

# Appunti di Analisi 3 - Equazioni Differenziali

Osea

Primo semestre A.A. 2024 - 2025, prof. Enrico Vitali

Libro suggerito: *Hirsch, Smale, Devaney*

## Indice

<b>0 Esempi</b>	<b>2</b>
<b>1 Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>7</b>
1.1 Alcuni esempi di risoluzione esplicita . . . . .	10
1.2 Esistenza e unicità delle soluzioni . . . . .	13
1.3 Prolungamento . . . . .	19
1.4 Stime . . . . .	23
1.5 Dipendenza continua . . . . .	26
<b>2 Sistemi autonomi</b>	<b>29</b>
<b>3 Tecniche elementari di Integrazione</b>	<b>32</b>
3.1 Equazioni di tipo omogeneo . . . . .	33
3.2 Equazioni del tipo $F(y, y') = 0$ oppure $F(x, y') = 0$ . . . . .	34
<b>4 Sistemi lineari</b>	<b>37</b>
4.1 Equazioni differenziali e forme differenziali in due dimensioni . . . . .	37
4.2 Sistemi lineari . . . . .	40
4.3 Caso generale . . . . .	50

## 0 Esempi

Sia abbia una “popolazione” la quantità  $x(t)$  evolva nel tempo. Allora il rapporto  $x'(t)/x(t)$  è il tasso di variazione della popolazione. L'equazione

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r(t, x(t))$$

è un'equazione differenziale. Tipicamente si considera il problema ai valori iniziali (di Cauchy) dove è aggiunta anche una condizione  $x(0) = x_0$

**Esempio 0.1** (Malthus). Se  $r$  è costante abbiamo la cosiddetta legge di Malthus.

$$\begin{aligned}\frac{x'(t)}{x(t)} &= r \quad x(t) > 0 \\ \log x(t) &= rt + c \quad c \in \mathbb{R} \\ x(t) &= e^c \cdot e^{rt}\end{aligned}$$

dove se  $x(0) = e^c = x_0$  si ottiene  $x(t) = x_0 e^{rt}$

Un esempio dove questo si potrebbe verificare è il decadimento radioattivo.

**Esempio 0.2** (Logistica). Non si può invece applicare in una situazione realistica di uno studio di una popolazione l'esempio della crescita esponenziale, non essendo ragionevole in quanto non considera la capacità di carico ambientale. La si introduce quindi. Allora possiamo modellizzare il fatto con:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right)$$

Da cui si ottiene dopo qualche calcolo

$$x(t) = k \frac{Ce^{rt}}{1 + Ce^{rt}}$$

con  $C \in \mathbb{R}$ , in particolare scriviamo  $C = e^{-rt_0}$  con  $t_0$  definito opportunamente. Allora le soluzioni sono

$$x(t) = k \frac{e^{r(t-t_0)}}{1 + e^{r(t-t_0)}}$$

Questo rende evidente che i grafici sono tutti uno traslato temporale dell'altro. Si può quindi studiare solo una soluzione, ad esempio per  $t_0 = 0$  essendo le altre semplici traslazioni temporali di questa.

$$x(t) = k \frac{e^{rt}}{1 + e^{rt}} = \frac{k}{1 + e^{-rt}}$$

Ciò che abbiamo ottenuto riguardo alle soluzioni, dove ogni soluzione è una traslazione temporale di un'altra, è un caso generale delle equazioni differenziali non dipendenti dal tempo. Il che è una facile osservazione del fatto che se  $x'(t) = f(x(t))$  e  $x_\tau(t) := x(t-\tau)$  allora anche  $x_\tau$  è soluzione poiché  $x'_\tau(t) = x'(t-\tau) = f(x(t-\tau)) = f(x_\tau(t))$ .

**Esempio 0.3.** Le equazioni precedenti modellizzano anche fenomeni differenti. Ad esempio in chimica se considero la reazione chimica  $H_2 + I_2 \rightarrow 2HI$  posso considerare la velocità di cambiamento della concentrazione nella soluzione della reazione e quindi in questo caso ottenere

$$-\frac{1}{2} \frac{d[H_2]}{dt} = \frac{d[HI]}{dt} = \frac{d[I_2]}{dt}$$

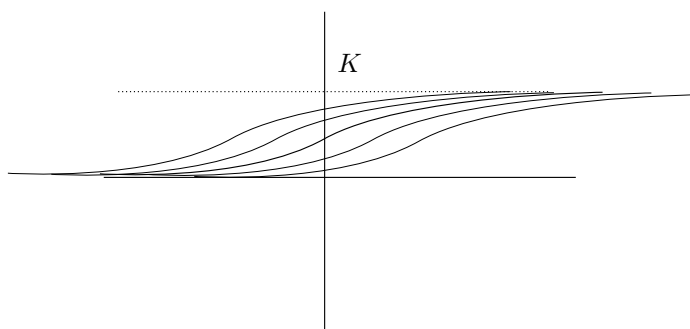


Figura 1: logistica

dove la prima derivata è definita essere la “velocità”  $v(t)$  della reazione. La legge cinetica dice che  $v$  è proporzionale al prodotto delle concentrazioni di  $H_2$  e  $I_2$  quindi

$$v(t) = k[H_2]_t[I_2]_t = \frac{d[HI]_t}{dt}$$

E il resto è lasciato come esercizio con l’obiettivo di mostrare che la reazione ha uno sviluppo logistico.

La reazione inversa invece si modella con  $x'(t) = -rx(t)^2$ . Proviamo a risolverla e otteniamo che

$$\begin{aligned} x' = rx^2 &\implies \int \frac{1}{x^2} dx = rt + c \\ -\frac{1}{x(t)} = rt + c &\implies x(t) = -\frac{1}{rt + c} \end{aligned}$$

Se poniamo  $x(0) = x_0$  otteniamo  $x_0 = -\frac{1}{c}$  da cui  $c = -\frac{1}{x_0}$  quindi

$$x(t) = -\frac{1}{rt - \frac{1}{x_0}}$$

**Esempio 0.4** (Oscillatore armonico). Sia  $m$  una massa vincolata in modo elastico ad una posizione fissa. Sia  $x = 0$  l’ascissa quando la molla è a riposo. Se la massa è nella posizione di ascissa  $x(t)$  al tempo  $t$  allora subisce la forza di richiamo (Hooke)  $F = -kx(t)$ . Allora dalla seconda legge della dinamica

$$m\ddot{x} = -kx^2 \iff \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

È un’equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti, omogenea. Allora le soluzioni sono della forma

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

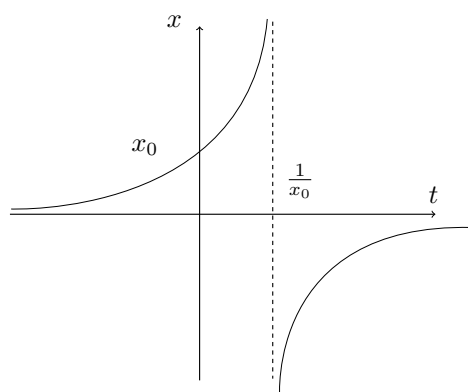


Figura 2:  $x'(t) = rx(t)^2$  per  $r = 1$

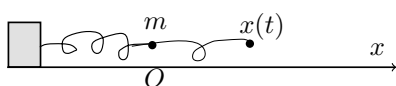


Figura 3: oscillatore armonico

Ho due costanti poiché devo definire posizione e velocità iniziale, e infatti il problema tipico ai valori iniziali per un'equazione del secondo ordine è

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(x) = v_0 \end{cases}$$

Posso riscrivere la precedente soluzione nella forma

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos(\omega t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin(\omega t) \right)$$

dove i coefficienti di seno e coseno sono le coordinate di un punto sulla circonferenza unitaria, quindi sono coseno e seno di un angolo  $\varphi$ , da cui otteniamo che  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

**Esempio 0.5** (Varianti dell'oscillatore armonico). In presenza di attrito viscoso le precedenti diventano

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - h\dot{x} \\ \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x &= 0 \end{aligned}$$

E se aggiungiamo anche una forza esterna costante

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - h\dot{x} + \psi \\ \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x &= f \end{aligned}$$

che è non omogenea

**Esempio 0.6** (Corrente elettrica). Preso un circuito  $RC$  abbiamo una forza elettromotrice che crea una differenza di potenziale  $\mathcal{E}$ , un condensatore di capacità  $C$  e una resistenza  $R$ . Sia  $q(t)$  la carica sulle piastre del condensatore. Allora risulta che in ogni momento  $\frac{q(t)}{V} = C$  costante. La resistenza invece per la legge di ohm  $V = i(t)R$ , allora otteniamo una legge

$$\mathcal{E} = Ri + \frac{q}{C} = Rq' + \frac{q}{C}$$

che è una equazione lineare del primo ordine.

In un circuito reale invece è presente un terzo termine legato all'induttanza del filo, creando un circuito  $RLC$ , consideriamo quindi di aggiungere al circuito precedentemente analizzato un'induttanza  $L$ . Allora abbiamo

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_L = Ri + \frac{q}{C}$$

dove  $\mathcal{E}_L = Li'$  è l'inerzia elettrica del sistema, l'equazione diventa

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

Ossia un'ODE lineare a coefficienti costanti del secondo ordine non omogenea.

**Esempio 0.7** (Equazione di Schrödinger).

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla_x^2\psi(x,t) + U(x,t)\psi(x,t) = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Supponiamo che il potenziale  $U$  sia indipendente dal tempo  $t$ , ossia  $U = U(x)$  e cerchiamo soluzioni della forma a variabili separate, cioè  $\psi(x,t) = u(x)\varphi(t)$ , inoltre poniamoci in una sola dimensione, otteniamo:

$$-\frac{\hbar}{2m}u''(x)\varphi(t) + U(x)u(x)\varphi(t) = iu(x)\varphi'(t)$$

Da cui dividendo per  $u(x)\varphi(t)$

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{u''(x)}{u(x)} + U(x) = i\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$$

E poiché abbiamo che un'equazione in  $x$  è uguale ad una in  $t$  deve essere che entrambi i membri sono costanti, diciamo  $E$ .

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}u''(x) = (U(x) - E)u(x) \\ \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -iE \end{cases}$$

La prima è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti (in generale) e si può riscrivere come

$$Lu := -\frac{\hbar^2}{2m}u''(x) + U(x)u(x)$$

è un operatore lineare su  $u$  e allora l'equazione diventa

$$Lu = Eu$$

ossia un'equazione agli autovalori per l'operatore  $L$ .

Ad esempio nel caso  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$  e con opportuni cambi di variabile si arriva alla cosiddetta *equazione di Hermite*

$$H''(\xi) - 2\xi H' + \cos t H = 0$$

che dà luogo ai cosiddetti *polinomi di Hermite*

Altri due esempi importanti sono, nel caso dei sistemi (tra cui l'esempio famoso del preda-predatore di Lotka-Volterra) e le elastiche piane. Ulteriore esempio è il moto di un pendolo, che si può modellizzare con un'ODE di secondo ordine non lineare.

**Esempio 0.8** (Elastiche piane). Sia abbia una verga elastica (barra) che supponiamo in una posizione di equilibrio della forma grafico  $y = u(x)$  Con ipotesi mo-

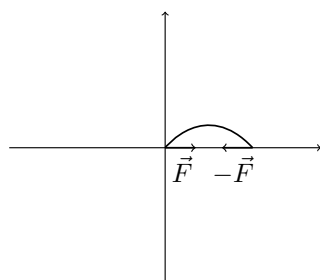


Figura 4: Elastica Piana

dellistica, ossia **il momento flettente è proporzionale alla curvatura**, dove la curvatura in un punto  $x$  si può calcolare con

$$\kappa(x) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}$$

e il momento flettente si può immaginare intuitivamente come la forza locale sulla verga ed è proporzionale al valore di  $u(x)$ . Allora si ottiene l'equazione

$$\kappa(x) = -\lambda u(x) \iff u''(x) + \lambda u(x)(1 + u'(x)^2)^{3/2} = 0$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$  è una costante.

*Osservazione.* La costante  $\lambda$  e la lunghezza della verga sono legate (significato modellistico)

**Esempio 0.9** (Equazioni di Lotka-Volterra). Siano  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  le popolazioni di due specie che interagiscono tra loro. Allora si può modellizzare il fatto che la popolazione di una specie è proporzionale alla sua popolazione e alla popolazione dell'altra specie. Sia allora  $\frac{x'_i(t)}{x_i(t)}$  il tasso di variazione della popolazione  $x_i$ . Supponiamo adesso che  $x_1$  sia la “preda” e  $x_2$  il “predatore”. Allora si può modellizzare l'evoluzione del sistema esprimendo il tasso di variazione delle popolazioni. In particolare per la preda abbiamo

$$\frac{x'_1(t)}{x_1(t)} = \alpha - \beta x_2(t)$$

dove  $\alpha$  è il tasso in assenza di predatori e  $b$  è il tasso di morte causato dai predatori. Per il predatore invece si ha

$$\frac{x'_2(t)}{x_2(t)} = \delta x_1(t) - \gamma$$

In conclusione, il sistema di equazioni differenziali è

$$\begin{cases} x'_1(t) &= (\alpha - \beta x_2(t)) x_1(t) \\ x'_2(t) &= (\delta x_1(t) - \gamma) x_2(t) \end{cases}$$

che è un sistema non lineare di due equazioni differenziali. Il problema ai valori iniziali naturalmente associato è quello che si ottiene aggiungendo i dati  $x_1(t_0) = x_1^0$  e  $x_2(t_0) = x_2^0$ .

Anche questo sistema può essere trasformato ad una versione logistica, cambiando i fattori  $\alpha$  in  $\alpha(1 - \frac{x_1}{k_1})$  e analogamente per  $x_2$ , ottenendo il sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(\alpha - \lambda x_1 - \beta x_2) \\ x'_2 = x_2(-\gamma + \delta x_1 - \mu x_2) \end{cases}$$

## 1 Equazioni differenziali ordinarie

In generale quindi abbiamo diversi esempi ( $x' = rx$ ,  $x' = rx(1 - x)$ ,  $Rq' + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}$ ) di equazioni della forma  $x' = f(t, x)$ . Anche in Lotka-Volterra abbiamo una forma simile ma con due variabili, infatti considerando  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  abbiamo che possiamo riscrivere il sistema come un sistema vettoriale della forma  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ .

### Definizione 1.1: soluzione di un'equazione differenziale

Sia  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$  aperto. Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Consideriamo l'equazione differenziale  $x'(t) = f(t, x(t))$ , che è detta quindi in *forma normale*. Diciamo **soluzione** dell'equazione differenziale ogni funzione  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $J$  intervallo, di classe  $C^1$  e tale che

$$\forall t \in J, (t, x(t)) \in D$$

e su  $D$  è verificata l'uguaglianza

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

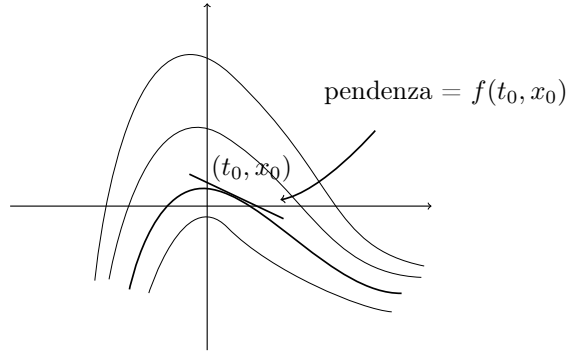


Figura 5: Soluzione di un'equazione differenziale nel caso  $n = 1$

Nel caso scalare (ossia  $n = 1$ ) dunque abbiamo che  $x(\cdot)$  è soluzione se ogni punto  $(t, x(t))$  del grafico ha pendenza pari al valore di  $f(t, x(t))$ .

Nel caso invece di equazioni differenziali del secondo ordine (come il moto armonico, il pendolo, l'elastica piana, il circuito RLC ecc...) si ha che

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

con  $x(\cdot)$  incognita. Questa forma è detta *forma normale* per un'equazione del secondo ordine. In generale se  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  è un punto mobile in  $\mathbb{R}^3$  sotto l'azione di un campo di forza  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$  allora per la seconda legge della dinamica si ottiene il sistema del secondo ordine

$$m\mathbf{x}''(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$$

Un'equazione del secondo ordine in forma normale può essere ricondotta a un sistema del primo ordine in forma normale, come

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \iff \begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(t, x(t), v(t)) \end{cases}$$

Dove abbiamo introdotto la variabile  $v(t) = x'(t)$ . A questo punto il sistema può essere scritto in forma vettoriale come  $\mathbf{x}(t) = (x(t), v(t))$ , e quindi  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (v(t), f(t, x(t), v(t)))$

Analogamente equazioni di ordine superiore possono essere ricondotte a sistemi di primo ordine introducendo le variabili  $x_i = x^{(i)}$  dove  $x^{(i)}$  è la  $i$ -esima derivata di  $x$ . Il sistema che analizzeremo sarà quindi

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

dove  $n$  è il grado dell'equazione differenziale.

Il problema ai valori iniziali associato al sistema del primo ordine  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$  si ha aggiungendo il requisito  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0$ , per cui ovviamente nel caso di



un'equazione di ordine superiore il problema ai valori iniziali è dato dal richiedere, per ogni derivata  $x^{(i)}$ , il valore iniziale  $x^{(i)}(0) = y_i$ .

È particolare il caso in cui  $f$  non dipende da  $t$  e viene detto **caso autonomo** allora se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è continua allora l'equazione è  $x' = f(x)$  dove la soluzione è una funzione  $x : J \rightarrow \Omega$  con  $J$  intervallo.

**Esempio 1.1** (Logistica). L'equazione, come visto in precedenza è

$$x' = rx(1 - \frac{x}{k}) = f(x)$$

Allora il campo di pendenza non dipende da  $t$ , vedasi figura 6

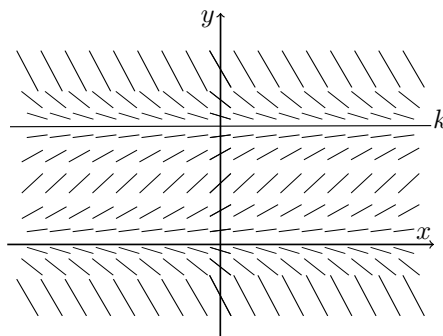


Figura 6: Pendenza della logistica

Allora abbiamo un'invarianza delle soluzioni per traslazione temporali, infatti se  $x$  è soluzione e  $x_\tau(t) := x(t - \tau)$  allora  $x'_\tau(t) = f(x(t - \tau)) = f(x_\tau(t))$ . In tal modo possiamo creare uno “Spazio degli stati” ossia un'immagine in cui raffiguriamo soltanto le posizioni di  $x$ , come si evolve il sistema in quei punti, poiché rappresentare  $t$  è ridondante, otteniamo per la logistica il seguente schema:

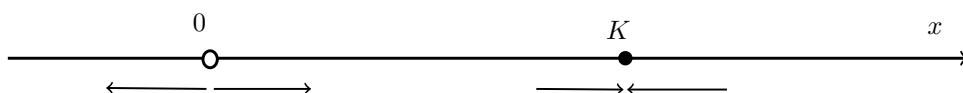


Figura 7: Spazio degli stati dell'equazione logistica

Possiamo espandere l'idea dello spazio degli stati a equazioni vettoriali autonome del primo ordine, dove rappresentiamo in ogni punto  $\mathbf{x}$  dello spazio  $\mathbb{R}^n$  la pendenza, data dal vettore  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , successivamente possiamo rappresentare l'evoluzione del sistema in questo spazio, ottenendo le *orbite* (cercare su internet “campo di pendenza Lotka-Volterra” oppure “orbite Lotka-Volterra” per vedere esempi, in tal caso in  $\mathbb{R}^2$ ). Le orbite quindi in generale (anche nel caso non autonomo) sono **la proiezione della curva della soluzione su uno spazio degli stati, che è dato dalle coordinate che non sono quella del tempo.**

## 1.1 Alcuni esempi di risoluzione esplicita

**Esempio 1.2** (Equazioni a variabili separabili). Si tratta di equazione differenziale della forma

$$x'(t) = g(t) h(x)$$

con  $g$  e  $h$  funzioni continue su un intervallo (ad esempio). Se  $\bar{x}$  è uno zero di  $h$  allora  $x(t) = \bar{x}$  è una soluzione costante. Un esempio chiaro è la logistica (figura 1) in cui se  $h(x) = x(1 - \frac{x}{K})$  allora  $x(t) = 0$  e  $x(t) = K$  sono soluzioni costanti.

Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione che non assume mai come valore uno degli zeri di  $h$ . Allora possiamo scrivere

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t) \quad (\text{su } J)$$

Da cui integrando entrambi i membri

$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} dt = \int g(t) dt \iff \int \frac{1}{h(\xi)} d\xi = \int g(t) dt$$

Dove si è fatto il cambio di variabile  $\xi = x(t)$ . Allora se  $H$  e  $G$  sono primitive di  $\frac{1}{h}$  e di  $g$  rispettivamente si ha che

$$H(x(t)) = G(t) + c$$

che è un'equazione che definisce implicitamente la soluzione.

**Esempio 1.3.** Si consideri l'equazione  $x' = rt(x^2 - x)$  con  $r \in \mathbb{R}$ . Allora si ha che  $h(x) = x^2 - x$  e  $g(t) = rt$ . Gli zeri di  $h$  sono 0 e 1 per cui  $x(t) = 1$  e  $x(t) = 0$  sono le soluzioni costanti.

Se invece  $x(t) \neq 0, 1$  allora si ha

$$\frac{x'}{x^2 - x} = 2t \iff \int \frac{1}{x^2 - x} dx = \int 2t dt \iff \log \left| \frac{x-1}{x} \right| = t^2 + c$$

quindi abbiamo che, elevando entrambi i membri alla base  $e$ , e sostituendo  $e^c \in \mathbb{R}$  con  $C > 0$ .

$$\left| \frac{x-1}{x} \right| = Ce^{t^2}$$

Poiché in questo caso il segno di  $\frac{x-1}{x}$  è costante su  $J$  (infatti  $x(J)$  è connesso e non contiene né 0 né 1). Scegliendo quindi  $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  abbiamo

$$x(t) = \frac{1}{1 - Ke^{t^2}} \quad K \neq 0$$

Notiamo che invece per  $K = 0$  si recupera la soluzione costante  $x(t) = 1$ .

**Esempio 1.4** (Equazioni lineari del primo ordine).

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

con  $p, q$  funzioni continue su un intervallo  $I$ .

Sia  $P(t)$  una primitiva di  $p(t)$ . Moltiplichiamo per  $e^{P(t)}$ .

$$e^{P(t)}x'(t) + e^{P(t)}p(t)x(t) = e^{P(t)}q(t)$$

Dove il primo membro è evidentemente la derivata di  $(e^{P(t)}x(t))$ , quindi integrando entrambi i membri si ottiene

$$e^{P(t)}x(t) = \int e^{P(t)}q(t)dt$$

(Cioè  $e^{P(t)}x(t)$  è una primitiva di  $e^{P(t)}q(t)$ ). Esplicitando  $x(t)$  otteniamo

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt$$

Se consideriamo il problema con dato  $x(t_0) = x_0$  la soluzione si può ottenere direttamente integrando tra  $t_0$  e  $t$ , ossia

$$\begin{cases} P(t) = \int_{t_0}^t p(s) ds \\ x(t) = e^{-P(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{P(s)} q(s) ds \right) \end{cases}$$

Nel caso particolare dell'equazione  $x' = ax$ , con  $a \in \mathbb{R}$  otteniamo (anche con variabili separabili) che  $x(t) = Ce^{at}$ . In modo analogo si vede che le soluzioni di  $\varphi' = a\varphi$  con  $a \in \mathbb{C}$  e  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{C}$  sono della forma  $\varphi(t) = Ce^{at}$  con  $C \in \mathbb{C}$

Per *esercizio*, Sapendo che la derivata  $\varphi'$  di  $\varphi : t \mapsto \varphi_1 + i\varphi_2$  con  $\varphi_1, \varphi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\varphi' : t \mapsto \varphi'_1 + i\varphi'_2$  mostrare che  $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$ , con  $a \in \mathbb{C}$ .

**Esempio 1.5** (Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti).

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

*Osservazione.* – L'insieme  $V$  delle soluzioni è uno spazio vettoriale

– La modellistica suggerisce che  $\dim V = 2$

Ipotizziamo un tentativo di soluzione della forma  $x(t) = e^{\lambda t}$  allora abbiamo  $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$  e  $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ . Sostituendo nella equazione e dividendo per  $e^{\lambda t} \neq 0$  otteniamo

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (A)$$

Se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  allora (A) ha due soluzioni  $\lambda_1, \lambda_2$  distinte, quindi  $e^{\lambda_1 t}$  e  $e^{\lambda_2 t}$  sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Se  $\Delta = 0$  (A) ha una soluzione  $\lambda$ , per cui  $e^{\lambda t}$  è una soluzione e si verifica che anche  $te^{\lambda t}$  è soluzione linearmente indipendente con la precedente.

Se  $\Delta < 0$  passiamo in campo complesso e cerchiamo  $u(t) = x(t) + iy(t)$  con  $x, y : J \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u : J \rightarrow \mathbb{C}$ , tale che anche  $u$  sia soluzione dell'equazione differenziale. Considereremo poi  $x(t) = \operatorname{Re}(u(t))$ . Come sopra ipotizziamo  $t \mapsto e^{\lambda t}$  soluzione e otteniamo la stessa equazione (A), allora esistono due soluzioni  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , poiché i coefficienti di (A) sono reali. Allora otteniamo le due soluzioni dell'equazione differenziale

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

che sono linearmente indipendenti. Ma lo spazio delle soluzioni generato da queste equazioni ammette anche la base **reale** data da

$$\frac{u + \bar{u}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{u - \bar{u}}{2i}$$

che in questo caso sono  $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  e  $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ .

In tutti e tre i casi, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono due soluzioni linearmente indipendenti, allora una generica soluzione  $x(t)$  è della forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Nel caso completo l'equazione è del tipo

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

Sia allora  $\bar{x}(\cdot)$  una soluzione (“nota”). L’integrale generale è dato dalle funzioni della forma

$$x(t) = x_o(t) + \bar{x}(t)$$

al variare di  $x_o$  tra le soluzioni dell’equazione omogenea associata, ossia  $ax'' + bx' + cx = 0$ . Questo perché se  $L : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$  un operatore lineare, ad esempio proprio  $Lx = (t \mapsto ax''(t) + bx'(t) + cx(t))$ , allora il problema  $Lx = f$  ha soluzione  $L^{-1}(f) = \bar{x} + \ker L$  con  $\bar{x}$  tale che  $L\bar{x} = f$  e  $\ker L$  lo spazio delle soluzioni dell’equazione omogenea associata  $Lx = 0$ .

In alcuni casi è particolarmente facile trovare una soluzione  $\bar{x}$  particolare, ad esempio ipotizzando ne esista una della forma di un polinomio di  $t$ , e cercando i coefficienti per cui funzioni. In altri casi ha più senso cercare una soluzione particolare di forme diverse, ad esempio con esponenziali o seni e coseni o come ti pare, alla fine se il problema ti chiede di trovare una soluzione particolare è perché si può fare e allora ci pensi un attimo a occhio si vede facilmente.

Sia  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Fissato  $(t_0, x_0) \in D$  consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Proposizione 1.1.** *Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  funzione continua tale che  $(t, x(t)) \in D$  per ogni  $t \in J$ , ossia ha grafico in  $D$ . Allora sono equivalenti:*

a)  $x$  è soluzione del problema ai valori iniziali

$$b) x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \text{ per ogni } t \in J$$

Per quanto la proposizione 1.1 sia abbastanza ovvia, ci serve per poter dimostrare il problema di esistenza e unicità delle soluzioni, poiché permette di trasformare il problema di trovare una soluzione in un problema del punto fisso.

### Definizione 1.2: Funzione Lipschitziana

Una funzione  $g : G \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  è detta **lipschitziana** se esiste una costante  $L > 0$  tale che

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in G$$

**Proposizione 1.2.** *Sia  $G$  un aperto convesso limitato e  $g \in C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^k)$ . Allora  $g$  è lipschitziana.*

*Dimostrazione.* Siano  $x_1, x_2 \in G$  aperto convesso limitato. Per ogni  $t \in [0, 1]$  Sia

$$\varphi(t) = g(x_1 + t(x_2 - x_1))$$

Allora si ha che

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 (Dg)(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt \\ &\leq \int_0^1 |Dg(x_1 + t(x_2 - x_1))| |x_2 - x_1| dt \leq \left( \max_{\bar{G}} |Dg| \right) |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.3.** *Sia  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto e  $g \in C^1(G, \mathbb{R}^k)$ . Allora  $g$  è lipschitziana su ogni compatto  $K \subseteq G$  (anche detto localmente lipschitziana).*

**Esempio 1.6.** La funzione  $x \mapsto x^2$  non è ovviamente lipschitziana su  $\mathbb{R}$ . Eppure per ogni compatto  $K \subseteq \mathbb{R}$  (ad esempio  $[-M, M]$ ) la funzione è lipschitziana su  $K$ , infatti

$$|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2M|x - y|$$

### Definizione 1.3: Funzione 1.1.2u.1

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$  aperto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  (con  $f(t, \mathbf{x})$ ). Diciamo che  $f$  è localmente lipschitziana nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima se per ogni compatto  $K \subseteq D$  esiste una costante  $L_K > 0$  tali che:

$$\forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in K, \quad \|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq L_K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

*Osservazione.* Se ho una funzione  $C^1(D, \mathbb{R}^N)$  allora è per la proposizione precedente localmente lipschitziana in entrambe le variabile, quindi per ogni  $K \subseteq D$  compatto esiste  $L_K > 0$  tale che

$$\forall (t_1, \mathbf{x}), (t_2, \mathbf{y}) \in K \quad \|f(t_1, \mathbf{x}) - f(t_2, \mathbf{y})\| \leq L_K \|(t_1, \mathbf{x}) - (t_2, \mathbf{y})\|$$

quindi in particolare se  $t_1 = t_2 = t$  abbiamo la locale lipschitzianità nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima

## 1.2 Esistenza e unicità delle soluzioni

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$  aperto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $(t_0, x_0) \in D$  e consideriamo il problema

$$(P) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Siano  $a, b > 0$  tali che

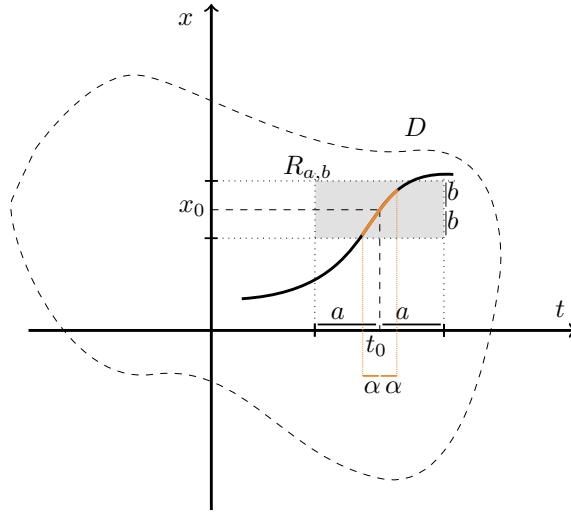


Figura 8: Problema ai valori iniziali,  $\alpha = \frac{b}{M}$  in questo caso, evidentemente

$$R_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \subseteq D$$

### Teorema 1.4: Esistenza e Unicit 

Sia  $f$  localmente lipschitziana nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima. Allora

- a) Esiste una soluzione di  $(P)$  definita in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , con  $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ , dove  $M = \max_{R_{a,b}} |f|$
- b) Nell'intervallo  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  la soluzione, ossia se  $\varphi_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\varphi_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$  sono soluzioni di  $(P)$  allora  $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in J_1 \cap J_2 \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

*Dimostrazione.* Abbiamo visto che se  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  con  $J$  intervallo   una funzione continua con grafico in  $D$ , allora  $x$    soluzione di  $(P)$  se e solo se

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in J$$

Sia  $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \overline{B}_b(x_0)$ . Poniamo ora

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

Dove risolvere  $(P)$  diventa mostrare che esiste un punto fisso di  $T$ . Verifichiamo che  $(Tx)(\cdot)$  assume valori in  $\overline{B}_b(x_0)$ . Infatti

$$|(Tx)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$$

Allora otteniamo che  $T : C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0)) \rightarrow C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$ . Possiamo quindi iterare l'applicazione di  $T$ , quindi abbiamo la successione

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}$$

Ora quindi mostriamo che la successione  $x_n$  converge uniformemente con il criterio di Cauchy

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \\ |x_2(t) - x_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))| ds \right| \leq \\ &\leq L_R \left| \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_0(s)| ds \right| \leq ML_R \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = \frac{ML_R}{2} |t - t_0|^2 \\ |x_3(t) - x_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))| ds \right| \leq \\ &\leq L_R \left| \int_{t_0}^t |x_2(s) - x_1(s)| ds \right| \leq \frac{ML_R^2}{2} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^2 ds \right| = \frac{ML_R^2}{6} |t - t_0|^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

E in generale abbiamo

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \frac{ML_R^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}$$

Quindi abbiamo che se fissiamo  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m > n$

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{ML_R^k}{(n+1)!} |t-t_0|^{n+1} \leq \frac{M}{L_R} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(L_R \alpha)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Che è il resto di una serie esponenziale, quindi per  $m, n$  sufficientemente grandi la serie converge a zero, per cui abbiamo mostrato la convergenza uniforme di  $x_k$ . Ora sappiamo

$$x_k \longrightarrow x \in C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B_b}(x_0)) \quad \text{uniformemente}$$

Ora semplicemente possiamo portare il limite sotto il segno di integrale perché  $f(\cdot, x_k(\cdot)) \rightarrow f(\cdot, x(\cdot))$  uniformemente in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  e quindi otteniamo che  $x$  è soluzione di  $(P)$ .

Ora procediamo con l'unicità. Sia  $z : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione di  $(P)$ . Consideriamo i valori di  $t \in J \cap [t_0, t_0 + \alpha]$  e analogamente per  $t \leq t_0$  e vogliamo mostrare che  $z(t) = x(t)$  con  $x(\cdot)$  la soluzione costruita prima. Allora abbiamo per ipotesi che

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds$$

E valutiamo quindi

$$|z(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, z(s))| ds$$

Fissiamo ora un valore  $\bar{t} \in [t_0, t_0 + \alpha]$  arbitrario in  $J$  e  $t \in [t_0, \bar{t}]$ . Allora  $(s, z(s))$  per  $s \in [t_0, \bar{t}]$  è in un compatto di  $D$ . Sia  $M_1$  il massimo di  $f$  su tale compatto. Allora

$$|z(t) - x_0| \leq M_1 |t - t_0| \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}]$$

Ora procediamo con

$$\begin{aligned} |z(t) - x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, z(s)) - f(s, x_0)| ds \leq L_1 \int_{t_0}^t |z(s) - x_0| ds \leq \\ &\leq L_1 M_1 \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = \frac{L_1 M_1}{2} |t - t_0|^2 \end{aligned}$$

Con  $L_1$  una costante di Lipschitz per  $f$  relativa a un compatto che contiene sia  $R$  che il grafico di  $z$ . Procedendo in questo modo nuovamente si ottiene in generale

$$|z(t) - x_k(t)| \leq \frac{M_1 L_1^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1} \longrightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty$$

□

*Osservazione* (Unicità "globale"). Sia  $x' = f(t, x)$  localmente lipschitziana in  $x$  uniformemente in  $t$ . Siano  $x_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $x_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$  due soluzioni tali che esista  $t_0 \in J := J_1 \cap J_2$  con  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  allora  $x_1 = x_2$  su  $J$ . Quindi la funzione

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & t \in J_1 \\ x_2(t) & t \in J_2 \end{cases}$$

è soluzione su  $J_1 \cup J_2$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $t > t_0$  Allora sia

$$\bar{t} := \sup\{t \in J \mid x_1(t) = x_2(t) \text{ su } [t_0, t]\}$$

Allora se  $\bar{t} = \sup J$  abbiamo finito, altrimenti consideriamo  $\bar{t} < \sup J$ . Per continuità quindi  $x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t})$ . Considerando ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\bar{t}) = x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) \end{cases}$$

e ora per il teorema di esistenza e unicità esiste un intorno destro di  $\bar{t}$  si ha  $x_1(t) = x_2(t)$ , che è in contraddizione con la definizione di  $\bar{t}$ .  $\square$

Se manca l'ipotesi di lipschitzianità di  $f$  allora può cadere l'unicità. Costruiamo un famoso esempio.

**Esempio 1.7.**  $N = 1$ ,  $f(x) = \sqrt{|x|}$ . È evidente non lipschitziana in quanto la derivata non è limitata. Consideriamo il problema di Cauchy

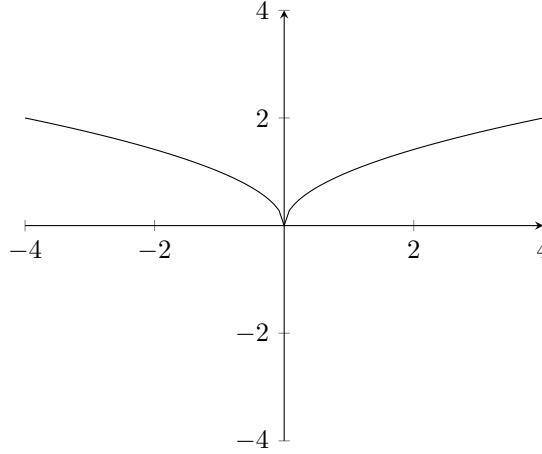


Figura 9: Grafico di  $f(x) = \sqrt{|x|}$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Sia ora  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione, con  $0 \in J$ . Allora  $x(\cdot)$  è monotona non decrescente; consideriamo  $t \in J, t \geq 0$  e sia

$$c_+ = \sup\{t \geq 0 : x(\cdot) = 0 \text{ su } [0, t]\}$$

Ora se  $c_+ = +\infty$  allora  $x(\cdot) = 0$  su  $[0, +\infty]$ . Altrimenti, per  $t > c_+$  si ha che  $x(t) > 0$  quindi otteniamo

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{|x(t)|}} = 1 \iff \int \frac{x'(s)}{\sqrt{|x(s)|}} ds = t + c \iff 2\sqrt{|x(t)|} = t + c$$

Allora  $x(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$  e poiché  $x(c_+) = 0$  allora  $c = -c_+$  quindi

$$x(t) = \frac{1}{4}(t - c_+)^2 \quad \forall t \geq c_+$$



Similmente per  $t < 0$  definendo similmente  $c_-$  abbiamo che le soluzioni del problema sono del tipo

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - c_+)^2 & t \geq c_- \\ 0 & t \in [c_-, c_+] \\ -\frac{1}{4}(t - c_-)^2 & t < c_+ \end{cases}$$

Dove  $c_-, c_+ \geq 0$  arbitrari (eventualmente anche  $+\infty$ ). Quindi abbiamo infinite soluzioni.

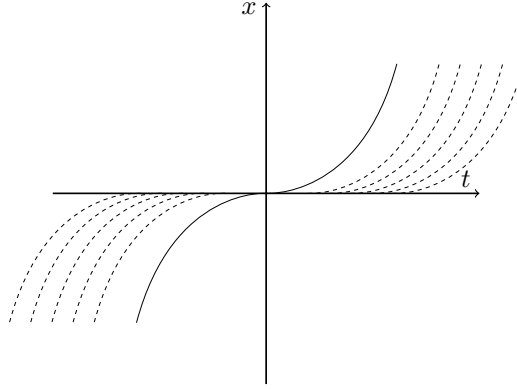


Figura 10: Pennello di Peano

Comunque abbiamo l'esistenza della soluzione. Esiste anche un teorema a riguardo

#### Teorema 1.5: Peano

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua e  $(t_0, x_0) \in D$ . Sia  $R_{a,b}$  come nel teorema di esistenza e unicità. Allora il problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione definita in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , dove  $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$  con  $M = \max_{R_{a,b}} |f|$ .

Dimostreremo questo risultato usando un teorema di compattezza abbastanza potente, che invece non dimostriamo. Procediamo con della terminologia.

Sia  $\varphi_n : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Diciamo che

- La successione  $\varphi_n$  è **equilimitata** se esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a_0, b_0] \quad |\varphi_n(x)| \leq M$$

- La successione  $\varphi_n$  è **equicontinua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t', t'' \in [a_0, b_0] \quad |t' - t''| < \delta \implies |\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| < \varepsilon$$

### Teorema 1.6: Ascoli - Arzelà

Sia  $\varphi_n$  una successione di funzioni equicontinue ed equilimitate su  $[a_0, b_0]$ . Allora esiste una sottosuccessione uniformemente convergente in  $[a_0, b_0]$

*Dimostrazione del teorema di Peano.* Sia  $N = 1$  Fissato  $n \in \mathbb{N}$  suddividiamo

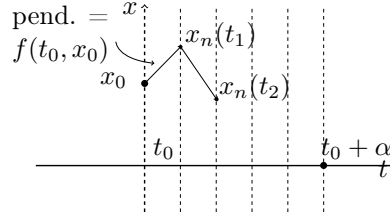


Figura 11: Costruzione successione  $x_n$

$[t_0, t_0 + \alpha]$  in  $n$  parti. Definiamo poi  $x_n : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  come segue (affine a tratti).

$$\begin{aligned} x_n(t) &:= x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \\ x_n(t) &:= x_n(t_1) + f(t_1, x_n(t_1))(t - t_1) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \\ &\vdots \\ x_n(t) &:= x_n(t_{n-1}) + f(t_{n-1}, x_n(t_{n-1}))(t - t_{n-1}) \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n] \end{aligned}$$

Notare che la pendenza di ogni tratto non supera, in valore assoluto,  $M$ , quindi  $M\alpha \leq M \frac{\alpha}{M} = \alpha$

Ora vogliamo mostrare che la successione  $\{x_n\}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli - Arzelà, infatti

- *equilimitatezza* I valori sono in  $[x_0 - b, x_0 + b]$
- *equicontinuità* Sia  $\gamma_n = f(t_k, x_n(t_k))$  per  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  costante a tratti. Allora comunque presi  $t', t'' \in [t_0, t_0 + \alpha]$  si ha che

$$(\star) \quad x_n(t') - x_n(t'') = \int_{t'}^{t''} \gamma_n ds \implies |x_n(t') - x_n(t'')| \leq M|t' - t''|$$

Allora esiste una sottosuccessione uniformemente convergente  $x_{n_k} \rightarrow x$  in  $[t_0, t_0 + \alpha]$ . Per semplicità notazionale supponiamo che  $n_k = n$  quindi abbiamo  $x_n \rightarrow x$ . Ora da  $(\star)$  otteniamo che per  $t' = t, t'' = t_0$

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \gamma_n(s) ds$$

Ora vorremmo poter passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere la soluzione del problema di Cauchy, ma necessitiamo di convergenza uniforme di  $\gamma_n(\cdot)$  a  $f(\cdot, x(\cdot))$ . Infatti abbiamo che, fissando  $\varepsilon > 0$  esiste per continuità uniforme di  $f$  un  $\delta > 0$  tale che

$$\forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in R_{a,b} \quad |(t_1, x_1) - (t_2, x_2)| \leq \delta \implies |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| \leq \varepsilon$$

Ora se  $s \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned} |\gamma_n(s) - f(s, x(s))| &= |f(t_k, x_n(t_k)) - f(s, x(s))| \leq \\ &\leq |f(t_k, x_n(t_k)) - f(s, x_n(s))| + |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \end{aligned}$$

Ricordando ora che  $|x_n(t') - x_n(t'')| \leq M|t' - t''|$  abbiamo che se  $n$  è sufficiente grande si ha che  $M/\frac{\alpha}{n} \leq \delta$  e allora  $|x_n(t_k) - x_n(s)| \leq \delta$  e quindi  $|f(t_k, x_n(t_k)) - f(s, x_n(s))| \leq \varepsilon$ . Inoltre per la convergenza uniforme di  $x_n$  a  $x$  si ha che  $|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \leq \varepsilon$ . Mettendo assieme i pezzi abbiamo quindi la convergenza uniforme di  $\gamma$  e quindi possiamo passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere che  $x$  è soluzione del problema di Cauchy in  $[t_0, t_0 + \alpha]$   $\square$

**Proposizione 1.7.** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua e  $K \subseteq D$  compatto. Allora esiste  $\alpha > 0$  (dipendente solo da  $K$ ) tale che, per ogni  $(t_0, x_0) \in K$  il problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammette soluzione definita in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

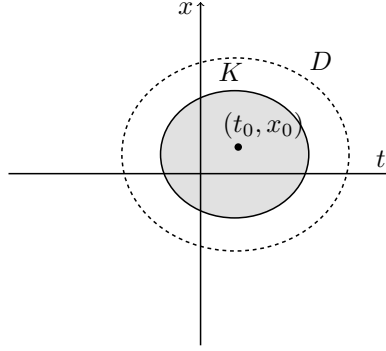


Figura 12: compatto

*Osservazione.* Modificando la costruzione della dimostrazione del teorema di Peano operando una suddivisione in  $n$  parti anche di  $[x_0 - b, x_0 + b]$  e scegliendo su ogni tratto la pendenza  $\max f$  o  $\min f$  sul quadratino contenente  $(t_k, x_n(t_k))$  (con qualche complicazione in più se becchi il punto di cambio quadratino) si ottengono due soluzioni del problema di Cauchy: le soluzioni massimale e minimale rispettivamente. Nell'esempio  $x' = \sqrt{|x|}$  abbiamo in particolare che 0 è la soluzione minimale e  $t^2$  è la soluzione massimale.

**Esempio 1.8.** Sia  $f(t, x) = x^2$  e consideriamo il problema di Cauchy

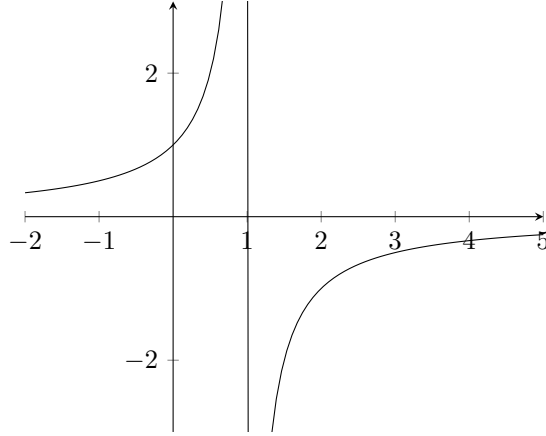
$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Allora la soluzione è  $x(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{x_0}}$  che a prescindere di come si fa non può essere definita in  $t = x_0$ . Un obiettivo dei prossimi teoremi sarà capire quando si può prolungare il dominio su tutto  $\mathbb{R}$  o su molta parte.

Proviamo ora a guardare alla stima sull'intervallo di esistenza, data dal Teorema di esistenza e unicità. Allora, ricordando l'immagine 8 abbiamo che è definita in  $[-\alpha, \alpha]$  con  $\alpha = \min(a, b/M)$  e  $M = \max |f| = \max_{R_{a,b}} |x^2| = \max_{[1-b, 1+b]} (1+b)^2$ . Quindi abbiamo  $\alpha = \min(a, \frac{b}{(1+b)^2})$ . Poiché possiamo prendere  $a$  arbitrariamente grande ( $f$  è definito su tutto  $\mathbb{R}^2 \ni (t, x)$ ) allora  $\alpha = \frac{b}{(1+b)^2}$ .

### 1.3 Prolungamento

Sia in seguito  $f : D \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua e  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione di  $x' = f(t, x)$ .



#### Definizione 1.4: Prolungamento

Diciamo **prolungamento** di  $x$  ogni soluzione

$$\hat{x} : \hat{J} \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \hat{J} \not\subseteq J, \quad \hat{x}|_J = x$$

se  $x(\cdot)$  non ammette prolungamento diciamo che è definita su un intervallo massimale.

#### Teorema 1.8: Prolungamento

Sia  $f$  continua, allora

- a) Se  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  è definita su un intervallo massimale, questo è aperto. Posto  $J = (\omega_-, \omega_+)$  risulta: Per ogni  $K \subseteq D$  compatto esiste  $U$  intorno di  $\omega_+$  ( $\omega_-$ ) tale che

$$\forall t \in U \cap J \quad (t, x(t)) \notin K$$

ossia il grafico di  $x$  abbandona definitivamente ogni compatto, per  $t \rightarrow \omega_+$  ( $\omega_-$ ). Scrivereemo anche

$$(t, x(t)) \rightarrow \partial D \quad \text{per } t \rightarrow \omega_{\pm}$$

- b) Ogni soluzione ammette un prolungamento a un intervallo massimale

#### Conseguenze per l'esistenza globale

**Proposizione 1.9.** Sia  $D = I \times \Omega$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto. Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione e  $J$  massimale. Supponiamo esiste  $Y \subseteq \Omega$  compatto tali che

$$\forall t \in J \quad x(t) \in Y$$

Allora  $J = I$  e viene chiamata **esistenza globale**

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $\omega_+ = \sup I$ . Se fosse  $\omega_+ < \sup I$ , preso comunque  $t_0 \in J$  si avrebbe

$$(t, x(t)) \in [t_0, \omega_+] \times Y \quad t_0 \leq t < \omega_+$$

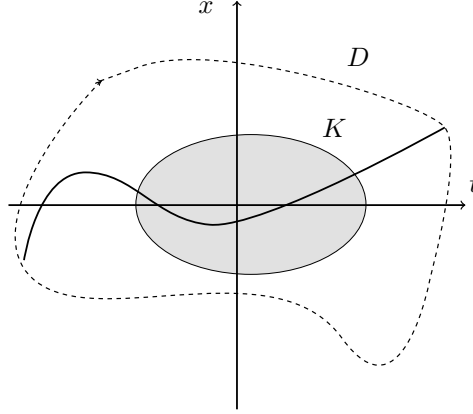


Figura 13: Illustrazione del teorema di prolungamento

che sarebbe assurdo perché significherebbe che il grafico di  $x$  è contenuta in un compatto  $\square$

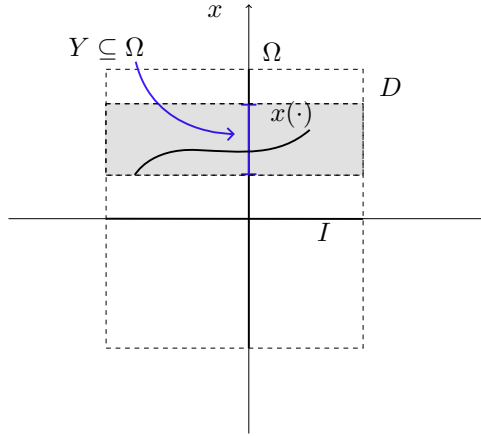


Figura 14: Esistenza Globale

**Esempio 1.9.** Consideriamo la logistica per esempio

$$x' = rx(1 - \frac{x}{K})$$

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x' = rx(1 - \frac{x}{K}) \\ x(0) = x_0 \in (0, K) \end{cases}$$

Il teorema di esistenza e unicità garantisce l'esistenza in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] = [-\alpha, \alpha]$ . Sia  $\hat{x}$  un prolungamento assicurato dal teorema di prolungamento. Per semplicità sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  la soluzione di (P) con  $J$  massimale. Sappiamo che le costanti 0 e  $K$  sono soluzioni. Allora per unicità  $\forall t \in J, x(t) \in (0, K)$  e quindi  $J = \mathbb{R}$ .

**Esempio 1.10.** Similmente abbiamo per (esercizio)

$$x' = (t^2 + t + 1)x^2 \log(1 + (1 - \frac{x}{K})^2)$$

**Proposizione 1.10.** Sia  $D = I \times \mathbb{R}$  (quindi  $N = 1$ ) e  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione con  $J$  massimale. Esistono

$$x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

funzioni continue (non necessariamente soluzioni) tali che

$$\forall t \in J : x_1$$

Allora  $J = I$

*Dimostrazione.* Similmente a prima, l'idea è che deve raggiungere il bordo di  $\Omega$  e non potendolo raggiungere "in verticale" deve raggiungerlo "in orizzontale". Più precisamente, fissiamo  $t_0 \in J$  e  $\beta \in (t_0, \sup I)$ . Sia  $m = \min_{[t_0, \beta]} x_1$  e  $M = \max_{[t_0, \beta]} x_2$ . Allora

$$\forall t \in J \cap [t_0, \beta] \quad x(t) \in [m, M] =: Y$$

Allora per il risultato precedente  $J \supseteq [t_0, \beta)$ . Per l'arbitrarietà di  $\beta$  si ha  $\sup J = \sup I$   $\square$

**Proposizione 1.11.** Similmente a prima, ma sia ora  $N \geq 1$ . Sia  $D = I \times \mathbb{R}^N$ . Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione con  $J$  massimale. Se esiste  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua, tale che

$$\forall t \in J \quad |x(t)| \leq \rho(t)$$

Allora  $J = I$

*Dimostrazione.* Similmente a sopra  $\square$

**Proposizione 1.12.** Sia  $D = I \times \mathbb{R}^N$  e  $f$  limitata. Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione con  $J$  massimale. Allora  $J = I$

*Dimostrazione.* se  $t_0 \in J$  per ogni  $t \in J$  si ha che

$$\begin{aligned} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds &\iff |x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq \\ &\leq |x(t_0)| + M|t - t_0| =: \rho(t) \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

dove  $M$  è un maggiorante per  $|f|$ . A questo punto si applica il caso precedente  $\square$

*Dimostrazione del Teorema di Prolungamento.*

- a) Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione con  $J$  massimale. Allora  $J$  è aperto, infatti se ad esempio fosse

$$\omega_+ := \sup J \in J$$

Allora  $(\omega_+, x(\omega_+)) \in D$ . In tal caso  $x$  sarebbe prolungabile considerando la soluzione di  $z' = f(t, z); z(\omega_+) = x(\omega_+)$  che è chiaramente assurdo perché  $J$  è massimale.

Non dimostriamo che  $(t, x(t)) \rightarrow \partial D$  per  $t \rightarrow \omega_+$ .

- b) Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione. Mostriamo che ammette un prolungamento massimale (destro wlog). Sia  $b = \sup J$ . Se  $x(\cdot)$  non fosse prolungabile in  $t = b$  allora  $J$  sarebbe massimale. Supponiamo allora che

$$x : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ soluzione}$$

Il grafico è compatto. Sia  $K \subseteq D$  un compatto contenente il grafico di  $x|_{[t_0, b]}$ . Sappiamo ora che esiste  $\alpha_K > 0$  tale che  $\forall (\tau_0, z_0) \in K$ , il problema di Cauchy  $z' = f(t, z); z(\tau_0) = z_0$  ha soluzione in  $[\tau_0 - \alpha_K, \tau_0 + \alpha_K]$ . Concludiamo quindi che possiamo prolungare  $x$  fino a  $b + \alpha_K$  considerando  $(\tau_0, z_0) = (b, x(b))$ . Se

ora  $(b + \alpha_K, x(b + \alpha_K)) \in K$  si ripete il ragionamento. Poiché  $K$  è compatto, dopo l'applicazione del ragionamento un numero finito di volte, poiché  $\alpha_K$  è il medesimo ad ogni passo, il grafico esce da  $K$ , cioè esiste una  $b_K$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_K]$  e  $(b_K, x(b_K)) \notin K$ . Applichiamo il metodo considerando una famiglia  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  con  $V_j$  aperto e  $V_j \subset \subset D$ ,  $V_j \rightarrow D$  crescenti, ossia  $V_j \subseteq V_{j+1}$  e  $\bigcup_j V_j = D$  e inoltre  $\overline{V_1} = \text{graf}(x|_{[t_0, b]})$ . Applichiamo ora lo schema precedente con  $K = \overline{V_1}$  e allora esiste  $b_1 = b_{\overline{V_1}}$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_1]$  e  $(b_1, x(b_1)) \notin \overline{V_1}$  (per semplicità notazionale supponiamo che il grafico di  $x|_{[t_0, b_1]}$  sia contenuto in  $V_2$ ) allora ora iterando abbiamo che esiste  $b_2 = b_{V_2}$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_2]$  e  $(b_2, x(b_2)) \notin V_2$  e così via. Abbiamo ora  $b_1 < b_2 < \dots < b_k < \dots$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_k]$  e  $(b_k, x(b_k)) \notin V_k$ . Ne seguirà che, posto  $\omega_+ = \sup_{k \in \mathbb{N}} b_k$  si ha che  $x$  è definita in  $J := [t_0, \omega_+)$ . Se  $\omega_+ = +\infty$  allora banalmente  $J$  è massimale destro. Se  $J$  non fosse massimale si avrebbe  $x(\cdot)$  definita in  $\omega_+$  e  $(\omega_+, x(\omega_+)) \in D$ . Ciò è incompatibile con

$$\overline{V_k} \not\ni (b_k, x(b_k)) \rightarrow (\omega_+, x(\omega_+)) \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

□

## 1.4 Stime

### Teorema 1.13: Lemma di Gronwall

Sia  $\beta \in C^0(I)$ ,  $\beta \geq 0$ ;  $a \in I$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $u \in C^0(I)$  tali che

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \quad \forall t \in I, t \geq a$$

Allora

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds} \quad \forall t \in I, t \geq a$$

*Dimostrazione.*

□

**Applicazione al problema di Cauchy** Consideriamo l'equazione differenziale  $x' = f(t, x)$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua localmente lipschitziana. Siano  $x_1, x_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  due soluzioni. Fissiamo  $t_0 \in J$  si ha che

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s))ds$$

$$x_2(t) = x_2(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s))ds$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))|ds$$

Fissato  $\bar{t} > t_0$ , se  $t \in [t_0, \bar{t}]$  e  $K$  è un compatto di  $D$  contenente i grafici di  $x_{1,2}|_{[t_0, \bar{t}]}$ . Sia allora  $L_K$  una costante di Lipschitz di  $f$  relativa a  $K$ . Allora

$$\underbrace{|x_1(t) - x_2(t)|}_{u(t)} \leq \underbrace{|x_1(t_0) - x_2(t_0)|}_{\alpha} + \underbrace{L_K}_{\beta} \int_{t_0}^t \underbrace{|x_1(s) - x_2(s)|}_{u(s)} ds$$

Che rispetta le ipotesi del lemma di Gronwall e quindi sappiamo che

$$\underbrace{|x_1(t) - x_2(t)|}_{u(t)} \leq \underbrace{|x_1(t_0) - x_2(t_0)|}_{\alpha} e^{L_K(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

Da tale schema scende anche l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Infatti se  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  abbiamo

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq 0 \quad \forall t \in J, t \geq t_0$$

Iniziamo ora con un'idea del prossimo teorema, con un'intuizione geometrica. Sia dato un campo di pendenze ( $N = 1$ ). Ossia

$$(t, x) \mapsto \omega(t, x) \in \mathbb{R}^2$$

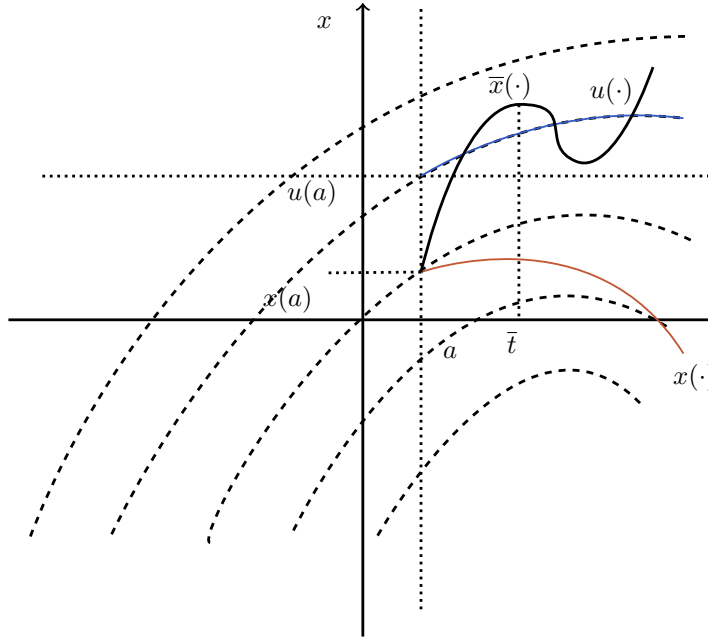


Figura 15: La curva  $x(\cdot)$  ha pendenza sempre minore della pendenza che il campo di pendenze assegna in ogni punto, mentre la curva  $u(\cdot)$  segue la pendenza in ogni punto e ha valore iniziale  $u(a)$  non minore di  $x(a)$

#### Teorema 1.14: Teorema del confronto

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e  $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua e localmente lipschitziana in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ . Sia  $x, u : J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , sia  $a \in J$ . Se  $x'(t) \leq \omega(t, x(t))$  e  $u'(t) = \omega(t, u(t))$ , se  $x(a) \leq u(a)$  allora

$$x(t) \leq u(t) \quad \forall t \in J, t \geq a$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista un valore  $\bar{t} \in J$  con  $\bar{t} > a$  tale che  $x(\bar{t}) > u(\bar{t})$ . Sia  $t_0 = \sup\{t \in [0, \bar{t}] : x(t) \leq u(t)\}$ . Allora  $x(t_0) = u(t_0)$  (per continuità) e  $x(t) > u(t)$  per  $t \in (t_0, \bar{t}]$ . Adesso per ogni  $t \in [t_0, \bar{t}]$  abbiamo

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds \leq x(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, x(s)) ds$$



e

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds = u(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, u(s)) ds$$

Sottraendo membro a membro e prendendone il modulo otteniamo

$$x(t) - u(t) \leq x(t_0) - u(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, x(s)) - \omega(s, u(s)) ds$$

Sia ora  $L_K$  una costante di Lipschitz relativa a un compatto  $K$  contenente i grafici di  $x, u$  su  $[t_0, \bar{t}]$ . Allora

$$x(t) - u(t) \leq x(t_0) - u(t_0) + L_K \int_{t_0}^t |x(s) - u(s)| ds$$

Ma ora in  $[t_0, \bar{t}]$  possiamo togliere il modulo perché abbiamo che  $x(t) \geq u(t)$ . Abbiamo allora

$$\underbrace{x(t) - u(t)}_{u(t)} \leq \underbrace{x(t_0) - u(t_0)}_{\alpha=0} + \underbrace{L_K}_{\beta} \int_{t_0}^t \underbrace{x(s) - u(s)}_{u(s)} ds$$

Che rispetta le ipotesi del lemma di Gronwall e quindi sappiamo che

$$x(t) - u(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}]$$

che è assurdo. □

**Esempio 1.11.** Consideriamo

$$\begin{cases} x' = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = x_0 < 0 \end{cases}$$

Allora evidentemente  $x' \leq -\frac{r}{k}x^2$  per  $x < 0$  e quindi abbiamo

$$\begin{cases} x' \leq -\frac{r}{k}x^2 \\ x(0) = x_0 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -\frac{r}{k}u^2 \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

Ne concludiamo che  $x(t) \leq u(t)$  per il teorema del confronto. In particolare abbiamo che  $\omega_+ < +\infty$

Vogliamo ora fare un ragionamento simile per studiare il caso  $x_0 > k$ . Se consideriamo la parabola di equazione  $y = rx(1 - \frac{x}{k})$  abbiamo che sicuramente esiste una parabola  $-\gamma x^2$  tale per cui  $y \leq -\gamma x^2$  per  $x \geq x_0$  e quindi abbiamo che

$$\begin{cases} x' \leq -\gamma x^2 \\ x(0) = x_0 > k \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -\gamma u^2 \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

e quindi  $x(t) \geq u(t)$  per il teorema del confronto. In particolare abbiamo che  $x$  ha un asintoto verticale a sinistra (per  $t < 0$ ).

*Osservazione* (Teorema dell'asintoto). Sia  $x : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l \in \mathbb{R} \quad (\text{finito, } x(\cdot) \text{ ha un asintoto})$$

Inoltre esiste  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t)$ . Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$$

Infatti abbiamo

$$x(t+1) - x(t) = x'(\xi_t) \quad \xi_t \in (t, t+1)$$

e portando al limite otteniamo

$$0 = l - l = \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(\xi_t) = 0$$

La conseguenza è che se ho  $x(\cdot)$  soluzione del problema di Cauchy della logistica, allora se  $x \rightarrow l$  per  $t \rightarrow +\infty$  ho che

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \rightarrow rl\left(1 - \frac{l}{k}\right) = 0$$

quindi necessariamente  $l = 0$  (no) oppure  $l = k$  (sì).

## 1.5 Dipendenza continua

### Teorema 1.15

Siano  $f_0, f_j : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con  $j \in \mathbb{N}$  e  $D \in \mathbb{R}^{N+1}$  funzioni continue. Consideriamo i problemi

$$(P_j) \begin{cases} x' = f_0(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (P_0) \begin{cases} x' = f_j(t, x) \\ x(t_0^j) = x_0^j \end{cases}$$

dove  $(t_0^j, x_0^j)$  e  $(t_0, x_0)$  sono assegnati in  $D$ . Supponiamo ora che  $f_j \rightarrow f_0$  uniformemente sui compatti di  $D$ , che  $(t_0^j, x_0^j) \rightarrow (t_0, x_0)$  e supponiamo che  $f_0$  sia localmente Lipschitziana in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ . Sia  $[a, b]$  un intervallo su cui è definita la soluzione  $\varphi_0$  di  $(P_0)$ . Se  $\varphi_j$  risolve  $(P_j)$  allora per  $j$  sufficientemente grande  $\varphi_j$  è definita in  $[a, b]$  e  $\varphi_j \rightarrow \varphi_0$  uniformemente su  $[a, b]$

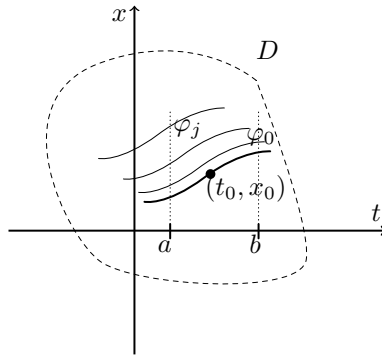


Figura 16: dipcontinua

*Osservazione.* Si noti il caso particolare in cui  $f_j = f_0$ .

Per il precedente teorema esiste anche una forma variante.

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$  aperto e chiamiamo  $G_\lambda := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} : (t, x, \lambda) \in G\}$ . Supponiamo ora che  $f$  sia continua e tale che  $f(\cdot, \cdot, \lambda)$  sia localmente lipschitziana su  $G_\lambda$  nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima, per ogni  $\lambda$ . In ipotesi di unicità indichiamo con  $x(\cdot, t_0, x_0)$  l'unica soluzione, definita sul suo intervallo massimale  $(\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ . Consideriamo ora il problema

$$(P_\lambda) \begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove  $(t_0, x_0, \lambda)$  è assegnato in  $G$ . Indichiamo con  $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$  la soluzione di  $(P_\lambda)$  definita nel proprio intervallo massimale  $(\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$ . Allora abbiamo

#### Teorema 1.16

- $\omega_-$  ( $\omega_+$ ) è semicontinua superiormente (inferiormente) in  $G$
- l'insieme

$$E = \{(t, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times G : \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$$

è aperto

- $x : E \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da  $(t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda)$  è continua

#### Definizione 1.5: Semicontinuità

Sia  $X$  uno spazio topologico,  $x_0 \in X$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $f$  è **semicontinua inferiormente** in  $x_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 : f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad \forall x \in U$$

Dove vale la seguente caratterizzazione

**Proposizione 1.17.** *Sono equivalenti:*

- $f$  è semicontinua inferiormente in  $X$
- $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  è aperto per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$
- l'epigrafico di  $f$ , cioè

$$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

è chiuso

$$iv) \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

*Dimostrazione.*

- $\implies ii)$  Fissiamo  $x_0 \in \{f > \alpha\}$ ; allora  $f(x_0) > \alpha$ . Dalla definizione esiste  $U$  intorno di  $x_0$  tale che  $\forall x \in U$  si ha che  $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon > \alpha$  e quindi  $U \subseteq \{f > \alpha\}$
- $\implies iii)$
- $\implies iv)$
- $\implies i)$

□

*Dimostrazione parziale del Teorema.* Dalla caratterizzazione di semicontinuità inferiore sappiamo che l'insieme  $\{(t, t_0, x_0, \lambda) : t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$  è aperto. Analogamente per  $\{(t, t_0, x_0, \lambda) : t > \omega_-(t_0, x_0, \lambda)\}$ . L'intersezione dà  $E$  aperto. Dimostrare che  $\omega_-$  e  $\omega_+$  sono semicontinue rispettivamente superiormente e inferiormente è molto complicato. □

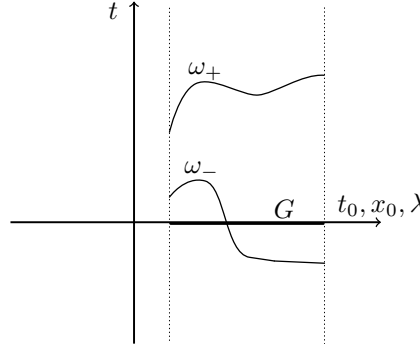


Figura 17: prooftheorem

### Esercizio 1.1

$$(P) \begin{cases} x' = 1 - te^x \\ x(0) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Studiamo quando  $x' > 0$  e abbiamo  $1 - te^x > 0$  e quindi  $te^x < 1$  e  $t < e^{-x}$  e quindi  $x < -\log t$ . Sia ora

$$\bar{t} = \sup\{t \geq t_1 : x(\tau) > \psi(\tau) \forall \tau \in [t_1, t]\}$$

Supponiamo ora  $\bar{t} < +\infty$  e allora sia  $\delta(t) = x(t) - \psi(t)$ . Allora  $\delta(\bar{t}) = 0$  per continuità e  $\delta'(\bar{t}) = \underbrace{x'(\bar{t})}_0 - \underbrace{\psi'(\bar{t})}_{<0} > 0$ . Ne consegue che in un intorno sinistro di  $\bar{t}$

si ha che  $\delta(t) < 0$  che è assurdo. Ne consegue che  $\bar{t} = +\infty$  e quindi si ottiene che  $\omega_+ = +\infty$ , infatti il grafico di  $x(\cdot)$  si deve trovare sotto al valore  $x(t_1)$  e sopra al grafico di  $\psi$ . Per monotonia esiste  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ . Se fosse finito si avrebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - te^{x(t)} = -\infty$$

escluso per il teorema dell'asintoto. Ne concludiamo che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$ .

Per  $t < 0$  invece abbiamo che

$$0 \leq 1 - te^x \leq 1 - te^\alpha = 1 + e^\alpha |t|$$

che è una crescita sottolineare e quindi  $\omega_- = -\infty$  e per un argomento simile al precedente si ha che  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$

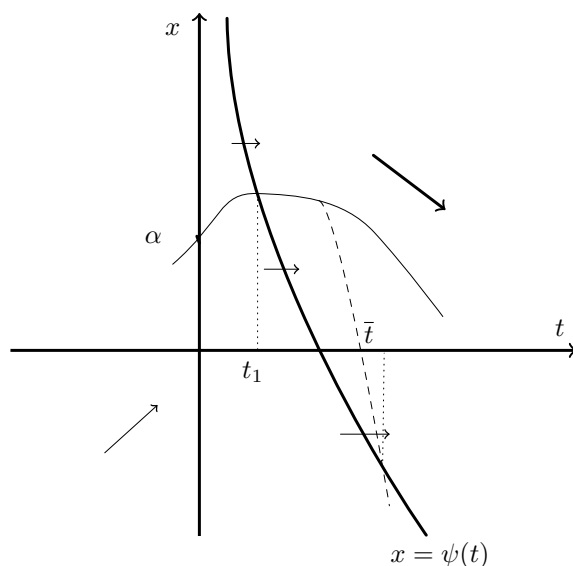


Figura 18: Esercizio 1.1

### Esercizio 1.2

Si studi qualitativamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x(x^3 - t^2) \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

*Osservazione* (sulla dipendenza continua). Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

allora otteniamo  $x(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{x_0}}$ .

Fissato  $T > 0$  consideriamo i valori  $x_0$  per i quali la soluzione è definita (almeno) in  $[0, T]$ , quindi  $x_0 < \frac{1}{T}$ . Per  $x_0 \rightarrow 0$  per la dipendenza continua la soluzione tende (uniformemente perché su  $[0, T]$ ) alla soluzione 0. In particolare  $x(T) < \varepsilon$  se

$$\frac{1}{x_0} - T > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{x_0} > T + \frac{1}{\varepsilon} \iff x_0 < \frac{1}{T + \frac{1}{\varepsilon}} =: \delta_{\varepsilon, T}$$

per cui  $\delta$  dipende sia da  $\varepsilon$  che da  $T$  e non è possibile individuarlo uniformemente rispetto a  $T$ .

La proprietà, diversa, di “dipendenza continua” su intervalli illimitati darà luogo alla definizione di stabilità.

## 2 Sistemi autonomi

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Supponiamo  $f$  localmente lipschitziana in  $\Omega$ . Il sistema che consideriamo è

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

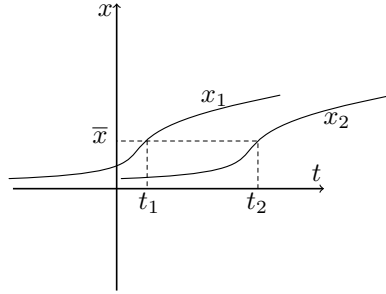
Indichiamo con  $x(\cdot, t_0, x_0)$  la soluzione definita sull'intervallo massimale.

**Proposizione 2.1.** 1. Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione di  $x' = f(x)$ ; sia  $\tau > 0$ . Allora  $x_\tau : J + \tau \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da  $x_\tau(t) = x(t - \tau)$  è soluzione.

2. Se  $x_1$  e  $x_2$  sono due soluzioni di  $x' = f(x)$  che assumono un valore comune allora sono traslate temporali l'una dell'altra.

*Dimostrazione.* 1. Già vista 200 volte:

$$x'_\tau(t) = x'(t - \tau) = f(x(t - \tau)) = f(x_\tau(t))$$



2. usando la notazione del disegno, supponiamo  $u(t) = x_1(t - (t_2 - t_1))$ . Allora  $u$  è soluzione di  $x' = f(x)$  in quanto traslata di  $x'$ . Inoltre  $u(t_2) = x_1(t_1) = \bar{x} = x_2(t_2)$ , per unicità quindi  $u \equiv x_2$

□

Allora stesso modo si vede che  $x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, 0, x_0)$ . Infatti  $x(\cdot, t_0, x_0)$  risolve il problema originale e allora

$$x(\cdot - t_0, 0, x_0) \text{ risolve } \begin{cases} x' = f(x) \\ x(\cdot - t_0, 0, x_0)|_{t=t_0} = x(0, 0, x_0) = x_0 \end{cases}$$

che per unicità coincidono.

Ne consegue che posso sempre ricondurre un problema di Cauchy autonomo a uno in cui  $t_0 = 0$ . È una cosa così comune che motiva la seguente definizione

### Definizione 2.1: Flusso

Diciamo **flusso** associato all'equazione differenziale  $x' = f(x)$  la funzione

$$\varphi(t, \xi) = x(t, 0, \xi)$$

con  $\xi \in \Omega$  e  $t$  variabile nell'intervallo massimale  $(\omega_-(\xi), \omega_+(\xi))$  della soluzione  $x(\cdot, 0, \xi)$

**Proposizione 2.2.** •  $\omega_+[\omega_-]$  è semicontinua inferiormente [superiormente] in  $\Omega$

•

$$\{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega : \xi \in \Omega, \omega_-(\xi) < t < \omega_+(\xi)\}$$

è aperto.

•  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^N$  è continua

•  $\varphi(0, \cdot) = id_\Omega$

- $\varphi(s, \varphi(t, \xi)) = \varphi(s + t, \xi)$

*Dimostrazione ultimo punto.* Le funzioni  $\varphi(\cdot, \varphi(t, \xi))$  e  $\varphi(\cdot + t, \xi)$  sono due soluzioni di  $x' = f(x)$  che coincidono in  $t = 0$ , poiché valgono entrambe  $\varphi(t, \xi)$ . Per unicità quindi coincidono.  $\square$

*Osservazione.* Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico che sia  $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  continua tale che

$$\begin{cases} \varphi(0, \cdot) = \text{id}_X \\ \varphi(s, \varphi(t, \xi)) = \varphi(s + t, \xi) \end{cases}$$

allora  $\varphi$  è anche detta “sistema dinamico”

### Definizione 2.2: Orbita

Dato  $x_0 \in \Omega$  diciamo **orbita** per  $x_0$  l'insieme

$$\gamma_{x_0} = \{\varphi(t, x_0) : t \in (\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))\}$$

*Osservazione.* Utilizzando  $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$  in luogo di  $x(t, 0, x_0)$  si ottiene lo stesso insieme  $\gamma_{x_0}$ , perché è semplicemente una traslata temporale.

*Nota.*  $\gamma_{x_0}$  è la proiezione del grafico di  $x(\cdot, 0, x_0)$  su  $\Omega$

**Proposizione 2.3.** Se due orbite hanno un punto in comune, allora coincidono

*Dimostrazione.* Solito discorso di traslazione temporale, perché due soluzioni che assumono lo stesso valore devono essere traslate temporali una dell'altra, e quindi la proiezione su  $\Omega$  coincide.  $\square$

**Proposizione 2.4.** Se un'orbita non è un singoletto allora è una curva regolare.

*Dimostrazione.* Sia  $x$  soluzione di  $x' = f(x)$ . Se  $x'(t_0) = 0$  per un qualche  $t_0$  allora

$$0 = x'(t_0) = f(x(t_0))$$

ma allora posto  $x(t_0) = x_0$  la funzione costante  $u(t) = x_0$  è una soluzione, e per unicità è l'unica soluzione, quindi l'orbita è un singoletto.  $\square$

### Esercizio 2.1

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = \frac{x-t^2}{x^2+t^2} \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

Allora  $f(t, x) > 0$  per  $x > t^2$ . Per il teorema di esistenza e unicità esiste  $\delta > 0$  tale che la soluzione esiste in  $[-\delta, \delta]$ . Possiamo supporre  $\delta < a$ . Per  $t \geq \delta$

$$\left| \frac{x-t^2}{x^2+t^2} \right| \leq \frac{1}{\delta}(|x| + t^2)$$

e quindi per crescita sottolineare  $\omega_- = -\infty$ . Ora l'obiettivo è trovare una funzione  $u$  tale che  $x' \leq u'$  e  $u$  taglia  $x = t^2$ . Se fosse ora che  $x(t) \geq t^2$  per  $t \in [0, \omega_+]$  allora necessariamente da un certo tempo in poi  $x(t) \geq 1$ , per tali  $t$  allora  $x(t) \leq x(t)^2$  da cui

$$x'(t) \leq \frac{x(t)^2 - t^2}{x(t)^2 + t^2} \leq 1$$

ma allora  $x(t) \leq x(0) + t = a + t$  assurdo. Alternativamente si può mostrare che taglia la parabola anche dicendo che

$$x' \leq \frac{x}{x^2 + t^2} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

allora  $u' = \frac{1}{u}$  ha soluzione  $u(t) = \sqrt{2(t+c)}$  e poiché  $x(t) \leq u(t)$  che taglia  $x = t^2$  allora necessariamente anche  $x$  taglia tale parabola. Quindi  $\omega_+ = +\infty$  Ora sia  $l = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ . Se  $l \in \mathbb{R}$  allora

$$x'(t) \rightarrow -1 \text{ escluso dal teorema dell'asintoto}$$

allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$

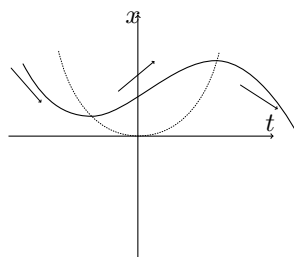


Figura 19: esercizio2-1

## Esercizio 2.2

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{x(1-x)}{2t} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

in  $t > 0$ . Poi si studi qualitativamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{g(x)}{2t} \\ x(1) = x_1 \end{cases}$$

dove  $g(x)$  ha lo stesso segno di  $x(1-x)$

## 3 Tecniche elementari di Integrazione

Ne conosciamo già diverse, come le equazioni a variabili separabili, le equazioni lineari del primo ordine e secondo ordine. Cambiare poco nelle forme porta a equazioni differenziali molto diverse e con soluzioni difficili. Nell'1800 si è cercato di mettere ordine e di capire in quali casi si può solo trovare un modello qualitativo (esempio trovare che Lotka-Volterra abbia le orbite chiuse). E molto spesso anche se ci sono soluzioni a volte basta sapere una soluzione approssimata, e quindi le tecniche esplicite di soluzione sono un po' meh. E allora a cosa servono le tecniche esplicite di risoluzione? Boh diciamo che quelle facili sono utili perché dai, servono (cit.) mentre altre più complicate si fanno solo per vedere quanto è difficile risolvere equazioni differenziali ma è simpatico quindi vederle come esempi.



### 3.1 Equazioni di tipo omogeneo

Si tratta di equazioni della forma

$$x' = g\left(\frac{x}{t}\right) \text{ con } g \text{ continua}$$

Si ponga  $z(t) = \frac{x(t)}{t}$  cioè  $x(t) = tz(t)$  da cui  $x'(t) = z(t) + tz'(t)$  e quindi l'equazione diventa

$$z + tz' = g(z) \iff z' = \frac{g(z) - z}{t}$$

che è a variabili separabili

**Esempio 3.1.**

$$x' = \frac{t+x}{t-x} = \frac{1+\frac{x}{t}}{1-\frac{x}{t}} =: g\left(\frac{x}{t}\right)$$

e quindi ponendo  $z = \frac{x}{t}$  abbiamo  $x' = z + tz'$  e quindi

$$z + tz' = \frac{1+z}{1-z} \iff tz' = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

che diventa

$$z' = \frac{1}{t} \frac{1+z^2}{1-z} \implies \int \frac{1+z^2}{1-z} dz = \log|t| + c \implies \arctan z - \frac{1}{2} \log(1+z^2) = \log|t| + c$$

e quindi

$$\arctan \frac{x}{t} - \log \sqrt{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2} = \log|t| + c$$

e poiché  $\log \sqrt{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2} = \log \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{|t|} = \log \sqrt{t^2+x^2} - \log|t|$  abbiamo che le soluzioni sono definite esplicitamente da

$$\arctan \frac{x}{t} - \log \sqrt{t^2+x^2} = c$$

Allora per  $t > 0$  se chiamiamo  $\theta = \arctan \frac{x}{t}$  e  $\rho = \sqrt{x^2+t^2}$  significa  $\theta - \log \rho = c$  da cui

$$\rho = Ce^\theta$$

che è un pezzo di una spirale logaritmica. Similmente per  $t < 0$  abbiamo che  $\alpha = \arctan \left(\frac{x}{-t}\right) = -\arctan \frac{x}{t}$  e allora se  $\theta = \pi - \alpha$  otteniamo di nuovo una spirale logaritmica.

Questa però non è il modo più “bello” di risolvere questa equazione: vedremo un modo per risolvere questa equazione attraverso il formalismo delle forme differenziali, e trovando soluzioni più chiare. In questo caso ad esempio

$$x' = \frac{t+x}{t-x} \mapsto \omega := (t+x)dt - (t-x)dx = 0$$

Le equazioni di tipo omogeneo ammettono una avvia generalizzazione. Premessa:  $x' = g(at+bx)$  si ponga  $z(t) = at+bx(t)$ , allora  $z' = a+bx'$  e quindi  $z' = a+bg(z)$  che è a variabili separabili. Ora possiamo generalizzare le precedenti equazioni di tipo omogeneo in

$$x' = g\left(\frac{at+bx+c}{a't+b'x+c'}\right)$$

che ha come caso particolare il precedente  $x' = g\left(\frac{x}{t}\right)$  se  $a = a' = 1$  e  $b = c = b' = c' = 0$  e anche  $x' = g(at+bx)$  per  $c' = 1$  e  $c = a' = b' = 0$ . Distinguiamo ora due casi

- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = 0$  ad esempio  $(a', b') = \gamma(a, b)$ . Allora l'equazione diventa

$$x' = g\left(\frac{at + bx + c}{\gamma(at + bx) + c'}\right) = \tilde{g}(at + bx)$$

e ricadiamo nel caso precedente

- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \neq 0$  allora nel piano  $x-t$  le due rette  $at + bx + c = 0$  e  $a't + b'x + c' = 0$  sono incidenti in un punto  $(t_0, x_0)$ . Applichiamo quindi il cambiamento di variabili  $u = x - x_0$  e  $\tau = t - t_0$  cioè considero  $u(\tau) = x(\tau + t_0) - x_0$ . Allora l'equazione

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= x'(\tau + t_0) = g\left(\frac{a(\tau + t_0) + b(u(\tau) + x_0) + c}{a'(\tau + t_0) + b'(u(\tau) + x_0) + c'}\right) = \\ &= g\left(\frac{a\tau + bu + \overbrace{at_0 + bx_0 + c}^{=0}}{a'\tau + b'u + \overbrace{a't_0 + b'x_0 + c'}^{=0}}\right) = g\left(\frac{a\tau + bu}{a'\tau + b'u} = g\left(\frac{a + b(\frac{u}{\tau})}{a' + b'(\frac{u}{\tau})}\right)\right) = \\ &= \tilde{g}\left(\frac{u}{\tau}\right) \end{aligned}$$

che è del primissimo tipo visto.

### 3.2 Equazioni del tipo $F(y, y') = 0$ oppure $F(x, y') = 0$

In questa sezione e nelle prossime, per via del significato geometrico sottostante alle equazioni e ai metodi esposti, preferiamo chiamare  $x$  la “variabile indipendente” e  $y$  la “variabile dipendente”, quindi  $y = y(x)$

**Esempio 3.2** (Brachistocrona). (curva di minima discesa) Siano  $p_1 = (x_1, y_1)$  e  $p_2 = (x_2, y_2)$  con  $x_1 < x_2$  e  $y_1 > y_2$  (figura 20).

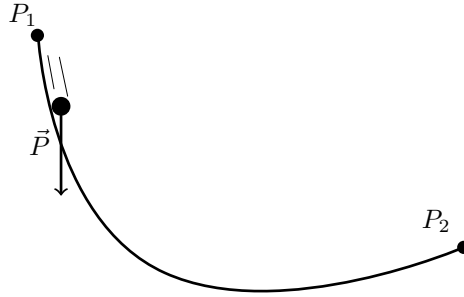


Figura 20: brachistocrona

Qual è la funzione su per la quale il tempo di discesa sotto l'azione della sola forza peso è minimo? Sia

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

la legge oraria del moto del punto. Supporremo che la curva descritta sia il grafico di funzione  $u : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ . Pertanto, per ogni  $t$  risulta  $y(t) = u(x(t))$ .

Se assumiamo che il tempo  $t = 0$  corrisponda alla posizione iniziale  $p_1$ , lo spazio percorso fino all'istante  $t$  è

$$s(t) = \int_{x_1}^{x(t)} \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

e la velocità (scalare) è data da

$$v(t) = \sqrt{1 + u'(x(t))^2} x'(t) \quad (3.1)$$

D'altronde possiamo anche calcolare  $v$  utilizzando la conservazione dell'energia: se  $m$  è la massa del punto,  $g$  l'accelerazione di gravità e  $v_0 = v(0)$  la velocità iniziale, allora

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgy(t)$$

da cui

$$\begin{aligned} v(t)^2 &= v_0^2 + 2g(y_1 - y(t)) \\ &= 2g(H - u(x(t))), \quad \text{con } H = \frac{v_0^2}{2g} + y_1 \end{aligned}$$

Per confronto con la (3.1) otteniamo

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2g(H - (u \circ x)(t))}}{\sqrt{1 + u'(x(t))^2}}$$

Possiamo assumere che  $x(t)$  sia invertibile; per l'inversa  $t'(x)$  risulta

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{2g(H - u(x))}}$$

Il tempo impiegato per percorrere l'arco fra  $p_1$  e  $p_2$  si ottiene ora per integrazione:

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{H - u(x)} dx$$

Come verrà maggiormente dettagliato in appendice, le *eventuali* soluzioni del problema di minimo per il funzionale

$$T(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(u(x), u'(x)) dx \quad \text{con } f(u, u') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{H - u(x)}$$

rendono costante la funzione  $f(u, u') - u' f_{u'}(u, u')$ . Un calcolo diretto porta quindi alla condizione

$$(H - u)(1 + u'^2) = c^2 \quad (c^2 \text{ costante}) \quad (3.2)$$

$F(y, y') = 0$  Prima di procedere nella risoluzione della brachistocrona, consideriamo il caso generale di un'equazione differenziale del tipo  $F(y, y') = 0$ . In particolare sia  $\mathcal{C}$  la curva nel piano  $y, y'$  di tale equazione. Sia allora

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y = A(s) \\ y' = B(s) \end{cases}$$

una rappresentazione parametrica di  $\mathcal{C}$ . Cerchiamo allora una rappresentazione parametrica del grafico  $y = y(x)$  di una soluzione di  $F(y, y') = 0$  nella forma

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(x(s)) \end{cases}$$

Poniamo  $y(s) = y(x(s))$  e poiché vale

$$\frac{dy}{ds} = y'(x(s))x'(s) \implies A'(s) = B(s)x'(s)$$

da cui

$$x'(s) = \frac{A'(s)}{B(s)} \quad x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds \implies \text{soluzione: } \begin{cases} x = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds \\ y = A(s) \end{cases} \quad (3.3)$$

**Esempio 3.2** (Brachistocrona). Tornando all'esempio precedente vogliamo risolvere l'equazione (3.2), ossia

$$F(y, u') = (H - u)(1 + u'^2) = c^2 \implies \begin{cases} H - u = \frac{c^2}{1 + \xi^2} \iff u = H - \frac{c^2}{1 + \xi^2} \\ u' = \xi \end{cases}$$

da cui, operando la sostituzione  $\xi = \tan \frac{s}{2}$  abbiamo

$$\begin{cases} u = H - c^2 \cos^2 \frac{s}{2} = H - \frac{c^2}{2}(1 + \cos s) & =: A(s) \\ u' = \tan \frac{s}{2} & =: B(s) \end{cases}$$

e ora risolvendo secondo la (3.3) otteniamo  $x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds = \frac{c^2}{2} \int \frac{\sin s}{\tan \frac{s}{2}} = \frac{c^2}{2} \int \frac{\sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2} / \cos \frac{s}{2}} ds = c^2 \int \cos^2 \frac{s}{2} ds = \frac{c^2}{2} \int (1 + \cos s) ds$  e quindi una rappresentazione parametrica del grafico della soluzione è

$$\begin{cases} x = \frac{c^2}{2}(s + \sin s) \\ y = H - \frac{c^2}{2}(1 + \cos s) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{c^2}{s}(\theta + \pi - \sin \theta) = K + r(\theta - \sin \theta) \\ y = H - \frac{c^2}{2}(1 - \cos \theta) = H - r(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

con  $s = \theta + \pi$ ,  $\frac{c^2}{2} = r$  e  $K = \frac{c^2}{2}\pi$  che è l'equazione di un arco di cicloide, ossia la curva descritta da un punto di una circonferenza lungo la sua rotazione senza slittamento su una retta, come in figura 21

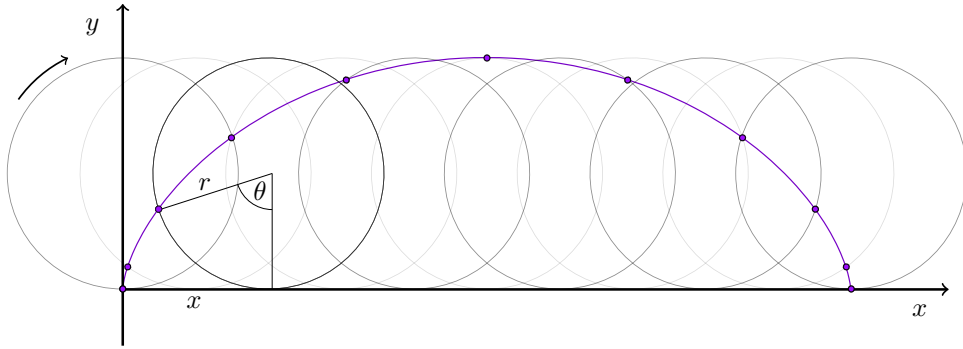


Figura 21: La cicloide ha equazione  $x = r(\theta - \sin \theta)$  e  $y = r(1 - \cos \theta)$

$F(x, y') = 0$  Questo caso si affronta in modo analogo al precedente. Sia infatti  $\mathcal{C}$  una curva nel piano  $x, y'$  descritta da  $F(x, y') = 0$  e rappresentata parametricamente da

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = A(s) \\ y' = B(s) \end{cases}$$

allora  $\frac{dy}{ds} = y'(x(s))x'(s)$  e quindi similmente a prima otteniamo

$$C : \begin{cases} x = A(s) \\ y = \int A'(s)B(s)ds \end{cases}$$

## 4 Sistemi lineari

### 4.1 Equazioni differenziali e forme differenziali in due dimensioni

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  una funzione  $C^1$  e  $x' = f(x)$ . Allora se  $f = (f_1, f_2)$  e  $x = (x_1, x_2)$  allora

$$x' = f(x) \iff \begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.1)$$

Sia ora  $x : J \rightarrow \Omega$  una soluzione,  $J = (a, b)$  e sia  $\gamma$  l'orbita corrispondente. Allora  $x(\cdot)$  è una rappresentazione parametrica di  $\gamma$  e possiamo individuare  $\gamma$  mediante una qualunque altra rappresentazione parametrica. In particolare sia  $\psi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  è  $C^1$ , biettiva con  $\psi'$  mai nulla e con inversa  $C_1$ . Se allora  $u = x \circ \psi$  allora

$$u'(\tau) = x'(\psi(\tau))\psi'(\tau) = f(x(\psi(\tau)))\psi'(\tau) = f(u(\tau))\psi'(\tau)$$

allora rinominando  $\psi'(\tau) = \lambda(\tau)$  abbiamo che  $u$  soddisfa la proprietà

#### Definizione 4.1: $u' \parallel f(u)$

Diciamo che  $u$  soddisfa la proprietà  $u' \parallel f(u)$  se esiste una funzione  $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}$  continua e mai nulla tale che

$$u'(\tau) = f(u(\tau))\lambda(\tau)$$

Viceversa, se  $u : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$  soddisfa  $u' \parallel f(u)$  allora è la riparametrizzazione di una soluzione di  $x' = f(x)$ . Infatti sia  $\psi$  una primitiva di  $\lambda$ , ossia  $\psi' = \lambda$ . Definiamo  $x = u \circ \psi^{-1}$  che è soluzione, infatti<sup>1</sup>

$$x' = (u' \circ \psi^{-1}) \cdot \psi^{-1'} = (\lambda \circ \psi^{-1})(f \circ u \circ \psi^{-1}) \frac{1}{(\psi' \circ \psi^{-1})} = f \circ x = f(x)$$

Quindi la determinazione delle orbite si riduce all'individuazione di funzioni  $u$  soddisfacenti  $u' \parallel f(u)$ . Da qui in poi useremo la notazione  $x(\cdot)$  anziché  $u(\cdot)$ .

**Proposizione 4.1.** Sia  $x : J \rightarrow \Omega$  una curva regolare su cui  $f$  non si annulla. Allora sono equivalenti:

i)  $\exists \lambda \in C^0(J)$  mai nulla tale che  $x' = \lambda(f(x))$

ii)  $\det \begin{bmatrix} x'_1(t) & x'_2(t) \\ f_1(x(t)) & f_2(x(t)) \end{bmatrix} = 0$  per ogni  $t \in J$

*Dimostrazione.* L'implicazione (i)  $\implies$  (ii) è ovvia. Se  $x' = \lambda f$  allora

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1 \circ x \\ f_2 \circ x \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>dirò per comodità che  $h = fg = f \cdot g$  quando  $h(t) = f(t)g(t)$

Per (ii)  $\implies$  (i) abbiamo per ipotesi che la seconda riga non è mai nulla ( $f$  non si annulla) e la prima non è mai nulla ( $x$  è regolare). Necessariamente quindi vale la (4.2) con un  $\lambda(t)$  mai nullo. Inoltre  $\forall t \in J$  almeno una fra  $f_1$  e  $f_2$  è non nulla, e quindi  $\lambda(t) = \frac{x'_1(t)}{f_1(x(t))}$  oppure l'altra localmente, e quindi è continua.  $\square$

La condizione (ii) della proposizione 4.1 si può scrivere come

$$f_2(x(t))x'_1(t) - f_1(x(t))x'_2(t) = 0$$

ossia posto

$$\omega(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)dx_1 - f_1(x_1, x_2)dx_2 \quad (4.3)$$

l'uguaglianza diventa semplicemente  $\langle \omega(x(t)), x'(t) \rangle = 0$

In generale data una forma differenziale  $\omega(x_1, x_2) = A(x_1, x_2)dx_1 + B(x_1, x_2)dx_2$  su  $\Omega$  si pone

#### Definizione 4.2: Curva soluzione

Una curva regolare  $x : J \rightarrow \Omega$  si dice **curva soluzione** dell'equazione  $\omega(x_1, x_2) = 0$  se per ogni  $t \in J$  soddisfa

$$A(x(t))x'(t) + B(x(t))y'(t) = 0 \quad (= \langle \omega(x(t)), x'(t) \rangle)$$

Il problema della determinazione delle orbite di (4.1) equivale ad individuare le curve soluzione di (4.3).

*Osservazione* (Formalmente). La notazione è bella, ed ha una sua motivazione, per cui essendo una bella notazione si ottengono risultati sensati:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \implies \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1}{f_2} \implies f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0$$

Sinora abbiamo osservato solo sistemi autonomi con  $N = 2$ . Possiamo anche considerare problemi  $N = 1$  non autonomi, ossia  $x' = f(t, x)$ , riducendoli ad un sistema autonomo in  $N = 2$  con

$$\begin{cases} x_1 := t \\ x_2 := x \end{cases} \implies \begin{cases} x'_1 = 1 \\ x'_2 = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

le cui orbite sono date da  $f(x_1, x_2)dx_1 - dx_2 = 0$ , ossia

$$f(t, x)dt - dx = 0 \quad \text{che può essere trovato formalmente da } \frac{dx}{dt} = f$$

Un caso rilevante è quello in cui (4.3) è esatta, ossia esiste una funzione  $H \in C^1(\Omega)$  tale che  $dH = \omega$

**Proposizione 4.2.** Sia  $\omega = dH$ . Allora

- su ogni curva soluzione la funzione  $H$  è costante
- una curva regolare contenuta in un insieme di livello di  $H$  è una curva soluzione

*Dimostrazione.* Sia  $x : J \rightarrow \Omega$  una curva  $C^1$ . Abbiamo che

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \frac{\partial H}{\partial x_1}x'_1(t) + \frac{\partial H}{\partial x_2}x'_2(t) = \langle \omega(x(t)), x'(t) \rangle$$

dove il primo termine è nullo se  $H$  è costante sul supporto di  $H$ , ossia  $x$  è contenuta in un insieme di livello di  $H$ ; l'ultimo termine invece è nullo quando  $x$  è curva soluzione.  $\square$

#### Esercizio 4.1

Si studino le curve soluzione del problema del pendolo

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

considerando le curve soluzione sul piano  $(\theta, \dot{\theta})$

**Esempio 4.1** (Lotka-Volterra). consideriamo  $x_1, x_2 > 0$  e il sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(\alpha - \beta x_2) \\ x'_2 = x_2(-\gamma + \delta x_1) \end{cases}$$

che dà origine alla forma differenziale

$$\omega = x_2(-\gamma + \delta x_1)dx_1 - x_1(\alpha - \beta x_2)dx_2 = 0$$

sfortunatamente non è esatta, infatti non è chiusa

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} = -\gamma + \delta x_1 \neq -\alpha + \beta x_2 = \frac{\partial B}{\partial x_1}$$

ma possiamo cercare un fattore integrante  $\mu(x_1, x_2)$  *mai nullo* tale che  $\mu\omega$  sia esatta.

L'idea è che se esiste allora  $\omega = 0 \iff \mu\omega = 0$ . L'equazione diventa

$$\mu(x_1, x_2)x_2(-\gamma + \delta x_1)dx_1 - \mu(x_1, x_2)x_1(\alpha - \beta x_2)dx_2 = 0$$

e vogliamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu(x_1, x_2)x_2(-\gamma + \delta x_1)) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\mu(x_1, x_2)x_1(\alpha - \beta x_2))$$

e cerchiamo  $\mu$  nella forma  $\mu(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_2)$ . La precedente diventa quindi

$$\begin{aligned} \varphi(x_1)\psi'(x_2)x_2(-\gamma + \delta x_1) + \varphi(x_1)\psi(x_2)(-\gamma + \delta x_1) = \\ = \varphi'(x_1)\psi(x_2)x_1(\alpha - \beta x_2) + \varphi(x_1)\psi(x_2)(-\alpha + \beta x_2) \end{aligned}$$

cioè

$$\varphi(x_1)(-\gamma + \delta x_1) \underbrace{(\psi'(x_2)x_2 + \psi(x_2))}_{\stackrel{\text{set}}{=}0} = \psi(x_2)(\alpha - \beta x_2) \underbrace{(\varphi'(x_1)x_1 + \varphi(x_1))}_{\stackrel{\text{set}}{=}0}$$

e come  $\varphi$  e  $\psi$  possiamo considerare una soluzione di

$$u'(x)x + u(x) = 0$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{x}$$

$$\log |u| = -\log x + c$$

$$u(x) = \frac{c}{x}$$

e quindi  $\varphi(x_1) = \frac{1}{x_1}$  e  $\psi(x_2) = \frac{1}{x_2}$  da cui  $\mu(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$ . La nostra forma differenziale diventa

$$\tilde{\omega} = \left(-\frac{\gamma}{x_1} + \delta\right)dx_1 - \left(\frac{\alpha}{x_2} - \beta\right)dx_2 = 0$$

e una possibile  $H(x_1, x_2)$  tale che  $dH = \tilde{\omega}$  è

$$H(x_1, x_2) = -\gamma \log x_1 + \delta x_1 - \alpha \log x_2 + \beta x_2 \quad \text{è costante}$$

quindi ora se rappresentiamo le curve nel piano  $(x_1, x_2)$  otteniamo la figura [22](#)

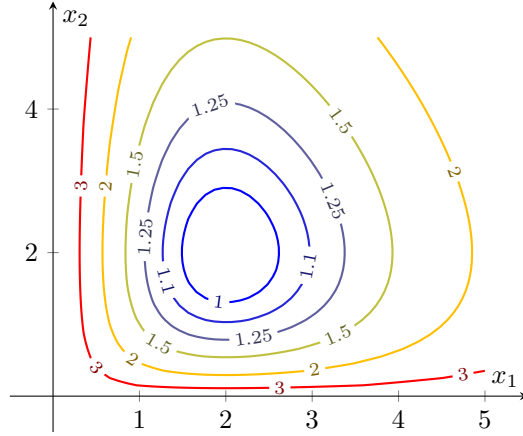


Figura 22: Le curve soluzione del sistema di Lotka-Volterra con  $\gamma = 2, \delta = \alpha = 1$  e  $\beta = \frac{1}{2}$ , i valori assunti da  $H$  sono indicati

**Esempio 4.2.** Consideriamo il problema  $x' = \frac{t+x}{t-x}$ . volendo calcolare le curve soluzione nel piano  $(t, x)$  studiamo la forma differenziale

$$\omega = (t-x)dx - (t+x)dx = 0$$

ossia

$$(x_1 + x_2)dx_1 - (x_1 - x_2)dx_2 = 0 \quad (4.4)$$

non è esatta e non si riesce (facilmente?) a trovare un fattore integrante. Tuttavia possiamo studiarlo in coordinate polari. In particolare poniamo

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ x_2 = x_2(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

La (4.4) diventa

$$\rho(\cos \theta + \sin \theta)(\rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta) - \rho(\cos \theta - \sin \theta)(\rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta) = 0$$

svolgendo i calcoli abbiamo

$$\rho' - \rho \theta' = 0 \implies d\rho - \rho d\theta = 0 \implies \frac{1}{\rho} d\rho - d\theta = 0$$

e quindi  $H(\rho, \theta) = \log \rho - \theta$  è costante e quindi le curve espresse in forma polare hanno equazione

$$\log \rho = \theta + c \implies \rho = e^{\theta+c} = Ce^\theta \quad C > 0$$

## 4.2 Sistemi lineari

Consideriamo il sistema lineare

$$x' = A(t)x + b(t) \quad A \in C^0(I, M^{N \times N}(\mathbb{R})) \quad b \in C^0(I, \mathbb{R}^N) \quad (4.5)$$

dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo aperto. Se  $N = 2$  abbiamo

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + b_1(t) \\ x'_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_2(t) \end{cases} \quad (4.6)$$



Allora abbiamo  $f(t, x) = A(t)x + b(t)$  per cui per crescita sottolineare abbiamo esistenza globale, e quindi  $I$  è intervallo massimale.

In aggiunta se  $A, b \in C^k$  allora  $x(\cdot) \in C^{k+1}(I, \mathbb{R}^N)$ .

Sia ora  $L : C^1(I, \mathbb{R}^N) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^N)$  definito come  $x \mapsto x' - A(t)x$ . L'equazione è

$$Lx = b \quad (4.7)$$

e  $L$  è lineare, per cui

**Proposizione 4.3.** *Sia  $\bar{x}$  una soluzione di (4.5). Allora tutte e sole le soluzioni di tale equazione si ottengono con  $x = x_0 + \bar{x}$  al variare di  $x_0$  fra le soluzioni di*

$$x' = A(t)x \quad (4.8)$$

che è l'equazione omogenea associata

*Dimostrazione.*  $L^{-1}(b) = \bar{x} + L^{-1}(0)$  □

**Equazione omogenea** Consideriamo ora l'equazione (4.8) omogenea associata a un sistema lineare (4.5). Sia  $V = L^{-1}(0)$  lo spazio delle soluzioni. Allora se  $x(\cdot, t_0, x_0)$  è la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $x(t_0) = x_0$ .

**Proposizione 4.4.** *Fissiamo  $t_0 \in I$  e sia*

$$\begin{aligned} \varphi^{t_0} : \mathbb{R}^N &\longrightarrow V \\ \xi &\longmapsto \varphi^{t_0}(\xi) = x(\cdot, t_0, \xi) \end{aligned}$$

Allora  $\varphi^{t_0}$  è un isomorfismo di spazi vettoriali

*Dimostrazione.* Siano  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , inoltre sia  $u_1 = \varphi^{t_0}(\xi_1)$  e  $u_2 = \varphi^{t_0}(\xi_2)$ . Allora chiamato

$$\xi = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$$

vogliamo mostrare che  $\varphi^{t_0}(\xi) = \alpha u_1 + \beta u_2$ . La funzione  $u := \alpha u_1 + \beta u_2$  è soluzione e inoltre

$$u(t_0) = \alpha u_1(t_0) + \beta u_2(t_0) = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 = \xi$$

Per unicità segue che  $u(\cdot) = x(\cdot, t_0, \xi) = \varphi^{t_0}(\xi)$

Quindi  $\varphi^{t_0}$  è un omomorfismo. Del resto

$$\varphi^{t_0}(\xi) = 0 \implies \xi = x(t_0, t_0, \xi) = \varphi^{t_0}(\xi)|_{t=t_0} = 0$$

quindi  $\varphi$  è iniettiva.

Infine data  $u \in V$  risulta  $u = \varphi^{t_0}(\xi)$  con  $\xi = u(t_0)$  e quindi  $\varphi$  è suriettiva □

Ne consegue direttamente che  $\dim V = N$  e anche il seguente

**Corollario 4.4.1.** *Sia  $t_0 \in I$  fissato, siano  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$  elementi di  $V$ . Allora  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$  sono linearmente indipendenti in  $V$  se e solo se tali sono i vettori di  $\mathbb{R}^N$   $x^{(1)}(t_0), \dots, x^{(N)}(t_0)$*

#### Definizione 4.3: Wronskiana

Dati  $N$  elementi di  $V$  (soluzioni di (4.8))

$$x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$$

costruiamo matrice **Wronskiana** di tali soluzioni la matrice che ha come colonne

$$\mathbf{X}(t) = (x^{(1)}(t) | x^{(2)}(t) | \dots | x^{(N)}(t))$$

Il determinante

$$W^t = \det \mathbf{X}(t)$$

è il (determinante) **wronskiano**

Quindi, fissato  $t_0 \in I$ , le soluzioni  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$  sono linearmente indipendenti se e solo se  $\det \mathbf{X}(t_0) = 0$ . In tal caso abbiamo che  $\forall t \in I$  risulta  $\det \mathbf{X}(t) = 0$

**Esempio 4.3.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = -4x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

allora  $\dim V = 2$  e una base di  $V$  è data da

$$x^{(1)}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad x^{(2)}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che sono soluzioni:

$$\begin{aligned} (x_1^{(1)})' &= e^t = 2e^t - e^t = 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} \\ (x_2^{(1)})' &= -e^t = -4e^t - (-3e^t) = -4x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} \end{aligned}$$

e analogamente per  $x^{(2)}$ . La matrice wronskiana è

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ -e^t & -4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

che ha determinante  $\det \mathbf{X} = -4e^{-t} + e^{-t} = -3e^{-t} \neq 0$

#### Teorema 4.5: Liouville

Siano  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$  soluzioni. Sia  $W(t) = \det \mathbf{X}(t)$ . Allora  $W$  risolve

$$W'(t) = (\operatorname{tr} A(t))W(t)$$

cioè

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)ds} \quad t, t_0 \in I$$

Ciò conferma che  $W(t) \equiv 0$  oppure  $W^t$  non si annulla mai.

**Matrice risolvente** Prendiamo le soluzioni con dati iniziali  $e_1, e_2, \dots, e_N$  cioè per ogni  $\tau \in I$  e  $i = 1, \dots, N$  sia

$$u^{(i)}(\cdot, \tau) = x(\cdot, \tau, e_i)$$

Allora la matrice  $\mathbf{X}$  wronskiana corrispondente agli  $u^{(i)}$  è

$$\mathbf{X}(\tau) = (u^{(1)}(\tau, \tau) | \dots | u^{(N)}(\tau, \tau)) = (e_1, e_2, \dots, e_N) = I$$

sono linearmente indipendenti

#### Definizione 4.4: Matrice risolvente

Diciamo **matrice risolvente** dell'equazione (4.8) la matrice (funzione di  $t$  e  $\tau$ )

$$R(t, \tau) = \left( u^{(1)}(t, \tau) \mid \dots \mid u^{(N)}(t, \tau) \right)$$

Allora la soluzione di  $(t \in I \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^N)$

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$

è data da

$$x(t) = R(t, \tau)\xi = \xi_1 u^{(1)}(t, \tau) + \dots + \xi_N u^{(N)}(t, \tau)$$

così che  $x(\tau) = R(\tau, \tau)\xi = \mathbf{X}(\tau)\xi = I\xi = \xi$ . Enunciato in altra forma: se  $x(\cdot)$  è soluzione di (4.8) allora per ogni  $t, \tau \in I$

$$x(t) = R(t, \tau)x(\tau)$$

Da qui scende che se  $\mathbf{X}(\cdot)$  è la matrice wronskiana di  $N$  soluzioni del tipo  $x^{(i)}$  per  $i = 1, \dots, N$  allora

$$x^{(i)}(t) = R(t, \tau)x^{(i)}(\tau) \quad i = 1, \dots, N$$

quindi

$$\mathbf{X}(t) = R(t, \tau)\mathbf{X}(\tau)$$

Se in particolare le  $x^{(i)}$  sono linearmente indipendenti allora

$$R(t, \tau) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(\tau)^{-1}$$

**Esempio 4.3** (Nell'esempio precedente).

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t)^{-1} &= -\frac{1}{3}e^t \begin{pmatrix} -4e^{-2t} & e^t \\ -e^{-2t} & e^t \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3}e^t \begin{pmatrix} -4e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^t & e^t \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ -e^t & -4e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4e^{-\tau} & -e^{-\tau} \\ e^{2\tau} & e^{2\tau} \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4e^{t-\tau} + e^{-2(t-\tau)} & -e^{t-\tau} + e^{-2(t-\tau)} \\ 4e^{t-\tau} - 4e^{-2(t-\tau)} & e^{t-\tau} - 4e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e in effetti abbiamo che

$$R(\tau, \tau) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = I$$

*Osservazione.* In questo caso  $R(t, \tau)$  è funzione di  $t-\tau$ , in effetti in generale se  $A$  non dipende da  $t$  (sistema autonomo) abbiamo che  $u^{(i)}(t) = x(t, \tau, e_i) = x(t-\tau, 0, e_i)$  e quindi  $R(t, \tau) = R(t-\tau, 0)$  ed è dunque sufficiente conoscere  $R(t, 0)$

Sappiamo ora che dato un sistema lineare (4.5), noi consideriamo il sistema omogeneo associato (4.8) e cerchiamo le soluzioni calcolando  $R(t, \tau)$ , oppure  $R(t, 0)$  nel caso di  $A$  non dipendente da  $t$ . Infine cerchiamo una soluzione particolare  $\bar{x}(\cdot)$ . Come possiamo fare per tale scopo?

## Metodo di variazione delle costanti

**Proposizione 4.6.** *La funzione*

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^t R(t, s)b(s) ds$$

*è soluzione dell'equazione (4.5)*

*Dimostrazione.* Supponiamo di conoscere una  $N$ -upla di soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea (4.8)  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$ . Allora cerchiamo  $\bar{x}(\cdot)$  della forma

$$\bar{x}(t) = \mathbf{X}(t)\xi(t)$$

Si ha  $\bar{x}'(t) = \mathbf{X}'(t)\xi(t) + \mathbf{X}(t)\xi'(t)$  e quindi  $\bar{x}$  è soluzione se e solo se

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'\xi + \mathbf{X}\xi' &= A(\mathbf{X}\xi) + b \\ \cancel{A\mathbf{X}\xi} + \mathbf{X}\xi' &= \cancel{A\mathbf{X}\xi} + b \\ \implies \mathbf{X}\xi' &= b \iff \xi' = \mathbf{X}^{-1}b\end{aligned}$$

dunque  $\xi$  è primitiva di  $\mathbf{X}^{-1}b$ , ossia

$$\xi(t) = \int \mathbf{X}^{-1}(t)b(t)dt \text{ ad esempio } \xi(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(s)b(s)ds$$

Allora otteniamo

$$\bar{x}(t) = \mathbf{X} \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(s)b(s)ds = \int_{t_0}^t R(t, s)b(s)ds$$

□

**Esempio 4.4** (Esempio precedente, plus). Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 & -2t \\ x_2' = -4x_1 - 3x_2 & +4t + 3 \end{cases} \quad (4.9)$$

e abbiamo

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} -2t \\ 4t + 3 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{X}^{-1}(t)b(t) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8te^{-t} - (4t+3)e^{-t} \\ -2te^{2t} + (4t+3)e^{2t} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4te^{-t} - 3e^{-3} \\ 2te^{2t} + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{X}(t)b(t)dt = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-4t-1)e^{-t} \\ (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

infine

$$\bar{x} = \mathbf{X}(t)\xi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

che si può verificare velocemente essere effettivamente soluzione di (4.9)

**Sistemi omogenei autonomi** Come detto prima, nel caso di sistemi autonomi  $x' = Ax$  con  $A \in M^{N \times N}(\mathbb{R})$  sappiamo che  $R(t, \tau) = R(t - \tau, 0)$  e dunque è sufficiente calcolare  $R(t, 0)$  per  $t \in \mathbb{R}$ .

Le colonne di  $\mathbf{X}(t)$  sono soluzioni di  $x' = Ax$  e inoltre  $\mathbf{X}(0) = I$  identità, ne consegue che vogliamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t) \\ \mathbf{X}(0) = I \end{cases} \quad \text{o equivalentemente} \quad \mathbf{X}(t) = I + \int_0^t A\mathbf{X}(s) ds \quad (4.10)$$

In analogia con la dimostrazione del teorema di esistenza e unicità introduciamo  $T : C^0 \rightarrow C^0$  definito come

$$(T\mathbf{X})(t) = I + \int_0^t A\mathbf{X}(s) ds \quad \mathbf{X} \in C^0(\mathbb{R}, M^{N \times N}(\mathbb{R}))$$

e ne cerchiamo i punti fissi. Definiamo ora la successione

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0(t) &\equiv I \\ \mathbf{X}_1 &= T\mathbf{X}_0 = I + tA \\ \mathbf{X}_2 &= T\mathbf{X}_1 = I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_{m+1} &= T\mathbf{X}_m = I + A \int_0^t \mathbf{X}_m(s) ds = \\ &= I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \frac{1}{3!}t^3 A^3 + \dots + \frac{1}{m!}t^m A^m \end{aligned}$$

Il problema è la convergenza di tale successione. È naturale quindi ora pensare che la soluzione sia una sorta di  $e^{tA}$ , ma è ben definita?

**Esponenziale di una matrice** Sia  $A \in M^{N \times N}(\mathbb{K})$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Prendiamo

$$\|A\| \{ |Ax| : x \in \mathbb{K}^N, |x| \leq 1 \}$$

e l'operatore lineare  $T$  associato alla matrice  $A$ . Allora

- $|Ax| \leq \|A\||x|$  per ogni  $x \in \mathbb{K}^N$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  infatti  $|ABx| \leq |A \cdot Bx| \leq \|A\||Bx| \leq \|A\|\|B\||x|$ , basta ora osservare che prendiamo per la norma  $|x| \leq 1$ .
- $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

Se  $(M_k)_k$  è una successione di matrici, la convergenza è quella usuale in  $M^{N \times N}(\mathbb{K})$ . Consideriamo ora una serie in  $M^{N \times N}(\mathbb{K})$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

allora la serie converge se converge la successione delle somme parziali, e converge assolutamente se converge la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ . Vale che convergenza assoluta implica convergenza.

**Proposizione 4.7.** Siano  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$  serie in  $M^{N \times N}(\mathbb{K})$ . Sia inoltre

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k, \quad C_k = \sum_{j=0}^{\infty} A_j B_{k-j}$$

(serie prodotto). Se le serie date sono assolutamente convergenti, tale è la serie prodotto, e vale

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k = \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_k \right)$$

*Dimostrazione.*

$$\|C_k\| \leq \sum_{j=0}^k \|A_j B_{k-j}\| \leq \sum_{j=0}^k \|A_j\| \|B_{k-j}\| =: \sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j}$$

dove l'ultimo è il termine generale della serie prodotto  $(\sum \alpha_j)(\sum \beta_k)$  che è convergente per ipotesi. Per confronto concludiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|C_k\| < +\infty$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2m} C_k$$

e si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m} C_k &= \sum_{k=0}^{2m} \sum_{j+h=k} A_j B_h \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m A_j B_k + R_m^1 + R_m^2 \end{aligned}$$

con

$$R_m^1 = \sum_{j=m+1}^{2m} \sum_{h=0}^{2m-j} A_j B_h \quad R_m^2 = \sum_{h=m+1}^{2m} \sum_{j=0}^{2m-h} A_j B_h$$

Risulta dunque

$$\sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^m A_j B_h = \left( \sum_{j=0}^m A_j \right) \left( \sum_{h=0}^m B_h \right) \rightarrow \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j \right) \left( \sum_{h=0}^{\infty} B_h \right)$$

inoltre

$$\begin{aligned} \|R_m^1\| &\leq \sum_{j=m+1}^{2m} \sum_{h=0}^{2m-j} \|A_j\| \|B_h\| \leq \sum_{j=m+1}^{2m} \left( \|A_j\| \sum_{h=0}^{2m-j} \|B_h\| \right) \leq \\ &\leq \sum_{h=0}^{\infty} \|B_h\| \leq \left( \sum_{h=0}^{\infty} \|B_h\| \right) \cdot \left( \sum_{j=m+1}^{\infty} \|A_j\| \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per  $m \rightarrow \infty$  e analogamente per  $R_m^2$

□

Ora data  $A \in M^{N \times N}$  consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

e risulta

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} < +\infty$$

#### Definizione 4.5: Esponenziale di una matrice

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

**Proposizione 4.8.** La serie esponenziale converge assolutamente e

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

**Proposizione 4.9.** Se  $AB = BA$  allora

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

#### Esercizio 4.2

Dimostrare la proposizione 4.9

**Corollario 4.9.1.**  $e^A$  è invertibile e

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

*Dimostrazione.*  $A$  e  $-A$  commutano e quindi

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$$

□

*Osservazione.* Sia  $A$  una matrice, e  $\tilde{A} = P^{-1}AP$  una matrice simile ad  $A$ , con  $P$  invertibile. Allora poiché  $\tilde{A}^2 = \tilde{A} * \tilde{A} = P^{-1}A P P^{-1}A P$  e in generale risulta sempre similmente  $\tilde{A}^k = P^{-1}A^k P$  otteniamo

$$e^{\tilde{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}A^k P}{k!} = P^{-1}e^A P$$

**Ritornando a  $x' = Ax$**  Abbiamo che

$$\mathbf{X}_m(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(tA)^k}{k!} \rightarrow e^{tA} \text{ per } m \rightarrow \infty$$

e si ha che

$$\left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|tA\|^k}{k!} \leq \frac{(|t|\|A\|)^k}{k!} \leq \frac{(M\|A\|)^k}{k!}$$

per  $|t| \leq M$ . Poiché l'ultima serie è convergente, abbiamo convergenza totale (quindi uniforme) sui limitati di  $\mathbb{R}$ . Abbiamo dunque mostrato che la matrice risolvete  $R(t, 0) = e^{tA}$ , infatti è facile vedere che il limite di  $\mathbf{X}_m$ , se esiste, è punto fisso di  $T$ .

Abbiamo dimostrato

#### Teorema 4.10

In un sistema autonomo lineare omogeneo del tipo  $x' = Ax$  con  $A \in M^{N \times N}(\mathbb{R})$  la matrice risolvete è data da

$$R(t, 0) = e^{tA}$$

e quindi la soluzione di

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$

è data da  $x^t = e^{(t-\tau)A}\xi$

Come calcolare  $e^A$ ? È utile il passaggio a matrice simile. Abbiamo detto che se  $\tilde{A} = P^{-1}AP$  allora  $e^{\tilde{A}} = P^{-1}e^AP$ . Interpretiamo ciò nel quadro delle equazioni differenziali  $x' = Ax$  con il cambiamento di variabile  $\tilde{x}(t)$  tale che  $x(t) = P\tilde{x}(t)$ , con  $P$  invertibile. Allora

$$AP\tilde{x} = Ax = x' = P\tilde{x}' \implies \tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}$$

che ha matrice risolvete  $e^{t\tilde{A}}$ .

*Osservazione.* Avevamo  $x' = Ax$  con  $A \in M^{N \times N}(\mathbb{R})$ . Più in generale possiamo considerare il problema  $z' = Az$  con  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$  o anche  $z' = \mathcal{A}z$  con  $\mathcal{A} \in M^{N \times N}(\mathbb{C})$  e  $\mathcal{A} = A + iB$ . Allora se  $z(t) = x(t) + iy(t)$  abbiamo che

$$z' = \mathcal{A}z \implies \begin{cases} x' = Ax - By \\ y' = Bx + Ay \end{cases} \quad (4.11)$$

che è un sistema di dimensione  $2N$ . La proposizione 4.4 rimane valida quindi lo spazio delle soluzioni  $V^{\mathbb{C}}$  ha dimensione (complessa)  $N$ , se  $\mathcal{A} = A$  e  $B = 0$  allora (4.11) diventa

$$\begin{cases} x' = Ax & \in V^{\mathbb{R}} \\ y' = Ay & \in V^{\mathbb{R}} \end{cases}$$

e quindi  $V^{\mathbb{C}} = V^{\mathbb{R}} + iV^{\mathbb{R}}$ . Da tutto ciò discende che

*Proposizione 4.11.* Se  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$  sono  $N$  soluzioni **reali** e linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}$  allora sono anche una base di  $V^{\mathbb{C}}$

**Calcolo di  $e^A$**  Vi sono alcuni casi particolari:

- $A$  diagonale allora  $e^A$  diagonale con entrate  $e^{\lambda_i}$  dove  $\lambda_i$  sono le entrate di  $A$ .
- $A$  blocco nilpotente elementare di ordine  $s$ , ossia  $A$  è una matrice  $s \times s$  che ha solo entrate di valore 1 sulla sopradagonale. Allora poiché  $A^s = 0$  abbiamo

$$e^{tA} = I + A + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots + \frac{t^{s-1} A^{s-1}}{(s-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A$  diagonalizzabile allora  $A = P\tilde{A}P^{-1}$  se  $A$  è associata a  $T$  nella base canonica allora  $P$  ha come colonne gli autovettori di  $T$ , e  $\tilde{A}$  è diagonale con gli autovalori di  $T$ . Allora

$$e^{tA} = e^{Pt\tilde{A}P^{-1}} = Pe^{t\tilde{A}}P^{-1} = (v_1 \quad \dots \quad v_N) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix} (v_1 \quad \dots \quad v_N)^{-1}$$

Da ciò abbiamo che nel problema  $x' = Ax$  con  $A$  diagonalizzabile, allora  $x(t) = e^{tA}\xi$  al variare di  $\xi \in \mathbb{C}^N$ , ossia  $x(t) = Pe^{t\tilde{A}}P^{-1}\xi = Pe^{t\tilde{A}}C$ , con  $C \in \mathbb{C}^N$  arbitrario è soluzione.



**Esempio 4.5.** Sia  $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & -1 & -6 \\ -6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$  allora (con qualche calcolo che skippo) otteniamo

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

e quindi gli autovalori sono  $\lambda_2 = 2$  doppio e  $\lambda_1 = -1$  semplice. Allora

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda_1 I) &= \text{span} \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \ker(A - \lambda_2 I) &= \text{span} \left\{ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

e dunque  $P = (v_1 \ v_2 \ v_3)$  e le soluzioni del sistema sono del tipo

$$x(t) = P e^{t\tilde{A}} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

in altre parole i vettori  $v_1 e^{-t}, v_2 e^{2t}, v_3 e^{3t}$  formano una base dello spazio vettoriale  $V$  delle soluzioni di  $x' = Ax$

Dal precedente esempio concludiamo che se  $A$  è *diagonalizzabile* e  $v_1, \dots, v_N$  sono una base di autovettori di  $A$  allora  $x(t) \in \text{span}_{i \in 1, \dots, N} \{e^{\lambda_i t} v_i\}$

*Osservazione.* Ciò può essere verificato direttamente, infatti

- $u(t) = e^{\lambda_k t} v_k$  è soluzione di  $x' = Ax$ :  $u'(t) = \lambda_k e^{\lambda_k t} v_k = A(e^{\lambda_k t} v_k) = Au(t)$
- sono  $N$  vettori linearmente indipendenti, infatti la matrice wronskiana in  $t = 0$  è  $P$  invertibile.

Ricordiamo da algebra lineare che se  $T : V \rightarrow V$  è un operatore lineare su  $V$ , allora

$$\ker T^s = \ker T^{s+1}, \quad \text{Im} T^s = \text{Im} T^{s+1}, \quad V = \ker T^s \oplus \text{Im} T^s \quad \text{per un certo } s \in 1 \dots n$$

e intendiamo  $s$  come il più piccolo intero tale che valga tale proprietà ( $n := \dim V$  è un possibile valore). Inoltre su  $\ker T^s$  vi è al più (spazio banale allora  $T$  non ha autovalori) l'autovalore nullo. Infatti se  $\lambda \in \mathbb{K}, v \in \ker T^s \setminus \{0\}$  tali che  $Tv = \lambda v$  allora  $0 = T^s v = \lambda^s v$  e quindi  $\lambda = 0$ . Mostriamo che invece su  $\text{Im} T^s$   $T$  non può presentare 0 come autovalore. Infatti se  $v \in V$  con  $Tv = 0$  e quindi  $T^s v = 0$  allora  $v \in \ker T^s$  e sappiamo che  $\ker T^s \cap \text{Im} T^s = \{0\}$  dunque  $v = 0$ . Riassumendo abbiamo

#### Lemma 4.12: Separazione degli autovalori o dec. di Fitting

Se  $T : V \rightarrow V$  è un operatore lineare su  $V$  allora esiste  $s \in \mathbb{N}$  tale che

$$\ker T^s = \ker T^{s+1}$$

sia  $s$  il minimo intero con tale proprietà. Allora

$$s \leq \dim \ker V, \quad \text{Im} T^s = \text{Im} T^{s+1}, \quad V = \ker T^s \oplus \text{Im} T^s$$

Inoltre su  $\ker T^s$  non vi sono autovalori di  $T$  diversi da 0, mentre su  $\text{Im} T^s$  non vi sono autovalori nulli.

Fissiamo  $T : V \rightarrow V$  e  $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$ . L'applicazione  $T = \lambda I$  allora:

- ha 0 come autovalore se e solo se  $T$  ha  $\lambda$  come autovalore
- un sottospazio di  $V$  è  $T$ -invariante se e solo se è  $T - \lambda I$ -invariante
- Sia  $(z)$  il polinomio caratteristico di  $T$ . Allora  $(z + \lambda)$  è il polinomio caratteristico di  $T - \lambda I$

Sia  $\lambda$  autovalore di  $T$  con molteplicità algebrica  $m(\lambda)$ . Allora 0 è autovalore di  $T - \lambda I$  con molteplicità algebrica  $m(\lambda)$ . Appliciamo ora il lemma ?? a  $T - \lambda I$  ottenendo che

$$V = V_\lambda \oplus W, \quad V_\lambda := \ker (T - \lambda I)^s, \quad W := \text{Im}(T - \lambda I)^s$$

Inoltre

$$s \leq \dim \ker T^s \quad \text{e} \quad m(\lambda) = \dim V_\lambda = \dim \ker T^s$$

e  $T|_{V_\lambda}$  ha solo l'autovalore  $\lambda$  mentre  $T|_W$  non ha  $\lambda$  come autovalore.

#### Definizione 4.6: D

iciamo **autospazio generalizzato** relativo all'autovalore  $\lambda$  il sottospazio

$$G(\lambda, T) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \ker (T - \lambda I)^j = \ker (T - \lambda I)^n$$

con  $n$  la molteplicità algebrica di  $\lambda$ .

Da quanto precede esiste  $s \leq m(\lambda)$  tale che  $G(\lambda, T) = \ker (T - \lambda I)^s$

#### Teorema 4.13

Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  gli autovalori distinti di  $T$ , allora

$$V = \bigoplus_{i=1}^q G(\lambda_i, T)$$

*Osservazione.*  $\sum_{k=1}^q \dim G(\lambda_k) = \sum_{i=1}^q m(\lambda_k) = n$

### 4.3 Caso generale

Se  $A$  avesse un solo autovalore  $\lambda$  con molteplicità  $N$  allora

$$A = \lambda I + (A - \lambda I)$$

dove  $A - \lambda I$  è necessariamente nilpotente, infatti poiché 0 è l'unico autovalore e  $V = \ker T^s \oplus \text{Im} T^s$  allora  $\text{Im} T^s = \{0\}$ .

Poiché  $\alpha I$  commuta con ogni altra matrice per  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$e^{tA} = e^{t\lambda I + t(A - \lambda I)} = e^{t\lambda I} e^{t(A - \lambda I)} \quad (4.12)$$

Sia ora  $x' = Ax$  generica. Siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C}$  gli autovalori distinti di  $A_{\mathbb{C}}$ . Allora

$$\mathbb{C}^N = \bigoplus_{i=1}^q G(\lambda_i, T_{\mathbb{C}}^A)$$

Sia  $\tilde{\mathcal{B}}_k$  una base di  $G(\lambda_k)$  per ogni  $k = 1 \dots q$  e sia  $\tilde{\mathcal{B}}$  l'unione di tutte le  $\tilde{\mathcal{B}}_k$ . Allora  $\tilde{\mathcal{B}}$  è una base di  $\mathbb{C}^N$  rispetto a cui la matrice associata a  $T$  è diagonale a blocchi

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & & \\ & \tilde{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \tilde{A}_q \end{pmatrix} \Rightarrow e^{t\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_1} & & \\ & e^{\tilde{A}_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\tilde{A}_q} \end{pmatrix}$$

dove  $\tilde{A}_k$  è la matrice associata a  $T^A|_{G(\lambda_k)}$  rispetto alla base  $\tilde{\mathcal{B}}_k$ . Per ogni  $k = 1 \dots q$ ,  $\tilde{A}_k$  ha solo  $\lambda_k$  come autovalore, quindi  $\tilde{A}_k = \lambda_k I + (\tilde{A}_k - \lambda_k I)$  e ci si può rifare al caso visto (4.12).

#### Esercizio 4.3

Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ . Fornire una base dello spazio delle soluzioni di  $x' = Ax$ .

#### Teorema 4.14

Una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione  $x' = Ax$  è data da  $N$  opportune funzioni della forma

$$u(t) = e^{\lambda t} p(t)$$

con  $\lambda$  autovalore di  $A$  e  $p(t)$  polinomio a coefficienti in  $\mathbb{C}^N$  di grado al più  $m(\lambda) - 1$ .

*Dimostrazione.*

$$\mathbb{C}^N = \bigoplus_{k=1}^q G(\lambda_k, T^A)$$

allora se  $P = (v_1 \dots v_N)$  è la matrice costituita dagli autovettori delle basi di  $G(\lambda_k)$ ,  $\tilde{A} = P^{-1}AP$  e

$$e^{t\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^{t\tilde{A}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\tilde{A}_q} \end{pmatrix}$$

Una base dello spazio delle soluzioni è data dalle colonne di  $Pe^{t\tilde{A}}$ .

Osserviamo che  $\mathcal{N}_k = \tilde{A}_k - \lambda_k I$  è nilpotente perché  $\tilde{A}_k$  ha solo l'autovalore  $\lambda_k$  e dunque

$$e^{t\tilde{A}_k} = e^{\lambda_k t} \cdot e^{t\mathcal{N}_k} = e^{\lambda_k t} \left( I + t\mathcal{N}_k + \frac{1}{2}t^2\mathcal{N}_k^2 + \dots + \frac{1}{(s-1)!}t^{s-1}\mathcal{N}_k^{s-1} \right)$$

allora  $x(t) = Pe^{t\tilde{A}}C$  è un esponenziale per un polinomio.  $\square$