Appunti di Analisi 3 - Analisi Complessa

Osea

Primo semestre A.A. 2024 - 2025, prof. Enrico Vitali

1 Convergenza puntuale e uniforme

Sia E un'insieme (non vuoto) e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $E \to \mathbb{R}$ (o $E \to \mathbb{R}^n$ o $E \to \mathbb{C}$). Sia $f : E \to \mathbb{R}$.

Definizione 1.1: D

iciamo che $\{f_n\}$ converge **puntualmente** ad f se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Esempio 1.1. $E = \mathbb{R}$ e $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$, $f_n \to 0$ su $\mathbb{R}$

Esempio 1.2. $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 \to x^2$

Esempio 1.3. $f_n(x) = x^2 - \frac{1}{n}$

Esempio 1.4. $f_n(x) = e^{x-n}$ $f_n \to 0$

Esempio 1.5. $E = [0, 1]$, $f_n(x)$ funzione che è a triangolo con vertici $(\frac{1}{4n}, 0)$, $(\frac{1}{2n}, 1)$, $(\frac{1}{n}, 0)$. Allora $f_n \to 0$

In questi esempi l'idea è che per ogni ε esiste un n_ε tale che per $n \geq n_\varepsilon$, $f_n(x) < \varepsilon$. La domanda è se si riesce a esprimere n_ε senza che dipenda da x. Nell'esempio di $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ si può perché f_n ha un massimo in $x = 0$, in tal caso infatti se prendo n_ε tale che $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ allora $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Nell'esempio 1.2 invece vogliamo un n_ε tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ossia $|-\frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}| \leq \varepsilon$. Da questo troviamo che

$$\frac{1}{n^2} - \varepsilon \leq \frac{2x}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \varepsilon$$

Ma è sempre possibile, per qualsiasi $\frac{1}{n^2} + \varepsilon$ è possibile trovare un x tale che sia maggiore, quindi non è possibile non esprimere n_ε anche in funzione di x.

Definizione 1.2: S

ia f, $f_n : E \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f_n \to f$ uniformemente in E se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Osservazione. La condizione della definizione di convergenza uniforme è equivalente a richiedere che $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Da questo concludiamo che $f_n \to f$ uniformemente se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Allora con questa nuova osservazione è facile notare la non convergenza uniforme dell'esempio 1.2. Infatti se $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ e $f(x) = x^2$ allora $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n) - f(n)| = |2 - \frac{1}{n}| \to 2 > 0$.

Abbiamo però che converge uniformemente sugli insiemi limitati (esercizio). Similmente nell'esempio 1.4 f_n converge uniformemente sugli insiemi $(-\infty, a]$ infatti $0 \leq f_n(x) \leq e^{a-n} \to 0$ per $n \to +\infty$

Geometricamente la convergenza uniforme dice che il grafico di f_n è contenuta in un intorno tubolare arbitrario di f per n sufficientemente grande.

Proposizione 1.1 (Criterio di Cauchy / completezza di $\mathbb{R}$)**.** *Se $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali si ha: a_n converge se e solo se a_n è una successione di Cauchy, ossia se $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ tale che $\forall n_1, n_2 \geq n_\varepsilon$, $|a_{n_1} - a_{n2}| < \varepsilon$*

Teorema 1.2: Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

Siano $f, f_n : E \to \mathbb{R}$, con $f_n \to f$ in E. Allora la convergenza è uniforme in E se e solo se

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon \text{ e } \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia $f_n \to f$ uniformemente in E. Fissato $\varepsilon > 0$, sia n_ε tale che (convergenza uniforme) $\forall k \geq n_\varepsilon$ e $\forall x \in E$, $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ allora presi $n, m \geq n_\varepsilon$ ho che $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Longleftarrow$ Valga la condizione di Cauchy. Allora $\forall x \in E$ la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy, quindi è convergente, quindi $\exists f : E \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$. Allora dalla condizione di Cauchy, tenendo n fisso e facendo tendere $n \to +\infty$ si ottiene esattamente la convergenza uniforme.

□

Fun fact: esistono dei cosiddetti "Spazi uniformi", che sono spazi topologici ma non metrici.

Esempio 1.6. Sia $f_n = \frac{n^2 - x}{n^3 + e^{nx}}$. È evidente per $x \in \mathbb{R}$ che $f_n(x) \to 0$.

C'è convergenza uniforme sui limitati, infatti se $|x| \leq M$ allora $|f_n(x)| \leq \frac{n^2+M}{n^3} \to 0$. Consideriamo ora $x \geq 0$ (esercizio). Invece per $x \leq 0$, posso prendere per ogni n $x_n = -n^4$ e allora ottengo che $f_n(x_n) \to +\infty$

Osservazione. Sia $f_n : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua, suppongo che $\{f_n\}$ converga uniformemente a f in (a, b). Allora converge uniformemente in $[a, b)$

Dimostrazione. Per Cauchy

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon, \forall x \in (a, b), \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Per $x \to a$ abbiamo per continuità che $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$ per $n, m \geq \overline{n} \in \mathbb{N}$, quindi preso $\tilde{n} = \max n_\varepsilon, \overline{n}$ si ha che f_n soddisfa il criterio di Cauchy in $[a, b)$ e quindi converge uniformemente. □

Da questa osservazione noto anche che vale il contrapositivo: se f_n non converge uniformemente in $[a, b)$ non può neanche convergere uniformemente in (a, b)

Esempio 1.7. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2\left(x-\frac{q}{\sqrt{n}}\right)^2}$, allora ho che $f_n(0) = \dfrac{1}{1+n} \to 0$, e per $x \neq 0$ pure, infatti

$$0 \leq \frac{1}{1+n^2\left(x-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \overset{\text{definitivamente}}{\leq} \frac{1}{1+n^2\left(\frac{x^2}{2}\right)^2} \to 0$$

è convergente uniformemente su tutto $\mathbb{R}$

Sia E un insieme non vuoto e sia $\mathcal{B}(E)$ l'insieme delle funzioni reali e limitate su E.

Definizione 1.3: Norma dell'estremo superiore

Sia $f : E \to \mathbb{R}^n$ una funzione. Allora

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|$$

è la norma dell'estremo superiore (anche denotata semplicemente $\|f\|$).

Buona definizione. Perché sia una buona definizione, serve che sia una norma.

a. $\|f\| \geq 0$ e $\|f\| = 0 \iff f = 0$

b. $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$

c. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

□

Proposizione 1.3. *$\mathcal{B}(E)$ è uno spazio metrico normato con la norma dell'estremo superiore, e quindi distanza $d(f,g) = \|f-g\|$*

Dimostrazione. ovvio □

1.1 Scambi di limite, derivate, integrali

Esempio 1.8. Dimostrare che se $f \in C^0([a,b]\times[c,d])$ a valori reali e

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \quad y \in [c,d]$$

Allora g è continua in $[c,d]$

Infatti $\forall \overline{y} \in [c,d]$ abbiamo che comunque presa $y_n \to \overline{y}$ chiaramente $g(y_n) \to g(\overline{y})$. Ponendo ora $f_n = f(\cdot, y_n)$. Allora vogliamo mostrare che $f_n(\cdot) \to f(\cdot,\overline{y})$ uniformemente in $[a,b]$. Poiché f è uniformemente continua in $[a,b]\times[c,d]$ perché continua su un compatto, allora $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ tale che $\forall x, x' \in [a,b]$ e $\forall y, y' \in [c,d]$ se $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$ allora $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ sia δ come sopra; sia quindi n_ε tale che $n \geq n_\varepsilon \implies |y_n - \overline{y}| \leq \delta$ e quindi, per ogni $x \in [a,b]$ abbiamo $|(x,y_n)-(x,\overline{y})| = |y_n - y| \leq \delta$, da cui $|f_n(x,y_n) - f(x,\overline{y})| \leq \varepsilon$. Abbiamo quindi mostrato l'uniforme convergenza.

Proposizione 1.4 (Derivation under the integral sign)**.** *Sia $f \in C^1([a,b]\times[c,d])$ e $g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ per $y \in [c,d]$, allora*

$$g \in C^1([c,d]) \text{ e } g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

Dimostrazione. Fissiamo $\overline{y} \in [c, d]$ e consideriamo

$$\frac{g(y) - g(\overline{y})}{y - \overline{y}} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, \overline{y})}{y - \overline{y}}\, dx = \int_a^b \varphi(x, y) dx$$

con $\varphi(x, y)$ l'integrando. Siappiamo che $\lim_{y \to \overline{y}} \varphi(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y})$ e vogliamo mostrare che questa convergenza è uniforme al variare di x. Per il teorema di Lagrange si ha che

$$\varphi(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \overline{y})}{y - \overline{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_{x,y}) \quad \xi_{x,y} \in (\overline{y}, y) \text{ oppure } (\overline{y}, y)$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}$ è uniformemente continua in $[a, b] \times [c, d]$ allora

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [a, b] \text{ e } \forall y, y' \in [c, d] \\ |(x, y) - (x', y')| < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x', y') \right| < \varepsilon \end{gathered}$$

e ora prendiamo come coppie $(x, \overline{y})$ e $(x, \xi_{x,y})$ e abbiamo

$$|(x, \xi_{x,y}) - (x, \overline{y})| = |\xi_{x,y} - \overline{y}| \leq |y - \overline{y}|$$

Ora come prima ciò dimostra che $\varphi(x, y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y})$ uniformemente in $[a, b]$ e quindi

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx$$

□

1.2 Serie di funzioni

I risultati visti per le successioni di funzioni danno luogo ad analoghi risultati per le serie di funzioni. Sia quindi E un insieme $f_n : E \to \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}$) e si considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad x \in E$$

che è una serie di funzioni.

Definizione 1.4: D

iciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in E se la successione delle somme parziali converge puntualmente in E, ossia se

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E se la successione delle somme parziali converge uniformemente in E,

Ne consegue che alcuni risultati hanno rispettivi analoghi, ad esempio

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente in E se e solo se

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

converge uniformemente in E (definizione), ossia questo vale se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall N, M \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad |s_N(x) - s_M(x)| < \varepsilon$$

Ora assumiamo senza perdita di generalità che $N \leq M$, allora chiamiamo $M = N+p$ e otteniamo che l'ultima eguaglianza si scrive come

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Otteniamo

Proposizione 1.5 (Criterio di Cauchy)**.** *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, p \geq n_\varepsilon, \forall x \in E, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \tag{1.1}$$

Corollario 1.5.1. *Condizione necessaria affinche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente in E è che $f_n \to 0$ uniformemente in E*

Dimostrazione. prendiamo $p = 1$ in (1) e otteniamo $|f_{n+1}(x)| < \varepsilon$ ossia $f_n \to 0$ uniformemente in E $\square$

Esempio 1.9. Supponiamo ora che esista una successione numerica $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

vogliamo mostrare che allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in E, usando (1), infatti abbiamo

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

dove nell'ultima diseguaglianza si è utilizzato il criterio di Cauchy per le serie numeriche.

Definizione 1.5: Convergenza totale

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge **totalmente** in E se esiste $\{a_n\}$ in $\mathbb{R}$ tale che

- $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in E$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

Per quanto visto prima quindi

Proposizione 1.6. *Convergenza totale implica convergenza uniforme, e notando dalla dimostrazione prima abbiamo anche che implica la convergenza assoluta uniforme.*

Esempio 1.10. Non vale il contrario, un esempio di serie uniformemente convergente ma non totalmente convergente è

$$\sum_{n=1}^{\infty} -1 \cdot \frac{(-1)^n}{n}$$

dove $f_n(x)$ è costante per ogni n. Allora la serie converge uniformenenente in $\mathbb{R}$ ovviamente perché è costante e converge in quanto a segno alternato, ma non converge totalmente perché la serie armonica diverge.

Esempio 1.11. Sia $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, per $x \in \mathbb{R}$. Allora usiamo il criterio della radice ottenendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

quindi per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente, per $|x| > 1$ la serie diverge, per $x = -1$ la serie è la serie armonica che diverge, per $x = 1$ la serie è una serie a segni alterni che converge.

Concludiamo quindi che la serie converge puntalmente in $(-1, 1]$ e per ogni $0 < \delta < 1$ la serie converge uniformemente in $[-\delta, \delta]$, infatti

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \leq \delta^n n$$

la cui serie converge, quindi la serie converge totalmente.

Naturalmente però la serie non converge totalmente in $[0, 1]$ poiché

$$\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$$

ma comunque la serie converge uniformemente in $[0, 1]$, infatti usiamo il criterio di Cauchy.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq |s_{n+p}(x) - s_n(x)| <= |s_{n+p} - S(x)| + |S(x) - s_n(x)| < \frac{x^{n+p}}{n+p} + \frac{x^n}{n}$$

che converge a 0 per $n \to +\infty$ e si è usato il fatto che se $S = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ è una serie convergente a segni alterni, con $a_n > 0, a_n \to 0$ allora $|S - s_n| \leq a_{n+1}$

Procediamo a chiederci se la serie converge uniformemente in $(-1, 0]$. Utilizziamo allora la seguente osservazione dedotta direttamente dalle successioni

Osservazione. Sia $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n \in C^0([a, b])$. Se la serie converge uniformemente in $(a, b]$ allora converge uniformemente in $[a, b]$ (in particolare converge in $x = a$)

Dimostrazione. Per ipotesi $s_n(x)$ converge uniformemente in $(a, b]$ e s_n sono funzioni continue in $x = a$, quindi per il risultato che avevamo già per le successioni (in breve basta enunciare il criterio di Cauchy e usare la continuità in $x = a$) otteniamo che la serie converge uniformemente in $[a, b]$ □

Ne concludiamo che la serie non può convergere uniformemente in $(-1, 0]$ altrimenti convergerebbe uniformemente in $[-1, 0]$ ma sappiamo che in -1 non abbiamo neanche convergenza puntuale.

Esempio 1.12. Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

1.3 Richiami su limiti e serie

Proposizione 1.7. *Sia a_n una successione di numeri reali positivi. Allora*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Dimostrazione. Sia $L = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se $L = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Sia allora $L < +\infty$. Fissato un $\varepsilon > 0$ quindi esiste n_ε tale che $\forall n \ge n_\varepsilon$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le L + \varepsilon$$

Allora iterando otteniamo

$$a_n \le (L+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon} \implies \sqrt[n]{a_n} \le (L+\varepsilon)^{1-\frac{n_\varepsilon}{n}} \sqrt[n]{a_{n_\varepsilon}} \to L + \varepsilon$$

Per $n \to \infty$, ora per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Similmente si dimostra anche l'altra uguaglianza, quella centrale è ovvia. □

Esempio 1.13. Sia $a_n = n$. Allora poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ abbiamo che anche $\sqrt[n]{n} \to 1$.
Sia $a_n = n!$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1 \to +\infty$ e quindi anche $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$
Sia $a_n = \frac{n^n}{n!}$ allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

e quindi $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Osservazione. In realtà (e potremmo vederlo più tardi), l'approssimazione di Stirling ci dice

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ora procediamo vedendo un criterio di convergenza (non assoluta) che sarà il criterio di convergenza di Abel. Procediamo a passi più piccoli.

Lemma 1.8: Disuguaglianza di (Brunacci) Abel

Siano $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell \in \mathbb{C}$ e siano $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_\ell \in \mathbb{C}$. Poniamo ora

$$w_m = \sum_{i=0}^{m} \zeta_i \quad m = 0, 1, \ldots, \ell$$

Sia $M > 0$ tale che

$$|w_m| \le M \quad \forall m = 0, 1, \ldots, \ell$$

Allora

$$\left|\sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i\right| \le (|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \cdots + |\gamma_{\ell-1} - \gamma_\ell| + |\gamma_\ell|)M$$

Dimostrazione.

$$\sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i \zeta_i = \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i (w_i - w_{i-1}) = \sum_{i=0}^{\ell} (\gamma_i - \gamma_{i+1}) w_i$$

Dove si intende che $\gamma_{\ell+1} = 0$ e $w_{-1} = 0$. Ora semplicemente per disuguaglianza triangolare e applicando l'ipotesi definente M otteniamo la tesi. □

Teorema 1.9: primo criterio di convergenza di Abel

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ una serie numerica. Se

- $z_n \in \mathbb{C}$ (oppure in $\mathbb{R}^N$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ è una serie le cui somme parziali sono limitate
- $\{c_n\}$ è una successione di numeri reali non creascente e infinitesima

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ converge.

Dimostrazione. Utilizziamo il criterio di convergenza di Cauchy. Fissiamo $N, p \in \mathbb{N}$ e consideriamo

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M \sum_{n=N}^{N+p} |c_n - c_{n+1}| \text{ (diciamo } c_{N+p+1} = 0 \text{ per comodità notazionale)}$$

Dove M è maggiorante per le somme parziali di z_n. Infatti abbiamo che

$$w_m = z_N + z_{N+1} + \ \cdots + z_{N+m} = \sum_{i=0}^{N+m} z_n - \sum_{i=0}^{N-1} z_n$$

per cui effettivamente $|w_m| \leq 2M$ e possimao applicare la disuguaglianza di Abel.

Ora possiamo, sapendo che $c_k \to 0$ da sopra, ottenere che la serie precedentemente trovata è telescopica per N sufficientemente grande e quindi

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} c_n z^n \right| \leq 2M|c_N| \to 0 \text{ per } N \to +\infty$$

e quindi per il criterio di Cauchy la serie converge. □

Esempio 1.14. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad z \in \mathbb{C}$$

Allora se $|z| > 1$ manca la condizione necessaria di convergenza.

Sia allora $|z| \leq 1$. Consideriamo prima il caso $|z| < 1$. Sia ha allora convergenza assoluta, perché

$$\frac{|z|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|z|^n} = |z| \frac{n}{n+1} \to 0$$

Consideriamo invine il caso $|z| = 1$. Se $z = -1$ la serie non converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to -\infty$$

Ora consideriamo $|z| = 1$ con $z \neq -1$ e vogliamo applicare il criterio di Abel, con $c_n = \frac{1}{n}$ e $z_n = (-1)^{n+1} z^n$. Chiaramente c_n è infinitesima non crescente reale. Inoltre

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_N| = \left| \sum_{i=1}^{N} (-1)^{n+1} z^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} (-z)^N \right| = |z| \left| \frac{1 - (-z)^N}{1 - (-z)} \right| \leq \frac{z}{|1 + z|}$$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Abel e la serie converge.

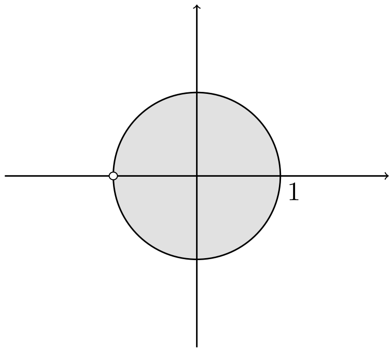


Figura 1: Punti del piano $\mathbb{C}$ tali che la serie dell'esempio 2.2 converge

Corollario 1.9.1 (Criterio di Leibniz)**.** *Se una serie è a segni alterni del tipo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con $a_n \to 0$ e $a_n > 0$ non crescente. Allora abbiamo che $z_n = (-1)^n$ e $c_n = a_n$ soddisfano le ipotesi del criterio di Abel e quindi la serie converge.

Teorema 1.10: Secondo criterio di convergenza di Abel

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$$

con

- $z_n \in \mathbb{C}$ (oppure in $\mathbb{R}^N$)
- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è una serie convergente
- $\{c_n\}$ è una successione monotona e convergente

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$ converge.

Dimostrazione. Supponiamo $c_n \to c$ non crescente. Allora

$$\sum_{n=0}^{N} c_n z_n = \sum_{n=0}^{N} (c_n - c) z_n + c \sum_{n=0}^{N} z_n$$

Ora per $N \to \infty$ abbiamo che $c_n - c \to 0$ decrescente e le somme parziali di z_n sono limitate, perché la serie converge. Quindi abbiamo che la prima serie converge per il primo criterio di Abel. Anche la seconda serie converge per ipotesi, quindi la tesi è dimostrata. □

Sappiamo che

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{M} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{N+M}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$$

è il prodtto di polinomi. Quindi formalmente, se $z = 1$ e $N, M \to \infty$ otteniamo

Definizione 1.6: Serie prodotto alla Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

che è detta serie prodotto alla Cauchy delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Teorema 1.11: Mertens + Cauchy

Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono convergenti e almeno una è assolutamente convergente, allora la serie prodotto è convergente ed ha per somma il prodotto delle serie.

Se entrambe le serie sono assolutamente convergenti, allora tale è anche la serie prodotto.

Consideriamo serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ con } c_n \in \mathbb{C} \text{ e } z, a \in \mathbb{C}$$

Abbiamo visto alcuni esempi:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge se e solo se $|z| < 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, converge se e solo se $|z| \leq 1$ e $z \neq -1$

In entrambi i casi (e vedremo in generale) la convergenza è nei punti di un disco (detto cerchio di convergenza) di centro $z = a$. Il comportamento sul bordo del cerchio varia da caso a caso.

Teorema 1.12: Abel

Si consideri la seire di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Se la serie converge in un punto $z \in \mathbb{C}$ allora converge uniformemente su tutto il segmento di estremi a e z.

Dimostrazione. Il teorema è significativo quando $z_1 \in \partial D_R(a)$ Non è restrittivo supporre $a = 0$. Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t z_1)^n$$

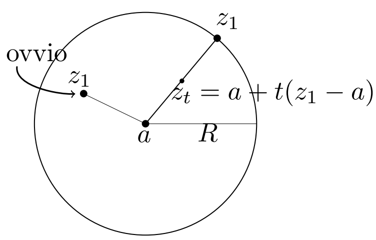


Figura 2: abel

utilizziamo il criterio di Cauchy per le convergenze uniformi: fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo avere che per un n_ε allora per ogni $N \geq n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$ si abbia che

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m=N}^{N+p} \underbrace{t^n}_{\gamma_{m-N}} \underbrace{c_n z_1^n}_{\zeta_{m-N}}\right| &< \varepsilon \\ &\leq M(|\gamma_0 - \gamma_1| + |\gamma_1 - \gamma_2| + \ \cdots + |\gamma_{p-1} - \gamma_p|)\end{aligned}$$

con M un maggiorante per le somme parziali di $c_n z_1^n$. Ora poiché per ipotesi tale serie converge, esiste n_ε tale per cui per ogni $N \geq n_\varepsilon$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\left|\sum_{m=N}^{N+p} c_m z_1^m\right| \leq \varepsilon$$

ora poiché $1 \geq t^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che la precedente disugaglianza è soddisfatta per $M = 1$, quindi

$$\left|\sum_{n=N}^{N+p} t^n c_n z_1^n\right| \leq t^N \varepsilon \leq \varepsilon$$

□

2 Analisi complessa

2.1 Funzioni analitiche su $\mathbb{R}$

Definizione 2.1: Funzione analitica

Sia I un intervallo aperto. Diciamo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è analitica se per ogni $x_0 \in I$ esiste $\delta > 0$ tale che su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la funzione sia esprimibile come somma di una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2.1}$$

Sia f come in (2); Sia R il raggio di convergenza della serie. Su ogni intervallo J tale che $\overline{J} \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$ sappiamo che la serie converge totalmente. Consideriamo la serie delle derivate (cioè la *serie derivata*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza R, poiché

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}$$

Quindi la Erie delle derivate è uniformemente convergente su ogni compatto di $x_0 - R, x_0 + R$.

Lemma 2.1 (Teorema di derivazione per Serie)**.** *Sia $f = \sum f_n$ convergente e $g = \sum f_n'$ uniformemente convergente. Allora f è derivabile e $f' = g$.*

Per il teorema di derivazione per serie, f è derivabile e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

A f' applichiamo lo stesso ragionamento visto su f: f' è derivabile e si ha che

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Procedendo induttivamente otteniamo che $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k}$$

In particolare abbiamo che $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ e quindi la serie di potenze è la serie di Taylor di f centrata in x_0. Più precisamente

Teorema 2.2

Sia $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ per $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, con $a_n \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ e la serie è la serie di Taylor di f centrata in x_0.

Dimostrazione. Vedasi sopra. □

Non è vero che ogni funzione C^∞ sia sviluppabile in serie di Taylor.

Esempio 2.1. Sia $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$. Allora

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 & x = 0 \\ \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

eccetera anche per le altre derivate si ha che $f^{(k)}(0) = 0$. Quindi la serie di Taylor centrata in 0 è la serie nulla, ma $f \neq 0$ in alcun intorno di 0.

Teorema 2.3

Sia $f \in C^\infty(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto per la quale esistano $M, L > 0$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in I \quad |f^{(k)}(x)| \leq ML^k$$

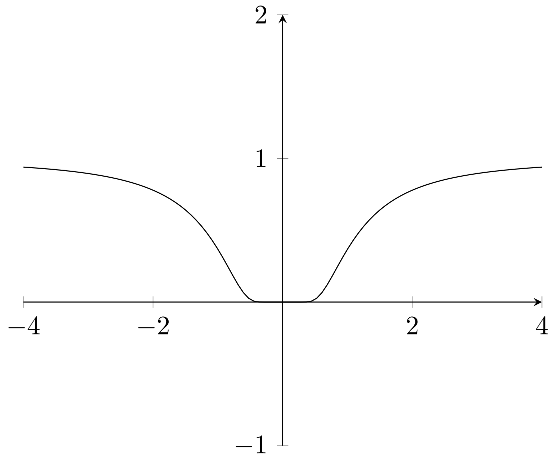


Figura 3: $e^{-\frac{1}{x^2}}$

Allora f è analitica.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in I$ e consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad x \in I$$

Scriviamo lo sviluppo di Taylor con il resto di Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k} \frac{f^{(n)}}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x-x_0)^{n+1}$$

dove $\xi_x \in (x_0, x)$ è un opportuno punto. Mostriamo ora che

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

□

Esempio 2.2. Le funzioni $e^x, \sin x, \cos x$ sono analitiche.

2.2 $\mathbb{C}$-differenziabilità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$

Definizione 2.2: $\mathbb{C}-$differenziabilità

Sia $a \in \Omega$. Diciamo che f è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$ se esiste

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) = f(a)}{z-a} = f'(a) \tag{2.2}$$

o equivalentemente

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + (\varepsilon(z-a))(z-a) \tag{2.3}$$

$$\lim_{w \to 0} \varepsilon(w) = 0 \tag{2.4}$$

Se poniamo $\varepsilon(0) = 0$ allora la $(1)'$ vale per ogni $z \in \Omega$, non solo $z \neq a$
Alcune proprietà:

– Se f è $\mathbb{C}$-differenziabile in $z = a$ allora è continua (da $(1)'$)

– f, g $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$; allora $f \pm g$ è $\mathbb{C}-$differenziabile, λf, con $\lambda \in \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}-$differenziabile e fg è $\mathbb{C}-$differenziabile.

  Se $g(a) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$ e $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Esempio 2.3. $z \mapsto z$ è $\mathbb{C}-$differenziabile in ogni $z \in \mathbb{C}$. Ne consegue dalle proprietà che i polinomi sono $\mathbb{C}-$differenziabili, e anche le funzioni razionali.

Esempio 2.4. $z \mapsto \overline{z}$ **non** è $\mathbb{C}$-differenziabile. Infatti

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\overline{z} - \overline{a}}{z - a} = \frac{\overline{z - a}}{z - a}$$

che non ha limite perché assume valori diversi ad esempio sulla retta $a + \delta$ e $a + \delta i$ al variare di $\delta \in \mathbb{R}$.

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ può essere vista come $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tralasciando la struttura di campo di $\mathbb{C}$. Allora possiamo scrivere $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, con $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si utilizza spesso la scrittura

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

che è una sorta di "ibrido". Possiamo ora scrivere $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ecc.

Supponiamo ora che f sia $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a = x_0 + iy_0$. Esiste quindi

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Guardiamo ora la retta $z = a + \delta$, con $\delta \in \mathbb{R}$, quindi

$$f'(a) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0) + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

In maniera analoga, per $z = a + \delta i$ abbiamo

$$f'(a) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \delta i) - f(x_0, y_0)}{\delta i} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y} f(a)$$

In breve abbiamo che deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

Che in termini di u e v equivale a dire che

$$u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y \iff \begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$$

Proposizione 2.4 (Condizioni necessarie)**.** *Se f è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$ allora valgono le condizioni di **Cauchy-Riemann**, cioè*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \textit{o equivalentemente} \quad \begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$$

Dimostrazione. Vedasi sopra. □

Proposizione 2.5. *Sia f differenziabile in $a = (x_0, y_0)$ come funzione $\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^2$. Se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, allora $f : C \supseteq \Omega \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = x_0 + iy_0$*

Dimostrazione. Per ipotesi (con $h = (h_1, h_2)$)

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + o(h)$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ si ha

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + i\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_2 + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(h_1 + ih_2) + o(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + o(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(z-a) + o(z-a) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6: Looman-Menchoff

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua e dotata di $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $z = a$. Se valgono le condizioni di Cauchy Riemann, allora f è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$

Abbiamo già visto sui reali che analitica implica C^∞. Ora spiace lo spoiler ma dimostreremo che $\mathbb{C}$-differenziabile implica analitica, quindi $\mathbb{C}-$differenziabilità, C^∞, analitica saranno nozioni equivalenti e gli assegneremo la dicitura di **olomorfe**.

Definizione 2.3: Derivata complessa

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Ciò è motivato dal seguente passaggio formale: Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, allora $f(x, y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right)$ e quindi si ottiene formalmente il risultato come sopra definito.

Osservazione. Le condizioni di Cauchy-Riemann diventano $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

2.3 $\mathbb{C}$-differenziabilità delle funzioni analitiche

Teorema 2.7

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad c_n \in \mathbb{C}$$

con R il raggio di convergenza. Allora la serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza R. Inoltre se $f(z)$ è la somma della serie data e $g(z)$ la somma della serie derivata, allora avremo che f è $\mathbb{C}$-differenziabile e $f'(z) = g(z)$ per ogni $z \in D_R(a)$

Dimostrazione. Come nel caso reale,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

quindi i due raggi di convergenza coincidono. Supponiamo $a = 0$. Fissiamo $w \in D_R(0)$ e consideriamo

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

con h tale che $w + h \in D_R(0)$. Scriviamo, per $N \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = S_N(z) + R_N(z) \quad \text{con} \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n(z-a)^n$$

e $R_N(z)$ il resto della serie. Sappiamo che

$$\lim_{n\to 0} \frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} = S_N'(w) \to g(z) \text{ per } N \to \infty$$

Consideriamo il resto

$$\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=N=1}^{\infty} (c_n((w+h)^n - w^n))$$

essendo

$$(w+h)^n - w^n = (w+h-w)\Big((w+h)^{n-1} + (w+h)^{n-2}w + \cdots + w^{n-1}\Big)$$

ottengo

$$\left|\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_N|\big(|w+h|^{n-1} + |w+h|^{n-2}|w| + \ \cdots + |w|^{n-1}\big)$$

Ora, per h tale che $w+h \in D_\rho(0)$, con $|w| \le \rho < R$ si ha che $|w+h|^{n-k}|w|^{k-1} \le \rho^{n-1}$ quindi

$$\left|\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| n\rho^{n-1} \to 0$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\zeta^{n-1}$ la serie derivata converge assolutamente in $D_R(0)$ in particolare per $\zeta = \rho$. Concludiamo ora

$$\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(w)\right| \le \limsup_{h\to 0}\left|\frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h} - S_N'(w)\right| +$$
$$+ \limsup_{h\to 0} |S_N'(w) - g(w)| + \limsup_{h\to 0}\left|\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h}\right| = |S_N'(w) - g(w)| + \varepsilon$$

per N sufficientemente grande. Si conclude per l'arbitrarietà di ε □

2.4 Integrazione su Curve

Definizione 2.4: Curva in $\mathbb{C}$

Diremo **curva** in $\mathbb{C}$ ogni funzione continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si dice **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Il **sostegno** di γ è l'immagine di γ, cioè $\gamma([a, b])$. Inoltre γ si dice

C^1 a tratti se esistono $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tali che

$$\gamma|_{[t_{k-1},t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k]) \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

Diciamo **curva opposta** di γ la curva percorsa in "senso opposto" ossia:

$$-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \qquad -\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$$

Chiamiamo **saldatura** di due curve $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}, \gamma_2[a_2, b_2] \to \mathbb{C}$, con $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$., la curva

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 + t - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases} \qquad \forall t \in [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$$

(Notare che esiste anche la notazione moltiplicativa per saldatura e curva opposta). Siano ora $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ due curve. Allora diciamo che le due curve sono **equivalenti** se esiste $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ C^1 a tratti, biettiva, con $\varphi' > 0$, tale che $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

Per convenzione, se non espressamente specificato diversamente considereremo curve C^1 a tratti.

Definizione 2.5: Integrale su curva

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti e sia f continua a valori in $\mathbb{C}$ definita (almeno) sul sostegno di γ. Allora si definisce

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Abbiamo le seguenti proprietà:

- (linearità) $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f + \mu g)\, dz = \lambda \int_\gamma f dz + \mu \int_\gamma g dz$
- (additività) $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
- $\displaystyle\left| \int_\gamma f dz \right| \leq \text{ lungh } (\gamma) \cdot \max_{\text{spt } \gamma} |f|$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

Sia $\mathcal{C}$ una curva in $\mathbb{C}$ assegnata come "oggetto geometrico": circonferenza, retangolo, segmento eccetera. Allora scriveremo $\int_\mathcal{C} f(z)dz$ purché il contesto chiarisca il tipo di parametrizzazione. Ad esempio $\int_{\partial D_R}$ o $\int_{\partial R}$ (rispettivamente integrale su circonferenza e su bordo di un rettangolo) si intenderà a meno di specificare in orientamento antiorario.

Proposizione 2.8. *Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ due curve equivalenti. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ la funzione di equivalenza. Allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$
$$= \int_{a}^{b} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_{\gamma} f(z)dz$$

□

Esempio 2.5. Se consideriamo $\int_{\partial D_R(a)}$ allora la parametrizzazione che prendiamo sarà $\gamma(t) = a + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Quindi abbiamo $\gamma'(t) = iRe^{it}$ e

$$\int_{\partial D_R(a)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})iRe^{it}dt$$

ad esempio se $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$

$$\int_{\partial D_R(a)} \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

Esempio 2.6. Se consideriamo R rettangolo, $a \in R \setminus \partial R$. Calcoliamo quindi

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a}dz$$

dove $z = a + \rho(\theta)e^{i\theta}$ dove $\theta \in [0, 2\pi]$ e ρ è C^1 a tratti. Allora otteniamo che

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(\theta)e^{i\theta}} i\rho(\theta)e^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i$$

Osservazione. Se ho $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}-$differenziabile e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ C^1 a tratti, allora $\dfrac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Infatti, fissato $t_0 \in [a, b]$ Consideriamo

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0}$$

Ricordiamo che $F(z) = F(a) + F'(a)(z-a) + (\varepsilon(z-a))(z-a)$ con $\varepsilon(w)$ infinitesimo per $w \to 0$ e $\varepsilon(0) = 0$. Allora

$$\frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(t_0))}{t - t_0} = F'(\gamma(t_0))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varepsilon(\gamma(t) - \gamma(t_0))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

e passando al limite otteniamo la tesi.

Osservazione. $\int_\gamma f(z)dz$ è l'integrale su un intervallo di una funzione vettoriale $f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Come tale possiamo applicare i risultati visti di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Ad esempio supponiamo di avere $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e una successione e una funzione $f_n, f : \mathrm{spt}\gamma \to \mathbb{C}$ continua e $f_n \to f$ uniformemente su $\mathrm{spt}\gamma$. Allora

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$$

Infatti per ipotesi sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon\ \forall z \in \mathrm{spt}\gamma \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

ma quindi anche $\forall t \in [a,b]$ abbiamo che $|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t)) < \varepsilon$ e quindi

$$|f_n(g(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \max_{a \leq s \leq b} |\gamma'(s)| < M\varepsilon$$

cioè $f_n(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot) \to f(\gamma(\cdot))\gamma'(\cdot)$ uniformemente.

In particolare (come successione si consideri la successione delle somme parziali di una serie) si ha che se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sul supporto di γ allora

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

Definizione 2.6: Primitiva

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Una funzione $F : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice **primitiva** di f se F è $\mathbb{C}-$differenziabile e $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \Omega$.

Proposizione 2.9. *Sia F primitiva di f e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva C^1 a tratti. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dimostrazione.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

□

Corollario 2.9.1. *Se F ammette primitiva in Ω allora $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni curva chiusa γ in Ω.*

Dimostrazione. ovvia □

Corollario 2.9.2. *Sia Ω un aperto **connesso**, allora se f è $\mathbb{C}-$differenziabile e $f' = 0$ allora f è costante.*

Dimostrazione. Fissiamo $z_0, z_1 \in \Omega$, allora esiste (connessione per archi) una γ C^1 a tratti (poligonale) con $\gamma(a) = z_0$ e $g(b) = z_1$ e allora poiché f è primitiva di f' abbiamo che

$$0 = \int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(z_1) - f(z_0)$$

□

Ricordiamo la notazione "mista" per le funzioni $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$. Sia ora $\gamma : [a,b] \to \Omega$ C^1 a tratti e la denotiamo $\gamma(\cdot) = x(\cdot) + iy(\cdot)$. Allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(y)))(x'(t) + iy'(t))dt = \\ &= \int_a^b u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)dt + \\ &\quad + i\int_a^b u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)dt\end{aligned}$$

Se ora poniamo $\omega_r(x,y) = u(x,y)dx - v(x,y)dy$ e $\omega_i(x,y) = v(x,y)dx + u(x,y)dy$ allora otteniamo

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \omega_r + i\int_\gamma \omega_i$$

e anche

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))x'(t)dt + \\ &+ i\int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))y'(t)dt = \\ &= \int_\gamma f(x,y)dx + i\int_\gamma f(x,y)dy\end{aligned}$$

Proposizione 2.10. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

a) Sia f continua. Allora f ammette primitiva *se e solo se ω_r e ω_i sono* esatte

b) Sia $f \in C^1$. Allora f soddisfa le condizioni di Cauchy − Riemann (cioè è $\mathbb{C}$-differenziabile*) se e solo se ω_r e ω_i sono* chiuse

Dimostrazione.

a) f ammette primitiva $F = \varphi + i\psi$; si ha quindi che

$$u + iv = F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x \quad \text{e} \begin{cases}\varphi_x = \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x\end{cases}$$

Allora otteniamo che

$$\begin{cases}u = \varphi_x = \psi_y \\ v = \psi_x = -\varphi_y\end{cases}$$

ne consegue che

$$\begin{cases}\omega_r = udx - vdy = \varphi_x dx - \varphi_y dy = d\varphi \\ \omega_i = vdx + udy = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi\end{cases}$$

sono esatte.

Viceversa, siano ω_r e ω_i esatte, quindi $\omega_r = d\varphi$ e $\omega_i = d\psi$, per opportune $\varphi, \psi \in C^1(\Omega)$. Allora

$$\begin{cases}u = \varphi_x \\ -v = \varphi_y\end{cases} \qquad \begin{cases}v = \psi_x \\ u = \psi_y\end{cases}$$

Ponendo ora $F = \varphi + i\psi \in C^1$ si ha che

$$\begin{cases}\varphi_x = y = \psi_y \\ \varphi_y = -v = -\psi_x\end{cases}$$

che sono esattamente le condizioni di Cauchy-Riemann per F. Allora F è $\mathbb{C}$-differenziabile e $F' = F_x = \varphi_x + i\psi_x = u + iv = f$, quindi F è primitiva di f.

b) $f = u + iv$. Le condizioni di Cauchy-Riemann sono

$$\begin{cases}u_x = v_y \\ u_y = -v_x\end{cases} \iff \begin{cases}w_i = vdx + udy \text{ è chiusa} \\ w_r = udx - vdy \text{ è chiusa}\end{cases}$$

semplicemente per definizione

$\square$

Ricordiamo che vogliamo cercare di invertire il risultato precedente, ossia il corollario 2.9.1. Per il viceversa quindi abbiamo che $\int_\gamma f = 0$ per ogni γ chiusa in Ω, ma ora poiché $\int_\gamma f = \int_\gamma \omega_r + i \int_\gamma \omega_i$ ne consegue che

$$\int_\gamma \omega_r = \int_\gamma \omega_i = 0 \quad \forall\gamma \overset{\text{Teorema 3.1}}{\Longrightarrow} \omega_r, \omega_i \text{ esatte} \overset{\text{Proposizione}}{\Longrightarrow} f \text{ ammette primitiva}$$

Con questo abbiamo dimostrato

Proposizione 2.11. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, allora f ammette primitiva se e solo se*

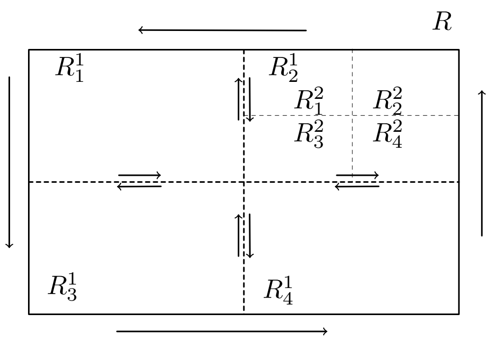
$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall\gamma \textit{ chiusa in } \Omega$$

Nella dimostrazione $f\mathbb{C}-$differenziabile $\implies f$ analitica servirà avere che $\int_\gamma f = 0$ per ogni γ chiusa in Ω semplicemente connesso. Ma non possiamo usare (b) della proposizione 2.10 perché non possiamo assumere che f sia C^1. Allora mostriamo direttamente che $\int_\gamma f = 0$ in un caso particolare, usando il seguente lemma

Lemma 2.12: Cauchy-Goursat

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$differenziabile. Sia R un rettangolo chiuso, con $R \subseteq \Omega$. Allora

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$



Dimostrazione. Sia $A = \left|\int_{\partial R} f dz\right|$. Per assurdo supponiamo sia $A > 0$. Ora suddividiamo R in quattro rettangoli $R_1^1, R_2^1, R_3^1, R_4^1$ e abbiamo

$$A = \left|\int_{\partial R} f\right| = \left|\sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i^1} f\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{\partial R_i^1} f\right|$$

Allora abbiamo che per un qualche R_j^1 si ha che

$$\left|\int_{\partial R_{j_1}^1} f\right| \geq \frac{A}{4}$$

Procediamo in questo modo suddividendo $R_{j_1}^1$ in quattro rettangoli R_i^2 per $i = 1, 2, 3, 4$ e così procedendo si forma una successione di rettangoli

$$R_{j_1}^1 \supseteq R_{j_2}^2 \supseteq \cdots \supseteq R_{j_n}^n$$

che hanno diametro diam$R^k_{j_k} = \frac{1}{2^k}$ diam R di lunghezza lungh$R^k_{j_k} = \frac{1}{2^k}$lungh e tali che

$$\left| \int_{\partial R^k_{j_k}} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

Ora essendo ogni rettangolo compatto, la loro intersezione non è vuota e anzi è un solo punto $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^k_{j_k} = \{a\}$, avendo diametro 0. Poiché f è $\mathbb{C}-$differenziabile in $z = a$:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \varepsilon(z-a)(z-a) \quad \varepsilon(0) = 0 \quad \varepsilon(w) \to 0 \text{ per } w \to 0$$

Infine notiamo che

$$\int_{\partial R^k_{j_k}} f(z)dz = \int_{\partial R^k_{j_k}} (f(a) + f'(a)(z-a))dz + \int_{\partial R^k_{j_k}} \varepsilon(z-a)(z-a)dz$$

dove il primo termine è uguale a 0 poiché la funzione integranda ammette primitiva $f(a)z + \frac{1}{2}f'(a)(z-a)^2$. Ora fissiamo $\sigma > 0$. Sia $\delta > 0$ tale che $|w| < \delta \implies |\varepsilon(w)| < \sigma$. Per k sufficientemente grande abbiamo che diam$R^k_{j_k} < \delta$ e allora $|z-a| < \delta$ se $z \in \partial R^k_{j_k}$. Allora, per tali k:

$$\left| \int_{\partial R^k_{j_k}} \varepsilon(z-a)(z-a)dz \right| \leq \sigma \text{ diam } R^k_{j_k} \text{ lungh } R^k_{j_k} = \sigma \cdot \frac{1}{2^k} \text{ diam } R \cdot \frac{1}{2^k} \text{ lungh } \partial R$$

Ricordando che

$$\left| \int_{\partial R^k_{j_k}} f \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

e mettendo assieme i pezzi otteniamo che $A = 0$ (per l'arbitrarietà di σ), che è assurdo □

Estendiamo ora il risultato

Proposizione 2.13. *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Sia $a \in \Omega$ e supponiamo che f sia $\mathbb{C}-$differenziabile in $\Omega \setminus \{a\}$. Allora*

$$\int_{\partial R} f = 0$$

per ogni rettangolo chiuso R in Ω

Dimostrazione.

- Se $a \notin R$ allora si usa il lemma di Cauchy-Goursat
- Se $a \in \partial R$ si approssima R con una successione R_n di rettangoli internamente (come in figura 4) Risulta poi

  $$0 = \int_{\partial R_n} f \to \int_{\partial R} f$$

  (possiamo pensare ogni ∂R_n parametrizzato su un intervallo fisso $[a, b]$ e c'è convergenza uniforme)
- $a \in \mathring{R}$ Scomponendo R in due rettangoli R_1 e R_2 come in figura, con $a \in \partial R_1 \cap \partial R_2$ si ha che

  $$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R_1} f + \int_{\partial R_2} f = 0$$

  per il caso precedente

□

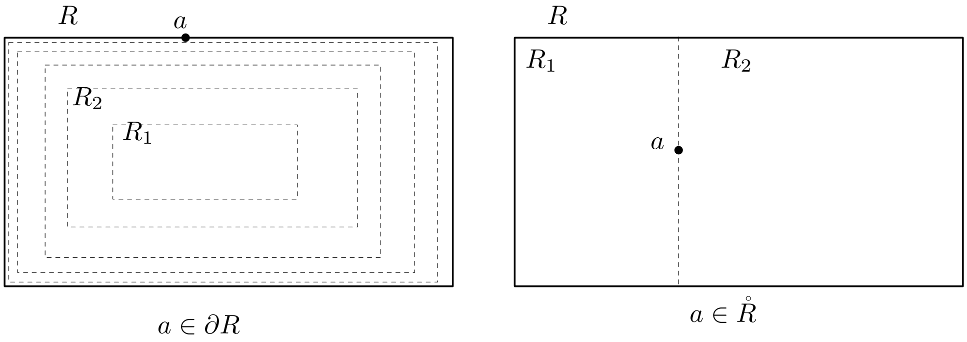


Figura 4: Approssimazione di R con R_n per $a \in \partial R$ e decomposizione per $a \in \mathring{R}$

Teorema 2.14: Formula di Cauchy per il rettangolo

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$differenziabile. Sia $R \subseteq \Omega$ un rettangolo chiusa. Allora per ogni $w \in \mathring{R}$ risulta

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Dimostrazione. Sia

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

allora poiché f è $\mathbb{C}-$differenziabile, g è continua Ω. Inoltre g è $\mathbb{C}-$differenziabile in $\Omega \setminus \{w\}$. Allora per la proposizione 2.13 si ha che

$$0 = \int_{\partial R} g(z) dz = \int_{\partial R} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{\partial R} \frac{1}{z-w} dz$$

Infine poiché $\int_{\partial R} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$ per $w \in \mathring{R}$ si ottiene la tesi. □

Teorema 2.15

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione $\mathbb{C}-$differenziabile. Allora f è analitica in Ω

Dimostrazione. Fissiamo $a \in \Omega$ e mostriamo che f è sviluppabile in serie di potenze in un intorno di a. Sia R un rettangolo chiuso con $a \in \mathring{R}$ e $R \subseteq \Omega$. Sia $D_r(a)$ con $\overline{D_r(a)} \subseteq \mathring{R}$. Consideriamo $z \in D_r(a)$. Sappiamo per la formula di Cauchy per il rettangolo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ora comunque presi $z \in D_r(a)$ e $\zeta \in \partial R$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}}$$

e poiché

$$\left| \frac{z-a}{\zeta - a} \right| \leq \alpha < 1$$

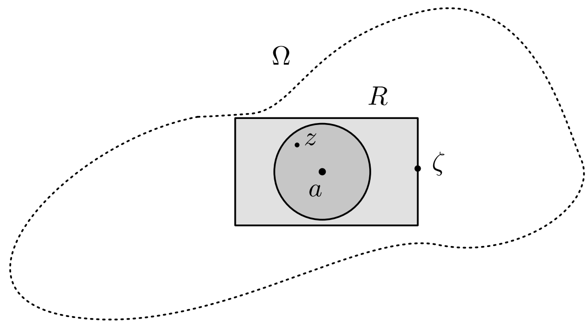


Figura 5: diffanalitica

per un opportuno α. Allora abbiamo

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n}$$

e quindi

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^{n}d\zeta$$

Risulta che

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^{n}\right|\leq\left(\max_{\partial R}|f|\right)\frac{1}{|\zeta-a|}\cdot\alpha^{n}$$

e quindi poiché $\alpha<1$ si ha convergenza globale e si può scambiare il segno di serie e integrale ottenendo

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\partial R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}(z-a)^{n}$$

dove $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$ □

Abbiamo allora dimostrato che f è $\mathbb{C}-$differenziabile se e solo se è analitica. Si parla anche di funzioni **olomorfe** e si indica con $f\in\mathcal{H}(\Omega)$

Osservazione. Se f è olomorfa allora f è infinitamente differenziabile in senso complesso. Inoltre se guardiamo f come funzione reale $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ allora f è C^{∞}

Sia $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Abbiamo già visto che se per ogni γ chiusa in Ω si ha $\int_{\gamma}f=0$ allora f ammette primitiva in Ω, ossia esiste $F:\Omega\to\mathbb{C}$ tale che $F'=f$. In particolare F è $\mathbb{C}-$differenziabile e quindi olomorfa, ma quindi anche f è olomorfa.

Ricordando la dimostrazione del teorema 3.1 che dice che se l'integrale su ogni curva chiusa di una forma differenziale è nullo allora la forma è esatta. Similmente se per ogni curva chiusa γ si ha che l'integrale su γ di f è nullo allora f ammette primitiva, costruita nello stesso modo, ossia

$$F(z)=\int_{\gamma_z}f(\zeta)d\zeta$$

dove γ_z è una curva che unisce z_0 a z, con z_0 fissato. Richiedere che l'integrale su ogni curva chiusa sia nullo serve perché questa funzione sia ben definita.

Supponiamo ora di avere solamente l'ipotesi

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Otteniamo un simile risultato

Teorema 2.16: Morera

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua e tale che

$$\forall R \subseteq \Omega \quad \int_{\partial R} f = 0$$

Allora f è olomorfa in Ω

Dimostrazione. Fissato $\overline{D}_r(a) \subseteq \Omega$, per ogni $z \in D_r(a)$ costruiamo

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

dove γ_z consiste in due dei lati di un rettangolo con vertici a e z. Tecnicamente allora ci sono due curve γ_z e $\tilde{\gamma}_z$ con questa proprietà, ma per l'ipotesi posta hanno uguale integrale, quindi F è ben posta. Ora come nel caso precedente si dimostra che F è $\mathbb{C}-$differenziabile e $F'(z) = f(z)$ in ogni $z \in D_r(a)$. Allora F è $\mathbb{C}-$differenziabile in $D_r(a)$. Per l'arbitrarietà di a si ha che f è olomorfa in Ω. □

Osservazione. Non abbiamo dimostrato in questo caso che f ammette primitiva su tutto Ω, ma soltanto in un intorno di ogni punto. Questo comunque ci permette di mostrare che f è olomorfa.

Con quanto appena visto possiamo aggiornare la Proposizione 2.10. Infatti se f è olomorfa, in particolare è C^1 e allora ω_i e ω_r sono chiuse. Ora usando il Teorema 3.2 vale l'invarianza per omotopia. Allora

Teorema 2.17: Cauchy, forma omotopica

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e γ_0, γ_1 curve chiuse fra loro omotope in Ω. Allora

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Dimostrazione. vedasi sopra □

Risultato analogo vale per curve omotope rispetto a un'omotopia che fissa gli estremi.

Corollario 2.17.1. *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω semplicemente connesso. Allora f ammette primitiva in Ω*

Osservazione. Segue che $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ammette sempre una primitiva locale.

Teorema 2.18: Formula di Cauchy per il cerchio

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e D disco aperto con $\overline{D} \subseteq \Omega$. Allora per ogni $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

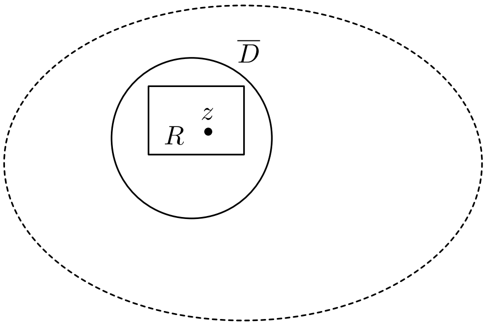


Figura 6: cauchy-disco

Dimostrazione. Sappiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

se R è un rettangolo chiuso in Ω, con $z \in \mathring{R}$. Sia $R \subseteq D$

Poiché

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

è olomorfa in $\Omega \setminus \{z\}$ e ∂D e ∂R sono omotope in $\Omega \setminus \{z\}$ risulta

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

□

Osservazione. La formula si estende al caso in cui anziché D vi è una "qualunque forma" con bordo omotopo a ∂R

Funzioni olomorfe Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora se $a \in \Omega$ sappiamo che in un intorno di $z = a$

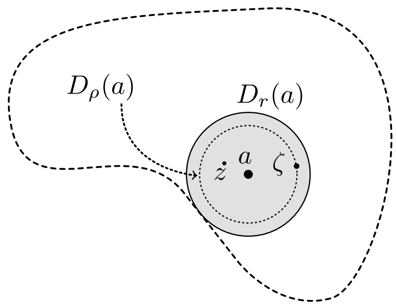
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

per opportuni $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ per il teorema della serie derivata. Domanda naturale è chiedersi quant'è il raggio di convergenza di tale serie di potenze.

Proposizione 2.19. *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ converge nel più grande disco contenuto in Ω*

Dimostrazione. Sia $r = d(a, \partial\Omega)$. Fissiamo $z \in D_r(a)$ e sia $0 < \rho < r$ tale che $z \in D_\rho(a)$. Applichiamo la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



e procediamo come nella dimostrazione dell'analiticità delle funzioni $\mathbb{C}$-differenziabili. Allora per z fissato

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})}$$

e poiché $\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| = \frac{1}{\rho}|z-a| < 1$ e indipendente da ζ. Quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta\right)(z-a)^n \end{aligned}$$

e quindi questa deve essere la serie di taylor □

Dalla dimostrazione scende anche che

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

e poiché la funzione integranda è olomorfa in $\Omega \setminus \{a\}$ e le curve ∂D e $\partial D_{rho}(a)$ sono omotope, per D qualsiasi $a \in D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$ si ottiene il seguente corollario

Corollario 2.19.1. *Sia $\overline{D} \subseteq \Omega$ disco chiuso. Allora per ogni $z \in D$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{2.5}$$

Osservazione. Per $n = 0$ si trova proprio la formula di Cauchy per il cerchio.

Osservazione. Il corollario può essere ottenuto dalla formula di Cauchy per il cerchio per derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

Proposizione 2.20. *Per ogni $a \in \Omega$ e $\overline{D_\rho}(a) \subseteq \Omega$*

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \rho^{-n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f|$$

Dimostrazione. Da (2.5) si ottiene che

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\rho^{n+1}}\left(\max_{\partial D_\rho}|f|\right) \cdot \underbrace{\text{lungh}\partial D_\rho(a)}_{2\pi\rho}$$

□

Teorema 2.21: Liouville

Se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ è limitata, allora f è costante

Dimostrazione. Fissiamo $a \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$ arbitrario. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di centro $z = a$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

è valido per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Sappiamo per la proposizione precedente che

$$|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \leq \rho^{-n} \max_{\mathbb{C}} |f| \to 0 \text{ per } \rho \to \infty$$

da cui $c_n = 0$ per $n \geq 1$ da cui $f(z) = c_0$ è costante. □

Corollario 2.21.1 (Teorema Fondamentale dell'Algebra)**.** *Sia*

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

con $a_n \neq 0$. Allora p_n ha almeno uno zero

Dimostrazione. Per assurdo sia $p_n(z) \neq 0$ per ogni z. Allora sia

$$f(z) = \frac{1}{p_n(z)}$$

Si ha che

$$p_n(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)$$

il cui valore assoluto va a $+\infty$ per $|z| \to \infty$. Allora f è limitata perché $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$. Ma allora per il teorema di Liouville f è costante, assurdo. □

2.5 Sviluppo di Laurent

Con

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \tag{2.6}$$

intendiamo

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m \tag{2.7}$$

cioè diremo che la serie (2.6) converge (uniformemente, assolutamente, ecc) se tali sono le serie (2.7).

Siano $0 \leq r_1 < r_2 < +\infty$ e $a \in \mathbb{C}$. Consideriamo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$$

Nel caso di $r_1 = 0, r_2 = r$ allora si indica anche $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$

Teorema 2.22

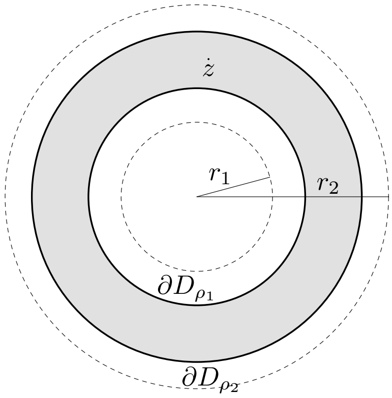
Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora esiste unica una successione c_n tale che

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad z \in \Omega$$

Tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di Ω. Inoltre si ha che

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta \tag{2.8}$$

per un qualunque $\rho \in (r_1, r_2)$



Dimostrazione. Siano $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ come in figura. Rappresentiamo f in forma integrale in $\{z : \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$. Sia

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

Allora g è olomorfa in Ω, infatti se $\zeta \neq z$, poiché $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - z)^n$, con $a_0 = f(z)$,

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\zeta - z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\zeta - z)^{n-1}$$

che è una funzione olomorfa anche in un intorno di z e vale $a_1 = f'(z)$ in $\zeta = z$.

Ne consegue che per il teorema di Cauchy

$$\partial D_{\rho_1} \sim \partial D_{\rho_2} \implies \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} g = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} g$$

ma allora

$$\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

ma $\int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$ poiché la funzione $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ è olomorfa in un disco contenente ∂D_{ρ_1} e non contenente z e in tale disco $D_{\rho_1} \sim 0$. Allora

$$-f(z) \int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} d\zeta = -f(z) 2\pi i = \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e quindi ora per il secondo passo usiamo la rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right)$$

Sia ora $\zeta \in \partial D_{\rho_1}(a)$ e allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = -\frac{1}{(z-a) - (\zeta - a)} = -\frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)}$$

e poiché $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = \frac{\rho_1}{z-a} < 1$ abbiamo che la precedente

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^n$$

converge uniformemente per $\zeta \in \partial D_{\rho_1}$ e quindi

$$-\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\partial D_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

da cui

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-n}} d\zeta\right)(z-a)^{-(n-1)} = \cdots$$

se ora $m := -(n+1)$ si ha che

$$\cdots = \sum_{m=-1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m+1}} d\zeta\right)}_{c_m}(z-a)^m$$

che è esattamente la forma promessa dal teorema per le potenze negative.

Consideriamo ora invece $\zeta \in \partial D_{\rho_2}(a)$ e allora

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)}$$

e come prima poiché $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| \leq \frac{|z-a|}{\rho_2} < 1$ la precedente

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

converge uniformemente per $\zeta \in \partial D_{\rho_2}$ e quindi

$$\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(z)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta\right)(z-a)^n$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta\right)}_{c_n}(z-a)^n$$

Infine poiché $\zeta \mapsto \frac{f(z)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ è olomorfa in Ω l'espressione dei coefficienti coincide con

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}d\zeta$$

per ρ arbitrario con $r_1 < \rho < r_2$ e allora

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m$$

□

Convergenza assoluta uniforme. La validità della convergenza dimostrata assicura automaticamente la convergenza assoluta uniforme sui compatti di Ω. Infatti: Per ipotesi

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m$$

converge per $|z-a| \in (r_1, r_2)$. Ne segue che il raggio di convergenza è almeno r_2; pertanto la serie converge assolutamente in modo uniforme nei compatti di $D_{r_2}(a)$ e quindi in particolare sui compatti di Ω.

Si ha inoltre che

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m = \sum_{n=-1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$$

con $\zeta - \frac{1}{z-a}$. L'ultima serie è una serie di potenze e converge per $|\zeta| \in (\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_1})$ con la convenzione $\frac{1}{0} = \infty$ e $\frac{1}{\infty} = 0$ e quindi il raggio di convergenza è $R \geq \frac{1}{r_1}$ per cui converge in modo assoluto uniforme sui dischi $\overline{D_\rho}(0)$ con $\rho < \frac{1}{r_1}$ cioè sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \rho\}$$

e quindi la serie $\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m(z-a)^m$ converge in modo assoluto uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|z-a|} \leq \rho\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \frac{1}{\rho}\}$$

con $\frac{1}{\rho}$ un qualunque valore maggiore di r_1. Quindi la convergenza è assoluta uniforme sugli insiemi

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \geq \gamma\} \quad \gamma > r_1$$

in particolare si ha convergenza assoluta uniforme sui compatti di Ω. □

Unicità dei c_m . Mostriamo che se $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ sono tali che

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m, \quad z \in \Omega$$

allora, necessariamente sono dati dalla formula dell'enunciato. Fissiamo $\overline{m} \in \mathbb{Z}$ e calcoliamo

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\overline{m}+1}}dz \overset{\text{conv. unif.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{(z-a)^m}{(z-a)^{\overline{m}+1}}dz$$

l'argomento dell'integrale è una potenza. Ha primitiva se $m - \overline{m} - 1 \neq -1$ e quindi tutti gli integrali della serie sono nulli tranne per $m - \overline{m} - 1 = -1$ ossia $m = \overline{m}$. Allora

$$\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\overline{m}-1}}dz = c_{\overline{m}} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{1}{z-a}dz = 2\pi i c_{\overline{m}}$$

e quindi

$$c_{\overline{m}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{\overline{m}+1}} dz$$

$\square$

Esempio 2.7. Sia $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$. Allora $z \neq 0$ e $z \neq 1$. Consideriamo i seguenti Ω_1 e Ω_2

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$$
$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Consideriamo prima Ω_1. Allora

$$-\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

che è lo sviluppo di Laurent di f in Ω_1

In Ω_2 si ha che

$$\frac{1}{z(z-a)} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

Che è lo sviluppo di Laurent di f in Ω_2

Definizione 2.7: Sviluppo di Laurent relativo a un punto

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ con $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$. Lo sviluppo di cui al teorema precedente è detto **sviluppo in serie di Laurent** relativo al punto $z = a$ (non dipende da r)

Esercizio 2.1

Sia $f(z) = \dfrac{3}{iz^2 - z + 2i}$. Si calcoli:

- La serie di Laurent centrata in entrambi i punti in cui f non è definita.
- La serie di Taylor centrata in $z = 0$

Esercizio 2.2

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r(a))$ e $N \in \mathbb{N}$. Allora esiste unico $P_N(z-a)$ polinomio di grado al più N tale che

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - P_N(z-a)}{(z-a)^N} = 0$$

Infatti il polinomio di Taylor di grado N soddisfa questa condizione

Dimostrazione. f è olomorfa, quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

e quindi

$$f(z) = P_N(z-a) + R_N(z-a) = P_N(z-a) + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$R_N(z-a) = (z-a)^{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-N-1}$$

per cui la serie dà luogo ad una funzione olomorfa g; quindi

$$\frac{f(z) - P_N(z-a)}{(z-a)^N} = (z-a)g(z) \to 0 \quad \text{per } z \to a$$

e P_N è l'unico con tale proprietà. Infatti se Q_N avesse la stessa proprietà, allora

$$\frac{P_N(z-a) - Q_N(z-a)}{(z-a)^N} = \frac{P_N - f + f - Q_N}{(z-a)^N}$$

Sia ad esempio $N = 2$, allora questo significa

$$P_N(z-a) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2$$
$$Q_N(z-a) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2$$

Se ora $\frac{P_N - Q_N}{(z-a)^N} \to 0$ allora $P_N(0) = Q_N(0)$ da cui $a_0 = b_0$. Si può proseguire mostrando che allora $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e così via. □

Esercizio 2.3

Calcolare il Polinomio di Taylor di grado 4 di

$$f(z) = e^z \sin(z)$$

relativamente a $z = 0$

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ e $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m$. Sia inoltre $\zeta = \frac{1}{z-a}$ e quindi

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$$

Sappiamo che (vedasi dimostrazione teorema sopra) tale serie ha raggio di convergenza $R \geq \frac{1}{r_1}$ e definisce pertanto una funzione $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dunque

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right) \text{ è olomorfa in } \mathbb{C} - \{a\}$$

Che motiva la seguente definizione

Definizione 2.8: Parte principale

La funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} c_m (z-a)^m$$

è detta parte principale dello sviluppo di Laurent di f relativo a $z = a$

Sappiamo che tale serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Proposizione 2.23. *La parte principale è l'unica funzione g tale che*

- $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$
- $g(z) \to 0$ *per* $|z| \to \infty$
- $f - g$ *è estendibile in modo olomorfo in un intorno di* a

pezzettino di dim. Sappiamo che $g(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right)$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Inoltre $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = \varphi(0) = 0$. Infine $(f-g)(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$ e il secondo membro definisce una funzione olomorfa in un intorno di a. □

Unicità. □

Definizione 2.9: Residuo

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ e sia $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m$ lo sviluppo di Laurent. Il valore c_{-1} è detto **residuo** di f in $z = a$

Definizione 2.10: Funzioni meromorfe

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto ed $E \subseteq \Omega$ un insieme chiuso e discreto (tutti i punti di E sono isolati).
Una funzione f si dice **meromorfa** in E se $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$ e per ogni $a \in E$ esiste $r > 0$ e due funzioni $h, g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ con $h \not\equiv 0$ tali che

$$h \cdot f = g \quad \text{in } D_r(a)$$

Osservazione. Vorrei dire che f è rapporto di due funzioni olomorfe, ma non volendomi preoccupare della definizione dò invece dale definizione.

Sia f meromorfa in Ω come da definizione. Sia $a \in E$; poiché $h \not\equiv 0$

$$h(z) = c_N (z-a)^N + c_{N+1}(z-a)^{N+1} + \dots$$

con $c_N \neq 0$ e allora da $hf = g$ si ha

$$(z-a)^N \underbrace{(c_N + c_{N+1}(z-a) + \dots)}_{:=\psi(z)} f(z) = g(z)$$

con $\psi(a) = c_N$. In un intorno U di a si ha $\psi \neq 0$ e quindi

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N \psi(z)} \qquad z \in U, z \neq a \tag{2.9}$$

Possiamo quindi dire che la condizione che f sia meromorfa in Ω è che nell'intorno di ogni $a \in E$ la funzione f è quoziente di due funzioni olomorfe, con denominatore nullo al più in a.

Osservazione. Ovviamente $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora f è meromorfa con $h \equiv 1$

Proposizione 2.24. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto ed $E \subseteq \Omega$ chiuso e discreto. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega - E)$. Allora f è meromorfa in Ω se e solo se per ogni $a \in E$ lo sviluppo di Laurent di f ina è "troncato a sinistra".*

Dimostrazione. In (2.9) la funzione g/ψ è olomorfa in U e quindi la possiamo sviluppare in serie di Taylor di centro $z = a$ ottenendo

$$\frac{g(z)}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \implies f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^N} + \frac{a_1}{(z-a)^{N-1}} + \frac{a_2}{(z-a)^{N-2}} + \dots$$

in un opportuno intorno bucato di a. Per l'unicità dello sviluppo di Laurent di f in a, il precedente è lo sviluppo di Laurent di f in a. Evidentemente è "troncato a sinistra".

Viceversa se f ha uno sviluppo come sopra allora

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-a)^N}}_{:=\frac{1}{\tilde{h}(z)}} \underbrace{\Big(a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots\Big)}_{:=\tilde{g}(z)}$$

con $\tilde{h}, \tilde{g}$ olomorfe. Allora f è meromorfa. $\square$

Teorema 2.25: Estensione di Riemann

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ tale che

$$\lim_{z\to a} (z-a)f(z) = 0$$

Allora f è estendibile in modo olomorfo a tutto $D_r(a)$

Corollario 2.25.1. *Dal teorema si ricava che se $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ allora f è estendibile in modo olomorfo a $D_r(a)$ se e solo se f è limitata in un intorno di a*

Dimostrazione.

$\implies$ ovvio perché l'estensione è continua in $z = a$

$\impliedby$ Se f è limitata in un intorno di a allora $(z-a)f(z) \to 0$ per $z - a$ e quindi per il teorema f è estendibile

$\square$

Dimostrazione del Teorema 2.25. Sia

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m$$

Dimostriamo che $c_m = 0$ per $m < 0$. Ricordando che c_m è dato da (2.8) si ha, prendendo ρ aribtrario, con $\rho \in (0, z)$

$$|c_m| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z\in\partial D_\rho(a)} \frac{|f(z)|}{|(z-a)|^{m+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{1}{\rho^m} \max_{\partial D_\rho(a)} |f| \tag{2.10}$$

Per ipotesi fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\rho_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \eta < \rho_\varepsilon, \quad \forall z \in D_\eta^*(a) \quad |(z-a)f(z)| < \varepsilon$$

in particolare per ogni $\rho < \rho_\varepsilon$ e per ogni $z \in \partial D_\rho^*(a)$

$$|(z-a)f(z)| < \varepsilon \implies \rho|f(z)| < \varepsilon \implies |f(z)| < \frac{\varepsilon}{\rho}$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$ e posto ρ_ε come sopra, si ha $\forall \rho < \rho_\varepsilon$, da (2.10) otteniamo

$$|c_m| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^m}\frac{1}{\rho}$$

e quindi per $m < 0$ si ha

$$m = -1 \implies |c_{-1}| \leq \varepsilon \text{ quindi per arbitrarietà di } \varepsilon \; c_{-1} = 0$$
$$m < -1 \implies |c_m| \leq \varepsilon\rho^{-(m+1)} \to 0 \text{ per } \rho \to 0 \implies c_m = 0$$

$\square$

Definizione 2.11: Singolarità eliminabile

Se $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ è estendibile in modo olomorfo a tutto $D_r(a)$, si dice che $z = a$ è una singolarità **eliminabile**

Proposizione 2.26. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $E \subseteq \Omega$ chiuso e discreto. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega - E)$. Allora la funzione f è meromorfa se e solo se per ogni $a \in E$ vale una delle seguenti proprietà:*

a) f è limitata in un intorno di a (singolarità eliminabile)

b) $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$ (polo)

Dimostrazione. Sia $a \in E$. Se f è meromorfa, per la proposizione 2.24 in un intorno di a sia ha

$$f(z) = c_{m_0}(z-a)^{m_0} + c_{m_0+1}(z-a)^{m_0+1} + \dots \quad m_0 \in \mathbb{Z},\ c_{m_0} \neq 0$$

ossia lo sviluppo è troncato a sinistra.

Se $m_0 \geq 0$ allora lo sviluppo dà una funzione olomorfa in un intorno di a, e quindi è verificato il caso (a), altrimenti $m_0 =: -N < 0$ e quindi

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \dots = \frac{1}{(z-a)^N} \underbrace{(c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots)}_{:=g(z)} \tag{2.11}$$

dove $g \in \mathcal{H}(U)$, con U intorno di a, e quindi necessariamente $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$ che è la (b).

Viceversa, se (a) f è limitata in un intorno di a allora per il teorema 2.25 è estendibile in modo olomorfo anche in a ed è quindi olomorfa (dunque anche meromorfa) in un intorno di a. Se invece (b) $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$ allora $\frac{1}{f}$ è definito in un intorno U di a ed è limitato in tale intorno. Allora per il teorema 2.25 esiste $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}(U)$ con $\tilde{\varphi} = \frac{1}{f}$ in $U \setminus \{a\}$ e dunque $\tilde{\varphi} f = 1$ in $U \setminus \{a\}$ ossia f è meromorfa. □

Definizione 2.12: Polo

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ Si dice che $z = a$ è un **polo** se

$$\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$$

In tal caso $f(z)$ è del tipo (2.11). Se $c_{-N} \neq 0$ si dice che $z = a$ è un polo di **ordine** N

Definizione 2.13: Singolarità essenziale

Se $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ ha sviluppo di Laurent con infiniti termini c_m con $m < 0$ si dice che $z = a$ è una singolarità **essenziale**

Esercizio 2.4

Mostrare che $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in $z = 0$

Teorema 2.27: Casorata-Weierstrass

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ con $z = a$ singolarità essenziale. Allora l'immagine di f è densa in $\mathbb{C}$

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che esista un $w \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$ tali che

$$D_\rho(w) \cap f(D_r^*(a)) = \varnothing$$

Allora $\dfrac{1}{f-w}$ è ben definita in tutto $D_r^*(a)$ ed è limitata, dunque per il teorema 2.25 di estensione di Riemann, esiste $\varphi \in \mathcal{H}(D_r(a))$ con $\varphi = \dfrac{1}{f-w}$ se $z \neq a$. Ne segue che $f - w$ è meromorfa che è assurdo, perché f ha una singolarità essenziale $\square$

In realtà in particolare esiste un risultato ancora più sorprendente

Teorema 2.28: Grande Teorema di Picard

Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ con a singolarità essenziale. Allora f assume ogni valore di $\mathbb{C}$, con al più un'eccezione, un numero infinito di volte.

Da questo teorema ne possiamo dedurre la versione "piccola", ossia

Teorema 2.29: Piccolo Toerema di Picard

Una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ che non sia un polinomio assume tutti i valori complessi con al più un eccezione un numero infinito di volte.

Dimostrazione. Se f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ allora $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$. Sia ora

$$\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots$$

allora $\zeta = 0$ è una singolarità essenziale perché f non è un polinomio. Si applica dunque il teorema precedente. $\square$

$\mathbb{C}$ esteso. Indichiamo con $\hat{\mathbb{C}}$ l'estensione $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in cui gli intorni aperti di ∞ sono i complementari dei compatti di $\mathbb{C}$ (∞ è visto come una sorta di "punto ad infinito"). È la compattificazione 1-punto. Geometricamente $\hat{\mathbb{C}}$ può essere visto come una sfera (detta **sfera di Riemann**) mediante la *proiezione stereografica*.

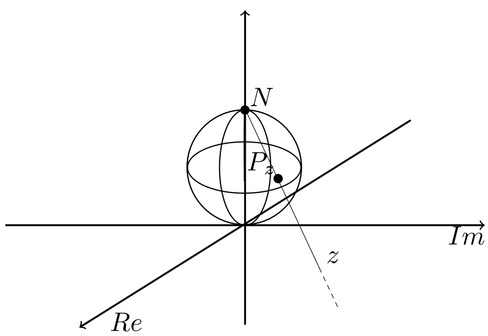


Figura 7: Sfera di Riemann

3 Richiamo delle forme differenziali

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto. Una forma differenziale su Ω è un'espressione formale della forma

$$\omega(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

con $A, B \in C^0(\Omega)$. Più precisamente ω è una funzione continua $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^2)'$. Se γ è una curva C^1 a tratti in Ω, $\gamma : [a,b] \to \Omega$, allora

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{def}}{=} \int_a^b A(x(t),y(t))x'(t) + B(x(t),y(t))y'(t)dt \quad \gamma(t) = (x(t),y(t))$$

Definizione 3.1: Forma esatta

La forma differenziale ω si dice **esatta** se esiste $F \in C^1(\Omega)$ tale che $\omega = dF$, e F è detta *primitiva* di ω

Se ω è C^1 (cioè $A, B \in C^\Omega$) allora, se è esatta, ossia $\frac{\partial F}{\partial x} = A$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = B$ risulta

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \tag{3.1}$$

Definizione 3.2: Forma chiusa

Se ω è una forma differenziale C^1 e soddisfa (3.1) allora si dice **chiusa**

Teorema 3.1

Sia Ω connesso. Allora

$$\omega \text{ esatta} \iff \int_\gamma \omega = 0 \text{ per ogni } \gamma \text{ in } \Omega \text{ chiusa}$$

idea di dimostrazione.

$\Longrightarrow$ semplice

$\Longleftarrow$ Fissiamo $(x_0, y_0) \in \Omega$. Definiamo ora

$$F(x,y) = \int_{\gamma(x,y)} \omega$$

dove $\gamma_{x,y}$ è una qualunque curva in Ω che unisce (x_0,y_0) a (x,y). La definizione è ben posta perché se $\gamma_{(x,y)} e \tilde{\gamma}_{(x,y)}$ sono due tali curve allora

$$0 = \int_{\gamma_{(x,y)} - \tilde{\gamma}_{(x,y)}} \omega = \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega - \int_{\tilde{\gamma}_{(x,y)}} \omega$$

La dimostrazione procede dimostrando che $dF = \omega$

□

Teorema 3.2

Sia Ω connesso e ω **chiusa**. Allora se γ_0 e γ_1 sono curve chiuse C^1 a tratti omotope in Ω allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Osservazione. Il teorema vale anche per curve non necessariamente chiuse purché siano omotope mediante un'omotopia che fissa gli estremi.

Corollario 3.2.1. *Sia Ω semplicemente connesso e ω chiusa. Allora ω è esatta.*

Dimostrazione. Se Ω è semplicemente connesso ogni curva chiusa è omotopa a costante 0 e quindi $\int_\gamma \omega = 0$, ossia ω è esatta $\square$