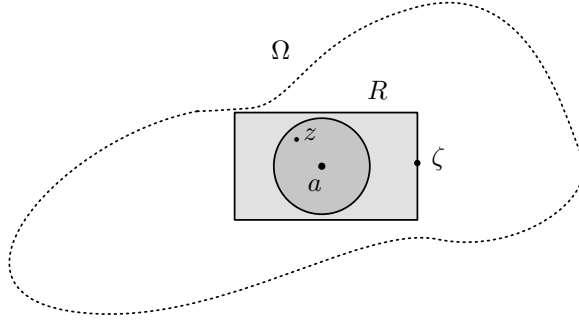


Figura 5: diffanalitica

$\overline{D_r(a)} \subseteq \mathring{R}$ . Consideriamo  $z \in D_r(a)$ . Sappiamo per la formula di Cauchy per il rettangolo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ora comunque presi  $z \in D_r(a)$  e  $\zeta \in \partial R$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

e poiché

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \leq \alpha < 1$$

per un opportuno  $\alpha$ . Allora abbiamo

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

e quindi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n d\zeta$$

Risulta che

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n \right| \leq \left( \max_{\partial R} |f| \right) \frac{1}{|\zeta - a|} \cdot \alpha^n$$

e quindi poiché  $\alpha < 1$  si ha convergenza globale e si può scambiare il segno di serie e integrale ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

$$\text{dove } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

□

Abbiamo allora dimostrato che  $f$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile se e solo se è analitica. Si parla anche di funzioni **olomorfe** e si indica con  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

*Osservazione.* Se  $f$  è olomorfa allora  $f$  è infinitamente differenziabile in senso complesso. Inoltre se guardiamo  $f$  come funzione reale  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  allora  $f$  è  $C^\infty$

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Abbiamo già visto che se per ogni  $\gamma$  chiusa in  $\Omega$  si ha  $\int_\gamma f = 0$  allora  $f$  ammette primitiva in  $\Omega$ , ossia esiste  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $F' = f$ . In particolare  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e quindi olomorfa, ma quindi anche  $f$  è olomorfa.

Ricordando la dimostrazione del teorema 3.1 che dice che se l'integrale su ogni curva chiusa di una forma differenziale è nullo allora la forma è esatta. Similmente se per ogni curva chiusa  $\gamma$  si ha che l'integrale su  $\gamma$  di  $f$  è nullo allora  $f$  ammette primitiva, costruita nello stesso modo, ossia

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

dove  $\gamma_z$  è una curva che unisce  $z_0$  a  $z$ , con  $z_0$  fissato. Richiedere che l'integrale su ogni curva chiusa sia nullo serve perché questa funzione sia ben definita.

Supponiamo ora di avere solamente l'ipotesi

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Otteniamo un simile risultato

#### Teorema 2.22: Morera

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  continua e tale che

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Allora  $f$  è olomorfa in  $\Omega$

*Dimostrazione.* Fissato  $\overline{D_r}(a) \subseteq \Omega$ , per ogni  $z \in D_r(a)$  costruiamo

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

dove  $\gamma_z$  consiste in due dei lati di un rettangolo con vertici  $a$  e  $z$ . Tecnicamente allora ci sono due curve  $\gamma_z$  e  $\tilde{\gamma}_z$  con questa proprietà, ma per l'ipotesi posta hanno uguale integrale, quindi  $F$  è ben posta. Ora come nel caso precedente si dimostra che  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile e  $F'(z) = f(z)$  in ogni  $z \in D_r(a)$ . Allora  $F$  è  $\mathbb{C}$ -differenziabile in  $D_r(a)$ . Per l'arbitrarietà di  $a$  si ha che  $f$  è olomorfa in  $\Omega$ . □



*Osservazione.* Non abbiamo dimostrato in questo caso che  $f$  ammette primitiva su tutto  $\Omega$ , ma soltanto in un intorno di ogni punto. Questo comunque ci permette di mostrare che  $f$  è olomorfa.

Con quanto appena visto possiamo aggiornare la Proposizione 2.16. Infatti se  $f$  è olomorfa, in particolare è  $C^1$  e allora  $\omega_i$  e  $\omega_r$  sono chiuse. Ora usando il Teorema 3.2 vale l'invarianza per omotopia. Allora

**Teorema 2.23: Cauchy, forma omotopica**

Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  e  $\gamma_0, \gamma_1$  curve chiuse fra loro omotope in  $\Omega$ . Allora

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

*Dimostrazione.* vedasi sopra □

Risultato analogo vale per curve omotope rispetto a un'omotopia che fissa gli estremi.

**Corollario 2.23.1.** Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , con  $\Omega$  semplicemente connesso. Allora  $f$  ammette primitiva in  $\Omega$

*Osservazione.* Segue che  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  ammette sempre una primitiva locale.

**Teorema 2.24: Formula di Cauchy per il cerchio**

Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  e  $D$  disco aperto con  $\overline{D} \subseteq \Omega$ . Allora per ogni  $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

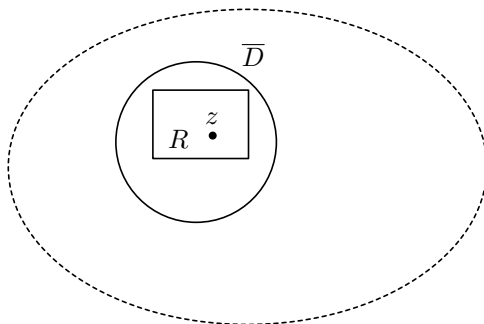


Figura 6: cauchy-disco

*Dimostrazione.* Sappiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

se  $R$  è un rettangolo chiuso in  $\Omega$ , con  $z \in \overset{\circ}{R}$ . Sia  $R \subseteq D$

Poiché

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

è olomorfa in  $\Omega \setminus \{z\}$  e  $\partial D$  e  $\partial R$  sono omotope in  $\Omega \setminus \{z\}$  risulta

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

□

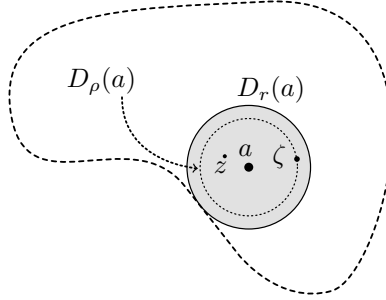
*Osservazione.* La formula si estende al caso in cui anziché  $D$  vi è una “qualunque forma” con bordo omotopo a  $\partial R$

**Funzioni olomorfe** Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Allora se  $a \in \Omega$  sappiamo che in un intorno di  $z = a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

per opportuni  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  per il teorema della serie derivata. Domanda naturale è chiedersi quant'è il raggio di convergenza di tale serie di potenze.

**Proposizione 2.25.** La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$  converge nel più grande disco contenuto in  $\Omega$



*Dimostrazione.* Sia  $r = d(a, \partial\Omega)$ . Fissiamo  $z \in D_r(a)$  e sia  $0 < \rho < r$  tale che  $z \in D_\rho(a)$ . Appliciamo la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e procediamo come nella dimostrazione dell'analiticità delle funzioni  $\mathbb{C}$ -differenziabili. Allora per  $z$  fissato

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})}$$

e poiché  $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| = \frac{1}{\rho} |z-a| < 1$  e indipendente da  $\zeta$ . Quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n \end{aligned}$$

e quindi questa deve essere la serie di Taylor

□

Dalla dimostrazione scende anche che

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

e poiché la funzione integranda è olomorfa in  $\Omega \setminus \{a\}$  e le curve  $\partial D$  e  $\partial D_{rho}(a)$  sono omotope, per  $D$  qualsiasi  $a \in D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$  si ottiene il seguente corollario

**Corollario 2.25.1.** *Sia  $\overline{D} \subseteq \Omega$  disco chiuso. Allora per ogni  $z \in D$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (6)$$

*Osservazione.* Per  $n = 0$  si trova proprio la formula di Cauchy per il cerchio.

*Osservazione.* Il corollario può essere ottenuto dalla formula di Cauchy per il cerchio per derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

**Proposizione 2.26.** *Per ogni  $a \in \Omega$  e  $\overline{D_\rho}(a) \subseteq \Omega$*

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \rho^{-n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f|$$

*Dimostrazione.* Da (6) si ottiene che

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left( \max_{\partial D_\rho} |f| \right) \cdot \underbrace{\text{lunghezza } \partial D_\rho(a)}_{2\pi\rho}$$

□

### Teorema 2.27: Liouville

Se  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  è limitata, allora  $f$  è costante

*Dimostrazione.* Fissiamo  $a \in \mathbb{C}$  e  $\rho > 0$  arbitrario. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di centro  $z = a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

è valido per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Sappiamo per la proposizione precedente che

$$|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \leq \rho^{-n} \max_{\mathbb{C}} |f| \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow \infty$$

da cui  $c_n = 0$  per  $n \geq 1$  da cui  $f(z) = c_0$  è costante. □

**Corollario 2.27.1** (Teorema Fondamentale dell'Algebra). *Sia*

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

*con  $a_n \neq 0$ . Allora  $p_n$  ha almeno uno zero*

*Dimostrazione.* Per assurdo sia  $p_n(z) \neq 0$  per ogni  $z$ . Allora sia

$$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$$

Si ha che

$$p_n(z) = a_n z^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right)$$

il cui valore assoluto va a  $+\infty$  per  $|z| \rightarrow \infty$ . Allora  $f$  è limitata perché  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$ . Ma allora per il teorema di Liouville  $f$  è costante, assurdo.  $\square$

## 2.4 Sviluppo di Laurent

Con

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad (7)$$

intendiamo

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad (8)$$

cioè diremo che la serie (7) converge (uniformemente, assolutamente, ecc) se tali sono le serie (8).

Siano  $0 \leq r_1 < r_2 < +\infty$  e  $a \in \mathbb{C}$ . Consideriamo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$$

Nel caso di  $r_1 = 0, r_2 = r$  allora si indica anche  $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$

### Teorema 2.28

Sia  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Allora esiste unica una successione  $c_n$  tale che

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad z \in \Omega$$

Tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di  $\Omega$ . Inoltre si ha che

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta$$

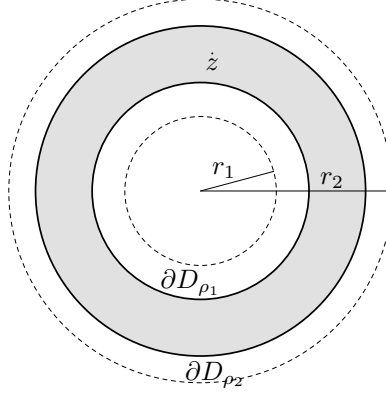
per un qualunque  $\rho \in (r_1, r_2)$

*Dimostrazione.* Siano  $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$  come in figura. Rappresentiamo  $f$  in forma integrale in  $\{z : \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$ . Sia

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Allora  $g$  è olomorfa in  $\Omega$ , infatti se  $\zeta \neq z$ , poiché  $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta-z)^n$ , con  $a_0 = f(z)$ ,

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\zeta-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\zeta-z)^{n-1}$$



che è una funzione olomorfa anche in un intorno di  $z$  e vale  $a_1 = f'(z)$  in  $\zeta = z$ .

Ne consegue che per il teorema di Cauchy

$$\partial D_{\rho_1} \sim \partial D_{\rho_2} \implies \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} g = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} g$$

ma allora

$$\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

ma  $\int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$  poiché la funzione  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$  è olomorfa in un disco contenente  $\partial D_{\rho_1}$  e non contenente  $z$  e in tale disco  $D_{\rho_1} \sim 0$ . Allora

$$-f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -f(z) 2\pi i = \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e quindi ora per il secondo passo usiamo la rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)$$

Sia ora  $\zeta \in \partial D_{\rho_1}(a)$  e allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = -\frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} = -\frac{1}{(z - a) \left( 1 - \frac{\zeta - a}{z - a} \right)}$$

e poiché  $\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{\rho_1}{|z - a|} < 1$  abbiamo che la precedente

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n$$

converge uniformemente per  $\zeta \in \partial D_{\rho_1}$  e quindi

$$-\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\partial D_{\rho_1}} f(\zeta) (\zeta - a)^n d\zeta \right) \frac{1}{(z - a)^{n+1}}$$

da cui

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n}} d\zeta \right) (z - a)^{-(n+1)} = \dots$$

se ora  $m := -(n+1)$  si ha che

$$\dots = \sum_{m=-1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta \right)}_{c_m} (z-a)^m$$

che è esattamente la forma promessa dal teorema per le potenze negative.

Consideriamo ora invece  $\zeta \in \partial D_{\rho_2}(a)$  e allora

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a-(z-a)} = \frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}$$

e come prima poiché  $\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| \leq \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1$  la precedente

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

converge uniformemente per  $\zeta \in \partial D_{\rho_2}$  e quindi

$$\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right) (z-a)^n$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right)}_{c_n} (z-a)^n$$

Infine poiché  $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$  è olomorfa in  $\Omega$  l'espressione dei coefficienti coincide con

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta$$

per  $\rho$  arbitrario con  $r_1 < \rho < r_2$  e allora

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m$$

□

*Convergenza assoluta uniforme.* La validità della convergenza dimostrata assicura automaticamente la convergenza assoluta uniforme sui compatti di  $\Omega$ . Infatti: Per ipotesi

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m$$

converge per  $|z-a| \in (r_1, r_2)$ . Ne segue che il raggio di convergenza è almeno  $r_2$ ; pertanto la serie converge assolutamente in modo uniforme nei compatti di  $D_{r_2}(a)$  e quindi in particolare sui compatti di  $\Omega$ .

Si ha inoltre che

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m = \sum_{n=-1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$$

con  $\zeta - \frac{1}{z-a}$ . L'ultima serie è una serie di potenze e converge per  $|\zeta| \in (\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_1})$  con la convenzione  $\frac{1}{0} = \infty$  e  $\frac{1}{\infty} = 0$  e quindi il raggio di convergenza è  $R \geq \frac{1}{r_1}$  per cui converge in modo assoluto uniforme sui dischi  $\overline{D}_\rho(0)$  con  $\rho < \frac{1}{r_1}$  cioè sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \rho\}$$

e quindi la serie  $\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m$  converge in modo assoluto uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|z-a|} \leq \rho\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \frac{1}{\rho}\}$$

con  $\frac{1}{\rho}$  un qualunque valore maggiore di  $r_1$ . Quindi la convergenza è assoluta uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \gamma\} \quad \gamma > r_1$$

in particolare si ha convergenza assoluta uniforme sui compatti di  $\Omega$ .  $\square$

*Unicità dei  $c_m$ .* Mostriamo che se  $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  sono tali che

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m, \quad z \in \Omega$$

allora, necessariamente sono dati dalla formula dell'enunciato. Fissiamo  $\overline{m} \in \mathbb{Z}$  e calcoliamo

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\overline{m}+1}} dz \stackrel{\text{conv. unif.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{(z-a)^m}{(z-a)^{\overline{m}+1}} dz$$

l'argomento dell'integrale è una potenza. Ha primitiva se  $m - \overline{m} - 1 \neq -1$  e quindi tutti gli integrali della serie sono nulli tranne per  $m - \overline{m} - 1 = -1$  ossia  $m = \overline{m}$ . Allora

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\overline{m}+1}} dz = c_{\overline{m}} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i c_{\overline{m}}$$

e quindi

$$c_{\overline{m}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\overline{m}+1}} dz$$

$\square$

**Esempio 2.9.** Sia  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ . Allora  $z \neq 0$  e  $z \neq 1$ . Consideriamo i seguenti  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Consideriamo prima  $\Omega_1$ . Allora

$$-\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

che è lo sviluppo di Laurent di  $f$  in  $\Omega_1$

In  $\Omega_2$  si ha che

$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

Che è lo sviluppo di Laurent di  $f$  in  $\Omega_2$

### Definizione 2.8: Sviluppo di Laurent relativo a un punto

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  con  $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$ . Lo sviluppo di cui al teorema precedente è detto **sviluppo in serie di Laurent** relativo al punto  $z = a$  (non dipende da  $r$ )

#### Esercizio 2.1

Sia  $f(z) = \frac{3}{iz^2 - z + 2i}$ . Si calcoli:

- La serie di Laurent centrata in entrambi i punti in cui  $f$  non è definita.
- La serie di Taylor centrata in  $z = 0$

#### Esercizio 2.2

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r(a))$  e  $N \in \mathbb{N}$ . Allora esiste unico  $P_N(z - a)$  polinomio di grado al più  $N$  tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - P_N(z - a)}{(z - a)^N} = 0$$

Infatti il polinomio di Taylor di grado  $N$  soddisfa questa condizione

*Dimostrazione.*  $f$  è olomorfa, quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

e quindi

$$f(z) = P_N(z - a) + R_N(z - a) = P_N(z - a) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

$$R_N(z - a) = (z - a)^{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z - a)^{n-N-1}$$

per cui la serie dà luogo ad una funzione olomorfa  $g$ ; quindi

$$\frac{f(z) - P_N(z - a)}{(z - a)^N} = (z - a)g(z) \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow a$$

e  $P_N$  è l'unico con tale proprietà. Infatti se  $Q_N$  avesse la stessa proprietà, allora

$$\frac{P_N(z - a) - Q_N(z - a)}{(z - a)^N} = \frac{P_N - f + f - Q_N}{(z - a)^N}$$

Sia ad esempio  $N = 2$ , allora questo significa

$$\begin{aligned} P_N(z - a) &= a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 \\ Q_N(z - a) &= b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 \end{aligned}$$

Se ora  $\frac{P_N - Q_N}{(z - a)^N} \rightarrow 0$  allora  $P_N(0) = Q_N(0)$  da cui  $a_0 = b_0$ . Si può proseguire mostrando che allora  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  e così via.  $\square$



### Esercizio 2.3

Calcolare il Polinomio di Taylor di grado 4 di

$$f(z) = e^z \sin(z)$$

relativamente a  $z = 0$

Sia  $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$  e  $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m$ . Sia inoltre  $\zeta = \frac{1}{z-a}$  e quindi

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$$

Sappiamo che (vedasi dimostrazione teorema sopra) tale serie ha raggio di convergenza  $R \geq \frac{1}{r_1}$  e definisce pertanto una funzione  $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ . Dunque

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \text{ è olomorfa in } \mathbb{C} - \{a\}$$

Che motiva la seguente definizione

### Definizione 2.9: Parte principale

La funzione olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m$$

è detta parte principale dello sviluppo di Laurent di  $f$  relativo a  $z = a$

Sappiamo che tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ .

**Proposizione 2.29.** *La parte principale è l'unica funzione  $g$  tale che*

- $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$
- $g(z) \rightarrow 0$  per  $|z| \rightarrow \infty$
- $f - g$  è estendibile in modo olomorfo in un intorno di  $a$

pezzettino di dim. Sappiamo che  $g(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right)$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Inoltre  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \varphi(0) = 0$ . Infine  $(f - g)(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$  e il secondo membro definisce una funzione olomorfa in un intorno di  $a$ .  $\square$

### 3 Richiamo delle forme differenziali

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto. Una forma differenziale su  $\Omega$  è un'espressione formale della forma

$$\omega(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

con  $A, B \in C^0(\Omega)$ . Più precisamente  $\omega$  è una funzione continua  $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)'$ . Se  $\gamma$  è una curva  $C^1$  a tratti in  $\Omega$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ , allora

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)dt \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

#### Definizione 3.1: Forma esatta

La forma differenziale  $\omega$  si dice **esatta** se esiste  $F \in C^1(\Omega)$  tale che  $\omega = dF$ , e  $F$  è detta *primitiva* di  $\omega$

Se  $\omega$  è  $C^1$  (cioè  $A, B \in C^1(\Omega)$ ) allora, se è esatta, ossia  $\frac{\partial F}{\partial x} = A$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = B$  risulta

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (9)$$

#### Definizione 3.2: Forma chiusa

Se  $\omega$  è una forma differenziale  $C^1$  e soddisfa (9) allora si dice **chiusa**

#### Teorema 3.1

Sia  $\Omega$  connesso. Allora

$$\omega \text{ esatta} \iff \int_{\gamma} \omega = 0 \text{ per ogni } \gamma \text{ in } \Omega \text{ chiusa}$$

*idea di dimostrazione.*

$\implies$  semplice

$\impliedby$  Fissiamo  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Definiamo ora

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega$$

dove  $\gamma_{x,y}$  è una qualunque curva in  $\Omega$  che unisce  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ . La definizione è ben posta perché se  $\gamma_{(x,y)}$  e  $\tilde{\gamma}_{(x,y)}$  sono due tali curve allora

$$0 = \int_{\gamma_{(x,y)} - \tilde{\gamma}_{(x,y)}} \omega = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega - \int_{\tilde{\gamma}_{(x,y)}} \omega$$

La dimostrazione procede dimostrando che  $dF = \omega$

□

#### Teorema 3.2

Sia  $\Omega$  connesso e  $\omega$  **chiusa**. Allora se  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  sono curve chiuse  $C^1$  a tratti

omotope in  $\Omega$  allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

*Osservazione.* Il teorema vale anche per curve non necessariamente chiuse purché siano omotope mediante un'omotopia che fissa gli estremi.

**Corollario 3.2.1.** *Sia  $\Omega$  semplicemente connesso e  $\omega$  chiusa. Allora  $\omega$  è esatta.*

*Dimostrazione.* Se  $\Omega$  è semplicemente connesso ogni curva chiusa è omotopa a costante 0 e quindi  $\int_{\gamma} \omega = 0$ , ossia  $\omega$  è esatta  $\square$