

# Appunti di Analisi 3 - Equazioni Differenziali

Osea

Primo semestre A.A. 2024 - 2025, prof. Enrico Vitali

Libro suggerito: *Hirsch, Smale, Devaney*

## 0 Esempi

Sia abbia una “popolazione” la quantità  $x(t)$  evolva nel tempo. Allora il rapporto  $x'(t)/x(t)$  è il tasso di variazione della popolazione. L'equazione

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r(t, x(t))$$

è un'equazione differenziale. Tipicamente si considera il problema ai valori iniziali (di Cauchy) dove è aggiunta anche una condizione  $x(0) = x_0$

**Esempio 0.1** (Malthus). Se  $r$  è costante abbiamo la cosiddetta legge di Malthus.

$$\begin{aligned}\frac{x'(t)}{x(t)} &= r \quad x(t) > 0 \\ \log x(t) &= rt + c \quad c \in \mathbb{R} \\ x(t) &= e^c \cdot e^{rt}\end{aligned}$$

dove se  $x(0) = e^c = x_0$  si ottiene  $x(t) = x_0 e^{rt}$

Un esempio dove questo si potrebbe verificare è il decadimento radioattivo.

**Esempio 0.2** (Logistica). Non si può invece applicare in una situazione realistica di uno studio di una popolazione l'esempio della crescita esponenziale, non essendo ragionevole in quanto non considera la capacità di carico ambientale. La si introduce quindi. Allora possiamo modellizzare il fatto con:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right)$$

Da cui si ottiene dopo qualche calcolo

$$x(t) = k \frac{C e^{rt}}{1 + C e^{rt}}$$

con  $C \in \mathbb{R}$ , in particolare scriviamo  $C = e^{-rt_0}$  con  $t_0$  definito opportunamente. Allora le soluzioni sono

$$x(t) = k \frac{e^{r(t-t_0)}}{1 + e^{r(t-t_0)}}$$

Questo rende evidente che i grafici sono tutti uno traslato temporale dell'altro. Si può quindi studiare solo una soluzione, ad esempio per  $t_0 = 0$  essendo le altre semplici traslazioni temporali di questa.

$$x(t) = k \frac{e^{rt}}{1 + e^{rt}} = \frac{k}{1 + e^{-rt}}$$

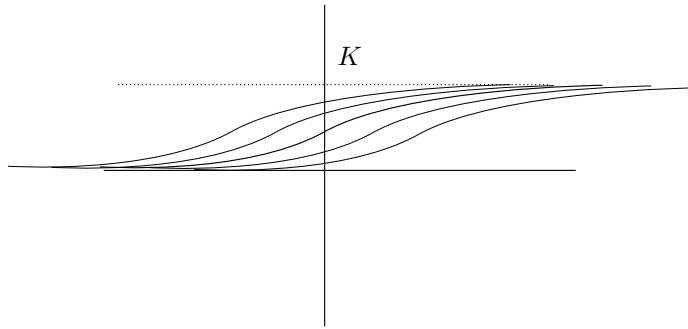


Figura 1: logistica

Ciò che abbiamo ottenuto riguardo alle soluzioni, dove ogni soluzione è una traslazione temporale di un'altra, è un caso generale delle equazioni differenziali non dipendenti dal tempo. Il che è una facile osservazione del fatto che se  $x'(t) = f(x(t))$  e  $x_\tau(t) := x(t-\tau)$  allora anche  $x_\tau$  è soluzione poiché  $x'_\tau(t) = x'(t-\tau) = f(x(t-\tau)) = f(x_\tau(t))$ .

**Esempio 0.3.** Le equazioni precedenti modellizzano anche fenomeni differenti. Ad esempio in chimica se considero la reazione chimica  $H_2 + I_2 \rightarrow 2HI$  posso considerare la velocità di cambiamento della concentrazione nella soluzione della reazione e quindi in questo caso ottenere

$$-\frac{1}{2} \frac{d[HI]}{dt} = \frac{d[H_2]}{dt} = \frac{d[I_2]}{dt}$$

dove la prima derivata è definita essere la “velocità”  $v(t)$  della reazione. La legge cinetica dice che  $v$  è proporzionale al prodotto delle concentrazioni di  $H_2$  e  $I_2$  quindi

$$v(t) = k[H_2]_t[I_2]_t = \frac{d[HI]_t}{dt}$$

E il resto è lasciato come esercizio con l'obiettivo di mostrare che la reazione ha uno sviluppo logistico.

La reazione inversa invece si modella con  $x'(t) = -rx(t)^2$ . Proviamo a risolverla e otteniamo che

$$\begin{aligned} x' = rx^2 &\implies \int \frac{1}{x^2} dx = rt + c \\ -\frac{1}{x(t)} = rt + c &\implies x(t) = -\frac{1}{rt + c} \end{aligned}$$

Se poniamo  $x(0) = x_0$  otteniamo  $x_0 = -\frac{1}{c}$  da cui  $c = -\frac{1}{x_0}$  quindi

$$x(t) = -\frac{1}{rt - \frac{1}{x_0}}$$

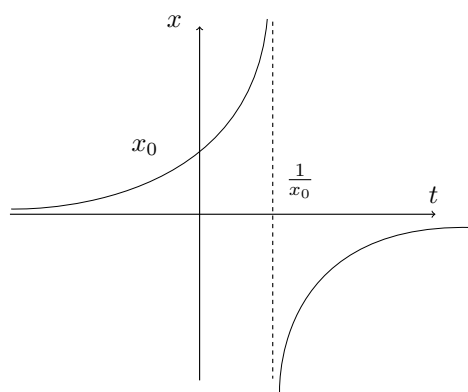


Figura 2:  $x'(t) = rx(t)^2$  per  $r = 1$

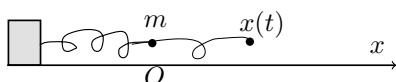


Figura 3: oscillatore armonico

**Esempio 0.4** (Oscillatore armonico). Sia  $m$  una massa vincolata in modo elastico ad una posizione fissa. Sia  $x = 0$  l'ascissa quando la molla è a riposo. Se la massa è nella posizione di ascissa  $x(t)$  al tempo  $t$  allora subisca la forza di richiamo (Hooke)  $F = -kx(t)$ . Allora dalla seconda legge della dinamica

$$m\ddot{x} = -kx^2 \iff \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

È un'equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti, omogenea. Allora le soluzioni sono della forma

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ho due costanti poiché devo definire posizione e velocità iniziale, e infatti il problema

tipico ai valori iniziali per un'equazione del secondo ordine è

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Posso riscrivere la precedente soluzione nella forma

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos(\omega t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin(\omega t) \right)$$

dove i coefficienti di seno e coseno sono le coordinate di un punto sulla circonferenza unitaria, quindi sono coseno e seno di un angolo  $\varphi$ , da cui otteniamo che  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

**Esempio 0.5** (Varianti dell'oscillatore armonico). In presenza di attrito viscoso le precedenti diventano

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - h\dot{x} \\ \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \end{aligned}$$

E se aggiungiamo anche una forza esterna costante

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - h\dot{x} + \psi \\ \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x &= f \end{aligned}$$

che è non omogenea

**Esempio 0.6** (Corrente elettrica). Preso un circuito  $RC$  abbiamo una forza elettromotrice che crea una differenza di potenziale  $\mathcal{E}$ , un condensatore di capacità  $C$  e una resistenza  $R$ . Sia  $q(t)$  la carica sulle piastre del condensatore. Allora risulta che in ogni momento  $\frac{q(t)}{V} = C$  costante. La resistenza invece per la legge di ohm  $V = i(t)R$ , allora otteniamo una legge

$$\mathcal{E} = Ri + \frac{q}{C} = Rq' + \frac{q}{C}$$

che è una equazione lineare del primo ordine.

In un circuito reale invece è presente un terzo termine legato all'induttanza del filo, creando un circuito  $RLC$ , consideriamo quindi di aggiungere al circuito precedentemente analizzato un'induttanza  $L$ . Allora abbiamo

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_L = Ri + \frac{q}{C}$$

dove  $\mathcal{E}_L = Li'$  è l'inerzia elettrica del sistema, l'equazione diventa

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

Ossia un'ODE lineare a coefficienti costanti del secondo ordine non omogenea.

**Esempio 0.7** (Equazione di Schrödinger).

$$-\frac{\hbar}{2m} \nabla_x^2 \psi(x, t) + U(x, t) \psi(x, t) = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Supponiamo che il potenziale  $U$  sia indipendente dal tempo  $t$ , ossia  $U = U(x)$  e cerchiamo soluzioni della forma a variabili separate, cioè  $\psi(x, t) = u(x)\varphi(t)$ , inoltre poniamoci in una sola dimensione, otteniamo:

$$-\frac{\hbar}{2m} u''(x) \varphi(t) + U(x) u(x) \varphi(t) = i u(x) \varphi'(t)$$

Da cui dividendo per  $u(x)\varphi(t)$

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{u''(x)}{u(x)} + U(x) = i \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$$

E poiché abbiamo che un'equazione in  $x$  è uguale ad una in  $t$  deve essere che entrambi i membri sono costanti, diciamo  $E$ .

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m} u''(x) = (U(x) - E)u(x) \\ \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -iE \end{cases}$$

La prima è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti (in generale) e si può riscrivere come

$$Lu := -\frac{\hbar^2}{2m} u''(x) + U(x)u(x)$$

è un operatore lineare su  $u$  e allora l'equazione diventa

$$Lu = Eu$$

ossia un'equazione agli autovalori per l'operatore  $L$ .

Ad esempio nel caso  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$  e con opportuni cambi di variabile si arriva alla cosiddetta *equazione di Hermite*

$$H''(\xi) - 2\xi H' + \cos t H = 0$$

che dà luogo ai cosiddetti *polinomi di Hermite*

Altri due esempi importanti sono, nel caso dei sistemi (tra cui l'esempio famoso del preda-predatore di Lotka-Volterra) e le elastiche piane. Ulteriore esempio è il moto di un pendolo, che si può modellizzare con un'ODE di secondo ordine non lineare.

**Esempio 0.8** (Elastiche piane). Sia abbia una verga elastica (barra) che supponiamo in una posizione di equilibrio della forma grafico  $y = u(x)$  Con ipotesi mo-

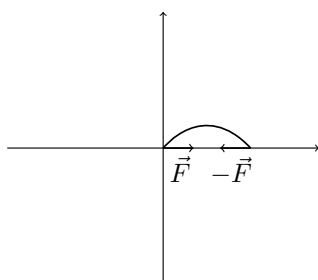


Figura 4: Elastica Piana

dellistica, ossia **il momento flettente è proporzionale alla curvatura**, dove la curvatura in un punto  $x$  si può calcolare con

$$\kappa(x) = \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}}$$

e il momento flettente si può immaginare intuitivamente come la forza locale sulla verga ed è proporzionale al valore di  $u(x)$ . Allora si ottiene l'equazione

$$\kappa(x) = -\lambda u(x) \iff u''(x) + \lambda u(x)(1 + u'(x)^2)^{3/2} = 0$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$  è una costante.

*Osservazione.* La costante  $\lambda$  e la lunghezza della verga sono legate (significato modellistico)

**Esempio 0.9** (Equazioni di Lotka-Volterra). Siano  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  le popolazioni di due specie che interagiscono tra loro. Allora si può modellizzare il fatto che la popolazione di una specie è proporzionale alla sua popolazione e alla popolazione dell'altra specie. Sia allora  $\frac{x'_i(t)}{x_i(t)}$  il tasso di variazione della popolazione  $x_i$ . Supponiamo adesso che  $x_1$  sia la “preda” e  $x_2$  il “predatore”. Allora si può modellizzare l'evoluzione del sistema esprimendo il tasso di variazione delle popolazioni. In particolare per la preda abbiamo

$$\frac{x'_1(t)}{x_1(t)} = \alpha - \beta x_2(t)$$

dove  $\alpha$  è il tasso in assenza di predatori e  $b$  è il tasso di morte causato dai predatori. Per il predatore invece si ha

$$\frac{x'_2(t)}{x_2(t)} = \delta x_1(t) - \gamma$$

In conclusione, il sistema di equazioni differenziali è

$$\begin{cases} x'_1(t) &= (\alpha - \beta x_2(t)) x_1(t) \\ x'_2(t) &= (\delta x_1(t) - \gamma) x_2(t) \end{cases}$$

che è un sistema non lineare di due equazioni differenziali. Il problema ai valori iniziali naturalmente associato è quello che si ottiene aggiungendo i dati  $x_1(t_0) = x_1^0$  e  $x_2(t_0) = x_2^0$ .

Anche questo sistema può essere trasformato ad una versione logistica, cambiando i fattori  $\alpha$  in  $\alpha(1 - \frac{x_1}{k_1})$  e analogamente per  $x_2$ , ottenendo il sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(\alpha - \lambda x_1 - \beta x_2) \\ x'_2 = x_2(-\gamma + \delta x_1 - \mu x_2) \end{cases}$$

## 1 Equazioni differenziali ordinarie

In generale quindi abbiamo diversi esempi ( $x' = rx$ ,  $x' = rx(1 - x)$ ,  $Rq' + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}$ ) di equazioni della forma  $x' = f(t, x)$ . Anche in Lotka-Volterra abbiamo una forma simile ma con due variabili, infatti considerando  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  abbiamo che possiamo riscrivere il sistema come un sistema vettoriale della forma  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ .

### Definizione 1.1: soluzione di un'equazione differenziale

Sia  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 1$  aperto. Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Consideriamo l'equazione differenziale  $x'(t) = f(t, x(t))$ , che è detta quindi in *forma normale*.

Diciamo **soluzione** dell'equazione differenziale ogni funzione  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $J$  intervallo, di classe  $C^1$  e tale che

$$\forall t \in J, (t, x(t)) \in D$$

e su  $D$  è verificata l'uguaglianza

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

Nel caso scalare (ossia  $n = 1$ ) dunque abbiamo che  $x(\cdot)$  è soluzione se ogni punto  $(t, x(t))$  del grafico ha pendenza pari al valore di  $f(t, x(t))$ .

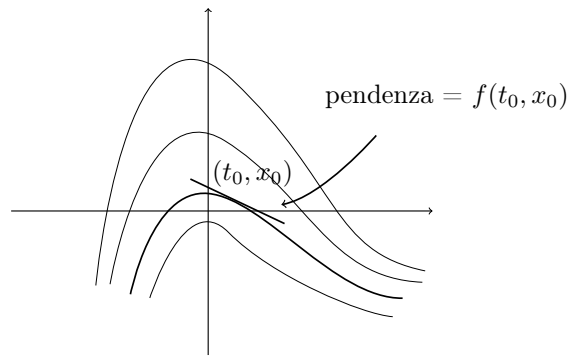


Figura 5: Soluzione di un'equazione differenziale nel caso  $n = 1$

Nel caso invece di equazioni differenziali del secondo ordine (come il moto armonico, il pendolo, l'elastica piana, il circuito RLC ecc...) si ha che

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

con  $x(\cdot)$  incognita. Questa forma è detta *forma normale* per un'equazione del secondo ordine. In generale se  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  è un punto mobile in  $\mathbb{R}^3$  sotto l'azione di un campo di forza  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$  allora per la seconda legge della dinamica si ottiene il sistema del secondo ordine

$$m\mathbf{x}''(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$$

Un'equazione del secondo ordine in forma normale può essere ricondotta a un sistema del primo ordine in forma normale, come

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \iff \begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(t, x(t), v(t)) \end{cases}$$

Dove abbiamo introdotto la variabile  $v(t) = x'(t)$ . A questo punto il sistema può essere scritto in forma vettoriale come  $\mathbf{x}(t) = (x(t), v(t))$ , e quindi  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (v(t), f(t, x(t), v(t)))$

Analogamente equazioni di ordine superiore possono essere ricondotte a sistemi di primo ordine introducendo le variabili  $x_i = x^{(i)}$  dove  $x^{(i)}$  è la  $i$ -esima derivata di  $x$ . Il sistema che analizzeremo sarà quindi

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

dove  $n$  è il grado dell'equazione differenziale.

Il problema ai valori iniziali associato al sistema del primo ordine  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$  si ha aggiungendo il requisito  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0$ , per cui ovviamente nel caso di un'equazione di ordine superiore il problema ai valori iniziali è dato dal richiedere, per ogni derivata  $x^{(i)}$ , il valore iniziale  $x^{(i)}(0) = y_i$ .

È particolare il caso in cui  $f$  non dipende da  $t$  e viene detto **caso autonomo** allora se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è continua allora l'equazione è  $x' = f(x)$  dove la soluzione è una funzione  $x : J \rightarrow \Omega$  con  $J$  intervallo.

**Esempio 1.1** (Logistica). L'equazione, come visto in precedenza è

$$x' = rx(1 - \frac{x}{k}) = f(x)$$

Allora il campo di pendenza non dipende da  $t$ , vedasi figura 6

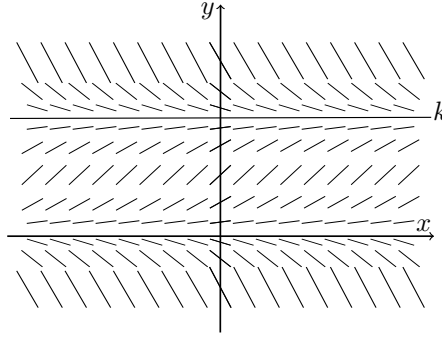


Figura 6: Pendenza della logistica

Allora abbiamo un'invarianza delle soluzioni per traslazione temporali, infatti se  $x$  è soluzione e  $x_\tau(t) := x(t - \tau)$  allora  $x'_\tau(t) = f(x(t - \tau)) = f(x_\tau(t))$ . In tal modo possiamo creare uno "Spazio degli stati" ossia un'immagine in cui raffiguriamo soltanto le posizioni di  $x$ , come si evolve il sistema in quei punti, poiché rappresentare  $t$  è ridondante, otteniamo per la logistica il seguente schema:

Possiamo espandere l'idea dello spazio degli stati a equazioni vettoriali autonome del primo ordine, dove rappresentiamo in ogni punto  $\mathbf{x}$  dello spazio  $\mathbb{R}^n$  la pendenza, data dal vettore  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , successivamente possiamo rappresentare l'evoluzione del sistema in questo spazio, ottenendo le *orbite* (cercare su internet "campo di pendenza Lotka-Volterra" oppure "orbite Lotka-Volterra" per vedere esempi, in



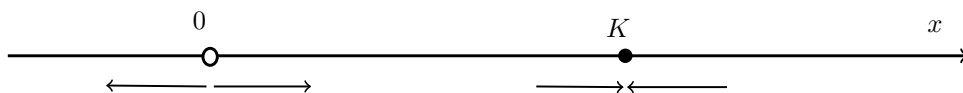


Figura 7: Spazio degli stati dell'equazione logistica

tal caso in  $\mathbb{R}^2$ ). Le orbite quindi in generale (anche nel caso non autonomo) sono la **proiezione della curva della soluzione su uno spazio degli stati, che è dato dalle coordinate che non sono quella del tempo.**

## 1.1 Alcuni esempi di risoluzione esplicita

**Esempio 1.2** (Equazioni a variabili separabili). Si tratta di equazione differenziale della forma

$$x'(t) = g(t) h(x)$$

con  $g$  e  $h$  funzioni continue su un intervallo (ad esempio). Se  $\bar{x}$  è uno zero di  $h$  allora  $x(t) = \bar{x}$  è una soluzione costante. Un esempio chiaro è la logistica (figura 1) in cui se  $h(x) = x(1 - \frac{x}{K})$  allora  $x(t) = 0$  e  $x(t) = K$  sono soluzioni costanti.

Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione che non assume mai come valore uno degli zeri di  $h$ . Allora possiamo scrivere

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t) \quad (\text{su } J)$$

Da cui integrando entrambi i membri

$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} dt = \int g(t) dt \iff \int \frac{1}{h(\xi)} d\xi = \int g(t) dt$$

Dove si è fatto il cambio di variabile  $\xi = x(t)$ . Allora se  $H$  e  $G$  sono primitive di  $\frac{1}{h}$  e di  $g$  rispettivamente si ha che

$$H(x(t)) = G(t) + c$$

che è un'equazione che definisce implicitamente la soluzione.

**Esempio 1.3.** Si consideri l'equazione  $x' = rt(x^2 - x)$  con  $r \in \mathbb{R}$ . Allora si ha che  $h(x) = x^2 - x$  e  $g(t) = rt$ . Gli zeri di  $h$  sono 0 e 1 per cui  $x(t) = 1$  e  $x(t) = 0$  sono le soluzioni costanti.

Se invece  $x(t) \neq 0, 1$  allora si ha

$$\frac{x'}{x^2 - x} = 2t \iff \int \frac{1}{x^2 - x} dx = \int 2t dt \iff \log \left| \frac{x-1}{x} \right| = t^2 + c$$

quindi abbiamo che, elevando entrambi i membri alla base  $e$ , e sostituendo  $e^c \in \mathbb{R}$  con  $C > 0$ .

$$\left| \frac{x-1}{x} \right| = Ce^{t^2}$$

Poiché in questo caso il segno di  $\frac{x-1}{x}$  è costante su  $J$  (infatti  $x(J)$  è connesso e non contiene né 0 né 1). Scegliendo quindi  $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  abbiamo

$$x(t) = \frac{1}{1 - Ke^{t^2}} \quad K \neq 0$$

Notiamo che invece per  $K = 0$  si recupera la soluzione costante  $x(t) = 1$ .

**Esempio 1.4** (Equazioni lineari del primo ordine).

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

con  $p, q$  funzioni continue su un intervallo  $I$ .

Sia  $P(t)$  una primitiva di  $p(t)$ . Moltiplichiamo per  $e^{P(t)}$ .

$$e^{P(t)}x'(t) + e^{P(t)}p(t)x(t) = e^{P(t)}q(t)$$

Dove il primo membro è evidentemente la derivata di  $(e^{P(t)}x(t))$ , quindi integrando entrambi i membri si ottiene

$$e^{P(t)}x(t) = \int e^{P(t)}q(t)dt$$

(Cioè  $e^{P(t)}x(t)$  è una primitiva di  $e^{P(t)}q(t)$ ). Esplicitando  $x(t)$  otteniamo

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}q(t)dt$$

Se consideriamo il problema con dato  $x(t_0) = x_0$  la soluzione si può ottenere direttamente integrando tra  $t_0$  e  $t$ , ossia

$$\begin{cases} P(t) = \int_{t_0}^t p(s)ds \\ x(t) = e^{-P(t)} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{P(s)}q(s)ds \right) \end{cases}$$

Nel caso particolare dell'equazione  $x' = ax$ , con  $a \in \mathbb{R}$  otteniamo (anche con variabili separabili) che  $x(t) = Ce^{at}$ . In modo analogo si vede che le soluzioni di  $\varphi' = a\varphi$  con  $a \in \mathbb{C}$  e  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{C}$  sono della forma  $\varphi(t) = Ce^{at}$  con  $C \in \mathbb{C}$

Per *esercizio*, Sapendo che la derivata  $\varphi'$  di  $\varphi : t \mapsto \varphi_1 + i\varphi_2$  con  $\varphi_1, \varphi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\varphi' : t \mapsto \varphi'_1 + i\varphi'_2$  mostrare che  $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$ , con  $a \in \mathbb{C}$ .

**Esempio 1.5** (Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti).

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

*Osservazione.* – L'insieme  $V$  delle soluzioni è uno spazio vettoriale

– La modellistica suggerisce che  $\dim V = 2$

Ipotizziamo un tentativo di soluzione della forma  $x(t) = e^{\lambda t}$  allora abbiamo  $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$  e  $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ . Sostituendo nella equazione e dividendo per  $e^{\lambda t} \neq 0$  otteniamo

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (A)$$

Se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  allora (A) ha due soluzioni  $\lambda_1, \lambda_2$  distinte, quindi  $e^{\lambda_1 t}$  e  $e^{\lambda_2 t}$  sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Se  $\Delta = 0$  (A) ha una soluzione  $\lambda$ , per cui  $e^{\lambda t}$  è una soluzione e si verifica che anche  $te^{\lambda t}$  è soluzione linearmente indipendente con la precedente.

Se  $\Delta < 0$  passiamo in campo complesso e cerchiamo  $u(t) = x(t) + iy(t)$  con  $x, y : J \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u : J \rightarrow \mathbb{C}$ , tale che anche  $u$  sia soluzione dell'equazione differenziale. Considereremo poi  $x(t) = \operatorname{Re}(u(t))$ . Come sopra ipotizziamo  $t \mapsto e^{\lambda t}$  soluzione e otteniamo la stessa equazione (A), allora esistono due soluzioni  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , poiché i coefficienti di (A) sono reali. Allora otteniamo le due soluzioni dell'equazione differenziale

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

che sono linearmente indipendenti. Ma lo spazio delle soluzioni generato da queste equazioni ammette anche la base **reale** data da

$$\frac{u + \bar{u}}{2} \text{ e } \frac{u - \bar{u}}{2i}$$

che in questo caso sono  $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$  e  $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ .

In tutti e tre i casi, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono due soluzioni linearmente indipendenti, allora una generica soluzione  $x(t)$  è della forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Nel caso completo l'equazione è del tipo

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

Sia allora  $\bar{x}(\cdot)$  una soluzione ("nota"). L'integrale generale è dato dalle funzioni della forma

$$x(t) = x_o(t) + \bar{x}(t)$$

al variare di  $x_o$  tra le soluzioni dell'equazione omogenea associata, ossia  $ax'' + bx' + cx = 0$ . Questo perché se  $L : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$  un operatore lineare, ad esempio proprio  $Lx = (t \mapsto ax''(t) + bx'(t) + cx(t))$ , allora il problema  $Lx = f$  ha soluzione  $L^{-1}(f) = \bar{x} + \ker L$  con  $\bar{x}$  tale che  $L\bar{x} = f$  e  $\ker L$  lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata  $Lx = 0$ .

In alcuni casi è particolarmente facile trovare una soluzione  $\bar{x}$  particolare, ad esempio ipotizzando ne esista una della forma di un polinomio di  $t$ , e cercando i coefficienti per cui funzioni. In altri casi ha più senso cercare una soluzione particolare di forme diverse, ad esempio con esponenziali o seni e coseni o come ti pare, alla fine se il problema ti chiede di trovare una soluzione particolare è perché si può fare e allora ci pensi un attimo a occhio si vede facilmente.

Sia  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Fissato  $(t_0, x_0) \in D$  consideriamo il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Proposizione 1.1.** *Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  funzione continua tale che  $(t, x(t)) \in D$  per ogni  $t \in J$ , ossia ha grafico in  $D$ . Allora sono equivalenti:*

a)  $x$  è soluzione del problema ai valori iniziali

$$b) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \text{ per ogni } t \in J$$

Per quanto la proposizione 1.1 sia abbastanza ovvia, ci serve per poter dimostrare il problema di esistenza e unicità delle soluzioni, poiché permette di trasformare il problema di trovare una soluzione in un problema del punto fisso.

### Definizione 1.2: U

una funzione  $g : G \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  è detta **lipschitziana** se esiste una costante  $L > 0$  tale che

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in G$$

**Proposizione 1.2.** *Sia  $G$  un aperto convesso limitato e  $g \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^k)$ . Allora  $g$  è lipschitziana.*

*Dimostrazione.* Siano  $x_1, x_2 \in G$  aperto convesso limitato. Per ogni  $t \in [0, 1]$  Sia

$$\varphi(t) = g(x_1 + t(x_2 - x_1))$$

Allora si ha che

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 (Dg)(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) dt \\ &\leq \int_0^1 |Dg(x_1 + t(x_2 - x_1))| |x_2 - x_1| dt \leq \left( \max_{\bar{G}} |Dg| \right) |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.3.** Sia  $G \in \mathbb{R}^m$  aperto e  $g \in C^1(G, \mathbb{R}^k)$ . Allora  $g$  è lipschitziana su ogni compatto  $K \subseteq G$  (anche detto localmente lipschitziana).

**Esempio 1.6.** La funzione  $x \mapsto x^2$  non è ovviamente lipschitziana su  $\mathbb{R}$ . Eppure per ogni compatto  $K \subseteq \mathbb{R}$  (ad esempio  $[-M, M]$ ) la funzione è lipschitziana su  $K$ , infatti

$$|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2M|x - y|$$

### Definizione 1.3: S

ia  $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$  aperto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  (con  $f(t, \mathbf{x})$ ). Diciamo che  $f$  è localmente lipschitziana nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima se per ogni compatto  $K \subseteq D$  esiste una costante  $L_K > 0$  tali che:

$$\forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in K, \quad \|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\| \leq L_K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

*Osservazione.* Se ho una funzione  $C^1(D, \mathbb{R}^N)$  allora è per la proposizione precedente localmente lipschitziana in entrambe le variabile, quindi per ogni  $K \subseteq D$  compatto esiste  $L_K > 0$  tale che

$$\forall (t_1, \mathbf{x}), (t_2, \mathbf{y}) \in K \quad \|f(t_1, \mathbf{x}) - f(t_2, \mathbf{y})\| \leq L_K \|(t_1, \mathbf{x}) - (t_2, \mathbf{y})\|$$

quindi in particolare se  $t_1 = t_2 = t$  abbiamo la locale lipschitzianità nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima

## 1.2 Esistenza e unicità delle soluzioni

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$  aperto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $(t_0, x_0) \in D$  e consideriamo il problema

$$(P) \quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Siano  $a, b > 0$  tali che

$$R_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0) \subseteq D$$

### Teorema 1.4: Esistenza e Unicità

Sia  $f$  localmente lipschitziana nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima. Allora

- Esiste una soluzione di  $(P)$  definita in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , con  $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$ , dove  $M = \max_{R_{a,b}} |f|$
- Nell'intervallo  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  la soluzione, ossia se  $\varphi_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\varphi_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$  sono soluzioni di  $(P)$  allora  $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in J_1 \cap J_2 \subseteq$

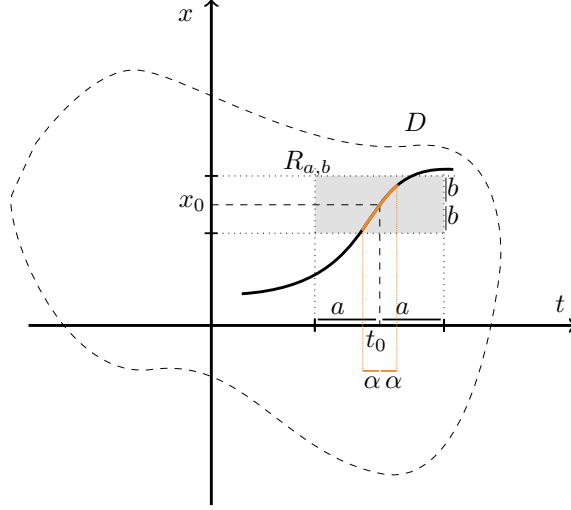


Figura 8: Problema ai valori iniziali,  $\alpha = \frac{b}{M}$  in questo caso, evidentemente

$$[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

*Dimostrazione.* Abbiamo visto che se  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  con  $J$  intervallo è una funzione continua con grafico in  $D$ , allora  $x$  è soluzione di  $(P)$  se e solo se

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in J$$

Sia  $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \overline{B}_b(x_0)$ . Poniamo ora

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

Dove risolvere  $(P)$  diventa mostrare che esiste un punto fisso di  $T$ . Verifichiamo che  $(Tx)(\cdot)$  assume valori in  $\overline{B}_b(x_0)$ . Infatti

$$|(Tx)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$$

Allora otteniamo che  $T : C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0)) \rightarrow C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0))$ . Possiamo quindi iterare l'applicazione di  $T$ , quindi abbiamo la successione

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \dots, x_n = Tx_{n-1}$$

Ora quindi mostriamo che la successione  $x_n$  converge uniformemente con il criterio di Cauchy

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \\ |x_2(t) - x_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))| ds \right| \leq \\ &\leq L_R \left| \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_0(s)| ds \right| \leq ML_R \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = \frac{ML_R}{2} |t - t_0|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x_3(t) - x_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))| ds \right| \leq \\
&\leq L_R \left| \int_{t_0}^t |x_2(s) - x_1(s)| ds \right| \leq \frac{ML_R^2}{2} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^2 ds \right| = \frac{ML_R^2}{6} |t - t_0|^3 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

E in generale abbiamo

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \frac{ML_R^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}$$

Quindi abbiamo che se fissiamo  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $m > n$

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{ML_R^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1} \leq \frac{M}{L_R} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(L_R \alpha)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Che è il resto di una serie esponenziale, quindi per  $m, n$  sufficientemente grandi la serie converge a zero, per cui abbiamo mostrato la convergenza uniforme di  $x_k$ . Ora sappiamo

$$x_k \longrightarrow x \in C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B}_b(x_0)) \quad \text{uniformemente}$$

Ora semplicemente possiamo portare il limite sotto il segno di integrale perché  $f(\cdot, x_k(\cdot)) \rightarrow f(\cdot, x(\cdot))$  uniformemente in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  e quindi otteniamo che  $x$  è soluzione di (P).

Ora procediamo con l'unicità. Sia  $z : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione di (P). Consideriamo i valori di  $t \in J \cap [t_0, t_0 + \alpha]$  e analogamente per  $t \leq t_0$  e vogliamo mostrare che  $z(t) = x(t)$  con  $x(\cdot)$  la soluzione costruita prima. Allora abbiamo per ipotesi che

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds$$

E valutiamo quindi

$$|z(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, z(s))| ds$$

Fissiamo ora un valore  $\bar{t} \in [t_0, t_0 + \alpha]$  arbitrario in  $J$  e  $t \in [t_0, \bar{t}]$ . Allora  $(s, z(s))$  per  $s \in [t_0, \bar{t}]$  è in un compatto di  $D$ . Sia  $M_1$  il massimo di  $f$  su tale compatto. Allora

$$|z(t) - x_0| \leq M_1 |t - t_0| \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}]$$

Ora procediamo con

$$\begin{aligned}
|z(t) - x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, z(s)) - f(s, x_0)| ds \leq L_1 \int_{t_0}^t |z(s) - x_0| ds \leq \\
&\leq L_1 M_1 \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = \frac{L_1 M_1}{2} |t - t_0|^2
\end{aligned}$$

Con  $L_1$  una costante di Lipschitz per  $f$  relativa a un compatto che contiene sia  $R$  che il grafico di  $z$ . Procedendo in questo modo nuovamente si ottiene in generale

$$|z(t) - x_k(t)| \leq \frac{M_1 L_1^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1} \longrightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty$$

□

*Osservazione* (Unicità “globale”). Sia  $x' = f(t, x)$  localmente lipschitziana in  $x$  uniformemente in  $t$ . Siano  $x_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $x_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$  due soluzioni tali che esista  $t_0 \in J := J_1 \cap J_2$  con  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  allora  $x_1 = x_2$  su  $J$ . Quindi la funzione

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & t \in J_1 \\ x_2(t) & t \in J_2 \end{cases}$$

è soluzione su  $J_1 \cup J_2$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $t > t_0$  Allora sia

$$\bar{t} := \sup\{t \in J \mid x_1(t) = x_2(t) \text{ su } [t_0, t]\}$$

Allora se  $\bar{t} = \sup J$  abbiamo finito, altrimenti consideriamo  $\bar{t} < \sup J$ . Per continuità quindi  $x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t})$ . Considerando ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\bar{t}) = x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) \end{cases}$$

e ora per il teorema di esistenza e unicità esiste un intorno destro di  $\bar{t}$  si ha  $x_1(t) = x_2(t)$ , che è in contraddizione con la definizione di  $\bar{t}$ .  $\square$

Se manca l'ipotesi di lipschitzianità di  $f$  allora può cadere l'unicità. Costruiamo un famoso esempio.

**Esempio 1.7.**  $N = 1$ ,  $f(x) = \sqrt{|x|}$ . È evidente non lipschitziana in quanto la derivata non è limitata. Consideriamo il problema di Cauchy

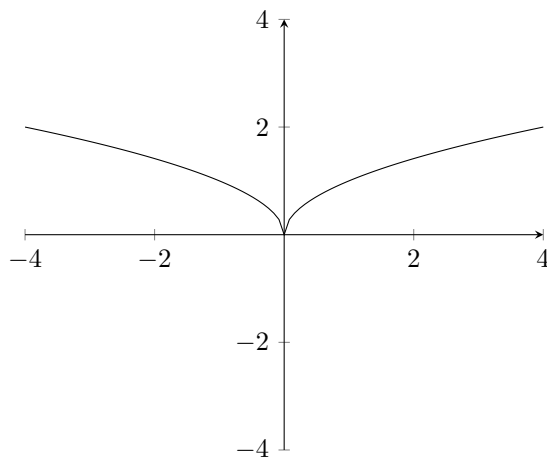


Figura 9: Grafico di  $f(x) = \sqrt{|x|}$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Sia ora  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione, con  $0 \in J$ . Allora  $x(\cdot)$  è monotona non decrescente; consideriamo  $t \in J, t \geq 0$  e sia

$$c_+ = \sup\{t \geq 0 : x(\cdot) = 0 \text{ su } [0, t]\}$$

Ora se  $c_+ = +\infty$  allora  $x(\cdot) = 0$  su  $[0, +\infty]$ . Altrimenti, per  $t > c_+$  si ha che  $x(t) > 0$  quindi otteniamo

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{|x(t)|}} = 1 \iff \int \frac{x'(s)}{\sqrt{|x(s)|}} ds = t + c \iff 2\sqrt{|x(t)|} = t + c$$

Allora  $x(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$  e poiché  $x(c_+) = 0$  allora  $c = -c_+$  quindi

$$x(t) = \frac{1}{4}(t - c_+)^2 \quad \forall t \geq c_+$$

Similmente per  $t < 0$  definendo similmente  $c_-$  abbiamo che le soluzioni del problema sono del tipo

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t - c_+)^2 & t \geq c_- \\ 0 & t \in [c_-, c_+] \\ -\frac{1}{4}(t - c_-)^2 & t < c_- \end{cases}$$

Dove  $c_-, c_+ \geq 0$  arbitrari (eventualmente anche  $+\infty$ ). Quindi abbiamo infinite soluzioni.

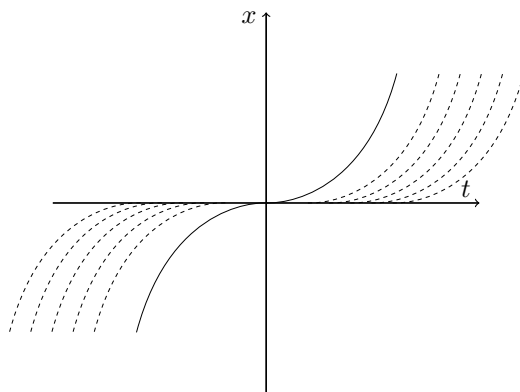


Figura 10: Pennello di Peano

Comunque abbiamo l'esistenza della soluzione. Esiste anche un teorema a riguardo

#### Teorema 1.5: Peano

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua e  $(t_0, x_0) \in D$ . Sia  $R_{a,b}$  come nel teorema di esistenza e unicità. Allora il problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione definita in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , dove  $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$  con  $M = \max_{R_{a,b}} |f|$ .



Dimostreremo questo risultato usando un teorema di compattezza abbastanza potente, che invece non dimostriamo. Procediamo con della terminologia.

Sia  $\varphi_n : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Diciamo che

- La successione  $\varphi_n$  è **equilimitata** se esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a_0, b_0] \quad |\varphi_n(x)| \leq M$$

- La successione  $\varphi_n$  è **equicontinua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t', t'' \in [a_0, b_0] \quad |t' - t''| < \delta \implies |\varphi_n(t') - \varphi_n(t'')| < \varepsilon$$

### Teorema 1.6: Ascoli - Arzelà

Sia  $\varphi_n$  una successione di funzioni equicontinue ed equilimate su  $[a_0, b_0]$ . Allora esiste una sottosuccessione uniformemente convergente in  $[a_0, b_0]$

*Dimostrazione del teorema di Peano.* Sia  $N = 1$  Fissato  $n \in \mathbb{N}$  suddividiamo

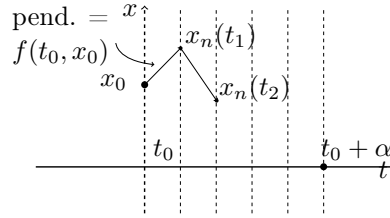


Figura 11: Costruzione successione  $x_n$

$[t_0, t_0 + \alpha]$  in  $n$  parti. Definiamo poi  $x_n : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  come segue (affine a tratti).

$$\begin{aligned} x_n(t) &:= x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1] \\ x_n(t) &:= x_n(t_1) + f(t_1, x_n(t_1))(t - t_1) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \\ &\vdots \\ x_n(t) &:= x_n(t_{n-1}) + f(t_{n-1}, x_n(t_{n-1}))(t - t_{n-1}) \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n] \end{aligned}$$

Notare che la pendenza di ogni tratto non supera, in valore assoluto,  $M$ , quindi  $M\alpha \leq M \frac{\alpha}{M} = \alpha$

Ora vogliamo mostrare che la successione  $\{x_n\}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Ascoli - Arzelà, infatti

- *equilimitatezza* I valori sono in  $[x_0 - b, x_0 + b]$
- *equicontinuità* Sia  $\gamma_n = f(t_k, x_n(t_k))$  per  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  costante a tratti. Allora comunque presi  $t', t'' \in [t_0, t_0 + \alpha]$  si ha che

$$(\star) \quad x_n(t') - x_n(t'') = \int_{t'}^{t''} \gamma_n ds \implies |x_n(t') - x_n(t'')| \leq M|t' - t''|$$

Allora esiste una sottosuccessione uniformemente convergente  $x_{n_k} \rightarrow x$  in  $[t_0, t_0 + \alpha]$ . Per semplicità notazionale supponiamo che  $n_k = n$  quindi abbiamo  $x_n \rightarrow x$ . Ora da  $(\star)$  otteniamo che per  $t' = t, t'' = t_0$

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \gamma_n(s) ds$$

Ora vorremmo poter passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere la soluzione del problema di Cauchy, ma necessitiamo di convergenza uniforme di  $\gamma_n(\cdot)$  a  $f(\cdot, x(\cdot))$ . Infatti abbiamo che, fissando  $\varepsilon > 0$  esiste per continuità uniforme di  $f$  un  $\delta > 0$  tale che

$$\forall (t_1, x_1), (t_2, x_2) \in R_{a,b} \quad |(t_1, x_1) - (t_2, x_2)| \leq \delta \implies |f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| \leq \varepsilon$$

Ora se  $s \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned} |\gamma_n(s) - f(s, x(s))| &= |f(t_k, x_n(t_k)) - f(s, x(s))| \leq \\ &\leq |f(t_k, x_n(t_k)) - f(s, x_n(s))| + |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \end{aligned}$$

Ricordando ora che  $|x_n(t') - x_n(t'')| \leq M|t' - t''|$  abbiamo che se  $n$  è sufficiente grande si ha che  $M/\frac{\alpha}{n} \leq \delta$  e allora  $|x_n(t_k) - x_n(s)| \leq \delta$  e quindi  $|f(t_k, x_n(t_k)) - f(s, x_n(s))| \leq \varepsilon$ . Inoltre per la convergenza uniforme di  $x_n$  a  $x$  si ha che  $|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| \leq \varepsilon$ . Mettendo assieme i pezzi abbiamo quindi la convergenza uniforme di  $\gamma$  e quindi possiamo passare al limite sotto il segno di integrale e ottenere che  $x$  è soluzione del problema di Cauchy in  $[t_0, t_0 + \alpha]$   $\square$

**Proposizione 1.7.** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua e  $K \subseteq D$  compatto. Allora esiste  $\alpha > 0$  (dipendente solo da  $K$ ) tale che, per ogni  $(t_0, x_0) \in K$  il problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammette soluzione definita in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

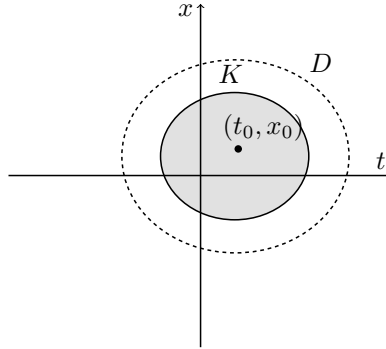


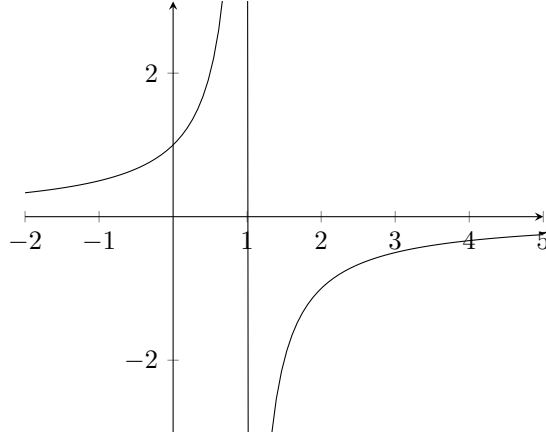
Figura 12: compatto

*Osservazione.* Modificando la costruzione della dimostrazione del teorema di Peano operando una suddivisione in  $n$  parti anche di  $[x_0 - b, x_0 + b]$  e scegliendo su ogni tratto la pendenza  $\max f$  o  $\min f$  sul quadratino contenente  $(t_k, x_n(t_k))$  (con qualche complicazione in più se becchi il punto di cambio quadratino) si ottengono due soluzioni del problema di Cauchy: le soluzioni massimale e minimale rispettivamente. Nell'esempio  $x' = \sqrt{|x|}$  abbiamo in particolare che 0 è la soluzione minimale e  $t^2$  è la soluzione massimale.

**Esempio 1.8.** Sia  $f(t, x) = x^2$  e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Allora la soluzione è  $x(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{x_0}}$  che a prescindere di come si fa non può essere definita in  $t = x_0$ . Un obiettivo dei prossimi teoremi sarà capire quando si può prolungare il dominio su tutto  $\mathbb{R}$  o su molta parte.



Proviamo ora a guardare alla stima sull'intervallo di esistenza, data dal Teorema di esistenza e unicità. Allora, ricordando l'immagine 8 abbiamo che è definita in  $[-\alpha, \alpha]$  con  $\alpha = \min(a, b/M)$  e  $M = \max |f| = \max_{R_{a,b}} |x^2| = \max_{[1-b, 1+b]} (1+b)^2$ . Quindi abbiamo  $\alpha = \min(a, \frac{b}{(1+b)^2})$ . Poiché possiamo prendere  $a$  arbitrariamente grande ( $f$  è definito su tutto  $\mathbb{R}^2 \ni (t, x)$ ) allora  $\alpha = \frac{b}{(1+b)^2}$ .

### 1.3 Prolungamento

Sia in seguito  $f : D \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua e  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione di  $x' = f(t, x)$ .

#### Definizione 1.4: D

iciamo **prolungamento** di  $x$  ogni soluzione

$$\hat{x} : \hat{J} \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \hat{J} \not\subseteq J, \quad \hat{x}|_J = x$$

se  $x(\cdot)$  non ammette prolungamento diciamo che è definita su un intervallo massimale.

#### Teorema 1.8: Prolungamento

Sia  $f$  continua, allora

- a) Se  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  è definita su un intervallo massimale, questo è aperto. Posto  $J = (\omega_-, \omega_+)$  risulta: Per ogni  $K \subseteq D$  compatto esiste  $U$  intorno di  $\omega_+$  ( $\omega_-$ ) tale che

$$\forall t \in U \cap J \quad (t, x(t)) \notin K$$

ossia il grafico di  $x$  abbandona definitivamente ogni compatto, per  $t \rightarrow \omega_+$  ( $\omega_-$ ). Scrivereemo anche

$$(t, x(t)) \rightarrow \partial D \quad \text{per } t \rightarrow \omega_{\pm}$$

- b) Ogni soluzione ammette un prolungamento a un intervallo massimale

### Conseguenze per l'esistenza globale

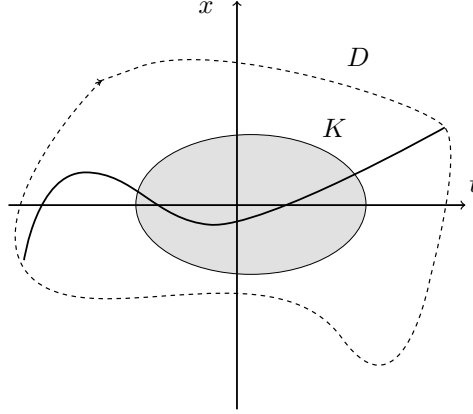


Figura 13: Illustrazione del teorema di prolungamento

**Proposizione 1.9.** Sia  $D = I \times \Omega$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto. Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione e  $J$  massimale. Supponiamo esiste  $Y \subseteq \Omega$  compatto tali che

$$\forall t \in J \quad x(t) \in Y$$

Allora  $J = I$  e viene chiamata **esistenza globale**

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $\omega_+ = \sup I$ . Se fosse  $\omega_+ < \sup I$ , preso comunque  $t_0 \in J$  si avrebbe

$$(t, x(t)) \in [t_0, \omega_+] \times Y \quad t_0 \leq t < \omega_+$$

che sarebbe assurdo perché significherebbe che il grafico di  $x$  è contenuta in un compatto  $\square$

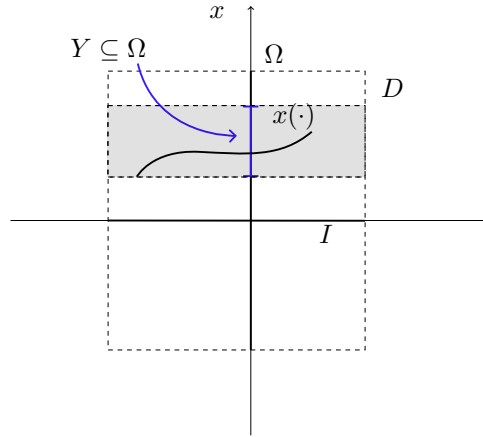


Figura 14: Esistenza Globale

**Esempio 1.9.** Consideriamo la logistica per esempio

$$x' = rx(1 - \frac{x}{K})$$

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x' = rx(1 - \frac{x}{K}) \\ x(0) = x_0 \in (0, K) \end{cases}$$

Il teorema di esistenza e unicità garantisce l'esistenza in  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] = [-\alpha, \alpha]$ . Sia  $\hat{x}$  un prolungamento assicurato dal teorema di prolungamento. Per semplicità sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  la soluzione di (P) con  $J$  massimale. Sappiamo che le costanti 0 e  $K$  sono soluzioni. Allora per unicità  $\forall t \in J, x(t) \in (0, K)$  e quindi  $J = \mathbb{R}$ .

**Esempio 1.10.** Similmente abbiamo per (esercizio)

$$x' = (t^2 + t + 1)x^2 \log(1 + (1 - \frac{x}{K})^2)$$

**Proposizione 1.10.** Sia  $D = I \times \mathbb{R}$  (quindi  $N = 1$ ) e  $x : J \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione con  $J$  massimale. Esistono

$$x_1, x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

funzioni continue (non necessariamente soluzioni) tali che

$$\forall t \in J : x_1$$

Allora  $J = I$

*Dimostrazione.* Similmente a prima, l'idea è che deve raggiungere il bordo di  $\Omega$  e non potendolo raggiungere "in verticale" deve raggiungerlo "in orizzontale". Più precisamente, fissiamo  $t_0 \in J$  e  $\beta \in (t_0, \sup I)$ . Sia  $m = \min_{[t_0, \beta]} x_1$  e  $M = \max_{[t_0, \beta]} x_2$ . Allora

$$\forall t \in J \cap [t_0, \beta] \quad x(t) \in [m, M] =: Y$$

Allora per il risultato precedente  $J \supseteq [t_0, \beta)$ . Per l'arbitrarietà di  $\beta$  si ha  $\sup J = \sup I$   $\square$

**Proposizione 1.11.** Similmente a prima, ma sia ora  $N \geq 1$ . Sia  $D = I \times \mathbb{R}^N$ . Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione con  $J$  massimale. Se esiste  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua, tale che

$$\forall t \in J \quad |x(t)| \leq \rho(t)$$

Allora  $J = I$

*Dimostrazione.* Similmente a sopra  $\square$

**Proposizione 1.12.** Sia  $D = I \times \mathbb{R}^N$  e  $f$  limitata. Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione con  $J$  massimale. Allora  $J = I$

*Dimostrazione.* se  $t_0 \in J$  per ogni  $t \in J$  si ha che

$$\begin{aligned} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds &\iff |x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq \\ &\leq |x(t_0)| + M|t - t_0| =: \rho(t) \quad \forall t \in J \end{aligned}$$

dove  $M$  è un maggiorante per  $|f|$ . A questo punto si applica il caso precedente  $\square$

*Dimostrazione del Teorema di Prolungamento.*

- a) Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzione con  $J$  massimale. Allora  $J$  è aperto, infatti se ad esempio fosse

$$\omega_+ := \sup J \in J$$

Allora  $(\omega_+, x(\omega_+)) \in D$ . In tal caso  $x$  sarebbe prolungabile considerando la soluzione di  $z' = f(t, z); z(\omega_+) = x(\omega_+)$  che è chiaramente assurdo perché  $J$  è massimale.

Non dimostriamo che  $(t, x(t)) \rightarrow \partial D$  per  $t \rightarrow \omega_+$ .

- b) Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione. Mostriamo che ammette un prolungamento massimale (destro wlog). Sia  $b = \sup J$ . Se  $x(\cdot)$  non fosse prolungabile in  $t = b$  allora  $J$  sarebbe massimale. Supponiamo allora che

$$x : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ soluzione}$$

Il grafico è compatto. Sia  $K \subseteq D$  un compatto contenente il grafico di  $x|_{[t_0, b]}$ . Sappiamo ora che esiste  $\alpha_K > 0$  tale che  $\forall (\tau_0, z_0) \in K$ , il problema di Cauchy  $z' = f(t, z); z(\tau_0) = z_0$  ha soluzione in  $[\tau_0 - \alpha_K, \tau_0 + \alpha_K]$ . Concludiamo quindi che possiamo prolungare  $x$  fino a  $b + \alpha_K$  considerando  $(\tau_0, z_0) = (b, x(b))$ . Se ora  $(b + \alpha_K, x(b + \alpha_K)) \in K$  si ripete il ragionamento. Poiché  $K$  è compatto, dopo l'applicazione del ragionamento un numero finito di volte, poiché  $\alpha_K$  è il medesimo ad ogni passo, il grafico esce da  $K$ , cioè esiste una  $b_K$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_K]$  e  $(b_K, x(b_K)) \notin K$ . Appliciamo il metodo considerando una famiglia  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  con  $V_j$  aperto e  $V_j \subset \subset D$ ,  $V_j \rightarrow D$  crescenti, ossia  $V_j \subseteq V_{j+1}$  e  $\bigcup_j V_j = D$  e inoltre  $\overline{V_1} = \text{graf}(x|_{[t_0, b]})$ . Appliciamo ora lo schema precedente con  $K = \overline{V_1}$  e allora esiste  $b_1 = b_{\overline{V_1}}$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_1]$  e  $(b_1, x(b_1)) \notin \overline{V_1}$  (per semplicità notazionale supponiamo che il grafico di  $x|_{[t_0, b_1]}$  sia contenuto in  $V_2$ ) allora ora iterando abbiamo che esiste  $b_2 = b_{V_2}$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_2]$  e  $(b_2, x(b_2)) \notin V_2$  e così via. Abbiamo ora  $b_1 < b_2 < \dots < b_k < \dots$  tale che  $x$  è definita su  $[t_0, b_k]$  e  $(b_k, x(b_k)) \notin V_k$ . Ne seguirà che, posto  $\omega_+ = \sup_{k \in \mathbb{N}} b_k$  si ha che  $x$  è definita in  $J := [t_0, \omega_+)$ . Se  $\omega_+ = +\infty$  allora banalmente  $J$  è massimale destro. Se  $J$  non fosse massimale si avrebbe  $x(\cdot)$  definita in  $\omega_+$  e  $(\omega_+, x(\omega_+)) \in D$ . Ciò è incompatibile con

$$\overline{V_k} \not\ni (b_k, x(b_k)) \rightarrow (\omega_+, x(\omega_+)) \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

□

## 1.4 Stime

### Teorema 1.13: Lemma di Gronwall

Sia  $\beta \in C^0(I)$ ,  $\beta \geq 0$ ;  $a \in I$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $u \in C^0(I)$  tali che

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \quad \forall t \in I, t \geq a$$

Allora

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds} \quad \forall t \in I, t \geq a$$

*Dimostrazione.*

□

**Applicazione al problema di Cauchy** Consideriamo l'equazione differenziale  $x' = f(t, x)$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua localmente lipschitziana. Siano  $x_1, x_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  due soluzioni. Fissiamo  $t_0 \in J$  si ha che

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s))ds \\ x_2(t) &= x_2(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s))ds \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))|ds$$

Fissato  $\bar{t} > t_0$ , se  $t \in [t_0, \bar{t}]$  e  $K$  è un compatto di  $D$  contenente i grafici di  $x_{1,2}|_{[t_0, \bar{t}]}$ . Sia allora  $L_K$  una costante di Lipschitz di  $f$  relativa a  $K$ . Allora

$$\underbrace{|x_1(t) - x_2(t)|}_{u(t)} \leq \underbrace{|x_1(t_0) - x_2(t_0)|}_{\alpha} + \underbrace{L_K}_{\beta} \int_{t_0}^t \underbrace{|x_1(s) - x_2(s)|}_{u(s)} ds$$

Che rispetta le ipotesi del lemma di Gronwall e quindi sappiamo che

$$\underbrace{|x_1(t) - x_2(t)|}_{u(t)} \leq \underbrace{|x_1(t_0) - x_2(t_0)|}_{\alpha} e^{L_K(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

Da tale schema scende anche l'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Infatti se  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  abbiamo

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq 0 \quad \forall t \in J, t \geq t_0$$

Iniziamo ora con un'idea del prossimo teorema, con un'intuizione geometrica. Sia dato un campo di pendenze ( $N = 1$ ). Ossia

$$(t, x) \mapsto \omega(t, x) \in \mathbb{R}^2$$

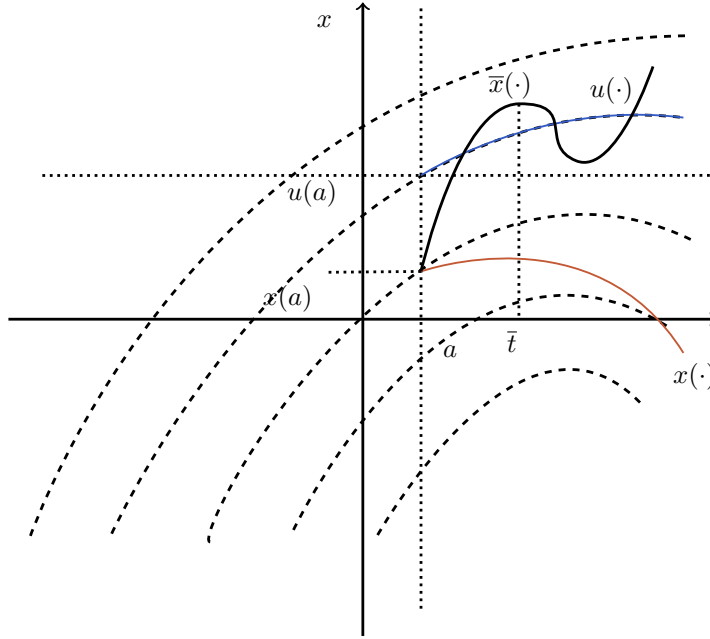


Figura 15: La curva  $x(\cdot)$  ha pendenza sempre minore della pendenza che il campo di pendenze assegna in ogni punto, mentre la curva  $u(\cdot)$  segue la pendenza in ogni punto e ha valore iniziale  $u(a)$  non minore di  $x(a)$

#### Teorema 1.14: Teorema del confronto

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e  $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua e localmente lipschitziana in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ . Sia  $x, u : J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , sia  $a \in J$ . Se

$x'(t) \leq \omega(t, x(t))$  e  $u'(t) = \omega(t, u(t))$ , se  $x(a) \leq u(a)$  allora

$$x(t) \leq u(t) \quad \forall t \in J, t \geq a$$

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista un valore  $\bar{t} \in J$  con  $\bar{t} > a$  tale che  $x(\bar{t}) > u(\bar{t})$ . Sia  $t_0 = \sup\{t \in [0, \bar{t}] : x(t) \leq u(t)\}$ . Allora  $x(t_0) = u(t_0)$  (per continuità) e  $x(t) > u(t)$  per  $t \in (t_0, \bar{t}]$ . Adesso per ogni  $t \in [t_0, \bar{t}]$  abbiamo

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds \leq x(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, x(s)) ds$$

e

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds = u(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, u(s)) ds$$

Sottraendo membro a membro e prendendone il module otteniamo

$$x(t) - u(t) \leq x(t_0) - u(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, x(s)) - \omega(s, u(s)) ds$$

Sia ora  $L_K$  una costante di Lipschitz relativa a un compatto  $K$  contenente i grafici di  $x, u$  su  $[t_0, \bar{t}]$ . Allora

$$x(t) - u(t) \leq x(t_0) - u(t_0) + L_K \int_{t_0}^t |x(s) - u(s)| ds$$

Ma ora in  $[t_0, \bar{t}]$  possiamo togliere il modulo perché abbiamo che  $x(t) \geq u(t)$ . Abbiamo allora

$$\underbrace{x(t) - u(t)}_{u(t)} \leq \underbrace{x(t_0) - u(t_0)}_{\alpha=0} + \underbrace{L_K}_{\beta} \int_{t_0}^t \underbrace{x(s) - u(s)}_{u(s)} ds$$

Che rispetta le ipotesi del lemma di Gronwall e quindi sappiamo che

$$x(t) - u(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}]$$

che è assurdo. □

**Esempio 1.11.** Consideriamo

$$\begin{cases} x' = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) = x_0 < 0 \end{cases}$$

Allora evidentemente  $x' \leq -\frac{r}{k}x^2$  per  $x < 0$  e quindi abbiamo

$$\begin{cases} x' \leq -\frac{r}{k}x^2 \\ x(0) = x_0 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -\frac{r}{k}u^2 \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

Ne concludiamo che  $x(t) \leq u(t)$  per il teorema del confronto. In particolare abbiamo che  $\omega_+ < +\infty$

Vogliamo ora fare un ragionamento simile per studiare il caso  $x_0 > k$ . Se consideriamo la parabola di equazione  $y = rx(1 - \frac{x}{k})$  abbiamo che sicuramente esiste una parabola  $-\gamma x^2$  tale per cui  $y \leq -\gamma x^2$  per  $x \geq x_0$  e quindi abbiamo che

$$\begin{cases} x' \leq -\gamma x^2 \\ x(0) = x_0 > k \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -\gamma u^2 \\ u(0) = x_0 \end{cases}$$

e quindi  $x(t) \geq u(t)$  per il teorema del confronto. In particolare abbiamo che  $x$  ha un asintoto verticale a sinistra (per  $t < 0$ ).



*Osservazione* (Teorema dell'asintoto). Sia  $x : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l \in \mathbb{R} \quad (\text{finito, } x(\cdot) \text{ ha un asintoto})$$

Inoltre esiste  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t)$ . Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$$

Infatti abbiamo

$$x(t+1) - x(t) = x'(\xi_t) \quad \xi_t \in (t, t+1)$$

e portando al limite otteniamo

$$0 = l - l = \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(\xi_t) = 0$$

La conseguenza è che se ho  $x(\cdot)$  soluzione del problema di Cauchy della logistica, allora se  $x \rightarrow l$  per  $t \rightarrow +\infty$  ho che

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \rightarrow rl\left(1 - \frac{l}{k}\right) = 0$$

quindi necessariamente  $l = 0$  (no) oppure  $l = k$  (sì).

## 1.5 Dipendenza continua

### Teorema 1.15

Siano  $f_0, f_j : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con  $j \in \mathbb{N}$  e  $D \in \mathbb{R}^{N+1}$  funzioni continue. Consideriamo i problemi

$$(P_j) \begin{cases} x' = f_0(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (P_0) \begin{cases} x' = f_j(t, x) \\ x(t_0^j) = x_0^j \end{cases}$$

dove  $(t_0^j, x_0^j)$  e  $(t_0, x_0)$  sono assegnati in  $D$ . Supponiamo ora che  $f_j \rightarrow f_0$  uniformemente sui compatti di  $D$ , che  $(t_0^j, x_0^j) \rightarrow (t_0, x_0)$  e supponiamo che  $f_0$  sia localmente Lipschitziana in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ . Sia  $[a, b]$  un intervallo su cui è definita la soluzione  $\varphi_0$  di  $(P_0)$ . Se  $\varphi_j$  risolve  $(P_j)$  allora per  $j$  sufficientemente grande  $\varphi_j$  è definita in  $[a, b]$  e  $\varphi_j \rightarrow \varphi_0$  uniformemente su  $[a, b]$

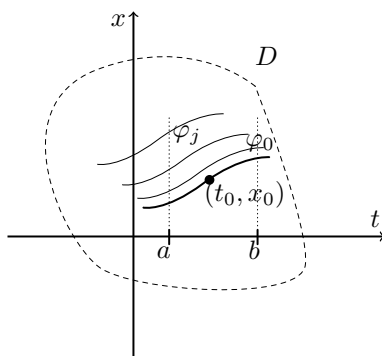


Figura 16: dipcontinua

*Osservazione.* Si noti il caso particolare in cui  $f_j = f_0$ .

Per il precedente teorema esiste anche una forma variante.

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$  aperto e chiamiamo  $G_\lambda := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{N+1} : (t, x, \lambda) \in G\}$ . Supponiamo ora che  $f$  sia continua e tale che  $f(\cdot, \cdot, \lambda)$  sia localmente lipschitziana su  $G_\lambda$  nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima, per ogni  $\lambda$ . In ipotesi di unicità indichiamo con  $x(\cdot, t_0, x_0)$  l'unica soluzione, definita sul suo intervallo massimale  $(\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ . Consideriamo ora il problema

$$(P_\lambda) \begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove  $(t_0, x_0, \lambda)$  è assegnato in  $G$ . Indichiamo con  $x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$  la soluzione di  $(P_\lambda)$  definita nel proprio intervallo massimale  $(\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$ . Allora abbiamo

#### Teorema 1.16

- $\omega_-$  ( $\omega_+$ ) è semicontinua superiormente (inferiormente) in  $G$
- l'insieme

$$E = \{(t, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times G : \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$$

è aperto

- $x : E \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da  $(t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda)$  è continua

#### Definizione 1.5: Semicontinuità

Sia  $X$  uno spazio topologico,  $x_0 \in X$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $f$  è **semicontinua inferiormente** in  $x_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 : f(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad \forall x \in U$$

Dove vale la seguente caratterizzazione

**Proposizione 1.17.** *Sono equivalenti:*

- $f$  è semicontinua inferiormente in  $X$
- $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  è aperto per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$
- l'epigrafico di  $f$ , cioè

$$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

è chiuso

$$iv) \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

*Dimostrazione.*

- $\implies ii)$  Fissiamo  $x_0 \in \{f > \alpha\}$ ; allora  $f(x_0) > \alpha$ . Dalla definizione esiste  $U$  intorno di  $x_0$  tale che  $\forall x \in U$  si ha che  $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon > \alpha$  e quindi  $U \subseteq \{f > \alpha\}$

ii)  $\implies$  iii)

iii)  $\implies$  iv)

iv)  $\implies$  i)

□

*Dimostrazione parziale del Teorema.* Dalla caratterizzazione di semicontinuità inferiore sappiamo che l'insieme  $\{(t, t_0, x_0, \lambda) : t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$  è aperto. Analogamente per  $\{(t, t_0, x_0, \lambda) : t > \omega_-(t_0, x_0, \lambda)\}$ . L'intersezione dà  $E$  aperto. Dimostrare che  $\omega_-$  e  $\omega_+$  sono semicontinue rispettivamente superiormente e inferiormente è molto complicato. □

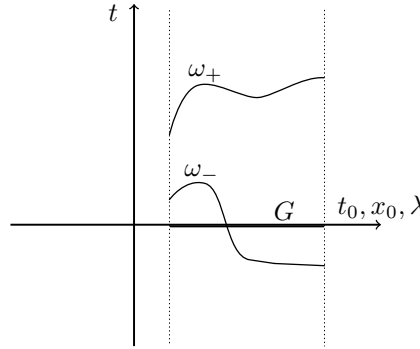


Figura 17: prooftheorem

### Esercizio 1.1

$$(P) \begin{cases} x' = 1 - te^x \\ x(0) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Studiamo quando  $x' > 0$  e abbiamo  $1 - te^x > 0$  e quindi  $te^x < 1$  e  $t < e^{-x}$  e quindi  $x < -\log t$ . Sia ora

$$\bar{t} = \sup\{t \geq t_1 : x(\tau) > \psi(\tau) \forall \tau \in [t_1, t]\}$$

Supponiamo ora  $\bar{t} < +\infty$  e allora sia  $\delta(t) = x(t) - \psi(t)$ . Allora  $\delta(\bar{t}) = 0$  per continuità e  $\delta'(\bar{t}) = \underbrace{x'(\bar{t})}_0 - \underbrace{\psi'(\bar{t})}_{<0} > 0$ . Ne consegue che in un intorno sinistro di  $\bar{t}$

si ha che  $\delta(t) < 0$  che è assurdo. Ne consegue che  $\bar{t} = +\infty$  e quindi si ottiene che  $\omega_+ = +\infty$ , infatti il grafico di  $x(\cdot)$  si deve trovare sotto al valore  $x(t_1)$  e sopra al grafico di  $\psi$ . Per monotonia esiste  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ . Se fosse finito si avrebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - te^{x(t)} = -\infty$$

escluso per il teorema dell'asintoto. Ne concludiamo che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$ .

Per  $t < 0$  invece abbiamo che

$$0 \leq 1 - te^x \leq 1 - te^\alpha = 1 + e^\alpha |t|$$

che è una crescita sottolineare e quindi  $\omega_- = -\infty$  e per un argomento simile al precedente si ha che  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\infty$

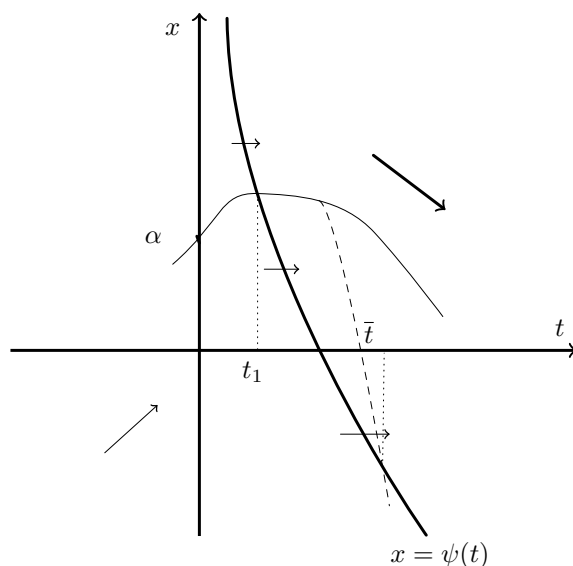


Figura 18: Esercizio 1.1

### Esercizio 1.2

Si studi qualitativamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x(x^3 - t^2) \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

*Osservazione* (sulla dipendenza continua). Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

allora otteniamo  $x(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{x_0}}$ .

Fissato  $T > 0$  consideriamo i valori  $x_0$  per i quali la soluzione è definita (almeno) in  $[0, T]$ , quindi  $x_0 < \frac{1}{T}$ . Per  $x_0 \rightarrow 0$  per la dipendenza continua la soluzione tende (uniformemente perché su  $[0, T]$ ) alla soluzione 0. In particolare  $x(T) < \varepsilon$  se

$$\frac{1}{x_0} - T > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{x_0} > T + \frac{1}{\varepsilon} \iff x_0 < \frac{1}{T + \frac{1}{\varepsilon}} =: \delta_{\varepsilon, T}$$

per cui  $\delta$  dipende sia da  $\varepsilon$  che da  $T$  e non è possibile individuarlo uniformemente rispetto a  $T$ .

La proprietà, diversa, di “dipendenza continua” su intervalli illimitati darà luogo alla definizione di stabilità.

## 2 Sistemi autonomi

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Supponiamo  $f$  localmente lipschitziana in  $\Omega$ . Il sistema che consideriamo è

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

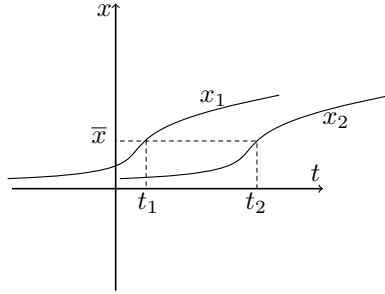
Indichiamo con  $x(\cdot, t_0, x_0)$  la soluzione definita sull'intervallo massimale.

**Proposizione 2.1.** 1. Sia  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione di  $x' = f(x)$ ; sia  $\tau > 0$ . Allora  $x_\tau : J + \tau \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da  $x_\tau(t) = x(t - \tau)$  è soluzione.

2. Se  $x_1$  e  $x_2$  sono due soluzioni di  $x' = f(x)$  che assumono un valore comune allora sono traslate temporali l'una dell'altra.

*Dimostrazione.* 1. Già vista 200 volte:

$$x'_\tau(t) = x'(t - \tau) = f(x(t - \tau)) = f(x_\tau(t))$$



2. usando la notazione del disegno, supponiamo  $u(t) = x_1(t - (t_2 - t_1))$ . Allora  $u$  è soluzione di  $x' = f(x)$  in quanto traslata di  $x'$ . Inoltre  $u(t_2) = x_1(t_1) = \bar{x} = x_2(t_2)$ , per unicità quindi  $u \equiv x_2$

□

Allora stesso modo si vede che  $x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, 0, x_0)$ . Infatti  $x(\cdot, t_0, x_0)$  risolve il problema originale e allora

$$x(\cdot - t_0, 0, x_0) \text{ risolve } \begin{cases} x' = f(x) \\ x(\cdot - t_0, 0, x_0)|_{t=t_0} = x(0, 0, x_0) = x_0 \end{cases}$$

che per unicità coincidono.

Ne consegue che posso sempre ricondurre un problema di Cauchy autonomo a uno in cui  $t_0 = 0$ . È una cosa così comune che motiva la seguente definizione

### Definizione 2.1: D

iciamo **flusso** associato all'equazione differenziale  $x' = f(x)$  la funzione

$$\varphi(t, \xi) = x(t, 0, \xi)$$

con  $\xi \in \Omega$  e  $t$  variabile nell'intervallo massimale  $(\omega_-(\xi), \omega_+(\xi))$  della soluzione  $x(\cdot, 0, \xi)$

**Proposizione 2.2.** •  $\omega_+[\omega_-]$  è semicontinua inferiormente [superiormente] in  $\Omega$

•

$$\{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \Omega : \xi \in \Omega, \omega_-(\xi) < t < \omega_+(\xi)\}$$

è aperto.

•  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^N$  è continua

•  $\varphi(0, \cdot) = id_\Omega$

- $\varphi(s, \varphi(t, \xi)) = \varphi(s + t, \xi)$

*Dimostrazione ultimo punto.* Le funzioni  $\varphi(\cdot, \varphi(t, \xi))$  e  $\varphi(\cdot + t, \xi)$  sono due soluzioni di  $x' = f(x)$  che coincidono in  $t = 0$ , poiché valgono entrambe  $\varphi(t, \xi)$ . Per unicità quindi coincidono.  $\square$

*Osservazione.* Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico che sia  $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  continua tale che

$$\begin{cases} \varphi(0, \cdot) = \text{id}_X \\ \varphi(s, \varphi(t, \xi)) = \varphi(s + t, \xi) \end{cases}$$

allora  $\varphi$  è anche detta “sistema dinamico”

### Definizione 2.2:

Dato  $x_0 \in \Omega$  diciamo **orbita** per  $x_0$  l'insieme

$$\gamma_{x_0} = \{\varphi(t, x_0) : t \in (\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))\}$$

*Osservazione.* Utilizzando  $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$  in luogo di  $x(t, 0, x_0)$  si ottiene lo stesso insieme  $\gamma_{x_0}$ , perché è semplicemente una traslata temporale.

*Nota.*  $\gamma_{x_0}$  è la proiezione del grafico di  $x(\cdot, 0, x_0)$  su  $\Omega$

**Proposizione 2.3.** *Se due orbite hanno un punto in comune, allora coincidono*

*Dimostrazione.* Solito discorso di traslazione temporale, perché due soluzioni che assumono lo stesso valore devono essere traslate temporali una dell'altra, e quindi la proiezione su  $\Omega$  coincide.  $\square$

**Proposizione 2.4.** *Se un'orbita non è un singoletto allora è una curva regolare.*

*Dimostrazione.* Sia  $x$  soluzione di  $x' = f(x)$ . Se  $x'(t_0) = 0$  per un qualche  $t_0$  allora

$$0 = x'(t_0) = f(x(t_0))$$

ma allora posto  $x(t_0) = x_0$  la funzione costante  $u(t) = x_0$  è una soluzione, e per unicità è l'unica soluzione, quindi l'orbita è un singoletto.  $\square$

### Esercizio 2.1

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = \frac{x-t^2}{x^2+t^2} \\ x(0) = a > 0 \end{cases}$$

Allora  $f(t, x) > 0$  per  $x > t^2$ . Per il teorema di esistenza e unicità esiste  $\delta > 0$  tale che la soluzione esiste in  $[-\delta, \delta]$ . Possiamo supporre  $\delta < a$ . Per  $t \geq \delta$

$$\left| \frac{x-t^2}{x^2+t^2} \right| \leq \frac{1}{\delta}(|x| + t^2)$$

e quindi per crescita sottolineare  $\omega_- = -\infty$ . Ora l'obiettivo è trovare una funzione  $u$  tale che  $x' \leq u'$  e  $u$  taglia  $x = t^2$ . Se fosse ora che  $x(t) \geq t^2$  per  $t \in [0, \omega_+]$  allora necessariamente da un certo tempo in poi  $x(t) \geq 1$ , per tali  $t$  allora  $x(t) \leq x(t)^2$  da cui

$$x'(t) \leq \frac{x(t)^2 - t^2}{x(t)^2 + t^2} \leq 1$$

ma allora  $x(t) \leq x(0) + t = a + t$  assurdo. Alternativamente si può mostrare che taglia la parabola anche dicendo che

$$x' \leq \frac{x}{x^2 + t^2} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

allora  $u' = \frac{1}{u}$  ha soluzione  $u(t) = \sqrt{2(t+c)}$  e poiché  $x(t) \leq u(t)$  che taglia  $x = t^2$  allora necessariamente anche  $x$  taglia tale parabola. Quindi  $\omega_+ = +\infty$  Ora sia  $l = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ . Se  $l \in \mathbb{R}$  allora

$$x'(t) \rightarrow -1 \text{ escluso dal teorema dell'asintoto}$$

allora  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$

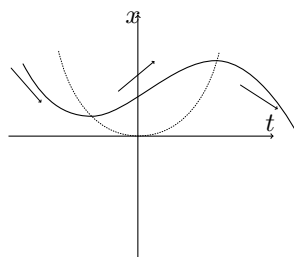


Figura 19: esercizio2-1

## Esercizio 2.2

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{x(1-x)}{2t} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

in  $t > 0$ . Poi si studi qualitativamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{g(x)}{2t} \\ x(1) = x_1 \end{cases}$$

dove  $g(x)$  ha lo stesso segno di  $x(1-x)$

## 3 Tecniche elementari di Integrazione

Ne conosciamo già diverse, come le equazioni a variabili separabili, le equazioni lineari del primo ordine e secondo ordine. Cambiare poco nelle forme porta a equazioni differenziali molto diverse e con soluzioni difficili. Nell'1800 si è cercato di mettere ordine e di capire in quali casi si può solo trovare un modello qualitativo (esempio trovare che Lotka-Volterra abbia le orbite chiuse). E molto spesso anche se ci sono soluzioni a volte basta sapere una soluzione approssimata, e quindi le tecniche esplicite di soluzione sono un po' meh. E allora a cosa servono le tecniche esplicite di risoluzione? Boh diciamo che quelle facili sono utili perché dai, servono (cit.) mentre altre più complicate si fanno solo per vedere quanto è difficile risolvere equazioni differenziali ma è simpatico quindi vederle come esempi.

### 3.1 Equazioni di tipo omogeneo

Si tratta di equazioni della forma

$$x' = g\left(\frac{x}{t}\right) \text{ con } g \text{ continua}$$

Si ponga  $z(t) = \frac{x(t)}{t}$  cioè  $x(t) = tz(t)$  da cui  $x'(t) = z(t) + tz'(t)$  e quindi l'equazione diventa

$$z + tz' = g(z) \iff z' = \frac{g(z) - z}{t}$$

che è a variabili separabili

**Esempio 3.1.**

$$x' = \frac{t+x}{t-x} = \frac{1+\frac{x}{t}}{1-\frac{x}{t}} =: g\left(\frac{x}{t}\right)$$

e quindi ponendo  $z = \frac{x}{t}$  abbiamo  $x' = z + tz'$  e quindi

$$z + tz' = \frac{1+z}{1-z} \iff tz' = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}$$

che diventa

$$z' = \frac{1}{t} \frac{1+z^2}{1-z} \implies \int \frac{1+z^2}{1-z} dz = \log|t| + c \implies \arctan z - \frac{1}{2} \log(1+z^2) = \log|t| + c$$

e quindi

$$\arctan \frac{x}{t} - \log \sqrt{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2} = \log|t| + c$$

e poiché  $\log \sqrt{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2} = \log \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{|t|} = \log \sqrt{t^2+x^2} - \log|t|$  abbiamo che le soluzioni sono definite esplicitamente da

$$\arctan \frac{x}{t} - \log \sqrt{t^2+x^2} = c$$

Allora per  $t > 0$  se chiamiamo  $\theta = \arctan \frac{x}{t}$  e  $\rho = \sqrt{x^2+t^2}$  significa  $\theta - \log \rho = c$  da cui

$$\rho = Ce^\theta$$

che è un pezzo di una spirale logaritmica. Similmente per  $t < 0$  abbiamo che  $\alpha = \arctan \left(\frac{x}{-t}\right) = -\arctan \frac{x}{t}$  e allora se  $\theta = \pi - \alpha$  otteniamo di nuovo una spirale logaritmica.

Questa però non è il modo più “bello” di risolvere questa equazione: vedremo un modo per risolvere questa equazione attraverso il formalismo delle forme differenziali, e trovando soluzioni più chiare. In questo caso ad esempio

$$x' = \frac{t+x}{t-x} \mapsto \omega := (t+x)dt - (t-x)dx = 0$$

Le equazioni di tipo omogeneo ammettono una avvia generalizzazione. Premessa:  $x' = g(at+bx)$  si ponga  $z(t) = at+bx(t)$ , allora  $z' = a+bx'$  e quindi  $z' = a+bg(z)$  che è a variabili separabili. Ora possiamo generalizzare le precedenti equazioni di tipo omogeneo in

$$x' = g\left(\frac{at+bx+c}{a't+b'x+c'}\right)$$

che ha come caso particolare il precedente  $x' = g\left(\frac{x}{t}\right)$  se  $a = a' = 1$  e  $b = c = b' = c' = 0$  e anche  $x' = g(at+bx)$  per  $c' = 1$  e  $c = a' = b' = 0$ . Distinguiamo ora due casi



- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} = 0$  ad esempio  $(a', b') = \gamma(a, b)$ . Allora l'equazione diventa

$$x' = g\left(\frac{at + bx + c}{\gamma(at + bx) + c'}\right) = \tilde{g}(at + bx)$$

e ricadiamo nel caso precedente

- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \neq 0$  allora nel piano  $x-t$  le due rette  $at + bx + c = 0$  e  $a't + b'x + c' = 0$  sono incidenti in un punto  $(t_0, x_0)$ . Applichiamo quindi il cambiamento di variabili  $u = x - x_0$  e  $\tau = t - t_0$  cioè considero  $u(\tau) = x(\tau + t_0) - x_0$ . Allora l'equazione

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= x'(\tau + t_0) = g\left(\frac{a(\tau + t_0) + b(u(\tau) + x_0) + c}{a'(\tau + t_0) + b'(u(\tau) + x_0) + c'}\right) = \\ &= g\left(\frac{a\tau + bu + \overbrace{at_0 + bx_0 + c}^{=0}}{a'\tau + b'u + \underbrace{a't_0 + b'x_0 + c'}_{=0}}\right) = g\left(\frac{a\tau + bu}{a'\tau + b'u} = g\left(\frac{a + b\left(\frac{u}{\tau}\right)}{a' + b'\left(\frac{u}{\tau}\right)}\right)\right) = \\ &= \tilde{g}\left(\frac{u}{\tau}\right) \end{aligned}$$

che è del primissimo tipo visto.

### 3.2 $F(t, x, x') = 0$

**Esempio 3.2** (Brachistocrona). *curvadiminimadiscesa* Siano  $p_1 = (x_1, y_1)$  e  $p_2 = (x_2, y_2)$  con  $x_1 < x_2$  e  $y_1 > y_2$  Problema: Qual è la funzione su per la quale il tempo

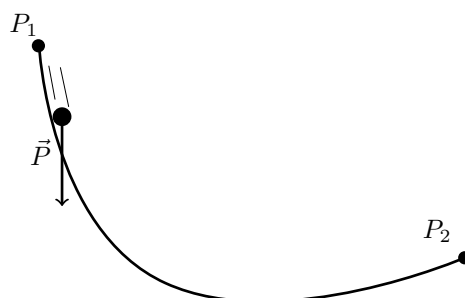


Figura 20: brachistocrona

di discesa sotto l'azione della sola forza peso è minimo?

#### Esercizio 3.1

Si studino le curve soluzione del problema del pendolo

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

considerando le curve soluzione sul piano  $(\theta, \dot{\theta})$

**Esempio 3.3** (Lotka-Volterra). consideriamo  $x_1, x_2 > 0$  e il sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(\alpha - \beta x_2) \\ x'_2 = x_2(-\gamma + \delta x_1) \end{cases}$$

che dà origine alla forma differenziale

$$\omega = x_2(-\gamma + \delta x_1)dx_1 - x_1(\alpha - \beta x_2)dx_2 = 0$$

sfortunatamente non è esatta, infatti non è chiusa

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} = -\gamma + \delta x_1 \neq -\alpha + \beta x_2 = \frac{\partial B}{\partial x_1}$$

ma possiamo cercare un fattore integrante  $\mu(x_1, x_2)$  *mai nullo* tale che  $\mu\omega$  sia esatta. L'idea è che se esiste allora  $\omega = 0 \iff \mu\omega = 0$ . L'equazione diventa

$$\mu(x_1, x_2)x_2(-\gamma + \delta x_1)dx_1 - \mu(x_1, x_2)x_1(\alpha - \beta x_2)dx_2 = 0$$

e vogliamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu(x_1, x_2)x_2(-\gamma + \delta x_1)) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\mu(x_1, x_2)x_1(\alpha - \beta x_2))$$

e cerchiamo  $\mu$  nella forma  $\mu(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_2)$ . La precedente diventa quindi

$$\begin{aligned} \varphi(x_1)\psi'(x_2)x_2(-\gamma + \delta x_1) + \varphi(x_1)\psi(x_2)(-\gamma + \delta x_1) = \\ = \varphi'(x_1)\psi(x_2)x_1(\alpha - \beta x_2) + \varphi(x_1)\psi(x_2)(-\alpha + \beta x_2) \end{aligned}$$

cioè

$$\varphi(x_1)(-\gamma + \delta x_1) \underbrace{(\psi'(x_2)x_2 + \psi(x_2))}_{\stackrel{\text{set}}{=}0} = \psi(x_2)(\alpha - \beta x_2) \underbrace{(\varphi'(x_1)x_1 + \varphi(x_1))}_{\stackrel{\text{set}}{=}0}$$

e come  $\varphi$  e  $\psi$  possiamo considerare una soluzione di

$$u'(x)x + u(x) = 0$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{x}$$

$$\log |u| = -\log x + c$$

$$u(x) = \frac{c}{x}$$

e quindi  $\varphi(x_1) = \frac{1}{x_1}$  e  $\psi(x_2) = \frac{1}{x_2}$  da cui  $\mu(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$ . La nostra forma differenziale diventa

$$\tilde{\omega} = \left(-\frac{\gamma}{x_1} + \delta\right)dx_1 - \left(\frac{\alpha}{x_2} - \beta\right)dx_2 = 0$$

e una possibile  $H(x_1, x_2)$  tale che  $dH = \tilde{\omega}$  è

$$H(x_1, x_2) = -\gamma \log x_1 + \delta x_1 - \alpha \log x_2 + \beta x_2 \quad \text{è costante}$$

quindi ora se rappresentiamo le curve nel piano  $(x_1, x_2)$  otteniamo la figura ??

**Esempio 3.4.** Consideriamo il problema  $x' = \frac{t+x}{t-x}$ . volendo calcolare le curve soluzione nel piano  $(t, x)$  studiamo la forma differenziale

$$\omega = (t-x)dx - (t+x)dx = 0$$

ossia

$$(x_1 + x_2)dx_1 - (x_1 - x_2)dx_2 = 0 \tag{1}$$

non è esatta e non si riesce (facilmente?) a trovare un fattore integrante. Tuttavia possiamo studiarlo in coordinate polari. In particolare poniamo

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ x_2 = x_2(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

La (1) diventa

$$\rho(\cos \theta + \sin \theta)(\rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta) - \rho(\cos \theta - \sin \theta)(\rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta) = 0$$

svolgendo i calcoli abbiamo

$$\rho' - \rho \theta' = 0 \implies d\rho - \rho d\theta = 0 \implies \frac{1}{\rho} d\rho - d\theta = 0$$

e quindi  $H(\rho, \theta) = \log \rho - \theta$  è costante e quindi le curve espresse in forma polare hanno equazione

$$\log \rho = \theta + c \implies \rho = e^{\theta+c} = Ce^{\theta} \quad C > 0$$