Appunti di Analisi Funzionale

Github Repository: 0xke/appunti/AnalFun

Primo semestre, 2025 - 2026, prof. Antonio Giovanni Segatti

0.1 Intro

0.1.1 Spazi Normati

Sia X uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$).

Definizione 0.1.1: norma

Si definisce **norma** una funzione

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che

i. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$

Definizione 0.1.2: Spazio Normato

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ tale che X sia uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su X.

Per una notazione più leggera, quando non è ambiguo sottintenderemo la norma, scrivendo "sia X uno spazio normato".

Proposizione 0.1.1 (Metrica indotta da $\|\cdot\|$)**.** *La norma $\|\cdot\|$ induce su X una metrica*

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$$

Nota (zioni)*.* Alcune notazioni utili:

- $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} = x_0 + r\, B_1(0)$
- $\partial B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$

Definizione 0.1.3: Convergenza in norma - Convergenza forte

Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X e sia $x \in X$. Dico che x_n converge a x in norma o fortemente se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}\ :\ \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \overline{n}$$

Definizione 0.1.4: Successione di Cauchy

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \overline{n} \, : \, \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \overline{n}$$

Osservazione. La norma $\|\cdot\|$ è una funzione continua.

Dimostrazione. Preso $x, y \in X$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

e similmente si può con variabili scambiate. Ne consegue che

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

dunque la norma è Lipschitziana con costante 1 □

Definizione 0.1.5: Norma equivalente

Sia X uno spazio normato e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su X. Dico che $\|\cdot\|_1$ è **topologicamente equivalente** a $\|\cdot\|_2$ se

$$\forall x \in X \; \forall r > 0 \; \exists r_1, r_2 > 0 :$$
$$B_{r_1}(x, \|\cdot\|_1) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_2) \text{ e } B_{r_2}(x, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(x, \|\cdot\|_1)$$

Proposizione 0.1.2. *Sia X normato. Allora due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti se e solo se $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che*

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Fissato $x_0 = 0$, preso r tale che

$$B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2) \subseteq B_r(0, \|\cdot\|_1)$$

preso ora $0 \neq x \in X$, sia $y := \frac{r_2}{2\|x\|_2}x$, così che $\|y\|_2 = \frac{r_2}{2}$, dunque $y \in B_{r_2}(0, \|\cdot\|_2)$ e quindi per l'inclusione sopra

$$\|y\|_1 = \frac{r_2}{2}\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq r$$

che è la prima delle disuguaglianze richieste. Similmente si può trovare l'altra scambiando x e y, le due norme, e r_2 con r_1

$\Longleftarrow$ Preso $x_0 \in X$ e $r > 0$, sia $r_1 := r/\beta$. Allora, per ogni $x \in X$

$$\|x - x_0\|_1 \leq \frac{r}{\beta} \implies \|x - x_0\|_2 \leq \beta\|x - x_0\|_1 \leq r$$

che è la prima delle inclusioni richieste. Similmente si può trovare l'altra prendendo $r_2 := r/\alpha$ e scambiando le norme.

□

Osservazione. Se $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ è una norma equivalente alla prima, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_2$

Definizione 0.1.6: Dimensione

Sia X uno spazio vettoriale. Allora

$$\dim X = \begin{cases} 0 & X = \{0\} \\ n & n \in \mathbb{N} \text{ e } X \text{ ha una base di } n \text{ elementi} \\ +\infty & \forall n \in \mathbb{N}, \text{ esistono } n \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{cases}$$

Teorema 0.1.3: Equivalenza delle norme

Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su X sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di X. Sia $x \in X$. Allora sia

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \qquad \text{con } x^i \in \mathbb{K} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Definiamo la norma (facile controllo lasciato come esercizio)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a^i|$$

Sia ora $\|\cdot\|$ un'altra norma su X, dimostriamo che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_1$.

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x^i| \|e_i\| \leq \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq N} \|e_i\| \right)}_{\beta} \|x\|_1$$

Rimane da dimostrare che $\exists \alpha > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|$. Assumiamo per assurdo che $\forall n \in \mathbb{N}$ esista $x_n \in X$ tale che $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|$. Prendiamo ora (ovviamente $x_n \neq 0$ per la diseguaglianza stretta)

$$y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \implies \|y_n\| < \frac{1}{n} \quad ; \quad \|y_n\|_1 = 1$$

Dalla seconda otteniamo che $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n^i| \leq 1$. Per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione n_k tale che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, $y_{n_k}^i \to y^i$.

Allora

$$\|y_{n_k} - y\| \leq \beta \|y_{n_k} - y\|_1 = \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} (y_{n_k}^i - y^i) e_i \right\|_1 \leq \beta^2 \sum_{i=1}^{n} |y_{n_k}^i - y^i| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

e poiché

$$1 = \|y_{n_k}\| \leq \|y_{n_k} - y\| + \|y\| \overset{k\to\infty}{\Longrightarrow} \|y\| \geq 1$$

che è in contraddizione con $\|y_n\| \to 0$ $\square$

Definizione 0.1.7: Spazio di Banach

X spazio normato è detto **spazio di Banach** se le successioni di Cauchy convergono in X (ossia X è completo)

Teorema 0.1.4

Sia X uno spazio normato di dimensione finita. Allora X è di Banach.

Dimostrazione. Sia $N = \dim X$. Dimostro che X è completo secondo la norma $\|\cdot\|_1$.

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Vogliamo mostrare l'esistenza di $x \in X$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0$. Da definizione di successione di Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \overline{n}, \ \|x_n - x_m\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|x_n^i - x_m^i\right| \leq \varepsilon$$

per cui ogni successione delle componenti $\{x_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$. Poiché $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ sono completi, allora $x_n^i \to x^i \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$. Concludiamo osservando che

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left|x_n^i - x^i\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

Esempio 0.1.1. Sia $X = \mathbb{K}^N$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Su tale spazio possiamo avere le norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

X è chiaramente di Banach.

Esempio 0.1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, allora $X = C^0(\Omega, \mathbb{K}^N)$ spazio delle funzioni continue $\Omega \to \mathbb{R}^N$. Facile verificare che X formi uno spazio vettoriale.

Preso ora Ω aperto e limitato.

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ unif. continue}\}$$

poiché f è uniformemente continua se e solo se si può estendere con coninuità al bordo. Si può prendere la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \quad \forall f \in C^0(\overline{\Omega})$$

che si può verificare essere effettivamente una norma. Inoltre con tale norma $C^0(\overline{\Omega})$ è uno spazio di Banach.

Le funzioni in $C^0(\overline{\Omega})$ sono limitate e definite su un compatto, dunque sono anche integrabili, e possiamo dunque definire le norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in C^0(\overline{\Omega}) \quad \forall p \in [1, \infty)$$

ma per nessun p la norma rende $C^0(\overline{\Omega})$ completo. Un esempio è

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \text{lineare} & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

definita in $[0, 1]$. Tale funzione converge in L_p con la stessa norma a una funzione non continua.

Esempio 0.1.3. Legato all'esempio precedente, con la stessa norma gli spazi $L^p(\Omega, \mu)$ sono spazi di Banach.

Presi ora gli spazi $l^p := L^p(\mathbb{N}, \#)$ gli spazi di successioni $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, abbiamo che anch'essi sono spazi di Banach con norma

$$\|x\|_p := \|x\|_{L^p(\mathbb{N},\#)} = \left(\int_{\mathbb{N}} |x(n)|^p \, d\# \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$$

Nota (*zione*). Per le successioni in l^p, indicheremo $x \in l^p$ intendendola come funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, per cui per indicare la componente n-esima di x indicheremo $x(n)$. In tal modo possiamo indicare le successioni di elementi in l^p come successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove ogni $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ è una funzione in l^p

0.1.2 Spazi di Hilbert

Definizione 0.1.8: Prodotto scalare

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora un prodotto scalare è un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tale che

i. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in X$

ii. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

iii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y, z \in X$

Osservazione. Gli stessi assiomi valgono anche sul prodotto scalare su spazio reale. Semplicemente si ha che se $x \in \mathbb{R}$, allora $\overline{x} = x$ quindi si possono droppare tutti i coniugati e viene tutto più leggero.

Nota (antilinearità nella seconda componente).

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \overset{i.}{=} \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} \overset{iii.}{=} \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\beta} \overline{\langle z, x \rangle} \overset{i.}{=} \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$$

Lemma 0.1.5: Diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia X uno spazio vettoriale munito del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in X$$

e inoltre la diseguaglianza è un'uguaglianza se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Sia $z := \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y$. Allora

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle z, z \rangle &= \langle \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\
&= \langle y, y \rangle \langle x, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\
&= \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \cancel{\langle x, y \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle} + \cancel{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle} = \\
&= \langle y, y \rangle \big(\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \big)
\end{aligned}$$

quindi ora o $y = 0$ che farebbe valere la tesi, oppure si può semplificare $\langle y, y \rangle$ e rimane esattamente la tesi.

Infine si verifica l'uguaglianza quando $z = 0$, ossia quando x e y sono collineari.

□

Definizione 0.1.9: Spazio prehilbertiano

Uno spazio vettoriale X con prodotto scalare viene detto spazio **prehilbertiano** (o spazio *con prodotto interno*)

Esempio 0.1.4. $\mathbb{K}^N$ con $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^N x^i \overline{y^i}$ è prehilbertiano.

Esempio 0.1.5. $C^0([0,1],\mathbb{C})$ con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)\,dx$

Definizione 0.1.10: Norma indotta dal prodotto scalare

Su uno spazio prehilbertiano $X, \langle\cdot,\cdot\rangle$ definisco

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in X$$

Allora $\|\cdot\|$ è una norma su X

buona definizione. La radice è ben definita perché $\langle x, x\rangle$ è un reale non negativo. Inoltre si può mostrare che $\|\cdot\|$ è una norma con gli assiomi di prodotto scalare e la diseguaglianza di Schwarz per la diseguaglianza triangolare. □

Proposizione 0.1.6. *Sia X uno spazio prehilbertiano, allora il prodotto scalare è una funzione continua $X \times X \to \mathbb{K}$.*

Dimostrazione. prese $x_n \to x$ e $y_n \to y$,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \le |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \le \\ &\le \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

□

Definizione 0.1.11: ortogonalità

$x, y \in X$ si dicono ortogonali se $\langle x, y\rangle = 0$

Proposizione 0.1.7 (Identità di polarizzazione)**.** *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$$

Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

Dimostrazione. Non sono difficili, basta scrivere per esteso $\|x+y\|^2$ e $\|x-y\|^2$ (e $\|x+iy\|^2$ e $\|x-iy\|^2$ nel caso complesso) e poi fare i contazzi. □

Proposizione 0.1.8. *teorema di Pitagora Se $\langle x, y\rangle = 0$ allora $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$*

Dimostrazione. ovvio □

Proposizione 0.1.9. *Identità del parallelogramma Per ogni $x, y \in X$, allora*

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

Teorema 0.1.10

Jordan - Von Neumann Sia X uno spazio normato, allora la norma è indotta da un prodotto scalare se vale l'*identità del parallelogramma*

Dimostrazione per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Definiamo il prodotto scalare con l'identità di polarizzazione, dunque

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

infatti se effettivamente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare allora quest'uguaglianza varrebbe, dunque ha senso iniziare prendendola come definizione. Verifichiamo ora che è un prodotto scalare.

i. Evidente per definizione

ii. Evidente dalla definizione, perché viene letteralmente $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

iii. Proseguiamo con la dimostrazione, dividendo in $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ e $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle &\overset{(def)}{=} \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\right) = \\
&\overset{prll.}{=} \frac{1}{8}\left(\cancel{\|x-y\|^2} + \|x+y+2z\|^2\right) - \frac{1}{8}\left(\cancel{\|x-y\|^2} + \|x+y-2z\|^2\right) = \\
&= \frac{2}{4}\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2\right) = \\
&\overset{(def)}{=} 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z \right\rangle
\end{aligned}$$

Da quest'ultima, scelto $y = 0$ e notando dalla definizione che $\langle 0, z \rangle = 0$, abbiamo che

$$\langle x, z \rangle = 2\left\langle \frac{x}{2}, z \right\rangle \implies \langle x+y, z \rangle = 2\left\langle \frac{x+y}{2}, z \right\rangle$$

che conclude la prima parte della dimostrazione della linearità.

Procediamo definendo

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,\ \forall x, y \in X\}$$

allora chiaramente $\{0, 1, -1\} \subseteq \Lambda$. Notiamo che se $\alpha, \beta \in \Lambda$ allora $\alpha + \beta \in \Lambda$:

$$\langle (\alpha+\beta)x, y \rangle = \langle \alpha x + \beta x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle + \langle \beta x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y \rangle = (\alpha+\beta)\langle x, y \rangle$$

Dunque necessariamente $\mathbb{Z} \subseteq \Lambda$. Prendiamo ora $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ con $\beta \neq 0$, allora

$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \left\langle \alpha \frac{\beta}{\beta} x, y \right\rangle = \beta \left\langle \frac{\alpha}{\beta} x, y \right\rangle$$

da cui dividendo ambo i termini per β otteniamo che anche $\mathbb{Q} \subseteq \Lambda$. Concludiamo che, poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è continuo (per come è definito, chiaramente non possiamo usare la prop, essendo che non abbiamo ancora dimostrato che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare), allora $\mathbb{R} \subseteq \Lambda \subseteq$. $\square$

Dimostrazione per $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Similmente a prima, definiamo

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)+i\frac{1}{4}\big(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\big)$$

Dunque $Re\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big) =: (x,y)$. Allora

$$\langle x,y\rangle = (x,y)+i(x,iy)$$

allora per la parte reale del teorema (x,y) verifica $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ e $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$. Dunque

$$\langle x+y,z\rangle = (x,z)+(y,z)+i(x,iz)i(y,iz)=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$$

Rimane da verificare l'omogeneità per $\lambda\in\mathbb{C}$ e che $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$. Iniziamo dalla seconda:

$$\overline{\langle y,x\rangle}=\overline{(y,x)+i(y,ix)}=(y,x)-i(y,ix)$$

inolre

$$\begin{aligned}(y,ix)&=\frac{1}{4}\big(\|y+ix\|^2-\|y-ix\|^2\big)=\frac{1}{4}\big(\|i(-iy+x)\|^2+\|i(-iy-x)\|^2\big)=\\&=\frac{1}{4}\big(\|x-iy\|^2+\|x+iy\|^2\big)=-(x,iy)\end{aligned}$$

e quindi la precedente è

$$\overline{\langle y,x\rangle}=(x,y)+i(x,iy)=\langle x,y\rangle$$

Sia ora $\alpha+i\beta=\lambda\in\mathbb{C}$, con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Allora

$$\langle(\alpha+i\beta)x,y\rangle=\langle\alpha x+i\beta x,y\rangle=\langle\alpha x,y\rangle+i\langle\beta x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle ix,y\rangle$$

ma abbiamo che, riprendendo la definizione

$$\begin{aligned}\langle ix,y\rangle&=\frac{1}{4}\big(\|ix+y\|^2-\|ix-y\|^2\big)+i\frac{1}{4}\big(\|ix+iy\|^2-\|ix-iy\|^2\big)\\&=-\frac{1}{4}\big(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\big)+i(x,y)=i(x,y)-(x,iy)=\\&=i\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

e quindi concludiamo

$$\langle(\alpha+i\beta)x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle ix,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+i\beta\langle x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$$

□

Osservazione. presa su $C^0([0,1])$ la norma $\|f\|_2^2=\int_0^1|f|^2\,dt$, allora $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ questo è uno spazio prehilbertiano.

Però con la norma $\|f\|_\infty$ non è uno spazio prehilbertiano. Infatti non vale l'identità del parallelogramma: prese $f(t)=1-t$ e $g(t)=t$ abbiamo

$$\|f-g\|_\infty^2+\|f+g\|_\infty^2=1+1\neq 2(1+1)=2(\|f\|_\infty^2+\|g\|_\infty^2)$$

Corollario 0.1.10.1. *Sia X uno spazio normato e sia $M\subseteq X$ un sottospazio di dimensione finita. Allora M è chiuso.*

Dimostrazione. $(M,\|\cdot\|)$ è esso stesso uno spazio normato di dimensione finita. M è dunque completo quindi chiuso. □

Esempio 0.1.6. La precedente non vale se $\dim X=+\infty$. Presi infatti $M=C^0(\Omega)$ e $X=L^2(\Omega)$, abbiamo che $\overline{M}^{L^2}=L^2$

0.1.3 Operatori lineari e continui

Siano X e Y spazi normati. Sia $T : X \to Y$. Allora T è lineare se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in X$. Per ricordare la linearità, invece di scrivere $T(x)$ scriveremo Tx.

Nota. zione Nelle bolle, indicando a pedice lo spazio invece che il raggio, si sottintende il raggio 1 e si esplicita la norma da utilizzare:

$$B_X(0) := \{x \in X : \|x\|_X < 1\}$$

Teorema 0.1.11

Siano X, Y spazi normati. Sia $T : X \to Y$. Allora le seguenti proposizioni sono tutte equivalenti:

(i) T è continuo

(ii) T è continuo in 0

(iii) Ogni limitato di X ha immagine limitata in Y

(iv) $\exists \alpha > 0 : \overline{T(B_X)} \subseteq \alpha B_Y(0)$

(v) $\displaystyle\sup_{X \smallsetminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_y}{\|x\|_X} < +\infty$

(vi) $\displaystyle\sup_{x \in B_X(0)} \|Tx\|_Y < +\infty$

(vii) $\displaystyle\sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y < +\infty$

Osservazione. Se X e Y hanno dimensione finita, T è sempre continuo.

Esempio 0.1.7. Preso

$$\begin{aligned} T : C^0([0,1])_{\|\cdot\|_1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto T(f) = f(0) \end{aligned}$$

è chiaramente lineare. Tuttavia la controimmagine di $\{0\}$ tramite T contiene ad esempio la successione $f_n(x) = \max(nx, 1)$ che ha come limite in $C^0_{\|\cdot\|_1}$ la funzione costante 1, per cui $T^{-1}\{0\}$ non è chiuso.

Definizione 0.1.12: Operatore limitato

Un operatore che soddisfa la condizione (iii) viene detto **limitato**

Dimostrazione.

$(i) \implies (ii)$ ovvio

$(ii) \implies (i)$ ovvio, poiché $T(x - x_0) = T(x) - T(x_0)$

$(ii) \implies (iv)$ Abbiamo che per ogni intorno U_Y di 0_Y esiste un intorno U_X di 0_X tale che $T(U_X) \subseteq U_Y$. Allora scelto $U_Y = \overline{B_Y(0)}$ abbiamo

$$\exists \delta > 0 : T(\delta \overline{B_X(0)}) = \delta T(\overline{B_X(0)}) \subseteq B_Y(0)$$

per cui basta prendere $\alpha = \frac{1}{\delta}$

$(iv) \implies (ii)$ Preso $\varepsilon > 0$ bisogna trovare $\delta > 0$ tale che

$$T(\delta\overline{B_x(0)}) \subseteq \varepsilon B_Y(0)$$

e similmente a prima per linearità basta prendere $\delta = \varepsilon/\alpha$

$(iv) \implies (iii)$ Sia $C \subseteq R\overline{B_X(0)}$ un limitato. Allora

$$T(C) \subseteq T(R\overline{B_X(0)}) = RT(\overline{B_x(0)}) \subseteq R\alpha\overline{B_Y(0)}$$

$(iii) \implies (iv)$ $\overline{B_X}(0)$ è limitato in X, dunque $T(\overline{B_x}(0))$ è limitato in Y, e dunque è contenuto in una palla $\alpha B_Y(0)$ per un $\alpha > 0$

$(iv) \iff (vi)$ $\|x\|_X \leq 1$ se e solo se $x \in \overline{B_X(0)}$, il resto vien da sè

$(v) \iff (vi) \iff (vii)$ tutte ovvie, come anche è ovvio che il valore finito nel caso sia lo stesso, e viene denotato $\|T\|$ e in pratica tutte e tre dicono che

$$\exists \|T\| > 0 : \|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$$

per ogni $x \in X$

□

0.2 Hahn - Banach

Teorema 0.2.1: Hahn - Banach (spazi normati)

Sia X uno spazio normato, X_0 un sottospazio. Sia $g : X_0 \to X$ lineare e continua, cioè $g \in X_0'$. Allora $\exists f : X \to \mathbb{K}$ lineare e continua, ossia $f \in X'$ tale che

1) f prolunga g

2) $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X_0'}$

Dimostrazione. sia $p(x) = \|g\|_{X_0'}\|x\|$. Allora $p : X \to \mathbb{R}$ ed è sublineare e omogenea, dunque è una seminorma. □

Esempio 0.2.1. Sia $X = \mathbb{R}^2$, allora un generico operatore lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è del tipo $x \mapsto a \cdot x$, con $a \in \mathbb{R}^2$.

Allora $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \frac{|fx|}{\|x\|_p}$ e abbiamo che $|fx| \leq \|a\|_q\|x\|_p$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Dunque concludiamo che $\|f\| \leq \|a\|_q$. In realtà questa è un'uguaglianza. Basta infatti prendere

$$\overline{x} = \left(|a_1|^{q-2}a_1, |a_2|^{q-2}a_2\right) \implies \|x\|_p^p = |a_1|^{(q-1)p} + |a_2|^{(q-1)p} = |a_1|^q + |a_2|^q = \|a\|_q^q$$

dove si è usato che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies (q-1)p = q$. Ma inoltre abbiamo che

$$|f\overline{x}| = |a \cdot \overline{x}| = \|a\|_q^q$$

concludiamo che

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \geq \frac{|fx|}{\|\overline{x}\|_p} = \|a\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|a\|_q$$

Esercizio 0.2.1

Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio di X spazio normato. Mostrare che $\overline{Y}$ è un sottospazio di X.

Lemma 0.2.2

Sia X uno spazio normato e $Y \subseteq X$ un sottospazio tale che $\overline{Y} \subset X$. Allora $\exists f : X \to \mathbb{K}$ con f lineare continua, ossia $f \in X'$ tale che:

1. $f \neq 0$
2. $\langle f, x\rangle = 0$ per ogni $x \in Y$

Osservazione. Sia X uno spazio normato, $Y \subseteq X$ un sottospazio si supponga che se un funzionale $f \in X'$ tale che $\langle f, x\rangle = 0$ per ogni $x \in Y$ allora necessariamente $f = 0$. Segue che $\overline{Y} = X$

Dimostrazione. $\exists x_0 \in X - \overline{Y}$, allora $X_0 = Y \oplus \mathbb{K}x_0$. A questo punto prendiamo il funzionale $g : X_0 \to \mathbb{K}$ definito da $g(y + \alpha x_0) = \alpha$. Mostriamo ora che $g \in X_0'$ e che è vero che $g|_Y = 0$. La seconda è banalmente vera perché se $y \in Y$ allora $g(y) = g(y + 0 * x_0) = 0$. Mostriamo che g è lineare e continuo. Supponiamo $x_1 = y_1 + \alpha_1 x_0$ e $x_2 = y_2 + \alpha_2 x_0$. Allora

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + \mu x_2) &= g(\lambda y_1 + \lambda\alpha_1 x_0 + \mu y_2 + \mu\alpha_2 x_0) = \\ &= g((\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)x_0) = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 = \\ &= \lambda g(x_1) + \mu g(x_2) \end{aligned}$$

Per la continuità, prendiamo $\alpha \neq 0$ e abbiamo che

$$\|x\| = \|y + \alpha x_0\| = \left\|(-\alpha)\left(\frac{y}{-\alpha} - x_0\right)\right\| = |\alpha| \left\|\frac{y}{-\alpha} - x_0\right\|$$

necessariamente $\frac{y}{-\alpha} \in Y$ e dunque possiamo proseguire la precedente equazione con

$$\|x\| = |\alpha| \left\|\frac{y}{-\alpha} - x_0\right\| \geq |\alpha|\, d(x_0, Y) = |g(x)|\, d(x_0, Y)$$

per cui concludiamo che g è continua con norma $\|g\| \leq 1/d(x_0, Y)$. Questa disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza, infatti poiché $d(x_0, Y) = \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\|$ abbiamo che

$$\exists y_n \in Y : \|y_n - x_0\| < \frac{n+1}{n} d(x_0, Y)$$

e ora abbiamo che

$$\frac{n}{n+1} \frac{\|y_n - x_0\|}{d(x_0, Y)} < 1 = |g(x_0 - y_n)| \leq \|g\|\|x_0 - y_n\|$$

da cui per $n \to \infty$ otteniamo $\|g\|_{X_0'} \geq 1/d(x_0, Y)$.

Ora estendo g a tutto X con Hahn-Banach ottenendo $f \in X'$ tale che $f|_{X_0} = g$ e dunque $f|_Y = 0$. Inoltre l'estensione poiché Hahn-Banach conserva la norma, abbiamo che

$$\|f\|_{X'} = \frac{1}{d(x_0, Y)}$$

□

Corollario 0.2.2.1. *Sia X uno spazio normato reale. Allora per ogni $x_0 \in X$ esiste una $f \in X'$ tale che $\langle f, x_0\rangle = \|x_0\|^2$ e $\|f\|_{X'} = \|x_0\|$*

Dimostrazione. Sia $X_0 = \mathbb{R}x_0$. Sia $x = tx_0 \in X_0$, allora definiamo $g(x) = g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Verifichiamo che la norma sia corretta: $|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2$ dunque $\|g\|_{X_0'} = \|x_0\|$.

Per Hahn-Banach possiamo estendere g a tutto X' ottenendo $f : X \to \mathbb{R}$ tale che $\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle$ per ogni $x \in X_0$ e $\|f\|_{X'} = \|g\|_{X_0'} = \|x_0\|$. In particolare anche $\langle f, x_0\rangle = \langle g, x_0\rangle = \|x_0\|^2$ □

Il corollario precedente motiva la seguente definizione:

Definizione 0.2.1: Mappa di dualità

Chiamiamo la **mappa di dualità** la seguente funzione

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : X &\longrightarrow 2^{X'}\\ x &\longmapsto \mathcal{F}(x) = \{f \in X' : \langle f, x\rangle = \|x\|^2 \ ; \ \|f\|_{X'} = \|x\|\}\end{aligned}$$

che associa a ogni elemento di X l'insieme degli elementi "a lui duali".

Esercizio 0.2.2

Consideriamo

$$\mathcal{F}'(x) = \{f \in X' : \langle f, x\rangle = \|x\|^2 \ ; \ \|f\|_{X'} \leq \|x\|\}'$$

Mostrare che $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$

Fissato $x \in X$, è evidente che $\mathcal{F}(x) \subseteq \mathcal{F}'(x)$. Supponiamo ora che $f \in \mathcal{F}'(x)$, ossia $\|f\|_{X'} \leq \|x\|$. Da $|\langle f, x\rangle| = \|x\|\|x\|$ concludiamo che $\|f\|_{X'} = \|x\|$ e dunque $f \in \mathcal{F}(x)$

Esercizio 0.2.3

Consideriamo

$$\mathcal{I}(x) = \left\{f \in X' : \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, y - x\rangle \ \forall y \in X\right\}$$

Mostrare che $\mathcal{I} = \mathcal{F}$

Fissiamo $x \in X$

$\subseteq$ Sia $f \in \mathcal{I}(x)$. Iniziamo mostrando che $\langle f, x\rangle = \|x\|^2$. Scegliamo $y = \alpha x$ per $\alpha \in \mathbb{R}$. Segue che

$$\frac{1}{2}\alpha^2\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \langle f, x\rangle(\alpha - 1)$$

con questa uguaglianza, dividendo i casi per $\alpha > 0$ e $\alpha < 1$, prendiamo il limite di $\alpha \to 1^+$ e $\alpha \to 1^-$, ottenendo le due disuguaglianza $\langle f, x\rangle \leq \|x\|^2$ e $\langle f, x\rangle \geq \|x\|^2$.

Rimane da controllare che $\|f\|_{X'} \leq \|x\|$. Scegliamo $y \in X$ tale che $\|y\| = \|x\|$. Otteniamo che

$$\langle f, y\rangle \leq \langle f, x\rangle = \|x\|^2 \implies |\langle f, y\rangle| \leq \|y\|\|x\| \implies \|f\|_{X'} \leq \|x\|$$

$\supseteq$ Sia $f \in \mathcal{F}(x)$ e $y \in X$. Allora

$$\begin{aligned}\langle f, y-x\rangle = \langle f, y\rangle - \langle f, x\rangle \leq \|f\|\|y\| - \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|x\|^2 \\ \leq \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2\end{aligned}$$

da cui $f \in \mathcal{I}(x)$

Osservazione. Il precedente esercizio suggerisce che $f \in \mathcal{F}(x)$ svolge in un certo senso il ruolo della derivata di $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ valutata in x. Vedremo più avanti il significato di questa analogia.

Esercizio 0.2.4

Mostrare che

$$c_0 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x(n) = 0\}$$
$$c = \{x \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} x(n) \text{ esiste } \}$$

sono sottospazi chiusi di ℓ^∞.

Le dimostrazioni contose esplicite sono lasciate davvero come esercizio, riporto dimostrazioni più sintetiche.
Utilizzando la f definita come il limite come poco più avanti (dopo il teorema), abbiamo che c_0 è chiuso in quanto $c_0 = f^{-1}(\{0\})$ controimmagine continua di chiuso.

Teorema 0.2.3

Sia $p \in [1, +\infty)$, sia $f \in (\ell^p)'$. Sia $q \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$$\exists! y \in \ell^q : \langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$$

e inoltre $\|f\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_{\ell^q}$

Notare che il precedente teorema non vale per $p = \infty$. Costruiamo infatti un funzionale lineare e continuo su ℓ^∞ che non si rappresenta con $y \in \ell^1$. Consideriamo infatti $g : c \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $\langle g, x\rangle = \lim_{n\to\infty} x(n)$. Allora g è lineare ed è continuo perché $|\langle g, x\rangle| = |\lim_{n\to\infty} x(n)| \leq \|x\|_\infty$ per cui $g \in c'$ e in particolare $\|g\|_{c'} = 1$ ad esempio prendendo la successione $x \in c$ definita da $x(n) = 1$.

Estendo ora g a tutto ℓ^∞ con Hahn-Banach, ottenendo $f : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ lineare continuo con $\|f\|_{(\ell^\infty)'} = 1$.

Supponiamo ora per assurdo che esista $y \in \ell^1$ tale che

$$\langle f, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n) \quad \forall x \in \ell^\infty$$

e consideriamo ora gli x_k definiti come[1] $x_k = (n == k)$. Allora abbiamo $\langle f, x_k\rangle = \lim_{n\to\infty} x_k(n) = 0$ ma per ogni k allora avremmo che
$0 = \langle f, x_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x_k(n) = y(k)$ per cui $y = 0$ che è impossibile perché sappiamo che f ha norma 1.

[1]concedetemi questa notazione da informatico

Esercizio 0.2.5

Mostrare che
$$c_{00} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ definitivamente nulle}\}$$
è denso in ℓ^p, per ogni $p \in [1, \infty)$

Esercizio 0.2.6

Mostrare che $T : \ell^2 \to \ell^2$ dato da
$$(Tx)(n) = \frac{x(n)}{n}$$
è ben definito, lineare, continuo e $T(\ell^2)$ non è chiuso in ℓ^2 ed è denso in ℓ^2

Definizione 0.2.2: Immersione Compatta

Siano X, Y spazi di Banach. Dico che Y è immerso con compattezza in X (indicato $Y \subset\subset X$) se

1. $\exists C > 0 : \|x\|_X \leq C\|x\|Y$ per ogni $x \in Y$ (dunque l'immersione $Y \hookrightarrow X$ è continua.
2. Ogni successione limitata in Y ha un'estratta convergente in X

Esercizio 0.2.7

Sia $X = \ell^2$ e consideriamo
$$Y = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$
Mostrare che

1. Y è sottospazio vettoriale di ℓ^2
2. Posto $\|x\|_Y^2 := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2$, questa è una norma indotta da un prodotto scalare
3. L'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è continua
4. Y è completo
5. $Y \subset\subset X$

---

1. preso $x \in Y$, $|x(n)|^2 \leq n^2|x(n)|^2$ e poiché $\{nx(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ allora anche $x \in \ell^2$. Facile verificare che Y è sottospazio
2. Tutte facili verifiche, con prodotto scalare $\langle x, y\rangle_Y = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x(n)y(n)$
3. Come visto nel punto 1., $\|x\|_{\ell^2} \leq \|\{nx(n)\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2} = \|x\|_Y$
4. Sia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $\|\cdot\|_Y$. Vogliamo mostrare che $x_k \to \overline{x}$ in Y. Poiché $\|x_n - x_m\|_{\ell^2} \leq \|x_n - x_m\|_Y$ allora esiste $\overline{x} \in \ell^2$ tale che $x_k \to \overline{x}$ in ℓ^2 per completezza di ℓ^2. Poste $y_k(n) = nx_k(n)$, evidentemente y_k è di Cauchy in ℓ^2, dunque esiste $\overline{y} \in \ell^2$ tale che $y_k \to \overline{y}$. Vogliamo ora mostrare che

$\overline{y}(n) = n\overline{x}(n)$. Questo si può dire perché la convergenza in ℓ^2 implica la convergenza puntuale, e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $y_k(n) = nx_k(n)$

5. Sia $\{x_k\}$ limitata in Y. Allora $\exists M > 0 : \|x_k\|_Y^2 \leq M$. Vogliamo trovare una sottosuccessione $\{x_{k_j}\} \subseteq \{x_k\}$ tale che $x_{k_j} \xrightarrow{\ell^2} \overline{x} \in \ell^2$. Ora usando un risultato che ancora non abbiamo dimostrato, la **compattezza debole**, diciamo che $\exists \overline{x} \in \ell^2$ e una sottosuccessione tale che

$$\langle y, x_{k_j} \rangle \to \langle y, \overline{x} \rangle \quad \forall y \in \ell^2$$

(reindicizziamo per comodità i k a indicare k_j, per alleggerire la notazione) Fisso $n \in \mathbb{N}$ e prendo $y(i) = (i == n)$. Allora otteniamo dalla precedente che $\langle y, x_k \rangle = x_k(n) \to \overline{x}(n) = \langle y, \overline{x} \rangle$. Vogliamo ora mostrare che la convergenza è in ℓ^2

$$\begin{aligned} \|x_k - \overline{x}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_k(n) - \overline{x}(n)|^2 = \sum_{n=1}^{m} |x_k(n) - \overline{x}(n)|^2 + \\ + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^2 |x_k(n) - \overline{x}(n)|^2 \end{aligned}$$

osservo ora che $n^2|x_k(n) - \overline{x}(n)|^2 \leq n^2(|x_k(n)| + |\overline{x}(n)|)^2 \leq 2n^2|x_k(n)|^2 + 2n^2|\overline{x}(n)|^2$

Prima di proseguire vogliamo dire che $\overline{x} \in Y$. Abbiamo che

$$nx_k(n) \to n\overline{x}(n) \implies n^2|x_k(n)|^2 \to n^2|\overline{x}(n)|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

per il lemma di Fatou, abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|\overline{x}(n)|^2 \leq \liminf_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_k(n)|^2 \leq M$$

possiamo ora proseguire la disuguaglianza precedente

$$\begin{aligned} \|x_k - \overline{x}\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=1}^{m} |x_k(n) - \overline{x}(n)|^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^2 |x_k(n) - \overline{x}(n)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} |x_k(n) - \overline{x}(n)|^2 + \frac{4}{(m+1)^2} M \end{aligned}$$

Infine fisso $\varepsilon > 0$ e prendo $m \in \mathbb{N} : \frac{4M}{(m+1)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\overline{k} = \overline{k}(\varepsilon, m)$ tale che anche la somma troncata del primo addendo sia minore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Concludiamo che

$$\|x_k - \overline{x}\|_{\ell^2}^2 < \varepsilon$$

e dunque $x_k \to \overline{x}$ in ℓ^2

Nell'esercizio precedente abbiamo che similmente si comporterebbe anche

$$Y_\alpha = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} |x(n)|^2 < +\infty \right\} \text{ con } \alpha \in (0, 1)$$

Riprendendo l'operatore T definito nell'esercizio 0.2, abbiamo che $T(\ell^2) \neq \ell^2$.

Poiché T è iniettivo, definiamo $A = T^{-1}$ come $(Ax)(n) = nx(n)$. Ovviamente il dominio di A non è tutto ℓ^2, ma

$$A : D(A) \longrightarrow \ell^2$$
$$D(A) = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

ossia Y dell'esercizio 0.2. Ma allora A è lineare ma non limitato, infatti

$$\|Ax\|_{\ell^2}^2 = \|x\|_Y^2 \not\leq C\|x\|_{\ell^2}$$

Corollario 0.2.3.1. *Sia X uno spazio normato. Allora*

$$\|x\| = \sup_{f \in X' ; \|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle|$$

che è in realtà un massimo

Dimostrazione. Prendo $x \neq 0$, $|\langle f, x\rangle| \leq \|x\|$, $\forall f \in X'$ e quindi anche

$$\sup_{f : \|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|$$

preso ora $f \in \mathcal{F}(x)$, abbiamo che $\langle f, x\rangle = \|x\|^2$ e $\|f\|_{X'} = \|x\|$. Prendiamo ora $f_1 = \frac{f}{\|x\|}$ e dunque $\|f_1\|_{X'} = 1$ e $\langle f_1, x\rangle = \|x\|$ ne consegue che il sup è un max ed è raggiunto da f_1 □

Definizione 0.2.3: Stretta convessità

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora $(X, \|\cdot\|)$ è **strettamente convesso** se, dati $x, y \in X$

$$x \neq y \text{ e } \|x\| = \|y\| = 1 \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

Esempio 0.2.2. $\mathbb{R}^2$ è strettamente convesso in norma p per $p \in (1, \infty)$

Esempio 0.2.3 (Spoiler)**.** Gli spazi di Hilbert sono strettamente convessi

Proposizione 0.2.4. *Unicità in Hahn-Banach Sia X uno spazio normato tale che X' sia strettamente convesso. Allora dato $X_0 \subseteq X$ sottospazio e $g \in X_0'$,*

$$\exists! f \in X' : f \text{ estende } g \text{ ; } \|f\|_{X'} = \|g\|_{X_0'}$$

Dimostrazione. Siano f_1 e f_2 due estensioni di g. Se $g \equiv 0$ allora necessariamente $f_1 = f_2 \equiv 0$.

Assumo che $\|g\|_{X_0'} = \|f_1\|_{X'} = \|f_2\|_{X'} = 1$. Allora

$$\frac{f_1 + f_2}{2}\Big|_{X_0'} = g \implies \left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\| \geq \|g\|_{X_0'} = 1$$

allora dalla contropositiva della stretta convessità, concludiamo che $f_1 = f_2$ □

Definizione 0.2.4: Spazio Separabile

X spazio metrico è detto **separabile** se esiste $D \mathbb{C} X$ tale che

1. D è numerabile
2. D è denso in X

Proposizione 0.2.5. *Se X è separabile e $M_0 \subseteq X$ allora M_0 è separabile.*

Dimostrazione. $M_0 \cap D$ è numerabile e denso in M_0 □

Teorema 0.2.6

Sia X uno spazio normato tale che X' è separabile. Allora X è separabile.

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ numerabile e chiuso in X'. Allora

$$\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in X : |\langle f_n, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{X'}$$

per la definizione di norma duale.

Assumo momentaneamente che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora

$$D = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

che è numerabile in quanto unione numerabile di numerabili (insiemi $\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_k x_k,\ \alpha_k \in \mathbb{Q}\} \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$ per n fissato).

Mostriamo ora la densità. Consideriamo l'insieme

$$D = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

e chiaramente $\overline{D} = \overline{Y}$ dunque dobbiamo solo dimostrare $\overline{Y} = X$. Mostriamo la condizione equivalente che se $f \in X'$ e $f \equiv 0$ su Y, allora $f \equiv 0$ su tutto X. A tal scopo fissiamo $\varepsilon > 0$ e troviamo $f_n \in X'$ tale che (con $\|x_n\| = 1$)

$$\|f_n - f\|_{X'} \leq \varepsilon \implies \frac{1}{2}\|f_n\|_{X'} \leq |\langle f_n, x\rangle| = |\langle f_n - f, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle| \leq \|f_n - f\|_{X'} \leq \varepsilon$$

ma allora

$$\|f\|_{X'} \leq \|f_n - f\|_{X'} + \|f_n\|_{X'} \leq 3\varepsilon$$

e per arbitrarietà di ε concludiamo che $f \equiv 0$ su X

Il caso complesso è analogo, ma prendendo $\alpha_k \in \mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$. □

Esempio 0.2.4. c_{00} è denso in ℓ^p per $p \in [1, +\infty)$. Allora preso

$$D = \{x \in c_{00} : x(n) \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

si ha che $\overline{D} = \overline{c_{00}} = \ell^p$

Esercizio 0.2.8

Mostrare che c_0 e c sono separabili con la $\|\cdot\|_\infty$

Proposizione 0.2.7. *ℓ^∞ **non** è separabile*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che se D è un sottoinsieme numerabile di ℓ^∞ allora non può essere denso. Sia $D = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ora consideriamo $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dato da

$$x(n) = \begin{cases} 1 + y_n(n) & |y_n(n)| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dunque chiaramente $\|x\|_\infty \leq 2$ e in particolare $x \in \ell^\infty$ ma allora

$$\|x - y_k\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n) - y_k(n)| \geq |x(k) - y_k(k)| \geq 1$$

dove l'ultima disuguaglianza è perché se $|y_k(k)| \leq 1 \implies |x(k) - y_k(k)| = 1$ e se $|y_k(k)| > 1$ allora $|x(k) - y_k(k)| = |y_k(k)|$.

Concludiamo che D non può essere denso in ℓ^∞ e dunque ℓ^∞ non è separabile. □

0.3 Forme geometriche di Hahn-Banach

Ora supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Sia X uno spazio normato e $f \in X'$. Allora un iperpiano è definito come $\ker f$. Se vogliamo generalizzare a iperpiani non sottospazi vettoriali, possiamo prendere, preso un $\alpha \in \mathbb{R}$, lo spazio

$$H = \{x \in X : \langle f, x\rangle = \alpha\} =: [f = \alpha]$$

Allora due insiemi $A, B \in X$ sono separati in senso largo da $[f = \alpha]$ se

$$f(x) \leq \alpha \forall x \in A$$
$$f(x) \geq \alpha \forall x \in B$$

e dico che l'iperpiano $[f = \alpha]$ separa in senso stretto A e B se esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \forall x \in A$$
$$f(x) \geq \alpha + \varepsilon \forall x \in B$$

Teorema 0.3.1: Hahn-Banach, prima forma geometrica

Sia X spazio normato, $A, B \subseteq X$ convessi, non vuoti e disgiunti. Allora se A è aperto esiste $f \in X'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $[f = \alpha]$ separa A e B in senso largo

Osservazione. Non è migliorabile (avere senso stretto) neanche nel caso a dimensione finita. Ad esempio su $\mathbb{R}$ posso avere $A = \{x > 0\}$ e $B = \{x \leq 0\}$ che sono separati da $\{0\}$ ma solo in senso largo.

Definizione 0.3.1: Funzionale di Minkowski

Sia X uno spazio normato. C aperto convesso che contiene lo 0. Sia

$$p(x) = \inf\left\{r > 0 : \frac{x}{r} \in C\right\} \text{ il funzionale di Minkowski}$$

viene anche detto *gauge di* C.

Buona definizione. $p : X \to \mathbb{R}$ è ben definito. Poiché C è aperto e $0 \in C$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0) \subseteq C$, ossia $\|x\| \leq \varepsilon \implies x \in C$. Fissato ora $x \in X$, allora preso $r = \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ abbiamo che $\frac{\|x\|}{r} = \varepsilon$ e dunque $\frac{x}{r} \in C$.

Dunque l'insieme di cui si fa l'inf è non vuoto. □

Lemma 0.3.2: Proprietà del funzionale di Minkowski

Il funzionale di Minkowski p ha diverse proprietà

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\lambda > 0$
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$
3. $\exists m > 0 : 0 \leq p(x) \leq m\|x\|$ per ogni $x \in X$
4. $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$

Dimostrazione. 1. ovvio

3. $$\exists R > 0 : \overline{B}_R(0) \subseteq C, \text{ cioè } \forall x \in X \setminus \{0\}, \quad R\frac{x}{\|x\|} \in C$$

dunque $p(x) \leq \|x\|/R$ per ogni $x \in X$

4. Sia $x \in C$, trovo $\varepsilon > 0$ tale che $(1+\varepsilon)x \in C$ poiché C è aperto. Allora $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Viceversa se $p(x) < 1$, allora esiste $\alpha \in (0,1)$ tale che $\frac{x}{\alpha} \in C$. Ma allora per la convessità di C e poiché $0 \in C$, anche $\alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)x \in C$ e dunque $x \in C$

2. Prendo $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$. Allora

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

(infatti $p(x) + \varepsilon > p(x)$). Ora poiché C è convesso, $\forall t \in (0,1)$

$$t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$$

preso ora $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, quindi $1 - t = \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ abbiamo che

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

Ne consegue (da 4. o dalla definizione) che

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

e per arbitrarietà di ε segue la sottolinearità $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

□

Abbiamo detto dunque che p è una seminorma. Cosa dovremmo aggiungere per renderla una norma? Serve che sia omogenea anche per $\lambda \leq 0$, dunque vogliamo $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ e inoltre vorremmo che $p(x) = 0 \iff x = 0$.

Per la prima abbiamo che se $\lambda < 0$ allora $p(\lambda x) = p(-\lambda(-x)) = |\lambda| p(-x)$. Vogliamo dunque che $p(-x) = p(x)$. Abbiamo però che

$$p(-x) = \inf\{r > 0 : -\frac{x}{r} \in C\} = \inf\{r > 0 : -x \in rC\}$$

Una proprietà dunque che renderebbe l'uguaglianza vera (p "pari" diciamo) sarebbe avere che se $x \in C$, allora $-x \in C$. Per poter avere inoltre che $p(x) = 0 \iff x = 0$ dobbiamo anche richiedere che C sia limitato. In tali ipotesi in realtà p non è solo una norma ma è equivalente a $\|\cdot\|_X$.

Proposizione 0.3.3. *Se C aperto convesso non vuoto e limitato è tale che $x \in C \iff -x \in C$, allora $\exists m_2 > 0$ tale che $\|x\| \leq m_2 p(x)$ per ogni $x \in X$*

Dimostrazione. Sappiamo che $\exists R > 0 : C \subseteq B_R(0)$. Prendo ora $x \in X \setminus \{0\}$. Sia ora $0 < \overline{r} = \|x\|/R$. Allora per $r < \overline{r}$,

$$r < \frac{\|x\|}{R} \implies \frac{\|x\|}{r} > R \implies \frac{x}{r} \notin$$

Sappiamo che $p(x) \geq \|x\|/R$ per ogni $x \in X$. Infatti se per assurdo $p(x) < \|x\|/R$ allora esisterebbe $\tilde{r}$ tale che $\frac{x}{\tilde{r}} \in C$ e $\tilde{r} < \|x\|/R \implies \frac{x}{\tilde{r}} \notin C$.

Abbiamo dunque che $R =: m_2$ □

In particolare, se $C = B_1(0)$, allora $p(x) = \|x\|$. Infatti ovviamente $p(x) \geq \|x\|$ perché $B_1(0) \supseteq C$.

Sia ora $X = \ell^2$. Sia $C = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : |x(n)| \leq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}\}$. Allora

1. $C \neq \varnothing$, C è chiuso in ℓ^2 e C è convesso.

   Infatti $0 \in C$. Siano $x_1 \in C$ e $x_2 \in C$, allora

   $$|tx_1(n) + (1-t)x_2(n)| \leq t|x_1(n)| + (1-t)|x_2(n)| \leq \frac{t}{n} + (1-t)/n = \frac{1}{n}$$

   dunque C è convesso.

   Infine C è chiuso perché ogni $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso.

2. $\mathring{C} = \varnothing$

   Mi chiedo se $\exists \varepsilon > 0$ tale che, se $x \in \ell^2$ e $\|x\|_2 < \varepsilon$, allora $x \in C$. Questo non è vero. Infatti prendendo

   $$\overline{x}(n) = \begin{cases} \varepsilon & n = \overline{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   abbiamo che $\|\overline{x}\| = \varepsilon$ ma $\overline{x} \notin C$

3. C **non** è compatto in ℓ^2

4. $\exists m > 0$ tale che $\|x\|_2 \leq mp(x)$

   Basta dimostrare che C è limitato. Ma questo è banalmente vero perché per ogni $x \in X$

   $$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

Lemma 0.3.4 (Separazione di un convesso non vuoto da un punto esterno)**.** *Sia $C \subseteq X$ convesso aperto non vuoto e sia $x_0 \notin C$. Allora $\exists f \in X'$ tale che*

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C$$

Dimostrazione. Sia $X_0 = \mathbb{R}x_0$. Allora X_0 è sottospazio di X. Sia $g : X_0 \to \mathbb{R}$ definita da $g(tx_0) = t$, per $t \in \mathbb{R}$. Sia p il funzionale di Minkowski di C, vogliamo dire che $g(tx_0) \leq p(tx_0)$ per ogni $t > 0$. Poiché $x_0 \notin C$, abbiamo che $p(x_0) \geq 1$. Effettivamente allora

$$g(tx_0) = t \cdot 1 \leq tp(x_0) = p(tx_0)$$

Se invece $t < 0$ banalmente $g(tx_0) \leq 0 \leq p(tx_0)$.

Ora possiamo applicare Hahn-Banach dicendo che esiste $f : X \to \mathbb{R}$ lineare tale che $f = g$ su X_0 e $f(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in X$. Per le proprietà di Minkowski, abbiamo che $f(x) \leq p(x) \leq m\|x\|$ per ogni $x \in X$. Inoltre per linearità $-f(x) = f(-x) \leq m\|-x\| = m\|x\|$. Dalle due otteniamo che

$$|f(x)| \leq m\|x\| \quad \forall x \in X$$

e dunque $f \in X'$.

Ora se $x \in C$, allora

$$f(x) \leq p(x) < 1 = g(x_0) = f(x_0)$$

□

Teorema 0.3.5: Hahn-Banach – prima forma geometrica

Sia X uno spazio normato. Siano A, B sottoinsiemi non vuoti, disgiunti e convessi. Allora se A è aperto esiste un iperpiano chiuso che separa A e B, cioè

$\exists f \in X'$ e $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \alpha \quad \forall x \in A \quad e \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B$$

Dimostrazione. Sia $C = A - B = \{x \in X : x = a - b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Dobbiamo ora mostrare che C è convesso, aperto e non contiene lo 0. È aperto in quanto

$$C = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

unione di aperti. È convesso in quanto, se $a_i - b_i = x_i \in C$ per $i = 1, 2$, allora

$$(1-t)(a_1 - b_1) + t(a_2 - b_2) = ((1-t)a_1 + ta_2) - ((1-t)b_1 + tb_2) \in C$$

Infine chiaramente $0 \notin C$ poiché A e B sono disgiunti.

Allora $\exists f \in X'$ tale che $0 = f(0) > f(z)$ per ogni $z \in C$. Se $z = x - y$, con $x \in A$ e $y \in B$ abbiamo dunque per linearità che

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

concludiamo l'esistenza di α della tesi. $\square$

Teorema 0.3.6: Hahn-Banach – seconda forma geometrica

Sia X uno spazio normato, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Siano A, B convessi non vuoti e disgiunti. Allora, se A è chiuso e B è compatto, esiste un iperpiano chiuso che separa A e B strettamente, cioè

$$\exists f \in X', \exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq \alpha - \varepsilon\ \forall x \in A \text{ e } f(x) \geq \alpha + \varepsilon\ \forall x \in B$$

Dimostrazione. $\forall \varepsilon > 0$, siano $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)$ e $B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0)$. Dimostro ora che A_ε e B_ε sono convessi, disgiunti e aperti. Sono convessi in quanto somma di due convessi. Sono aperti in quanto

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) \quad \text{e} \quad B_\varepsilon = \bigcup_{b \in B} B_\varepsilon(b)$$

Dimostro ra che $\exists \bar{\varepsilon} > 0 : \forall \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \varnothing$. Per assurdo supponiamo esista una successione $\varepsilon_n \to 0$ decrescente e x_n, y_n, w_n, z_n, con $x_n \in A$, $y_n \in B$, $w_n \in B_{\varepsilon_n}(0)$ e $z_n \in B_{\varepsilon_n}(0)$ tali che $x_n + w_n = y_n + z_n$. Allora

$$\|x_n - y_n\| = \|z_n - w_n\| \leq 2\varepsilon_n$$

poiché $y_n \in B$ compatto, esiste n_k sottosuccessione con $y_{n_k} \to \overline{y} \in B$. Allora

$$\|x_{n_k} - \overline{y}\| \leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - \overline{y}\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Da cui $x_{n_k} \to \overline{y}$, ma $x_{n_k} \in A$ chiuso, dunque $\overline{y} \in A$. Risulterebbe che $\overline{y} \in A \cap B$ che è assurdo.

Abbiamo dunque che $\exists f \in X'$, ed $\exists \alpha > 0$ tale che

$$f(z) \leq \alpha \quad \forall z \in A_\varepsilon$$
$$f(z) \geq \alpha \quad \forall z \in B_\varepsilon$$

Ossia $f(x + \varepsilon w) \leq \alpha$, per ogni $x \in A$ e $w \in B_1(0)$ da cui $f(x) + \varepsilon f(w) \leq \alpha$ e poiché vale per ogni $w \in B_1(0)$ abbiamo

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon\|f\|_{X'} \text{ e analogamente } f(x) \geq \alpha + \varepsilon\|f\|_{X'}$$

$\square$

0.4 Funzioni convesse

Sia X uno spazio vettoriale e sia $\varphi : X \to \mathbb{R} + \{+\infty\}$. Dico che φ è *propria* se $D(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) \neq +\infty\} \neq \varnothing$. Dico che φ è *convessa* se, $\forall x, y \in X$ e $\forall t \in [0, 1]$,

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

Sia $C \subseteq X$ convesso non vuoto. Allora sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ \infty & x \notin C \end{cases}$$

è una funzione convessa detta *indicatrice* di C

Definizione 0.4.1: Epigrafico

Data φ una funzione, il suo *epigrafico* è

$$\mathrm{epi}\varphi = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq \lambda\}$$

Proposizione 0.4.1. *Si ha che*

(1) $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *è convessa se e solo se* $\mathrm{epi}\varphi$ *è convesso*

(2) Se $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *è convessa, allora* $\{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ *è convesso* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) Se φ_1, φ_2 *sono convesse, allora* $\varphi_1 + \varphi_2$ *è convessa*

(4) Se $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ *sono convesse, allora* $\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$ *è convessa.*

Esempio 0.4.1. Sia X uno spazio normato. Allora $\varphi : X \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x) = \|x\|$ è convessa. Infatti

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \quad \forall x, y \in X, \quad \forall t \in (0, 1)$$

0.5 semicontinuità

Definizione 0.5.1: Funzione semicontinua inferiormente

Sia X uno spazio normato. $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è *semicontinua inferiormente* se

$$\varphi(x) \leq \liminf_{y \to x} \varphi(y)$$

viene anche abbreviato s.c.i.

Proposizione 0.5.1 (Caratterizzazioni equivalenti). *(i)* φ *è s.c.i. se e solo se* $\mathrm{epi}\varphi$ *è chiuso in* $X \times \mathbb{R}$

(ii) φ *è s.c.i. se e solo se* $\{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ *è chiuso per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *s.c.i.*

(iii) Se φ_1, φ_2 *sono s.c.i. allora anche* $\varphi_1 + \varphi_2$ *lo è.*

(iv) Se $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ *sono s.c.i., allora* $\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$ *è s.c.i..*

(v) Sia X *compatto,* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *s.c.i., allora* φ *ha minimo.*

Dimostrazione di (v). S.c.i. se e solo se è continua secondo la topologia della semicontinuità inferiore, con aperti della base della forma $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$ come base. Allora se X è compatto, anche $\varphi(X)$ è compatto. I compatti di $\mathbb{R}_{\text{s.c.i.}}$ sono limitati inferiormente, poiché il ricoprimento con gli aperti della base ammmette sottoricoprimento finito. $\square$

Teorema 0.5.2

Sia X uno spazio normato, $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa, propria e s.c.i. Allora esiste $f \in X'$ e $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(x) \geq \langle f, x \rangle + c \quad \forall x \in X$$

0.6 Banach - Steinhaus

Sia $X = c_{00}$. Consideriamolo dunque con la norma $\| \cdot \|_\infty$. Ci chiediamo se X è Banach. Ovviamente no perché ad esempio la successione

$$x_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$

è convergente a $\overline{x}(n) = \frac{1}{n}$ in ℓ_∞, che però non è in c_{00}. Poiché x_k è convergente in ℓ_∞, in particolare è di Cauchy, e dunque c_{00} non è Banach.

Definiamo ora il funzionale

$$\begin{aligned} T_n : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto T_n(x) = nx(n) \end{aligned}$$

Ora fissato $x \in c_{00}$, $\lim_{n\to\infty} T_n x = 0$. Inoltre T_n è lineare ed è continuo poiché $|T_n x| = |nx(n)| \leq n\|x\|_\infty$. Dunque per n fissato, T_n è continuo.

Inoltre $\|T_n\|_{X'} = n$, dunque $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|_{X'} = +\infty$.

Per introdurre il teorema di Banach - Steinhaus, abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 0.6.1: Baire

Sia X uno spazio metrico completo. Data $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi chiusi magri, ossia con interno vuoto, si ha che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è magro. Equivalentemente data $\{X_n\}$ una successione di sottoinsiemi chiusi tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$, allora $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathring{X}_{n_0} \neq \varnothing$

Dimostrazione. Dimostriamo una versione equivalente:

$$\{A_n\} \subset X \text{ aperti densi } \implies \bigcap_n A_n \text{ denso}$$

Fissiamo $U \subset X$ aperto non vuoto. Sia $x_0 \in U$, per le ipotesi su U possiamo trovare $r_0 > 0$ tale che

$$\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset U.$$

Per densità di A_1 possiamo trovare un certo x_1 tale che

$$x_1 \in A_1 \cap B_{r_0}(x_0),$$

e un $r_1 > 0$ tale che

$$\begin{cases} \overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{r_0}(x_0) \cap A_1, \\ 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}. \end{cases}$$

Procedendo induttivamente possiamo costruire due successioni, $\{x_n\} \subset X$ e $\{r_n\} \subset \mathbb{R}^+$, tali che per ogni n valga che

$$\begin{cases} \overline{B_{r_n}(x_n)} \subset B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap A_n, \\ 0 < r_n < \dfrac{r_{n-1}}{2}. \end{cases}$$

Chiaramente la successione r_n converge a 0. Inoltre la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy, infatti per $m > n$ vale che

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &< r_n + r_{n+1} + \ldots + r_{m-1} < r_n + \frac{r_n}{2} + \frac{r_n}{4} + \ldots = 2r_n, \end{aligned}$$

che è infinitesima. Per completezza dello spazio X esiste $\overline{x} \in X$ tale che $x_n \to \overline{x}$. Vorremmo mostrare che

$$\overline{x} \in U \cap \bigcap_n A_n.$$

Siccome, per ogni $n, p \geq 0$ naturali vale che

$$x_{n+p} \in B_{r_n}(x_n)$$

si può affermare, passando al limite per $p \to +\infty$, che

$$\overline{x} \in \overline{B_{r_n}(x_n)} \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi, per la costruzione delle palle, si ha che

$$\overline{x} \in A_n \quad \forall n \geq 0.$$

Inoltre, per la costruzione iniziale, si ha che

$$\overline{x} \in \overline{B_{r_0}(x_0)} \subset U.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 0.6.2: Banach - Steinhaus

Sia X uno spazio di Banach, Y uno spazio normato. Sia $\{T_i\}_{i \in I}$ una famiglia di operatori lineari e continui $T_i : X \to Y$.
Allora se $\forall x \in X$ esiste $m(x)$ tale che $\|T_i(x)\|_Y \leq m(x)$ per ogni $i \in I$ vale che

$$\forall x \in X \ \exists m(x) : \sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y \leq m(x) \implies \sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$$

in altre parole *puntualmente limitato* implica *uniformemente limitato*

Dimostrazione. Costruiamo

$$X_n = \{x \in X : \|T_i x\| \leq n \ \forall i \in I\}$$

Allora

1. $\forall n$, X_n è chiuso (controimmagine di chiuso tramite la composizione delle funzioni continue T_i e $\|\cdot\|$)

2. $X = \bigcup_n X_n$
   Vogliamo mostrare che data $x \in X$, $\exists \overline{n} : x \in X_{\overline{n}}$. Sappiamo che $\exists m(x) : \|T_i(x)\| \leq m(x)$ per ogni $i \in I$, e allora basta prendere $\overline{n} \geq m(x)$.

Ora abbiamo le condizioni del lemma di Baire, e possiamo dunque dire che esiste $n_0 : \mathring{X}_{n_0} \neq \varnothing$. Prendo dunque $x_0 \in \mathring{X}_{n_0}$. Esiste dunque $\delta > 0$: $B_\delta(x_0) \subseteq X_{n_0}$. In particolare $x_0 + \frac{x}{\|x\|}\delta \in X_{n_0}$ per ogni $x \neq 0$. Allora dalla definizione degli X_n segue che

$$\left\| T_i \left(x_0 + \delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq n_0$$

ora per linearità e proprietà della norma abbiamo che

$$\delta \left\| T_i \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|T_i x_0\| + \left\| T_i \left(x_0 + \delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq n_0 + n_0 = 2n_0$$

Finalmente concludiamo che

$$\|T_i x\| \leq \left(\frac{2n_0}{\delta} \right) \|x\| \implies \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T_i x\|}{\|x\|} \leq \frac{2n_0}{\delta}$$

□

Corollario 0.6.2.1. *Sia X uno spazio di Banach, e sia Y uno spazio normato. Si consideri una successione di operatori lineari e continui $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Si supponga che, per ogni $x \in X$, esista $y \in Y$ tale che*

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_n x - y\| = 0.$$

Detta $T : X \to Y$ l'applicazione che associa, ad ogni $x \in X$, il rispettivo limite in Y, si può dire che:

1. *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$;*
2. *$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$;*
3. *$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n \to +\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.*

Dimostrazione. La linearità di T segue direttamente dalla linearità degli operatori T_n e dalle proprietà del limite.

Mostriamo il secondo punto. Per applicare il Teorema 0.6, dobbiamo verificare che la famiglia di operatori $\{T_n\}$ sia puntualmente limitata. Fissiamo un arbitrario $x \in X$. Per ipotesi, la successione $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge in Y. Ogni successione convergente in uno spazio normato è limitata. Pertanto, esiste una costante $m(x) > 0$ tale che

$$\|T_n x\|_Y \leq m(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dato che questo vale per ogni $x \in X$, le ipotesi del Teorema 0.6 sono soddisfatte. Ne consegue che la successione delle norme degli operatori è uniformemente limitata, ossia

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Mostriamo il primo punto. La linearità è già stata mostrata. Per la continuità, dobbiamo mostrare che T è un operatore limitato. Usando il risultato del punto precedente, sappiamo che $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$ per ogni n. Dunque, per ogni $x \in X$, vale

$$\|T_n x\|_Y \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \leq M \|x\|_X.$$

Poiché $T_n x \to T x$ e la norma è una funzione continua, si ha $\|T_n x\|_Y \to \|T x\|_Y$. Passando al limite per $n \to \infty$ nella disuguaglianza precedente, otteniamo:

$$\|T x\|_Y = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\|_Y \leq M \|x\|_X.$$

Questo dimostra che T è limitato (con $\|T\| \leq M$), e quindi continuo.

Mostriamo il terzo punto. Partiamo dalla disuguaglianza $\|T_n x\|_Y \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X$, valida per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in X$. Prendendo il limite inferiore per $n \to +\infty$ in entrambi i membri, otteniamo:

$$\liminf_{n\to+\infty} \|T_n x\|_Y \leq \liminf_{n\to+\infty} \left(\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X\right) = \left(\liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right) \|x\|_X.$$

Dato che la successione $\|T_n x\|_Y$ converge a $\|Tx\|_Y$, il suo limite inferiore coincide con il limite. Sostituendo nel membro di sinistra, si ha:

$$\|Tx\|_Y \leq \left(\liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right) \|x\|_X.$$

Poiché questa disuguaglianza vale per ogni $x \in X$, per definizione di norma di un operatore si conclude che

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

□

Esempio 0.6.1 (Disugaglianza stretta nel punto 3)**.** Si consideri $X = Y = \ell^2$. Si definiscano gli operatori

$$T_n : \ell^2 \to \ell^2, \quad (T_n x)(k) = \begin{cases} x(k), & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Gli operatori sono lineari, e si osserva che sono anche limitati di norma unitaria. L'operatore limite, T, manda ogni $x \in \ell^2$ nell'elemento nullo di ℓ^2. Quindi vale la disugaglianza stretta

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)} = 0 < \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)} = 1.$$

Presentiamo due corollari del Teorema 0.6 che sono, in un certo senso, duali.

Corollario 0.6.2.2. *Sia Z uno spazio di Banach e sia $B \subset Z$ un suo sottoinsieme.*

$$\forall f \in Z',\ \langle f, B\rangle \subset \mathbb{K} \text{ limitato} \implies B \text{ è limitato in } Z.$$

Corollario 0.6.2.3. *Sia Z uno spazio di Banach e sia B' un sottoinsieme di Z'.*

$$\forall x \in Z,\ \langle B', x\rangle \subset \mathbb{K} \text{ limitato} \implies B' \text{ è limitato in } Z'.$$

Dimostrazione di 0.6.2.2. La famiglia di operatori che consieriamo è $\{T_b\}_{b\in B}$ con

$$T_b : Z' \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \langle f, b\rangle.$$

Tali funzionali sono lineari e limitati. Per ipotesi,

$$\sup_{b\in B} |T_b f| < +\infty \quad \forall f \in Z'.$$

Dunque, per il teorema di Banach - Steinhaus, segue che esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|T_b\|_{Z''} \leq M \quad \forall b \in B,$$

ossia

$$M \geq \sup_{f\in Z'\setminus\{0\}} \frac{|\langle f, b\rangle|}{\|f\|_{Z'}} = \|b\|_Z \quad \forall b \in B.$$

L'ultima ugaglianza è una conseguenza del teorema di Hahn-Banach (Brezis, Corollario 1.4). □

Dimostrazione di 0.6.2.3. Consideriamo la famiglia di operatori

$$T_b : Z \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle b, x \rangle$$

al variare di $b \in B'$. Tali operatori sono lineari e limitati. Per ipotesi, per ogni $x \in Z$ esiste una costante $m(x) > 0$ tale che

$$|T_b x| \leq m(x) < +\infty \quad \forall x \in Z.$$

Per il teorema di Banach - Steinhaus, segue che esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|T_b\|_{Z'} \leq M \quad \forall b \in B',$$

da cui, per definizione di norma duale,

$$\|b\|_{Z'} \leq M \quad \forall b \in B',$$

che è la tesi. □

I teoremi dell'applicazione aperta e del grafico chiuso. Si tratta di due importanti teoremi che si possono dimostrare come conseguenza del teorema di Banach - Steinhaus.

Lemma 0.6.3. *Siano X, Y due spazi normati, e sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare. Allora T è aperta se e solo se*

$$\exists C > 0 : \, B_Y(0, C) \subseteq T(B_X(0, 1)).$$

Dimostrazione. Se T è aperta la tesi è ovvia. Supponiamo, viceversa, che esista una costante positiva C tale per cui $B_Y(0, C) \subseteq T(B_X(0, 1))$. Sia $U \subset X$ aperto. Vorremmo mostrare che $T(U)$ è aperto in Y. Consideriamo un elemento $y_0 \in T(U)$, da cui possiamo ricavare un elemento $x_0 \in U$ tale che $Tx_0 = y_0$. Per ipotesi di apertura dell'insieme U possiamo trovare una costante $r > 0$ tale che $B_X(x_0, r) \subset U$. Da cui,

$$\begin{aligned} B_Y(y_0, rC) &= y_0 + rB_Y(0, C) \\ &\subseteq y_0 + T(B_X(0, 1)) \\ &= T(B_X(x_0, r)) \\ &\subseteq T(U). \end{aligned}$$

□

Lemma 0.6.4. *Sia X uno spazio normato e sia M un* sottospazio *di X.*

$$\text{Int}(M) \neq \varnothing \implies M = X$$

Dimostrazione. Per ipotesi esistono un punto $x_0 \in M$ e una costante $\delta > 0$ tali che

$$\overline{B(x_0, \delta)} \subseteq M.$$

Consideriamo un punto arbitrario $x \in X$. Per $x \neq x_0$ mostriamo che $x \in M$:

$$x_0 + \delta \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \in \overline{B(x_0, \delta)} \subseteq M.$$

Siccome M è un sottospazio, anche $-x_0 \in M$. A questo punto si ricava facilmente che $x \in M$. □

Osservazione. Una conseguenza interessante è che in uno spazio di dimensione infinita, i sottospazi di dimensione finita hanno interno vuoto.

Proposizione 0.6.5. *Siano X, Y due spazi normati e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

$$T \text{ aperta} \implies T \text{ suriettiva.}$$

Dimostrazione. $T(X)$ è un sottospazio di Y. Poiché T è aperta, $T(X)$ ha interno non vuoto. Dunque per il lemma precedente si ha che $T(X) = Y$, ossia T è suriettiva. □

Per la dimostrazione al seguente risultato rimandiamo a Brezis, Teorema 2.6.

Teorema 0.6.6: dell'applicazione aperta, Banach

Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ suriettivo. Allora T è un'applicazione aperta.

Corollario 0.6.6.1. *Siano X, Y due spazi di Banach, e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ biettivo. Allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Proposizione 0.6.7. *Siano X, Y due spazi di Banach. Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. T è iniettivo con immagine chiusa se e solo se*

$$\exists \alpha > 0 : \|Tx\|_Y \geq \alpha \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Esista α come nella tesi. Chiaramente T è iniettivo. Sia $\{y_n\} \subset Y$ di Cauchy tale che $y_n = Tx_n$ per una certa successione $\{x_n\} \subset X$. Vogliamo mostrare che il limite appartiene all'immagine. Per la disuguaglianza della tesi, si ha che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy in X. Poiché X è completo, esiste $\overline{x} \in X$ tale che $x_n \to \overline{x}$. Per la continuità di T segue che $y_n = Tx_n \to T\overline{x} \in T(X)$. Dunque l'immagine è chiusa.

Viceversa, supponiamo che T sia iniettivo e la sua immagine sia chiusa. Consideriamo lo spazio normato $\tilde{Y} := (X(T), \|\cdot\|_Y)$. L'operatore $T : X \to \tilde{Y}$ è biettivo. Per il Teorema 0.6 segue che $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Quindi

$$\exists \gamma > 0 : \|\tilde{T}^{-1}\tilde{T}x\|_X \leq \gamma \|Tx\|_Y \quad \forall x \in X,$$

da cui segue che

$$\|x\|_X \leq \gamma \|Tx\|_Y \quad \forall x \in X.$$

La tesi si ottiene ponendo $\alpha = 1/\gamma$. □

Esercizio 0.6.1

Siano X, Y spazi di Banach e sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ una successione di operatori lineari e continui tali che

1. esiste una costante positiva M tale che $\|T_n\|_{\mathcal{L}} \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. esiste un sottoinsieme denso $D \subset X$ tale che $\{T_n x\}$ converge per ogni scelta di $x \in D$.

Allora $\{T_n x\}$ converge per ogni $x \in X$.

Esercizio 0.6.2 Applicazione del lemma di Baire

Dimostrare che lo spazio dei polinomi su $[0, 1]$ non è Banach con la norma infinito.

Adesso introduciamo un lemma che servirà per la dimostrazione del teorema del grafico chiuso.

Lemma 0.6.8

Sia Z uno spazio normato, munito delle norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Se Z è completo rispetto a entrambe le norme e se

$$\exists C > 0 : \|z\|_2 \leq C\|z\|_1 \quad \forall z \in Z,$$

allora le due norme sono equivalenti, ossia

$$\exists \gamma > 0 : \|z\|_1 \leq \gamma\|z\|_2 \quad \forall z \in Z.$$

Dimostrazione. Si applica il corollario al Teorema 0.6 all'operatore identità. □

Teorema 0.6.9: Teorema del grafico chiuso

Siano X, Y due spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ lineare. Allora T è continuo se e solo se il suo grafico

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \times Y$$

è chiuso in $X \times Y$ munito della norma prodotto.

Dimostrazione. La continuità di T implica che $\Gamma(T)$ è chiuso, in quanto controimmagine di $\{0\}$ tramite l'applicazione continua $(x, y) \mapsto y - Tx$.

Viceversa, supponiamo che $\Gamma(T)$ sia chiuso. Introduciamo la seguente norma, detta *norma del grafico*:

$$\|x\|_\Gamma := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad \forall x \in X.$$

Mostriamo che $(X, \|\cdot\|_\Gamma)$ è uno spazio di Banach. Sia $\{x_n\} \subset X$ una successione di Cauchy rispetto alla norma del grafico. Si osserva che allora $\{x_n\}$ è di Cauchy in X rispetto alla norma $\|\cdot\|_X$ e che $\{Tx_n\}$ è di Cauchy in Y. Quindi, per completezza di X e Y, esistono $\overline{x} \in X$ e $\overline{y} \in Y$ tali che

$$x_n \to \overline{x} \text{ in } X, \quad Tx_n \to \overline{y} \text{ in } Y.$$

Poiché il grafico è chiuso, si ha che $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Gamma(T)$, ossia $\overline{y} = T\overline{x}$. Quindi $\{x_n\}$ converge a $\overline{x}$ anche rispetto alla norma del grafico. Questo dimostra che $(X, \|\cdot\|_\Gamma)$ è completo. Per il lemma precedente, siccome $\|x\|_X \leq \|x\|_\Gamma$ per ogni $x \in X$, le due norme sono equivalenti. In particolare, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|x\|_\Gamma \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

da cui segue che

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_\Gamma \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Questo dimostra che T è limitato, e quindi continuo. □

0.7 Topologie deboli

Si consideri un insieme X. Fissiamo una famiglia arbitraria $\{Y_i\}_{i \in I}$ di spazi topologici. Consideriamo una famiglia di applicazioni $\{\phi_i : X \to Y_i\}$. Cerchiamo di definire la topologia meno fine che rende continue tutte le applicazioni ϕ_i.

Sicuramente questa topologia contiene tutte le controimmagini degli elementi delle topologie dei vari Y_i. In particolare, la topologia cercata è quella generata da tali controimmagini come sottobase. Chiamiamo questi sottoinsiemi $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

La topologia generata da una sottobase è definita come la topologia generata (come base) dalle intersezioni finite di elementi della sottobase.

Definizione 0.7.1: Topologia iniziale

Sia X un insieme e sia $\{\phi_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di applicazioni in spazi topologici. La *topologia iniziale* su X indotta dalle applicazioni ϕ_i è la topologia generata come base dalle intersezioni finite delle controimmagini degli aperti dei vari Y_i.

Teorema 0.7.1

Sia (X, τ) uno spazio topologico con τ topologia iniziale indotta da una famiglia di applicazioni $\{\phi_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$. Si ha che:

1. τ è la topologia meno fine che rende continue tutte le applicazioni ϕ_i;
2. data $\{x_n\} \subset X$,
$$x_n \to x \text{ in } (X, \tau) \iff \phi_i(x_n) \to \phi_i(x) \text{ in } Y_i, \quad \forall i \in I;$$
3. sia Z uno spazio tolologico e sia $\psi : Z \to X$ un'applicazione, allora
$$\psi \text{ è continua } \iff \phi_i \circ \psi \text{ è continua in } Y_i, \quad \forall i \in I.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata come esercizio (vedere Brezis, Proposizione 3.1 e 3.2). □

Topologia debole. Sia X uno spazio di Banach. Tale spazio ha una topologia, detta *topologia forte*, indotta dalla norma. Inoltre, al variare di $f \in X'$ possiamo considerare le applicazioni

$$\phi_f : X \to \mathbb{R}, \quad \phi_f(x) := \langle f, x \rangle.$$

Definizione 0.7.2: Topologia debole

Chiamiamo *topologia debole* su X la topologia iniziale indotta dalla famiglia di applicazioni $\{\phi_f\}_{f \in X'}$. La indichiamo con $\sigma(X, X')$. Se $\{x_n\}$ è una successione che converge a x in tale topologia, scriviamo $x_n \rightharpoonup x$ e diciamo che $\{x_n\}$ *converge debolmente* a x.

Proposizione 0.7.2. *Sia X uno spazio di Banach e $\{x_n\} \subset X$ una successione. Allora:*

1. *$x_n \rightharpoonup x$ in $\sigma(X, X') \iff \phi_f(x_n) \to \phi_f(x)$ in $\mathbb{R}$, $\forall f \in X'$;*
2. *se $x_n \to x$ allora $x_n \rightharpoonup x$;*
3. *se $x_n \rightharpoonup x$ allora la successione $\{x_n\}$ è limitata in norma e si ha che $\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|$;*
4. *se $f_n \to f$ in X' e $x_n \rightharpoonup x$ allora $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Il terzo punto segue da Banach - Steinhaus. □