Appunti di Analisi 3 - Analisi Complessa

Osea

Primo semestre A.A. 2024 - 2025, prof. Enrico Vitali

1 Convergenza puntuale e uniforme

Sia E un'insieme (non vuoto) e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $E \to \mathbb{R}$ (o $E \to \mathbb{R}^n$ o $E \to \mathbb{C}$). Sia $f : E \to \mathbb{R}$.

Definizione 1.0:

Diciamo che $\{f_n\}$ converge **puntualmente** ad f se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Esempio 1.1. $E = \mathbb{R}$ e $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$, $f_n \to 0$ su $\mathbb{R}$

Esempio 1.2. $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 \to x^2$

Esempio 1.3. $f_n(x) = x^2 - \frac{1}{n}$

Esempio 1.4. $f_n(x) = e^{x-n}$ $f_n \to 0$

Esempio 1.5. $E = [0, 1]$, $f_n(x)$ funzione che è a triangolo con vertici $(\frac{1}{4n}, 0)$, $(\frac{1}{2n}, 1)$, $(\frac{1}{n}, 0)$. Allora $f_n \to 0$

In questi esempi l'idea è che per ogni ε esiste un n_ε tale che per $n \geq n_\varepsilon$, $f_n(x) < \varepsilon$. La domanda è se si riesce a esprimere n_ε senza che dipenda da x. Nell'esempio di $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ si può perché f_n ha un massimo in $x = 0$, in tal caso infatti se prendo n_ε tale che $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ allora $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Nell'esempio 1.2 invece vogliamo un n_ε tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ossia $|-\frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}| \leq \varepsilon$. Da questo troviamo che

$$\frac{1}{n^2} - \varepsilon \leq \frac{2x}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \varepsilon$$

Ma è sempre possibile, per qualsiasi $\frac{1}{n^2} + \varepsilon$ è possibile trovare un x tale che sia maggiore, quindi non è possibile non esprimere n_ε anche in funzione di x.

Definizione 1.0:

Sia f, $f_n : E \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f_n \to f$ uniformemente in E se:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Osservazione. La condizione della definizione di convergenza uniforme è equivalente a richiedere che $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Da questo concludiamo che $f_n \to f$ uniformemente se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Allora con questa nuova osservazione è facile notare la non convergenza uniforme dell'esempio 1.2. Infatti se $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ e $f(x) = x^2$ allora $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)| = |2 - \frac{1}{n}| \to 2 > 0$.

Abbiamo però che converge uniformemente sugli insiemi limitati (esercizio). Similmente nell'esempio 1.4 f_n converge uniformemente sugli insiemi $(-\infty, a]$ infatti $0 \leq f_n(x) \leq e^{a-n} \to 0$ per $n \to +\infty$

Geometricamente la convergenza uniforme dice che il grafico di f_n è contenuta in un intorno tubolare arbitrario di f per n sufficientemente grande.

Proposizione 1.1 (Criterio di Cauchy / completezza di $\mathbb{R}$)**.** *Se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali si ha: a_n converge se e solo se a_n è una successione di Cauchy, ossia se $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ tale che $\forall n_1, n_2 \geq n_\varepsilon$, $|a_{n_1} - a_{n2}| < \varepsilon$*

Teorema 1.2: Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

Siano $f, f_n : E \to \mathbb{R}$, con $f_n \to f$ in E. Allora la convergenza è uniforme in E se e solo se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia $f_n \to f$ uniformemente in E. Fissato $\varepsilon > 0$, sia n_ε tale che (convergenza uniforme) $\forall k \geq n_\varepsilon$ e $\forall x \in E$, $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ allora presi $n, m \geq n_\varepsilon$ ho che $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Longleftarrow$ Valga la condizione di Cauchy. Allora $\forall x \in E$ la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy, quindi è convergente, quindi $\exists f : E \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$. Allora dalla condizione di Cauchy, tenendo n fisso e facendo tendere $n \to +\infty$ si ottiene esattamente la convergenza uniforme.

□

Fun fact: esistono dei cosiddetti "Spazi uniformi", che sono spazi topologici ma non metrici.

Esempio 1.6. Sia $f_n = \frac{n^2 - x}{n^3 + e^{nx}}$. È evidente per $x \in \mathbb{R}$ che $f_n(x) \to 0$.

C'è convergenza uniforme sui limitati, infatti se $|x| \leq M$ allora $|f_n(x)| \leq \frac{n^2+M}{n^3} \to 0$. Consideriamo ora $x \geq 0$ (esercizio). Invece per $x \leq 0$, posso prendere per ogni n $x_n = -n^4$ e allora ottengo che $f_n(x_n) \to +\infty$

Osservazione. Sia $f_n : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua, suppongo che $\{f_n\}$ converga uniformemente a f in (a, b). Allora converge uniformemente in $[a, b)$

Dimostrazione. Per Cauchy

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in (a, b), \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Per $x \to a$ abbiamo per continuità che $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$ per $n, m \geq \overline{n} \in \mathbb{N}$, quindi preso $\tilde{n} = \max n_\varepsilon, \overline{n}$ si ha che f_n soddisfa il criterio di Cauchy in $[a, b)$ e quindi converge uniformemente. □

Da questa osservazione noto anche che vale il contrapositivo: se f_n non converge uniformemente in $[a, b)$ non può neanche convergere uniformemente in (a, b)

Esempio 1.7. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2\left(x-\frac{q}{\sqrt{n}}\right)^2}$, allora ho che $f_n(0) = \dfrac{1}{1+n} \to 0$, e per $x \neq 0$ pure, infatti

$$0 \leq \frac{1}{1+n^2\left(x-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \overset{\text{definitivamente}}{\leq} \frac{1}{1+n^2\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} \to 0$$

è convergente uniformemente su tutto $\mathbb{R}$

Sia E un insieme non vuoto e sia $\mathcal{B}(E)$ l'insieme delle funzioni reali e limitate su E.

Definizione 1.2: Norma dell'estremo superiore

Sia $f : E \to \mathbb{R}^n$ una funzione. Allora

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|$$

è la norma dell'estremo superiore (anche denotata semplicemente $\|f\|$).

Buona definizione. Perché sia una buona definizione, serve che sia una norma.

a. $\|f\| \geq 0$ e $\|f\| = 0 \iff f = 0$

b. $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$

c. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

□

Proposizione 1.3. *$\mathcal{B}(E)$ è uno spazio metrico normato con la norma dell'estremo superiore, e quindi distanza $d(f,g) = \|f-g\|$*

Dimostrazione. ovvio □

1.1 Scambi di limite, derivate, integrali

Esempio 1.8. Dimostrare che se $f \in C^0([a,b]\times[c,d])$ a valori reali e

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \quad y \in [c,d]$$

Allora g è continua in $[c,d]$

Infatti $\forall \overline{y} \in [c,d]$ abbiamo che comunque presa $y_n \to \overline{y}$ chiaramente $g(y_n) \to g(\overline{y})$. Ponendo ora $f_n = f(\cdot, y_n)$. Allora vogliamo mostrare che $f_n(\cdot) \to f(\cdot, \overline{y})$ uniformemente in $[a,b]$. Poiché f è uniformemente continua in $[a,b]\times[c,d]$ perché continua su un compatto, allora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall x, x' \in [a,b]$ e $\forall y, y' \in [c,d]$ se $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$ allora $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ sia δ come sopra; sia quindi n_ε tale che $n \geq n_\varepsilon \implies |y_n - \overline{y}| \leq \delta$ e quindi, per ogni $x \in [a,b]$ abbiamo $|(x,y_n)-(x,\overline{y})| = |y_n - y| \leq \delta$, da cui $|f_n(x,y_n) - f(x,\overline{y})| \leq \varepsilon$. Abbiamo quindi mostrato l'uniforme convergenza.

Proposizione 1.4 (Derivation under the integral sign)**.** *Sia $f \in C^1([a,b]\times[c,d])$ e $g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ per $y \in [c,d]$, allora*

$$g \in C^1([c,d]) \text{ e } g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

Dimostrazione. Fissiamo $\overline{y} \in [c, d]$ e consideriamo

$$\frac{g(y) - g(\overline{y})}{y - \overline{y}} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, \overline{y})}{y - \overline{y}} \, dx = \int_a^b \varphi(x, y) dx$$

con $\varphi(x, y)$ l'integrando. Siappiamo che $\lim_{y \to \overline{y}} \varphi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y})$ e vogliamo mostrare che questa convergenza è uniforme al variare di x. Per il teorema di Lagrange si ha che

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \overline{y})}{y - \overline{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_{x,y}) \quad \xi_{x,y} \in (\overline{y}, y) \text{ oppure } (\overline{y}, y)$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}$ è uniformemente continua in $[a, b] \times [c, d]$ allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [a, b] \text{ e } \forall y, y' \in [c, d]$$
$$|(x, y) - (x', y')| < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') \right| < \varepsilon$$

e ora prendiamo come coppie $(x, \overline{y})$ e $(x, \xi_{x,y})$ e abbiamo

$$|(x, \xi_{x,y}) - (x, \overline{y})| = |\xi_{x,y} - \overline{y}| \leq |y - \overline{y}|$$

Ora come prima ciò dimostra che $\varphi(x, y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y})$ uniformemente in $[a, b]$ e quindi

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, dx$$

□

1.2 Serie di funzioni

I risultati visti per le successioni di funzioni danno luogo ad analoghi risultati per le serie di funzioni. Sia quindi E un insieme $f_n : E \to \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}$) e si considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in E$$

che è una serie di funzioni.

Definizione 1.4:

Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in E se la successione delle somme parziali converge puntualmente in E, ossia se

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E se la successione delle somme parziali converge uniformemente in E,

Ne consegue che alcuni risultati hanno rispettivi analoghi, ad esempio

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente in E se e solo se

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converge uniformemente in E (definizione), ossia questo vale se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall N, M \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |s_N(x) - s_M(x)| < \varepsilon$$

Ora assumiamo senza perdita di generalità che $N \leq M$, allora chiamiamo $M = N+p$ e otteniamo che l'ultima eguaglianza si scrive come

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Otteniamo

Proposizione 1.5 (Criterio di Cauchy)**.** *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, p \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \tag{1}$$

Corollario 1.5.1. *Condizione necessaria affinche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente in E è che $f_n \to 0$ uniformemente in E*

Dimostrazione. prendiamo $p = 1$ in (1) e otteniamo $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon$ ossia $f_n \to 0$ uniformemente in E □

Esempio 1.9. Supponiamo ora che esista una successione numerica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

vogliamo mostrare che allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E, usando (1), infatti abbiamo

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

dove nell'ultima diseguaglianza si è utilizzato il criterio di Cauchy per le serie numeriche.

Definizione 1.5: Convergenza totale

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge **totalmente** in E se esiste $\{a_n\}$ in $\mathbb{R}$ tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Per quanto visto prima quindi

Proposizione 1.6. *Convergenza totale implica convergenza uniforme, e notando dalla dimostrazione prima abbiamo anche che implica la convergenza assoluta uniforme.*

Esempio 1.10. Non vale il contrario, un esempio di serie uniformemente convergente ma non totalmente convergente è

$$\sum_{n=1}^{\infty} -1 \cdot \frac{(-1)^n}{n}$$

dove $f_n(x)$ è costante per ogni n. Allora la serie converge uniformenenente in $\mathbb{R}$ ovviamente perché è costante e converge in quanto a segno alternato, ma non converge totalmente perché la serie armonica diverge.

Esempio 1.11. Sia $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, per $x \in \mathbb{R}$. Allora usiamo il criterio della radice ottenendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

quindi per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente, per $|x| > 1$ la serie diverge, per $x = -1$ la serie è la serie armonica che diverge, per $x = 1$ la serie è una serie a segni alterni che converge.

Concludiamo quindi che la serie converge puntalmente in $(-1, 1]$ e per ogni $0 < \delta < 1$ la serie converge uniformemente in $[-\delta, \delta]$, infatti

$$\left|(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\right| \leq \delta^n n$$

la cui serie converge, quindi la serie converge totalmente.

Naturalmente però la serie non converge totalmente in $[0, 1]$ poiché

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

ma comunque la serie converge uniformemente in $[0, 1]$, infatti usiamo il criterio di Cauchy.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq |s_{n+p}(x) - s_n(x)| <= |s_{n+p} - S(x)| + |S(x) - s_n(x)| < \frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{x^n}{n}$$

che converge a 0 per $n \to +\infty$ e si è usato il fatto che se $S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ è una serie convergente a segni alterni, con $a_n > 0, a_n \to 0$ allora $|S - s_n| \leq a_{n+1}$

Procediamo a chiederci se la serie converge uniformemente in $(-1, 0]$. Utilizziamo allora la seguente osservazione dedotta direttamente dalle successioni

Osservazione. Sia $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n \in C^0([a, b])$. Se la serie converge uniformemente in $(a, b]$ allora converge uniformemente in $[a, b]$ (in particolare converge in $x = a$)

Dimostrazione. Per ipotesi $s_n(x)$ converge uniformemente in $(a, b]$ e s_n sono funzioni continue in $x = a$, quindi per il risultato che avevamo già per le successioni (in breve basta enunciare il criterio di Cauchy e usare la continuità in $x = a$) otteniamo che la serie converge uniformemente in $[a, b]$ □

Ne concludiamo che la serie non può convergere uniformemente in $(-1, 0]$ altrimenti convergerebbe uniformemente in $[-1, 0]$ ma sappiamo che in -1 non abbiamo neanche convergenza puntuale.

Esempio 1.12. Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

2 Richiami su limiti e serie

Proposizione 2.1. *Sia a_n una successione di numeri reali positivi. Allora*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Dimostrazione. Sia $L = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se $L = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Sia allora $L < +\infty$. Fissato un $\varepsilon > 0$ quindi esiste n_ε tale che $\forall n \ge n_\varepsilon$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le L + \varepsilon$$

Allora iterando otteniamo

$$a_n \le (L+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon} \implies \sqrt[n]{a_n} \le (L+\varepsilon)^{1-\frac{n_\varepsilon}{n}} \sqrt[n]{a_{n_\varepsilon}} \to L + \varepsilon$$

Per $n \to \infty$, ora per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Similmente si dimostra anche l'altra uguaglianza, quella centrale è ovvia. $\square$

Esempio 2.1. Sia $a_n = n$. Allora poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ abbiamo che anche $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Sia $a_n = n!$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1 \to +\infty$ e quindi anche $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Sia $a_n = \frac{n^n}{n!}$ allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

e quindi $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Osservazione. In realtà (e potremmo vederlo più tardi), l'approssimazione di Stirling ci dice

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ora procediamo vedendo un criterio di convergenza (non assoluta) che sarà il criterio di convergenza di Abel. Procediamo a passi più piccoli.

Lemma 2.2: Disuguaglianza di (Brunacci) Abel

Siano $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\ell \in \mathbb{C}$ e siano $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell \in \mathbb{C}$. Poniamo ora

$$w_m = \sum_{i=0}^{m} \zeta_i \quad m = 0, 1, \dots, \ell$$

Sia $M > 0$ tale che

$$|w_m| \le M \quad \forall m = 0, 1, \dots, \ell$$

Allora

$$\left|\sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i\right| \le (|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \ \cdots + |\gamma_{\ell-1} - \gamma_\ell| + |\gamma_\ell|)M$$

Dimostrazione.

$$\sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i = \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i (w_i - w_{i-1}) = \sum_{i=0}^{\ell} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) w_i$$

Dove si intende che $\gamma_{\ell+1} = 0$ e $w_{-1} = 0$. Ora semplicemente per disuguaglianza triangolare e applicando l'ipotesi definente M otteniamo la tesi. □

Teorema 2.3: primo criterio di convergenza di Abel

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ una serie numerica. Se

- $z_n \in \mathbb{C}$ (oppure in $\mathbb{R}^N$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ è una serie le cui somme parziali sono limitate
- $\{c_n\}$ è una successione di numeri reali non creascente e infinitesima

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ converge.

Dimostrazione. Utilizziamo il criterio di convergenza di Cauchy. Fissiamo $N, p \in \mathbb{N}$ e consideriamo

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M \sum_{n=N}^{N+p} |c_n - c_{n+1}| \text{ (diciamo } c_{N+p+1} = 0 \text{ per comodità notazionale)}$$

Dove M è maggiorante per le somme parziali di z_n. Infatti abbiamo che

$$w_m = z_N + z_{N+1} + \ \cdots + z_{N+m} = \sum_{i=0}^{N+m} z_n - \sum_{i=0}^{N-1} z_n$$

per cui effettivamente $|w_m| \leq 2M$ e possimao applicare la disuguaglianza di Abel.

Ora possiamo, sapendo che $c_k \to 0$ da sopra, ottenere che la serie precedentemente trovata è telescopica per N sufficientemente grande e quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M|c_N| \to 0 \text{ per } N \to +\infty$$

e quindi per il criterio di Cauchy la serie converge. □

Esempio 2.2. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad z \in \mathbb{C}$$

Allora se $|z| > 1$ manca la condizione necessaria di convergenza.

Sia allora $|z| \leq 1$. Consideriamo prima il caso $|z| < 1$. Sia ha allora convergenza assoluta, perché

$$\frac{|z|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|z|^n} = |z| \frac{n}{n+1} \to 0$$

Consideriamo invine il caso $|z| = 1$. Se $z = -1$ la serie non converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to -\infty$$

Ora consideriamo $|z| = 1$ con $z \neq -1$ e vogliamo applicare il criterio di Abel, con $c_n = \frac{1}{n}$ e $z_n = (-1)^{n+1} z^n$. Chiaramente c_n è infinitesima non crescente reale. Inoltre

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_N| = \left| \sum_{i=1}^{N} (-1)^{n+1} z^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} (-z)^N \right| = |z| \left| \frac{1 - (-z)^N}{1 - (-z)} \right| \leq \frac{z}{|1 + z|}$$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Abel e la serie converge.

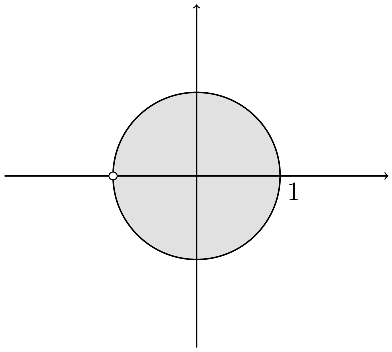

Figura 1: Punti del piano $\mathbb{C}$ tali che la serie dell'esempio 2.2 converge

Corollario 2.3.1 (Criterio di Leibniz)**.** *Se una serie è a segni alterni del tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con $a_n \to 0$ *e* $a_n > 0$ *non crescente. Allora abbiamo che* $z_n = (-1)^n$ *e* $c_n = a_n$ *soddisfano le ipotesi del criterio di Abel e quindi la serie converge.*

Teorema 2.4: Secondo criterio di convergenza di Abel

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$$

con

- $z_n \in \mathbb{C}$ (oppure in $\mathbb{R}^N$)
- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è una serie convergente
- $\{c_n\}$ è una successione monotona e convergente

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$ converge.

Dimostrazione. Supponiamo $c_n \to c$ non crescente. Allora

$$\sum_{n=0}^{N} c_n z_n = \sum_{n=0}^{N} (c_n - c) z_n + c \sum_{n=0}^{N} z_n$$

Ora per $N \to \infty$ abbiamo che $c_n - c \to 0$ decrescente e le somme parziali di z_n sono limitate, perché la serie converge. Quindi abbiamo che la prima serie converge per il primo criterio di Abel. Anche la seconda serie converge per ipotesi, quindi la tesi è dimostrata. $\square$

Sappiamo che

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{M} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{N+M}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$$

è il prodtto di polinomi. Quindi formalmente, se $z = 1$ e $N, M \to \infty$ otteniamo

Definizione 2.4: Serie prodotto alla Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

che è detta serie prodotto alla Cauchy delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Teorema 2.5: Mertens + Cauchy

Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono convergenti e almeno una è assolutamente convergente, allora la serie prodotto è convergente ed ha per somma il prodotto delle serie.

Se entrambe le serie sono assolutamente convergenti, allora tale è anche la serie prodotto.

Consideriamo serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ con } c_n \in \mathbb{C} \text{ e } z, a \in \mathbb{C}$$

Abbiamo visto alcuni esempi:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge se e solo se $|z| < 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, converge se e solo se $|z| \leq 1$ e $z \neq -1$

In entrambi i casi (e vedremo in generale) la convergenza è nei punti di un disco (detto cerchio di convergenza) di centro $z = a$. Il comportamento sul bordo del cerchio varia da caso a caso.

Teorema 2.6: Abel

Si consideri la seire di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Se la serie converge in un punto $z \in \mathbb{C}$ allora converge uniformemente su tutto il segmento di estremi a e z.

Dimostrazione. Il teorema è significativo quando $z_1 \in \partial D_R(a)$ Non è restrittivo supporre $a = 0$. Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t z_1)^n$$

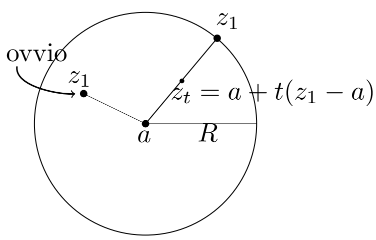

Figura 2: abel

utilizziamo il criterio di Cauchy per le convergenze uniformi: fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo avere che per un n_ε allora per ogni $N \geq n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$ si abbia che

$$\left|\sum_{m=N}^{N+p} \underbrace{t^n}_{\gamma_{m-N}} \underbrace{c_n z_1^n}_{\zeta_{m-N}}\right| < \varepsilon$$

$$\leq M(|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \ \cdots + |\gamma_{p-1} - \gamma_p|)$$

con M un maggiorante per le somme parziali di $c_n z_1^n$. Ora poiché per ipotesi tale serie converge, esiste n_ε tale per cui per ogni $N \geq n_\varepsilon$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\left|\sum_{m=N}^{N+p} c_m z_1^m\right| \leq \varepsilon$$

ora poiché $1 \geq t^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che la precedente disugaglianza è soddisfatta per $M = 1$, quindi

$$\left|\sum_{n=N}^{N+p} t^n c_n z_1^n\right| \leq t^N \varepsilon \leq \varepsilon$$

$\square$

Definizione 2.6:

Sia I un intervallo aperto. Diciamo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è analitica se per ogni $x_0 \in I$ esiste $\delta > 0$ tale che su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la funzione sia esprimibile come somma di una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

Sia f come in (2); Sia R il raggio di convergenza della serie. Su ogni intervallo J tale che $\overline{J} \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$ sappiamo che la serie converge totalmente. Consideriamo la serie delle derivate (cioè la *serie derivata*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza R, poiché

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}$$

Quindi la Erie delle derivate è uniformemente convergente su ogni compatto di $x_0 - R, x_0 + R$.

Lemma 2.7 (Teorema di derivazione per Serie)**.** *Sia* $f = \sum f_n$ *convergente e* $g = \sum f_n'$ *uniformemente convergente. Allora* f *è derivabile e* $f' = g$*.*

Per il teorema di derivazione per serie, f è derivabile e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

A f' applichiamo lo stesso ragionamento visto su f: f' è derivabile e si ha che

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Procedendo induttivamente otteniamo che $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}$$

In particolare abbiamo che $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$ e quindi la serie di potenze è la serie di Taylor di f centrata in x_0. Più precisamente

Teorema 2.8

Sia $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ per $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, con $a_n \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ e la serie è la serie di Taylor di f centrata in x_0.

Dimostrazione. Vedasi sopra. □

Non è vero che ogni funzione C^∞ sia sviluppabile in serie di Taylor.

Esempio 2.3. Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$. Allora

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 & x = 0 \\ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

eccetera anche per le altre derivate si ha che $f^{(k)}(0) = 0$. Quindi la serie di Taylor centrata in 0 è la serie nulla, ma $f \neq 0$ in alcun intorno di 0.

Teorema 2.9

Sia $f \in C^\infty(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto per la quale esistano $M, L > 0$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in I \quad |f^{(k)}(x)| \leq M L^k$$

Allora f è analitica.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I$ e consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad x \in I$$

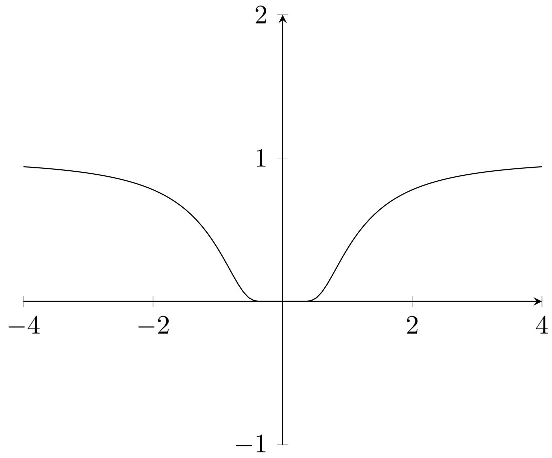

Figura 3: $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Scriviamo lo sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k} \frac{f^{(n)}}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi_x \in (x_0, x)$ è un opportuno punto. Mostriamo ora che

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

$\square$

Esempio 2.4. Le funzioni $e^x, \sin x, \cos x$ sono analitiche.

2.1 $\mathbb{C}$-differenziabilità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$

Definizione 2.9: $\mathbb{C}-$differenziabilità

Sia $a \in \Omega$. Diciamo che f è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$ se esiste

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) = f(a)}{z - a} = f'(a) \tag{3}$$

o equivalentemente

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + (\varepsilon(z - a))(z - a) \tag{4}$$
$$\lim_{w \to 0} \varepsilon(w) = 0 \tag{5}$$

Se poniamo $\varepsilon(0) = 0$ allora la $(1)'$ vale per ogni $z \in \Omega$, non solo $z \neq a$
Alcune proprietà:

- Se f è $\mathbb{C}$-differenziabile in $z = a$ allora è continua (da $(1)'$)
- f, g $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$; allora $f \pm g$ è $\mathbb{C}-$differenziabile, λf, con $\lambda \in \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}-$differenziabile e fg è $\mathbb{C}-$differenziabile.

  Se $g(a) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$ e $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Esempio 2.5. $z \mapsto z$ è $\mathbb{C}-$differenziabile in ogni $z \in \mathbb{C}$. Ne consegue dalle proprietà che i polinomi sono $\mathbb{C}-$differenziabili, e anche le funzioni razionali.

Esempio 2.6. $z \mapsto \overline{z}$ **non** è $\mathbb{C}$-differenziabile. Infatti

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{z-a} = \frac{\overline{z-a}}{z-a}$$

che non ha limite perché assume valori diversi ad esempio sulla retta $a+\delta$ e $a+\delta i$ al variare di $\delta \in \mathbb{R}$.

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ può essere vista come $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tralasciando la struttura di campo di $\mathbb{C}$. Allora possiamo scrivere $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$, con $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si utilizza spesso la scrittura

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

che è una sorta di "ibrido". Possiamo ora scrivere $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ecc.

Supponiamo ora che f sia $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a = x_0 + iy_0$. Esiste quindi

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a)$$

Guardiamo ora la retta $z = a + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$, quindi

$$f'(a) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0) + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

In maniera analoga, per $z = a + \delta i$ abbiamo

$$f'(a) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \delta i) - f(x_0, y_0)}{\delta i} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y} f(a)$$

In breve abbiamo che deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Che in termini di u e v equivale a dire che

$$u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y \iff \begin{cases} u_x & = v_y \\ u_y & = -v_x \end{cases}$$

Proposizione 2.10 (Condizioni necessarie)**.** *Se f è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$ allora valgono le condizioni di* ***Cauchy-Riemann****, cioè*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} u_x & = v_y \\ u_y & = -v_x \end{cases}$$

Dimostrazione. Vedasi sopra. □

Proposizione 2.11. *Sia f differenziabile in $a = (x_0, y_0)$ come funzione $\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$. Se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, allora $f : C \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = x_0 + iy_0$*

Dimostrazione. Per ipotesi (con $h = (h_1, h_2)$)

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + o(h)$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ si ha

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + i\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_2 + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(h_1 + ih_2) + o(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(z-a) + o(z-a) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.12: Looman-Menchoff

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua e dotata di $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $z = a$. Se valgono le condizioni di Cauchy Riemann, allora f è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$

Abbiamo già visto sui reali che analitica implica C^∞. Ora spiace lo spoiler ma dimostreremo che $\mathbb{C}$-differenziabile implica analitica, quindi $\mathbb{C}-$differenziabilità, C^∞, analitica saranno nozioni equivalenti e gli assegneremo la dicitura di **olomorfe**.

Definizione 2.12: Derivata complessa

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ciò è motivato dal seguente passaggio formale: Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, allora $f(x, y) = f\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2}\right)$ e quindi si ottiene formalmente il risultato come sopra definito.

Osservazione. Le condizioni di Cauchy-Riemann diventano $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

2.2 $\mathbb{C}$-differenziabilità delle funzioni analitiche

Teorema 2.13

Si consideri la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad c_n \in \mathbb{C}$$
con R il raggio di convergenza. Allora la serie derivata
$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$
ha lo stesso raggio di convergenza R. Inoltre se $f(z)$ è la somma della serie data e $g(z)$ la somma della serie derivata, allora avremo che f è $\mathbb{C}$-differenziabile e $f'(z) = g(z)$ per ogni $z \in D_R(a)$

Dimostrazione. Come nel caso reale,
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$
quindi i due raggi di convergenza coincidono. Supponiamo $a = 0$. Fissiamo $w \in D_R(0)$ e consideriamo
$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$
con h tale che $w + h \in D_R(0)$. Scriviamo, per $N \in \mathbb{N}$,
$$f(z) = S_N(z) + R_N(z) \quad \text{con} \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n(z-a)^n$$

e $R_N(z)$ il resto della serie. Sappiamo che

$$\lim_{n\to 0} \frac{S_N(w+h)-S_N(w)}{h} = S'_N(w) \to g(z) \text{ per } N \to \infty$$

Consideriamo il resto

$$\frac{R_N(w+h)-R_N(w)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=N=1}^{\infty} (c_n((w+h)^n - w^n))$$

essendo

$$(w+h)^n - w^n = (w+h-w)\Big((w+h)^{n-1} + (w+h)^{n-2}w + \cdots + w^{n-1}\Big)$$

ottengo

$$\left|\frac{R_N(w+h)-R_N(w)}{h}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_N|\big(|w+h|^{n-1} + |w+h|^{n-2}|w| + \ \cdots + |w|^{n-1}\big)$$

Ora, per h tale che $w+h \in D_\rho(0)$, con $|w| \leq \rho < R$ si ha che $|w+h|^{n-k}|w|^{k-1} \leq \rho^{n-1}$ quindi

$$\left|\frac{R_N(w+h)-R_N(w)}{h}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| n\rho^{n-1} \to 0$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\zeta^{n-1}$ la serie derivata converge assolutamente in $D_R(0)$ in particolare per $\zeta = \rho$. Concludiamo ora

$$\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(w+h)-f(w)}{h} - g(w)\right| \leq \limsup_{h\to 0}\left|\frac{S_N(w+h)-S_N(w)}{h} - S'_N(w)\right| +$$

$$+\limsup_{h\to 0}|S'_N(w)-g(w)| + \limsup_{h\to 0}\left|\frac{R_N(w+h)-R_N(w)}{h}\right| = |S'_N(w)-g(w)| + \varepsilon$$

per N sufficientemente grande. Si conclude per l'abitrarietà di ε □

2.3 Integrazione su Curve

Definizione 2.13: Curva in $\mathbb{C}$

Diremo **curva** in $\mathbb{C}$ ogni funzione continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Si dice **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Il **sostegno** di γ è l'immagine di γ, cioè $\gamma([a,b])$. Inoltre γ si dice C^1 a tratti se esistono $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tali che

$$\gamma|_{[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1},t_k]) \quad \forall k = 1,\ldots,n$$

Diciamo **curva opposta** di γ la curva percorsa in "senso opposto" ossia:

$$-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad -\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$$

Chiamiamo **saldatura** di due curve $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}, \gamma_2[a_2,b_2] \to \mathbb{C}$, con $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$., la curva

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1,b_1] \\ \gamma_2(a_2+t-b_1) & t \in [b_1, b_1+b_2-a_2] \end{cases} \qquad \forall t \in [a_1, b_1+(b_2-a_2)]$$

(Notare che esiste anche la notazione moltiplicativa per saldatura e curva opposta). Siano ora $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\tilde\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ due curve. Allora diciamo che le due curve sono **equivalenti** se esiste $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ C^1 a tratti, biettiva, con $\varphi' > 0$, tale che $\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi$

Per convenzione, se non espressamente specificato diversamente considereremo curve C^1 a tratti.

Definizione 2.13: Integrale su curva

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti e sia f continua a valori in $\mathbb{C}$ definita (almeno) sul sostegno di γ. Allora si definisce

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Abbiamo le seguenti proprietà:

– (linearità) $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f + \mu g)\, dz = \lambda \int_\gamma f dz + \mu \int_\gamma g dz$

– (additività) $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$

– $\displaystyle\left|\int_\gamma f dz\right| \leq \text{ lungh } (\gamma) \cdot \max_{\text{spt } \gamma} |f|$

– $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

Sia $\mathcal{C}$ una curva in $\mathbb{C}$ assegnata come "oggetto geometrico": circonferenza, retangolo, segmento eccetera. Allora scriveremo $\int_\mathcal{C} f(z)dz$ purché il contesto chiarisca il tipo di parametrizzazione. Ad esempio $\int_{\partial D_R}$ o $\int_{\partial R}$ (rispettivamente integrale su circonferenza e su bordo di un rettangolo) si intenderà a meno di specificare in orientamento antiorario.

Proposizione 2.14. *Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\tilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ due curve equivalenti. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ la funzione di equivalenza. Allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$
$$= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz$$

□

Esempio 2.7. Se consideriamo $\int_{\partial D_R(a)}$ allora la parametrizzazione che prendiamo sarà $\gamma(t) = a + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Quindi abbiamo $\gamma'(t) = iRe^{it}$ e

$$\int_{\partial D_R(a)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})iRe^{it}dt$$

ad esempio se $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$

$$\int_{\partial D_R(a)} \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

Esempio 2.8. Se consideriamo R rettangolo, $a \in R \setminus \partial R$. Calcoliamo quindi

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a}dz$$

dove $z = a + \rho(\theta)e^{i\theta}$ dove $\theta \in [0, 2\pi]$ e ρ è C^1 a tratti. Allora otteniamo che

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(\theta)e^{i\theta}} i\rho(\theta)e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

Osservazione. Se ho $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$differenziabile e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ C^1 a tratti, allora $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Infatti, fissato $t_0 \in [a, b]$ Consideriamo

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

Ricordiamo che $F(z) = F(a)+F'(a)(z-a)+(\varepsilon(z-a))(z-a)$ con $\varepsilon(w)$ infinitesimo per $w \to 0$ e $\varepsilon(0) = 0$. Allora

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0} = F'(\gamma(t_0))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varepsilon(\gamma(t) - \gamma(t_0))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

e passando al limite otteniamo la tesi.

Osservazione. $\int_\gamma f(z)dz$ è l'integrale su un intervallo di una funzione vettoriale $f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Come tale possiamo applicare i risultati visti di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Ad esempio supponiamo di avere $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e una successione e una funzione $f_n, f : \mathrm{spt}\gamma \to \mathbb{C}$ continua e $f_n \to f$ uniformemente su $\mathrm{spt}\gamma$. Allora

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$$

Infatti per ipotesi sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon\ \forall z \in \mathrm{spt}\gamma \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

ma quindi anche $\forall t \in [a, b]$ abbiamo che $|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t)) < \varepsilon$ e quindi

$$|f_n(g(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \max_{a \leq s \leq b} |\gamma'(s)| < M\varepsilon$$

cioè $f_n(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot) \to f(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)$ uniformemente.

In particolare (come successione si consideri la successione delle somme parziali di una serie) si ha che se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sul supporto di γ allora

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

Definizione 2.14: Primitiva

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Una funzione $F : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice **primitiva** di f se F è $\mathbb{C}-$differenziabile e $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$.

Proposizione 2.15. *Sia F primitiva di f e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva C^1 a tratti. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dimostrazione.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

□

Corollario 2.15.1. *Se F ammette primitiva in Ω allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni curva chiusa γ in Ω.*

Dimostrazione. ovvia $\square$

Corollario 2.15.2. *Sia Ω un aperto* ***connesso****, allora se f è $\mathbb{C}-$differenziabile e $f' = 0$ allora f è costante.*

Dimostrazione. Fissiamo $z_0, z_1 \in \Omega$, allora esiste (connessione per archi) una γ C^1 a tratti (poligonale) con $\gamma(a) = z_0$ e $g(b) = z_1$ e allora poiché f è primitiva di f' abbiamo che

$$0 = \int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(z_1) - f(z_0)$$

$\square$