Appunti di Geometria I

Osea

Secondo semestre 2023 – 2024

Libri: Sernesi 2 oppure (più avanzato) Manetti.

Indice

1 Spazi Topologici **1**

2 Spazi Metrici **4**

3 Funzioni Continue **4**

4 Successioni **6**

5 Funzione Lipschitziana **7**

6 Costruzioni **9**
6.1 Sottospazi topologici 9
6.2 Topologia Prodotto 11
6.3 Topologia Quoziente 14

7 Assiomi di Separazione **18**

8 Assiomi di Numerabilità **19**

9 Compattezza **21**
9.1 Compattezza in Spazi Metrici 27

1 Spazi Topologici

Definizione 1.1: Spazio topologico

Sia X un insieme non vuoto sul quale è presente una famiglia di sottoinsiemi $\tau \subseteq P(X)$, i cui elementi sono chiamati **aperti**. La famiglia τ deve avere queste proprietà:

1) $\varnothing, X \in \tau$
2) $\{A_i\}_{i\in J} A_i \in \tau \implies \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$
3) $A_1, A_2 \in \tau \implies A_1 \cap A_2 \in \tau$

Allora (X, τ) è uno **spazio topologico**. Gli elementi di X si chiamano solitamente **punti**

Nota. se 3') è $A_1, \dots, A_n \in \tau \implies \bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}} \in \tau$ allora per il principio di induzione 3) $\iff$ 3$'$) per cui **l'intersezione finita di aperti è aperta**

Definizione 1.2: insieme chiuso

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Se A è un insieme aperto, allora $X - A$ è **chiuso**

Nota. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia degli insiemi chiusi, allora

1) $\varnothing, X \in \mathcal{C}$
2) Intersezione arbitraria di chiusi è chiusa
3) Unione finita di chiusi è chiusa

Data una famiglia di chiusi si può definire la topologia dove gli aperti sono complementari di chiusi.

Infatti se $\varnothing, X$ sono chiusi allora sono anche aperti (complementari), se A_i sono insiemi aperti allora $\bigcup_{i\in I} A_i = X - (\bigcap_{i\in I}(X - A_i))$ che è aperto, quindi l'unione arbitraria di aperti è aperta, se A e B sono aperti allora $A \cap B = X - ((X - A) \cup (X - B))$ che è aperto, quindi l'intersezione finita di aperti è aperta.

Esempio 1.1 (Topologia Discreta)**.** $\tau = P(x)$ Tutti i sottoinsiemi di X sono aperti, si chiama **topologia discreta**.

Esempio 1.2 (Topologia Indiscreta)**.** $\tau = \{\varnothing, X\}$ più piccola topologia possibile.

Esempio 1.3 (Alcune topologie su X di tre elementi)**.** i- Se $X = \{1, 2, 3\}$ allora una topologia può essere $\tau = \{\varnothing, \{1, 2, 3\}, \{1\}\}$

ii- Con lo stesso X, $\tau = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$ **non** è una topologia. Infatti $\{1, 2\} \notin \tau$

Esempio 1.4 (Topologia Cofinita)**.**

Sia X un insieme, la topologia **cofinita** è quella tale che $\mathcal{C} = \{\varnothing, X\} \cup \{S \in X : \#S < +\infty\}$. Verifico le proprietà:

1) $\varnothing, X$ sono chiusi
2) L'intersezione arbitraria di chiusi ha cardinalità minore o eguale a ognuna delle cardinalità degli insiemi nell'intersezione, quindi in particolare è ancora finita, quindi è chiusa
3) L'unione di due chiusi ha cardinalità al più eguale alla somma delle cardinalità dei due insiemi, per cui è finita, quindi chiusa.

Esempio 1.5 (Topologia Euclidea su $\mathbb{R}$)**.** Sia $X = \mathbb{R}$. $A \in R$ aperto se è unione (anche infinita) di intervalli aperti (a, b), quindi $\tau = A \in \mathbb{R} : A = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)$ dove $(a_i, b_i) = \{x \in R : a_i < x < b_i\}$

Dimostrazione. 1) $\varnothing, \mathbb{R} \in \tau$

2) Siano A_i insiemi del tipo $A_i = \bigcup_{j\in I_i}(a_{ij}, b_{ij})$, con $i \in J$. Allora $\bigcup_{i\in J} A_i = \bigcup_{i\in J}(\bigcup_{j\in I_i})(a_{ij}, b_{ij})$ è ancora unione di intervalli aperti, quindi è in τ
3) Siano $A_1, A_2 \in \tau$ allora $A_1 \cap A_2$ per la distributività di $\cap$ su $\cup$ è un'unione di intervalli aperti, quindi è aperto.

□

Definizione 1.3

Sia X un insieme non vuoto con una topologia τ allora $\mathcal{B} \subseteq \tau$ si dice **base della topologia** se $\forall A \in \tau, A = \bigcup_{i\in I} B_i$, con $B_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in I$

Nota. Quindi se $\mathcal{B}$ è base di una topologia se e solo se

1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$
2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i\in I} B_i,\ B_i \in \mathcal{B}$

Esempio 1.6. Sia $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} =$ intervalli aperti e consideriamo $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, con $\mathcal{B}' = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.

1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} = \mathbb{R}$
2) Intersezione di due intervalli razionali è ancora razionale, quindi vale anche la (2).

Quindi $\mathcal{B}'$ è una base per una topologia. È la topologia euclidea? Sia $(a, b) \subseteq R$. Allora esistono due successioni $a_n \to a$ monotona decrescente con $a_n \in \mathbb{Q}$ e $b_n \to b$ monotona crescente con $b_n \in \mathbb{Q}$. Di conseguenza $(a, b) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(a_i, b_i)$ per cui è aperto nella topologia di $\mathcal{B}'$. Di conseguenza la topologia euclidea si può riscrivere con le unioni di insiemi di $\mathcal{B}'$. Quindi questo mostra che **la topologia euclidea ha una base numerabile**.

Esempio 1.7. Anche la topologia $\mathcal{B}''$ data dagli intervalli interi (n, m) con $n, m \in \mathbb{Z}$ è una base, ma ovviamente non della topologia euclidea perché ad esempio $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ non è esprimibile come unione di intervalli interi.

Definizione 1.4

Sia $S \subseteq X$, allora $\overline{S}$ è la **chiusura** di S se è il più piccolo chiuso che contiene S

Esistenza e Unicità. Sia $\mathcal{S}$ la famiglia di chiusi che contengono S. È non vuota, perché $X \in \mathcal{S}$. Sia $\overline{S} = \bigcap_{C\in\mathcal{S}}$ è chiuso perché è intersezione di chiusi. Ovviamente contiene S perché ogni elemento di $\mathcal{S}$ contiene S. Inoltre ogni altro chiuso che contiene S contiene anche $\overline{S}$ perché è stato usato nell'intersezione. □

Proposizione 1.5. $K := \{x \in X : \forall A \in \tau\,, x \in A\,, A \cap S \neq \varnothing\} = \overline{S}$

Dimostrazione. Sia $x \in K$, supponiamo per assurdo che $x \notin \overline{S} \iff x \in X - \overline{S} \in \tau$ perché per definizione $\overline{S}$ è chiuso. Poiché $S \subseteq \overline{S}$, $X - \overline{S} \cap S = \varnothing$ ma per costruzione di K, $X - \overline{S} \cap S \neq \varnothing$, che è una contraddizione.

Per l'altra inclusione iniziamo mostrando che $S \subseteq K$, poi mostrando che K è chiuso concludiamo che $\overline{S} \subseteq K$. Sia $x \in S$, allora per ogni aperto A contenente x, $x \in A \cap S$, quindi necessariamente $A \cap S \neq \varnothing$, ossia $x \in K$. Consideriamo ora l'insieme aperto $X - \overline{K}$. Se $K \neq \overline{K}$ allora esiste $x \in \overline{K}, x \notin K$. □

2 Spazi Metrici

3 Funzioni Continue

La definizione conosciuta è che $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se

$$\forall x \in (a, b), \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : x' \in (a, b), |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Per gli spazi metrici otteniamo: Siano (X, d) e (Y, d') due spazi metrici. Diremo che $f : X \to Y$ è continua se

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x' \in X, d(x, x') < \delta \implies d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Per migliorare questa definizione notiamo che $\{x' \in X : d(x, x') < \delta\} = D(x, \delta)$. Stessa cosa per il codominio. Otteniamo quindi che, per ogni x e per ogni δ positivo $f(D(x, \delta)) \subseteq D(f(x), \varepsilon)$

Claim: quindi $\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, f^{-1}(D(f(x), \varepsilon))$ è un aperto di X

Dimostrazione. Sia f continua e sia $x' \in f^{-1}(D(f(x), \varepsilon))$, $x' \in X$. Allora $f(x') \in D(f(x), \varepsilon)$. Per la definizione "provvisoria" di continuità esiste un δ tale che $D()$

Proposizione 3.1 (continuità in senso topologico)**.** *Siano X e Y spazi metrici. $f : X \to Y$ è continua in senso metrico se è solo se*

$$\forall A \in \tau_Y, f^{-1}(A) \in \tau_X$$

In altre parole ***la controimmagine di aperti è aperta***

Dimostrazione. Supponiamo che sia continua in senso topologico. Sia $x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Il disco $D(f(x), \varepsilon)$ è aperto in Y, quindi $f^{-1}(D(f(x), \varepsilon))$ è aperto in X. Chiaramente $x \in f^{-1}(D(f(x), \varepsilon))$ ma quindi significa che esiste un disco centrato in x completamente contenuto in $f^{-1}(d(f(x), \varepsilon))$, ossia $\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : D(x, \delta) \subseteq f^{-1}(D(f(x), \varepsilon))$, quindi $f(D(x, \delta)) \subseteq D(f(x), \varepsilon)$.

Viceversa, supponendo f continua in senso metrico, □

Definizione 3.2

Dati due spazi topologici X e Y, rispettivamente con topologie τ_X e τ_Y, una funzione $F : X \to Y$ si dice continua se $\forall A \in \tau_Y$, $F^{-1}(A) \in \tau_X$

Osservazione. Se X, Y, Z sono spazi topologici, $F : X \to Y$ e $G : Y \to Z$ sono continue allora $G \circ F$ è continua.

Dimostrazione. Sia A un aperto di Z, allora $(G \circ F)^{-1}(A) = F^{-1}(G^{-1}(A))$. Dato che G è continua, $G^{-1}(A)$ è aperto in Y e dato che F è continua la sua controimmagine tramite F è aperta in X □

Osservazione. L'identità (da X a X con la stessa topologia) è una funzione continua, infatti la controimmagine di ogni aperto è se stesso, che è aperto.

Le precedenti due osservazioni danno agli spazi topologici la struttura di **categoria**, con le funzioni continue come morfismi.

Esempio 3.1. L'identità da X a X', insiemi con gli stessi elementi ma diversa topologia, è continua se $\tau'_X \subseteq \tau_X$

Esempio 3.2. X con topologia discreta (ogni sottoinsieme di X è aperto). Allora qualsiasi funzione $f : X \to Y$ è continua.

Esempio 3.3. $F : \mathbb{R}_e \to \mathbb{R}_d$ da $\mathbb{R}$ con topologia euclidea a $\mathbb{R}$ con topologia discreta. Le funzioni non continue da $\mathbb{R}_e$ a $\mathbb{R}_e$ non sono continue neanche da $\mathbb{R}_e$ a $\mathbb{R}_d$ perché gli stessi insiemi aperti per cui la definizione di continuità non era rispettata sono aperti anche della topologia discreta. Una funzione continua per la topologia euclidea invece può essere non continua con la discreta. Ad esempio l'identità non è continua da $\mathbb{R}_e$ a $\mathbb{R}_d$ perché $[0, 1]$ è un aperto della discreta ma non dell'euclidea.

Soluzione: solo le funzioni costanti sono continue, infatti se f è una funzione non costante, è possibile trovare un sottoinsieme $A \subseteq f(X)$ in $f(X)$, $\varnothing \neq A \neq f(X)$. Dato che nella topologia discreta tutti gli insiemi sono aperti, A è aperto e chiuso. Se f fosse continua, la controimmagine di A sarebbe aperta e chiusa, ma in $\mathbb{R}_e$ gli unici insiemi aperti e chiusi sono $\varnothing$ e $\mathbb{R}_e$.

Proposizione 3.3. *$F : X \to Y$ continua se e solo se $\forall C$ chiuso in Y, $F^{-1}(C)$ è chiuso in X.*

Dimostrazione. Sia C chiuso (aperto) in Y, allora $Y - C$ è aperto (chiuso) in Y, quindi $F^{-1}(Y - C) = X - F^{-1}(C)$ è aperto (chiuso), quindi $F^{-1}(C)$ è chiuso (aperto). □

Definizione 3.4: Omeomorfismo

$F : X^{\tau_X} \to Y^{\tau_Y}$ è un omeomorfismo se F è biettiva continua e F^{-1} è continua.

Osservazione. L'omeomorfismo è una relazione di equivalenza: infatti

- se esistono $F : X \to Y$ e $G : Y \to Z$ biettive continue con inversa continua allora anche $F \circ G$ è biettiva continua con inversa continua
- L'identità è un omeomorfismo, quindi ogni spazio topologico è isomorfo a se stesso
- Se esiste $F : X \to Y$ biettiva continua con inversa continua allora $F^{-1} : Y \to X$ è biettiva continua con inversa continua

Esempio 3.4. Le funzioni costanti sono sempre continue:

Siano X e Y spazi topologici. Sia $F : X \to Y$ tale che $F(x) = y$ per ogni $x \in X$ e per un $y \in Y$ fissato. Allora preso un aperto A di Y ci sono due possibilità: $y \in A$ oppure $y \notin A$. Nel primo caso $F^{-1}(A) = X$ e nel secondo $F^{-1}(A) = \varnothing$. In entrambi i casi la controimmagine è un insieme aperto, quindi F è continua.

Esempio 3.5. Tutti gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ sono *omeomorfi* tra di loro:

- se $a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \cong (0, 1)$, $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$ è continua e monotona crescente, quindi iniettiva. Essendo $f((a, b)) = (0, 1)$ è suriettiva. L'inversa è ovviamente anche biettiva (da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tutte le funzioni biettive continue sono monotone e hanno inversa continua)
- $(1, +\infty) \cong (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$
- Se $a \in \mathbb{R}, (a, +\infty) \cong (1, +\infty)$, $f(x) = x - a + 1$
- Se $a \in \mathbb{R}, (-\infty, -a) \cong (a, +\infty)$, $f(x) = -x$
- $\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \arctan(x)$

Quindi anche se i diversi intervalli sono "diversi" dal punto di vista metrico, sono topologicamente indistinguibili.

Esempio 3.6. $\mathbb{R}$ con la topologia dove i chiusi sono gli insiemi finiti, oltre a $\mathbb{R}$ stesso (topologia cofinita). In tal caso dato che i chiusi sono unioni di singoletti, una funzione è continua se la controimmagine di ogni punto è finita (quindi chiusa) oppure tutto $\mathbb{R}$ (quindi ancora chiusa). Ad esempio la funzione $x \mapsto p(x)$ polinomio è continua per la topologia euclidea e la controimmagine di ogni punto è l'insieme delle radici del polinomio, ossia al più contiene un numero di elementi corrispondenti al grado del polinomio. I polinomi sono quindi continui anche secondo la topologia cofinita.

Tuttavia ad esempio la funzione definita come 0 per $x < 0$, 1 per $x > 1$ e x per $x \in [0, 1]$ è continua per l'euclidea ma non per la cofinita, dato che la controimmagine di 1, ad esempio, ha cardinalità non numerabile.

Esempio 3.7. $\mathbb{R}$ con la topologia dove gli aperti sono le semirette $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Per esercizio dimostrare che è una topologia e dare esempi di funzioni continue.

4 Successioni

Se abbiamo un'applicazione f : aperto $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se ogni successione $x_n \in A$, $x_n \to x$ allora $f(x_n) \to f(x)$. Questo vuol dire che $\lim_{n\to\infty}(x_n - x) = 0$ ossia

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, |x_n - x| < \varepsilon$$

In uno **spazio metrico**, definiamo una successione convergente $x_n \to x \in X$ se $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ Quindi se una successione x_n converge a $x \in X$ il limite precedente diventa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, d(x_n, x) < \varepsilon \implies x_n \in D(x, \varepsilon)$$

Possiamo limitare gli ε solo a un insieme numerabile (ad esempio $\frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$)

Riscrivendo la notazione di continuità precedente in forma topologica:

$$\forall A \text{ aperto } x \in A \exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n} f(x_n) \in A$$

Infine possiamo ancora allargare la richiesta a un qualsiasi intorno di x, ossia un insieme contenente un aperto contenente x

Definizione 4.1: Convergenza di successione

Una successione $x_n \in X$ converge a $x \in X$ se

$$\forall A \text{ aperto }, x \in A \, \exists \overline{n} : \forall n > \overline{n} x_n \in A$$

Notare che se non siamo in uno spazio metrico non è così difficile né utile la convergenza: ad esempio nella concreta qualsiasi successione converge a qualsiasi elemento.

Caratterizziamo prima di procedere la chiusura di S

Proposizione 4.2.

$$\overline{S} = \{s \in X : \exists \{x_n\}_{n \in N}, x_n \in S, x_n \to s\} =: K$$

Ossia $\overline{S}$ è l'insieme dei punti di accumulazione di S

Dimostrazione.

- $\supseteq$ Prendiamo un punto di accumulazione $x \in K$, allora esiste una successione $x_n \in S$ tale che $x_n \to x$. Dobbiamo mostrare che $x \in \overline{S}$. Prendiamo un aperto A tale che $x \in A$, allora esiste $\overline{n}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}, x_n \in A$, quindi $A \cap S \neq \varnothing$, quindi $x \in \overline{S}$
- $\subseteq$ Prendiamo un punto della chiusura, $x \in \overline{S}$. Vogliamo far vedere che sta in K. Prendiamo $D(x, \frac{1}{n})$ è aperto. Il criterio della chiusura dice quindi che $D(x, \frac{1}{n}) \cap S = \varnothing$. Preso $x_n \in X$ che appartiene ad entrambi, quindi costruendo così una successione otteniamo che $\lim d(x_n, x) = 0$ quindi $x_n \to x$ quindi x è punto di accumulazione

□

Da questo quindi troviamo che $C \subseteq (X, d)$ è chiuso se e solo se $c_n \in C$, $c_n \to y$ allora $y \in C$

Teorema 4.3

Tra due **spazi metrici** X, d e Y, d', $F : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni successione convergente $x_n \to x \in X \implies f(x_n) \to f(x) \in Y$

Dimostrazione. Supponiamo $f : X \to Y$ continua in senso topologico, allora $\forall A$ aperto in $Y, f^{-1}(A)$ è aperto in X. Sia $x_n \to x \in X$ una successione convergente in X. Sia A tale che $f(x) = y \in A$. $f^{-1}(A) = B$ aperto e contiene x. $\exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}, x_n \in B$ ma quindi $f(x_n) = y_n \in A$ per cui $f(x_n) \to f(x)$.

Viceversa, supponiamo di avere uno spazio metrico X, d e uno spazio Y, d', supponiamo che $\forall x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$ e cerchiamo di dimostrare che allora è continua in senso topologico. A tale scopo dimostriamo che la controimmagine di un chiuso di Y è sempre un chiuso di X. Sia quindi $C \subseteq Y$ chiuso. Prendiamo una successione di elementi $x_n \in f^{-1}(C)$ che convergono $x_n \to x$, dobbiamo dimostrare che $x \in f^{-1}(C)$, e questo significherebbe che $f^{-1}(C)$ contiene i suoi punti di accumulazione ed è quindi chiuso. Sappiamo che $f(x_n) \to f(x)$. Quindi, dato che C è chiuso $f(x) \in C \implies x \in f^{-1}(C)$ quindi f è continua. □

Esempio 4.1. Nella **topologia discreta** sono convergenti solo le successioni definitivamente costanti, infatti se prendiamo come aperto il punto x, una successione convergente deve definitivamente avere punti in $\{x\}$, quindi è definitivamente costante.

Esempio 4.2. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia dove una base di aperti sono gli intervalli del tipo $[a, b)$. Gli aperti sono quindi del tipo $A = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i)$. È una topologia più fine di quella euclidea perché ogni intervallo (a, b) è ottenibile come unione

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b) = (a, b)$$

5 Funzione Lipschitziana

Definizione 5.1

Dati due spazi metrici (X, d) e (Y, d'), una funzione $F : X \to Y$ Si dice

Lipschitziana se

$$\forall x, x' \in X \; \exists 0 < K \in \mathbb{R} : d'(f(x), f(x')) \leq K d(x, x')$$

Proposizione 5.2. *Sia $F : X \to Y$ una funzione Lipschitziana, allora F è continua*

Dimostrazione. Sia $x_n \to x$ una successione in X convergente a $x \in X$. Allora $d'(f(x), f(x_n)) \leq K d(x, x_n) \to 0$ quindi $f(x_n) \to f(x)$. □

Esempio 5.1 (Distanza da un insieme)**.** Sia $\varnothing \neq C \subseteq X$, e sia $f_C : X \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_C(x) = \inf_{c \in C} d(x, c) =: d(x, C)$$

Ossia f_C definisce la distanza dall'insieme C.

Ora notiamo che, per la disuguaglianza triangolare,

$$\forall c \in C, \forall x, y \in X, f_C(x) \leq d(x, c) \leq d(x, y) + d(y, c)$$

Sostituendo a $d(y, c)$ il suo estremo inferiore otteniamo che

$$f_C(x) \leq d(x, y) + f_C(y)$$

Da cui

$$|f_C(y) - f_C(x)| =\leq d(x, y), \forall x, y \in X$$

Quindi f_C è una funzione Lipschitziana con $K = 1$, quindi è una funzione continua

Proposizione 5.3.

$$\overline{C} = \{x \in X : f_C(x) = 0\}$$

Dimostrazione. Chiamando l'insieme alla destra K:

- $\subseteq$ K è chiuso perché è la controimmagine di $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, che è chiuso. Inoltre $C \subseteq K$ perché se $c \in C$ allora $d(c, c) = 0$. Quindi $\overline{C} \subseteq K$
- $\supseteq$ Prendiamo un elemento $s \in \overline{C}$, quindi esiste una successione convergente $c_n \to s$ ossia $d(c_n, s) \to s$ quindi l'estremo inferiore della distanza è 0, ossia $\overline{C} \subseteq K$

□

Proposizione 5.4. *In uno spazio metrico ogni punto è chiuso, infatti la controimmagine di* 0 *della funzione distanza $d(x, y)$ con x fissato è $\{x\}$ che è quindi chiuso.*

Dato che ad esempio in $\mathbb{R}$ con la topologia dove gli aperti sono del tipo $(-\infty, a)$ i punti non sono chiusi, gli spazi topologici sono di più degli spazi metrici.

Esempio 5.2. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia **cofinita**. Dimostrare che **non è metrizzabile** (anche se i punti sono chiusi).

Hint: notare che non è T_2

Definizione 5.5

Un'applicazione $f : X \to Y$, con X, Y spazi topologici si dice **aperta** se

$$\forall A \subseteq X \text{aperto}, f(A) \text{ è aperto}$$

e similmente si dice **chiusa** se

$$\forall A \subseteq X \text{chiuso}, f(A) \text{ è chiuso}$$

Proposizione 5.6. *Ogni omeomorfismo è aperto e chiuso*

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ omeomorfismo da X a Y. Sia $g := f^{-1}$ Preso A aperto di X, $g(f(A)) = A$ e quindi $g^{-1}(A) = f(A)$ Ossia la controimmagine di A della funzione inversa di f è l'immagine attraverso f di A. Ma dato che g è continua, $f(A)$ è aperto. Per la stessa ragione la funzione è anche chiusa. □

Anzi

Proposizione 5.7. *$f : X \to Y$ continua e biettiva allora è un omeomorfismo se e solo se è aperta (oppure chiusa).*

Dimostrazione. Simile a prima □

6 Costruzioni

6.1 Sottospazi topologici

Definizione 6.1: Topologia Indotta

Sia X uno spazio topologico, e $S \subseteq X$. Per indurre una topologia su S dichiariamo aperti di S gli insiemi $A \cap S$, con A aperto di X. Tale topologia viene chiamata **topologia indotta**

Buona definizione. Controlliamo le proprietà della topologia:

1) $\varnothing \cap S = \varnothing \in \tau_S$, $X \cap S = S \in \tau_S$
2) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap S) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap S$
3) $(A_1 \cap S) \cap (A_2 \cap S) = (A_1 \cap A_2) \cap S$

Quindi le proprietà della topologia sono verificate □

Proposizione 6.2. *I chiusi di S sono le intersezioni di chiusi di X con S*

Dimostrazione. $S - (S \cap A) = S \cap (X - A)$ Con A aperto di X □

Esempio 6.1. Sia S^n_r la sfera n-dimensionale di raggio r

$$S^n_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = r\}$$

Ha una struttura di spazio topologico.

Ora dopo aver definito la topologia indotta su $S \subseteq X$, consideriamo la funzione $i_S : S \to X$ l'inclusione. L'inclusione è continua. Infatti preso $A \subseteq X$ aperto, $i_S^{-1}(A) = S \cap A$ che è un aperto di S, per cui i_S è continua.

In particolare τ_S è la topologia **meno fine** su S che rende i_S continua

Proposizione 6.3 (Proprietà Universale)**.** *Siano X e Y spazi topologici, si consideri una funzione $F : X \to S$, con $S \subseteq Y$ un sottospazio e sia $i_S : S \to Y$ l'inclusione.*

Allora F è continua se e solo se $i_S \circ F : X \to Y$ è continua

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_S \circ F"] \arrow[dr, "F"'] & Y \\ & S \arrow[u, hook, "i_S"'] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione.

- $\Longrightarrow$ Se F è continua allora $i_S \circ F$ è continua, perché i_S è continua
- $\Longleftarrow$ Se $i_S \circ F$ è continua, sia $A \cap S$ un aperto di S, con A aperto di Y, allora $F^{-1}(A \cap S) = \{x \in X : F(x) \in A \cap S\} = \{x \in X : F(x) \in A\} = F^{-1}(A) = (i_S \circ F)^{-1}(A)$ che è aperto perché controimmagine di un aperto tramite funzione continua

$\square$

Corollario 6.3.1. *Sia $F : X \to Y$ e $S \subseteq X$, $T \subseteq Y$ sottospazi tali che $F(S) \subseteq T$. Allora F è continua $\Longrightarrow$ $F|_S$ è continua.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & Y \\ {\scriptstyle i_S}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_T} \\ S & \xrightarrow[F|_S]{} & T \end{array}$$

Dimostrazione. Sia F continua, allora $i_T \circ F|_S = F \circ i_S$ è continua perché composizione di funzioni continue. Ma allora per la proprietà universale anche $F|_S$ è continua $\square$

Proposizione 6.4. *Sia $S \subseteq Y \subseteq X$. Da X indurre una topologia su Y e su S. È indifferente prendere la topologia indotta su Y e indurla su S.*

Dimostrazione. $\tau_S = \{U = A \cap S,$ a aperto di X $\}$ ma quindi ogni aperto di S è della forma $U = A \cap S = (A \cap Y) \cap S$, dove $A \cap Y$ è un aperto di Y. Viceversa se W è indotto da Y allora $W = B \cap S$ con B aperto di Y, quindi $W = (A \cap Y) \cap S$ con A aperto di X ma $S \subseteq Y$ quindi $W = A \cap S$ $\square$

Osservazione. Sia $\varnothing \neq A \subseteq X$ un aperto. La topologia indotta è $\tau_A = \{A \cap A',\ A'$ aperto di X $\}$ ma quindi ogni aperto è intersezione di due aperti di X, che è quindi ancora aperto di X, quindi **tutti gli aperti di A sono gli aperti A' di X tali che $A' \subseteq A$** . La stessa osservazione vale anche per i chiusi.

Proposizione 6.5. *Supponiamo di avere $S \subseteq Y \subseteq X$. Siano $\overline{S}^X$ e $\overline{S}^Y$ rispettivamente i più piccoli chiusi di x e di Y contenenti S.* ***Allora*** $\overline{\overline{S}^Y}^X = \overline{S}^X$

Dimostrazione. Una inclusione è ovvia: $\overline{S}^X \subseteq \overline{\overline{S}^Y}^X$ perché $S \subseteq \overline{S}^Y$.

Viceversa sia $x \in \overline{\overline{S}^Y}^X$. Allora $x \in \overline{S}^X \iff A \cap S \neq \varnothing$ per ogni $A \ni x$ aperto di X. Notare però che $A \cap \overline{S}^Y \neq \varnothing$ Sia quindi $y \in A \cap \overline{S}^Y$ e in particolare $y \in Y$ quindi $y \in A \cap Y = B$ che è un aperto di Y ma quindi $B \cap S \neq \varnothing$ e allora $A \cap S \neq \varnothing$. $\square$

Proposizione 6.6. *Sia $\varnothing \neq S \subseteq X$, con X spazio topologico. Allora Sia $D \subseteq Y \subseteq X$ con D denso in Y, Y denso in X allora D è denso in X. Un insieme $A \subseteq X$ si dice denso se $\overline{A}^X = X$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $\overline{D}^Y = Y$ e $\overline{Y}^X = X$ ma allora $\overline{D}^X = \overline{\overline{D}^Y}^X = \overline{Y}^X = X$ quindi D è denso in X $\square$

Esempio 6.2. Sia $S^n(r)$ la sfera n-dimensionale di raggio r.
$\Longrightarrow$ $S^n(r)$ omeomorfa a $S^n(r'), \forall r, r' > 0$

Dimostrazione. Dimostriamo che $S^n(r) \equiv S^n(1), \forall r > 0$. Sia $F_\rho : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $F(x) = \rho x$, con $\rho > 0$. Notiamo che $d(F_\rho(x), F_\rho(y)) = d(\rho x, \rho y) = \|\rho x, \rho y\| = \rho d(x, y)$ quindi è (lineare) Lipschitziana e continua. Inoltre $F_\rho^{-1} = F_{\rho^{-1}}$. A questo punto per restrizione possiamo dire che anche $F_r|_{S(1)} : S(1) \to S(r)$ è continua, e dato che anche la sua inversa è continua allora è un omeomorfismo. □

6.2 Topologia Prodotto

Provando a definire una topologia sull'insieme $X \times Y$ iniziamo ipotizzando come aperti gli insiemi del tipo $A \times B$, con A aperto in X e B aperto in Y.

1) $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$ aperto

2) $X \times Y$ aperto

3) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ è aperto

Tuttavia l'unione di due insiemi definiti aperti in questo modo non è necessariamente un prodotto di aperti. Dobbiamo quindi dire che gli insiemi $A \times B$ sono una **base** della topologia.

Definizione 6.7: Topologia Prodotto

Dati due spazi topologici X^{τ_X} e Y^{τ_Y}. Diamo sull'insieme $X \times Y$ una struttura di spazio topologico dichiarandone gli aperti tutti gli insiemi del tipo

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \ , \ A_i \text{ aperto di } X \ , B_i \text{ aperto di } Y$$

Ossia i prodotti di aperti sono una **base della topologia**.

Esempio 6.3. In $\mathbb{R}^2$ abbiamo adesso due modi di definire una topologia: con la topologia prodotto ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) e anche la topologia indotta dalla metrica euclidea. Sono la stessa topologia?

Sì, perché usando la metrica del massimo, che è equivalente alla metrica euclidea, dà origine ad una base di aperti costituita da quadrati. Essendo che la topologia prodotto contiene tutti i rettangoli, **la topologia prodotto è più fine della topologia euclidea**. Viceversa prendiamo che base della topologia prodotto i prodotti di rettangoli prodotti di intervalli. Ogni rettangolo si può semplicemente scrivere come unione di quadrati, ossia elementi della topologia indotta dalla metrica del massimo. Quindi anche **la topologia euclidea è più fine della topologia prodotto**.

Teorema 6.8

Siano π_X e π_Y le proiezioni $\pi_X : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$. Allora π_X e π_Y sono continue e la topologia $\tau_{X \times Y}$ è la topologia meno fine che rende continue le due proiezioni.

Dimostrazione. Sia A aperto di X, $\pi_X^{-1}(A) = A \times Y$ che è aperto in $X \times Y$ perché elemento della base. Similmente per π_Y.

Se π_X e π_Y sono continue allora $A \times Y$ e $X \times B$ con A aperto di X e B aperto di Y devono essere aperti, ma quindi anche $(A \times Y) \cap (X \times B) = A \times B$ deve essere aperto. □

Proposizione 6.9 (Proprietà Universale)**.** *Sia $G : Z \to (X \times Y)$ allora G è continua se e solo se $G_1 = \pi_X \circ G$ e $G_2 = \pi_Y \circ G$ sono continue.*

$$Z \xrightarrow{F} X \times Y$$

Dimostrazione. Una implicazione è ovvia perché se G è continua allora lo sono anche G_1 e G_2 perché composizione di funzioni continue.

Viceversa siano G_1 e G_2 continue e siano A aperto di X e B aperto di Y. Allora $sia z \in G^{-1}(A \times B)$ quindi $(G_1(z), G_2(z)) \in A \times B$ ma quindi $z \in G_1^{-1}(A) \cap G_2^{-1}(B)$ che è intersezione di aperti quindi è aperta. A questo punto la controimmagine di un generico aperto U di $X \times Y$ è $G^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I}(A_i \times B_i) = \bigcup_{i \in I} G^{-1}(A_i \times B_i)$ che è unione di aperti quindi aperta. □

Osservazione. Se $\mathcal{B}_X$ è una base della topologia di X e $\mathcal{B}_Y$ è una base della topologia di Y, allora anche solo $\{U_i \times K_i\}, U_i \in \mathcal{B}_X, K_i \in \mathcal{B}_Y$ è una base della topologia prodotto su $X \times Y$

Ora fissiamo un $\overline{y} \in Y$, denotando l'insieme $\{(x, y) \in X \times Y : y = \overline{y}\}$ con $X \times \{\overline{y}\} \subseteq X \times Y$. Similmente denotiamo anche $\overline{x} \times Y$. Notare che se $\overline{y}$ è chiuso allora $X \times \overline{y} = \pi_Y^{-1}(\overline{y})$ quindi è chiuso.

Proposizione 6.10. *Consideriamo la funzione $\rho : X \to X \times \overline{y}; x \mapsto (x, \overline{y})$. È un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Usando la proprietà universale, $\pi_X \circ \rho : X \to X$ è l'identità, quindi è continua; $\pi_Y \circ \rho : X \to Y$ è costante (sempre $\overline{y}$) perciò è continua. Ne concludiamo che ρ è continua. Ha come inversa la proiezione quindi ha inversa continua. □

Proposizione 6.11. *Le funzioni*

- $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$
- $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$
- $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+; x \mapsto \frac{1}{x}$

sono continue

Proposizione 6.12. *Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ continue, allora $f + g$ e fg sono continue. Se $h : X \to \mathbb{R}^+$ è continua, allora $\frac{1}{h}$ è continua*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione continua per proprietà universale $F : X \to \mathbb{R}^2; x \mapsto (f(x), g(x))$ e la componiamo con s e m. Similmente componiamo h con ρ per ottenere l'ultimo risultato. □

Proposizione 6.13. *Supponiamo di avere uno spazio metrico X con distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Vediamo se la distanza è una funzione continua.*

Dimostrazione. Consideriamo le controimmagini degli intervalli $-\infty, a$ e a, ∞. Si chiama **sottobase** perché l'intersezione finita dà una base.

$d^{-1}(-\infty, a)$ Un elemento nella controimmagine è una coppia $(x, y) \in X \times X$ tale che $d(x, y) = d_0 < d$. Vogliamo dire che esiste un aperto W che contiene (x, y) e tale che $W \subseteq d^{-1}(-\infty, a)$. Sia $\varepsilon = \frac{b - b_0}{3}$, consideriamo $D(x, \varepsilon) \times D(y, \varepsilon)$ e prendiamo un punto (x', y') in questo sottoinsieme. A questo punto $d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') \leq \frac{2}{3}(b - b_0) + b_0 < b$ quindi è incluso in $d^{-1}(-\infty, a)$

$d^{-1}(a, \infty)$ Simile

Poiché ogni insieme aperto di $\mathbb{R}$ si può scrivere come unione di elementi ottenibili come intersezione finita di elementi di questa sottobase, la controimmagine di un aperto è aperta, quindi la distanza è continua. $\square$

Proposizione 6.14. *Le proiezioni π_X e π_Y sono aperte (notare che generalmente non sono chiuse)*

Esempio 6.4. Sia $I = \{xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Mostrare che è chiusa ma che ha proiezione non chiusa.

È chiusa perché controimmagine di 1 (chiiuso) rispetto a $f : (x, y) \mapsto xy$ che è continua. Tuttavia $\pi_X(I) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ poiché $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ma 0 non ha inverso moltiplicativo.

Definizione 6.15

Su $(X, d) \times (Y, d')$ vogliamo aggiungere una metrica.

- $d_\infty((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d'(y', y'))$
- $d_1((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d'(y, y')$
- $d_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d(x, x')^2 + d'(y, y')^2}$

Sono metriche equivalenti.

Proposizione 6.16. $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0} \approx S^n \times \mathbb{R}$ *omeomorfismo*

Dimostrazione. Sia $F : v \mapsto (\frac{v}{\|v\|}, \|v\|)$. È continua per la proprietà universale da $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ a $\mathbb{R}^{n+1}$ e per l'altra proprietà anche nel nostro sottospazio. Inoltre ha inversa $(y, \rho) \mapsto \rho y$ continua in quanto prodotto di proiezioni (che sono continue). $\square$

Proposizione 6.17. *Sia C chiuso in X e D chiuso in Y. Allora $C \times D$ è chiuso in $X \times Y$*

Dimostrazione. (Vedasi figura 1) $X \times Y - (C \times D) = (X - C) \times Y \cup (X \times (Y - D))$ $\square$

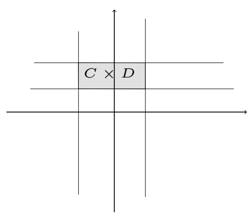

Figura 1: Prodotto di chiusi è chiuso

Proposizione 6.18. *Sia $D_1 \subseteq X$ denso in X e $D_2 \subseteq Y$ denso in Y. Allora $D_1 \times D_2$ è denso in $X \times Y$*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\overline{D_1 \times D_2} = X \times Y$, ossia $\forall A \subseteq X \times Y$ aperto, $A \cap (D_1 \times D_2) \neq \varnothing$ L'aperto A contiene un elemento $A_1 \times A_2 \subseteq A$ tale che A_1 è aperto di X e A_2 è aperto di Y poiché tali aperti costituiscono una base della topologia prodotto. Ora esiste $x \in A_1 \cap D_1$ e esiste $y \in A_2 \cap D_2$ per densità. Ne consegue che $(x, y) \in (A_1 \times A_2) \cap (D_1 \times D_2) \subseteq A \cap (D_1 \times D_2)$. $\square$

Esempio 6.5. Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$

Ora supponiamo di avere $X \times X$ con la topologia prodotto rispetto a una topologia su X. Consideriamo lo spazio diagionale $\Delta \subseteq X \times X = \{(x, x) \forall xinX\}$

Proposizione 6.19. Δ *è omeomorfo a* X

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $X \to \Delta; x \mapsto (x, x)$ e la sua inversa $\Delta \to X; (x, x) \mapsto x$. Sono entrambe continue per la continuità della proiezione, dell'identità e per la proprietà universale della topologia prodotto. □

Se invece si considera la diagonale di $X \times X$ con due topologie diverse, la diagonale ha poi una topologia che contiene entrambe, ed è la più piccola topologia con questa proprietà.

Esempio 6.6. Sia $\mathbb{R}_e$ con l'euclidea e $\mathbb{R}_C$ con la cofinita. Consideriamo ora $\Delta_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}_e \times \mathbb{R}_C$. Gli aperti della cofinita sono anche aperti nella topologia euclidea. Di conseguenza $\Delta_{\mathbb{R}}$ ha la topologia euclidea.

Esempio 6.7. Consideriamo $S_1 \times \mathbb{R}$ (figura 2)

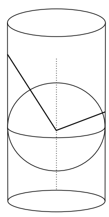

Figura 2: $S_1 \times \mathbb{R}$ proiettato su S_2 meno i poli

Esempio 6.8. Sia $\mathbb{R}_{\aleph_0}$ con la topologia dove i chiusi sono $\mathbb{R}, \varnothing$ e i sottoinsiemi numerabili o finiti di $\mathbb{R}$. L'intersezione di arbitrari insiemi numerabili è finita o numerabile, quindi ok. L'unione di due numerabili deve essere ancora numerabile, lo è (prendendone uno e uno). Non è confrontabile con la topologia euclidea, infatti $\mathbb{Q}$ è chiuso per la conumerabile, ma non per la euclidea, e l'intervallo $[0, 1]$ il contrario. La topologia sulla diagonale di $\mathbb{R}_{\aleph_0} \times \mathbb{R}_e$ è la topologia dove ogni aperto è intersezione di aperti di $\mathbb{R}_e$ e $\mathbb{R}_{\aleph_0}$

6.3 Topologia Quoziente

Per definire la topologia quoziente, consideriamo come costruire una topologia su un insieme che è codominio di una funzione suriettiva.

Definizione 6.20: Topologia Quoziente - Funzione Suriettiva

Sia $f : X \twoheadrightarrow Z$ suriettiva. Dichiariamo su Z la topologia più fine che rende f continua, ossia la topologia dove tutti e soli gli insiemi tali che la loro controimmagine sia aperta, ossia

$$\tau_f = \{A \subseteq Z : f^{-1}(A) \text{ aperto di } X \}$$

Verifichiamo che questa sia effettivamente una topologia:

1) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ aperto di $X \implies \varnothing$ aperto di Z
   $f^{-1}(Z) = X$ aperto di $X \implies Z$ aperto di Z

2) Supponiamo $\{A_i\}_{iinI} \subseteq \tau_Z \implies f^{-1}(A_i)$ aperti di $X \implies$
   $\implies \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ (aperto di X) $= f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \implies \bigcup_{i\in I} A_i$ aperto di Z

3) A_1, A_2 aperti di $Z \implies f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2)$ è aperto di X perché intersezioni di aperti di X, quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau_Z$

Osservazione. Inoltre C chiuso $\iff f^{-1}(C)$ chiuso, infatti: C chiuso in $Z \iff Z - C$ aperto $\iff f^{-1}(Z - C)$ aperto in $X \iff X - f^{-1}(C)$ aperto in X ossia $f^{-1}(C)$ chiuso in X

Tuttavia possiamo anche vedere la funzione suriettiva come una relazione di equivalenza, infatti consideriamo la relazione $\sim$ su X definita da

$$x \sim x' \iff f(x) = f(x')$$

Vediamo che questa è una relazione di equivalenza:

- Chiaramente $x \sim x$ perché $f(x) = f(x)$
- $x \sim x' \iff f(x) = f(x') \iff f(x') = f(x) \iff x' \sim x$
- Se $x \sim x'$ e $x' \sim x''$ allora $f(x) = f(x') = f(x'')$ da cui $f(x) = f(x'') \iff x \sim x''$

Viceversa se $\sim$ è una relazione di equivalenza allora $\pi : X \to X/\sim$ è una funzione suriettiva, quindi possiamo definire la topologia quoziente. In particolare possiamo quindi definire una topologia quoziente su un insieme solo avendo una relazione di equivalenza.

Definizione 6.21: Topologia Quoziente - Relazione di Equivalenza

Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Dichiariamo su $X/\sim$ la topologia più fine che rende continua la proiezione $\pi : X \to X/\sim$

Definizione 6.22

Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ si dice **bilanciato** rispetto a una funzione suriettiva $f : X \twoheadrightarrow Z$ se

$$\forall y \in Y, f^{-1}(f(y)) \subseteq Y$$

Proposizione 6.23. *$A \subseteq Z$ è aperto (chiuso) di Z se A è immagine di un aperto (chiuso) bilanciato di X*

Dimostrazione. A aperto di $Z \iff f^{-1}(A)$ aperto di X, che è bilanciato per costruzione della topologia, infatti $ff^{-1}(A) = A$ perché f è suriettiva. □

Definizione 6.24

$y : X_{\tau_X} \to Y_{\tau_Y}$ è chiamata **identificazione** se $\tau_Y = \tau_y$

Esempio 6.9. Sia $X \times Y$ e consideriamo lo spazio $X = \pi_X(X \times Y)$ immagine della proiezione (quindi suriettiva). Poiché π_X e π_Y sono aperte $\tau_{X \times Y|_{\pi_X}} = \tau_X$

Proposizione 6.25. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ suriettive, quindi $h = gf$ è suriettiva. Adesso possiamo costruire su Y una topologia τ_f e su Z la topologia τ_h, ma avendo construto una topologia su Y ora possiamo controllare se $\tau_h = (\tau_f)_g$ ossia se **la composizione di identificazioni è una identificazione***

Dimostrazione. Sia $U \subseteq \mathbb{Z}$ aperto in $(\tau_f)_g$, quindi $g^{-1}(U)$ è aperto in Y, ossia $g^{-1}(U) \in \tau_f$, ma quindi $f^{-1}g^{-1}(U) = h^{-1}(U)$ è aperto in X, ma allora $U \in \tau_h$. Essendo tutte queste implicazioni dei se e solo se, vale anche il viceversa, quindi $\tau_h = \tau_{f\,g}$ $\square$

$$\begin{tikzcd} X_{\tau_X} \arrow[d, two heads, "f"] \arrow[dr, "h"] & \\ Y_{\tau_f} \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Proposizione 6.26 (Proprietà universale)**.** *Dire che $h = gf$ equivale a dire che è costante nella controimmagine di Y. Vale anche il viceversa.*

*La proprietà universale dice che g **continua** $\iff$ h **continua**. Inoltre se h è aperta g è aperta e se h è chiusa, g è chiusa.*

Proposizione 6.27 (Stessa, ma con il termine identificazione)**.** *Se f è continua ed è identificazione, le funzioni continue da Y a Z sono in corrispondenza biunivoca con le funzioni continue da X a Z che sono ottenute per composizione.*

Esempio 6.10. Supponiamo di avere X e un suo sottoinsieme $S \subseteq X$. Consideriamo la relazione di equivalenza dove tutti gli elementi di S collassano in uno solo. Quindi $x \sim x' \iff x = x'$ oppure $x \in S, x' \in S$. Il risultato è che $X/S = X - S \cup \{S\}$

Esempio 6.11. Sia $D_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Consideriamo il sottoinsieme $\partial D_C = \overline{D} - \dot{D} \supseteq D_C$. È quindi ovviamente $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Ora consideriamo $D_C/S^1 = \dot{D}_C \cup \{S^1\}$. Intuitivamente è omeomorfa a S^2. Per dimostrarlo devo trovare una funzione continua da D_C a S^2 (vedasi figura 3). Dopo un po' di calcoli si trova che la funzione è:

$$(x, y) \mapsto (x, y - \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \mapsto (\alpha x, \alpha y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

dove

$$\alpha = \sqrt{((\sqrt{1 - x^2 - y^2})(1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}))}$$

Notare che quando siamo sul bordo, ossia $x^2 + y^2 = 1$, allora $\alpha = 0$ quindi i punti collassano sullo stesso punto (0,0,0)

Esempio 6.12. Vari attaccamenti del quadratino $[0, 1]\times[0, 1]$ in modi diversi escono cilindro, Möbius, toro, piano proiettivo, otre di Klein

Esempio 6.13. Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{O}$ e impostiamo una relazione di equivalenza $v \sim v' \iff \exists\lambda \in \mathbb{R} - \mathbf{O} : \lambda v = v'$. Facilmente verificabile che è una relazione di equivalenza perché partiziona in classi separate lo spazio, infatti solo l'origine apparterrebbe a tutte le classi. Denotiamo

$$P^n_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{O}}{\sim}$$

(Stessa cosa si può ovviamente fare anche con $\mathbb{C}$). In $\mathbb{R}$ dividiamo la relazione di equivalenza in due parti:

$$\sim^+ : v \sim^+ v' \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}^+ : v = \lambda v'$$
$$\sim^\pm : v \sim^\pm v' \iff \mathbf{x} = -\mathbf{x}$$

Possiamo quindi vedere $P^n_{\mathbb{R}}$ come $\frac{\mathbb{R}^{n+1}-\mathbf{0}}{\sim^+}/\sim^\pm = S^n/\sim^\pm$

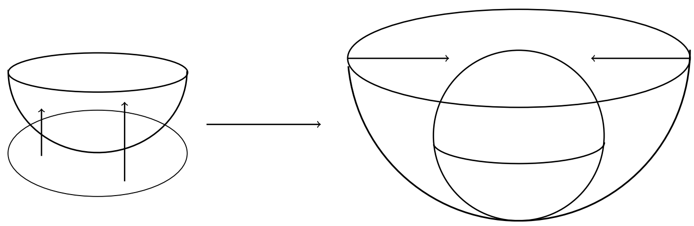

Figura 3: Esempio 6.11: Omeomorfismo tra D_C e S^2

Esempio 6.14. Sia $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo due relazioni di equivalenza:

1) $x \sim^1 y \iff x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Q}$

2) $x \sim^2 y \iff x - y \in \mathbb{Q}$

La seconda (o forse la prima) non è "buona" perché non è "localmente" come $\mathbb{R}^n$, dove **localmente**, in genere vuol dire che ogni punto ha un intorno di ...

1) Nella relazione $\sim^1$, l'insieme risultante è $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{\mathbb{Q}\}$.

   Dato che ogni punto irrazionale ha come controimmagine solo sé stesso, tutti gli irrazionali sono chiusi, ma $\pi^{-1}(\{\mathbb{Q}\}) = \mathbb{Q}$ che quindi non è chiuso. In particolare la sua chiusura deve essere tale che la controimmagine sia un chiuso di $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Q}$, quindi è al minimo $\mathbb{R}$, ma se $\pi^{-1}(\overline{\{\mathbb{Q}\}}) = \mathbb{R}$ allora $\overline{\{\mathbb{Q}\}} = \mathbb{R}$, per cui $\{\mathbb{Q}\}$ è denso.

2) Nella relazione $\sim^2$ invece gli elementi di $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ sono del tipo $x + \mathbb{Q}$, tuttavia gli aperti di questo insieme devono immagine di aperti bilanciati, ma gli unici aperti bilanciati sono $\varnothing, \mathbb{R}$ perché preso un intervallo aperto (a, b), $(a, b) + \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Di conseguenza la topologia su $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è la concreta (indiscreta)

Esempio 6.15. Sia $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + ny = 1\}$ al variare di $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.

1. Per quali valori di n $\mathbb{R}^2 - ((C_n \cup C_{n+1}) \cap C_{n+2})$ è aperto?

   I vari C_n sono chiusi, perché controimmagine di 1 della funzione $f_n : (x, y) \mapsto x + ny$. Quindi intersezione e unione finite rimangono chiusi, quindi il complementare è aperto.

2. Sia $E = \cup_n C_n$. Dire se è E è chiuso.

   Ad esempio il punto (0,0) è punto di accumulazione, ma non è nell'insieme, quindi E non è chiuso.

Esempio 6.16. Supponiamo di prendere in $\mathbb{R}$ la topologia euclidea e la topologia τ' strettamente più fine di quella euclidea. Dire se $\mathbb{R}_{\tau'}$ e $\mathbb{R}_e$ possono essere omeomorfi.

Esempio 6.17. Sia $c_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = n^2\}$ e $d_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = n^2\}$

1. Per quali n $\mathbb{R}^2 - (c_n \cup d_n)$ è aperto?

2. $E = \bigcup_n d_n \cup \bigcup_n c_n$ è chiuso?

7 Assiomi di Separazione

Definizione 7.1: Assioma di Separazione T_1

Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T_1 se per ogni coppia di punti $P, Q \in X$, con $P \neq Q$ esiste un aperto U tale che $P \in U$, $Q \notin U$

Proposizione 7.2. *X è T_1 se e solo se ogni punto di X è chiuso*

Dimostrazione. Se ogni punto di X è chiuso allora presi $P, Q \in X$, $P \neq Q$, $U = X \setminus \{Q\}$ è aperto, inoltre $P \in U, Q \notin U$.

Viceversa, se X è T_1 allora mostriamo che $Q \in X$ è chiuso. Prendiamo quindi, per ogni altro punto $P \in X$, un aperto U_P tale che rispetti l'assioma di separazione, ossia $P \in U_P, Q \notin U_P$. Allora $\bigcup_{P \in X} U_P = X \setminus \{Q\}$ è aperto, ma quindi Q è chiuso. $\square$

Definizione 7.3: Assioma di Separazione T_2 o di Hausdorff

Uno spazio topologico X soddisfa l'assioma di separazione T_2 o di Hausdorff se per ogni coppia di punti $P, Q \in X$, con $P \neq Q$ esistono due aperti disgiunti U, V tali che $P \in U$, $Q \in V$. Ossia

$$\forall P, Q \in X, P \neq Q,\ \exists U \ni P, \exists V \ni Q : U \cap V = \varnothing$$

Esempio 7.1. Se (X, d) è uno spazio metrico, allora è T_2

Esempio 7.2 (Spazio T_1 non T_2)**.** Sia X un insieme infinito con la topologia cofinita. È T_1 perché i punti sono chiusi, ma non è T_2 perché due aperti si intersecano sempre.

Proposizione 7.4. *Se X è T_2 abbiamo unicità del limite di successioni.*

Proposizione 7.5. *Se X è T_2 allora $S \subseteq X$ è T_2. Inoltre se anche Y è T_2 allora $X \times Y$ è T_2*

Proposizione 7.6. *X è T_2 se e solo se la diagonale $\Delta = \{(x, x) \forall x \in X\} \subseteq X \times X$ è chiusa (con la topologia prodotto).*

Definizione 7.7: Assioma di Separazione T_3 o Regolare

Uno spazio topologico X che è T_1 soddisfa l'assioma di separazione T_3 e viene detto anche *regolare* se per ogni chiuso $C \subseteq X$ e per ogni punto $P \in X$ con $P \notin C$ esistono due aperti disgiunti U, V tali che $P \in U$, $C \subseteq V$.

Definizione 7.8: Assioma di Separazione T_4 o Normale

Uno spazio topologico X che è T_1 soddisfa l'assioma di separazione T_4 e viene detto anche *normale* se dati C_1 e C_2 chiusi e disgiunti, esiste $A_1 \supseteq C_1$ e $A_2 \supseteq C_2$ tali che $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ con A_1 e A_2 aperti.

Esempio 7.3. Uno spazio metrico (X, d) è T_3 e T_4

Esempio 7.4 (T_2 non T_3)**.** Sia X con una topologia τ che lo rende T_2. Se prendo su X una topologia più fine rimane di Hausdorff, perché possiamo separare i punti con gli stessi aperti di prima. Non è detto però che se per τ era T_3 o T_4 rimanga tale, perché aggiungiamo anche nuovi chiusi.

Consideriamo $\mathbb{R}_{\text{S.Gius}}$ con la topologia più fine che include sia la euclidea che la conumerabile. Per l'osservazione precedente questo spazio è T_2. Ora consideriamo il chiuso (poiché numerabile) $\mathbb{Q}$ e il punto $\sqrt{2}$; chiaramente $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Una base di aperti di $\mathbb{R}_{\text{S.Gius}}$ è costituita dagli insiemi del tipo $(a,b) \smallsetminus S$, dove S è una successione al più numerabile, quindi ogni aperto A contenente il punto $\sqrt{2}$ contiene un elemento della base del tipo $A' := (\sqrt{2}-\varepsilon, \sqrt{2}+\varepsilon) \smallsetminus S_{\sqrt{2}}$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $S_{\sqrt{2}}$ al più numerabile. Sia ora a un razionale tale che $a \in (\sqrt{2}-\varepsilon, \sqrt{2}+\varepsilon)$. Possiamo essere certi dell'esistenza di un tale a per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ secondo l'euclidea. A questo punto ogni aperto B contenente $\mathbb{Q}$ contiene un elemento della base del tipo $B' := (a-\delta, a+\delta) \smallsetminus S_a$, dove $\delta \in \mathbb{R}$ e S è al più numerabile, perché $B \ni a$. Considerando adesso $B \cap A$ abbiamo che $A' \cap B' \subseteq A \cap B$, ma $A' \cap B' = ((\sqrt{2}-\varepsilon, \sqrt{2}+\varepsilon) \cap (a-\delta, a+\delta)) \smallsetminus (S_{\sqrt{2}} \cup S_a)$. Ora notiamo che poiché $a \in (\sqrt{2}-\varepsilon, \sqrt{2}+\varepsilon)$, a appartiene all'intersezione dei due intervalli, ma poiché gli intervalli sono aperti per l'euclidea, la loro intersezione è un aperto dell'euclidea e poiché è non vuota, contiene un elemento della base di aperti dell'euclidea, chiamiamo tale intervallo (α, β). Inoltre notare che $S := S_{\sqrt{2}} \cup S_a$ è al più numerabile, perché unione di tali insiemi. Quindi $A' \cap B' = (\alpha, \beta) \smallsetminus S$ è non vuoto e di conseguenza $\mathbb{R}_{\text{S.Gius}}$ non è T_3.

Esempio 7.5 (T_3 non T_4)**.** v. Sernesi pag. 96

Lemma 7.9: Lemma di Uryson

Se X è T_4 allora per ogni C_1 e C_2 chiusi e disgiunti esiste una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ tale che $f(C_1) = 0$ e $f(C_2) = 1$

8 Assiomi di Numerabilità

Definizione 8.1: Primo assioma di numerabilità

X soddisfa il primo assioma di numerabilità se

$$\forall P \in X \exists \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dove $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema di intorni numerabili tali che $U_n + 1 \subseteq U_n$ per ogni $n > 1$ naturale e $\forall A$ aperto, con $A \ni P$, $\exists n \in \mathbb{N} : U_n \subseteq A$

Si dice allora anche che X è I-numerabile

Esempio 8.1. In uno spazio metrico, dato un punto P, $\{D(P, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema numerabile di intorni.

Definizione 8.2: X è Separabile

X è detto **separabile** se

$$\exists D \subseteq X, \text{ con } D \text{ denso e numerabile}$$

Esempio 8.2. $\mathbb{R}^n \supseteq \mathbb{Q}^n$

Definizione 8.3: Secondo assioma di Numerabilità

X soddisfa il secondo assioma di numerabilità se ammette una base di aperti numerabile.

Si dice allora anche che X è II-numerabile.

Osservazione. Se X è I(II)-numerabile, $S \subseteq X$ è I(II)-numerabile. Questo segue banalmente dal fatto che un sistema di intorni di ogni punto P (una base di aperti) può essere trovata intersecando S con un sistema di intorni di $P \in X$ (con una base di aperti di X).

Teorema 8.4: Teorema di Uryson

Se X, τ è T_4 e soddisfa il secondo assioma di numerabilità allora è metrizzabile (quindi esiste una distanza $d : X^2 \to \mathbb{R}$) e in particolare la topologia data dalla distanza d è la stessa di τ

Definizione 8.5: Varietà Topologica

Una varietà topologica di dimensione $n \in \mathbb{N}$ è uno spazio topologico M, T_2 + II-numerabile "localmente come $\mathbb{R}^n$", ossia

$$\forall P \in M \ \exists U \ni P \text{ aperto }, \exists \varphi : U_P \to \mathbb{R}^n$$

tale che $\varphi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e φ è iniettiva. In altre parole, esiste per ogni punto P esiste un aperto che lo contiene omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 8.3. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ è una $n-$varietà. È infatti T_2 e II-numerabile in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$. Inoltre l'aperto $S^n \smallsetminus \{P\} \overset{\text{omeo}}{\approx} \mathbb{R}^n$, con $P \in S^n$ un punto sulla sfera, per la proiezione stereografica, e il punto P ha un intorno aperto omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$ perché preso il suo punto antipodale Q, l'aperto $S^n \smallsetminus \{Q\} \overset{\text{omeo}}{\approx} \mathbb{R}^n$ per la proiezione stereografica in Q (notare che si può anche ragionare sulle piccole calotte omeomorfe ad un disco).

Esempio 8.4. Se abbiamo M e N due varietà di dimensione rispettivamente n e m allora $N \times M$ è una varietà di dimensione $n + m$

Inoltre le $1-$varietà si chiamano *curve* e le $2-$varietà si chiamano *superfici*

Esempio 8.5. Prendiamo $\mathbb{R}^n_{\tau_{\text{aff}}}$ con la topologia che ha come base di chiusi $\varnothing$ e i sottospazi affini.

T_1 Sì, perché i punti sono chiusi in quanto sottospazi affini.

T_2 No, perché due aperti non vuoti si intersecano **sempre** (dimostrazione per induzione)

A questo punto conideriamo $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n_{\tau_{\text{aff}}} \times \mathbb{R}^n_{\tau_{\text{aff}}}$. Se la topologia prodotto fosse ancora quella degli affini allora la diagonale sarebbe chiusa, ma noi sappiamo che non può essere (altrimenti sarebbe T_2), quindi la dopologia prodotto è diversa.

Esempio 8.6. Supponiamo di avere uno spazio X che sia T_3 e prendiamo C un chiuso. Consideriamo la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x = y \vee x, y \in C$ (ossia identifichiamo C a un punto, il resto rimane invariato). Vogliamo mostrare che $X/\sim$ è T_2. Prima consideriamo se prendiamo come coppia di punti $P \in X \setminus C$ e $\{C\}$. Allora dato che X è T_3 consideriamo P e C ed esistono V e U aperti disgiunti tali che $U \ni P, U \not\supseteq C$ e $V \not\ni P, V \supseteq C$, ora se f è la funzione di identificazione $f(V) \cap f(U) = \varnothing$ e $f(V), f(U)$ sono aperti perché V e U sono aperti bilanciati.

Con due punti la procedura è simile ma basta usare che X è T_2

Esempio 8.7. Prendiamo il quadratino identificato $[0,1] \times [0,1]$ e identifichiamo tutti i punti $(x,0), 0 \leq x < 1$. Questo spazio non è T_1 perché il punto costituito dalla classe di equivalenza non è chiuso.

Esempio 8.8. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ e diciamo che due vettori $v \sim w \iff \exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : T(v) = w$, con T invertibile. Quindi abbiamo solo due classi di equivalenza, $\{\mathbf{0}\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, dove $\{\mathbf{0}\}$ è chiuso e $\{\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\}$ è aperto, quindi questo spazio è T_0 ma non T_1, l'unico aperto che contiene il punto aperto è infatti tutto lo spazio, che contiene anche il punto chiuso.

Esempio 8.9. Stesso di prima con le matrici ortogonali, l'insieme risultante è omeomorfo a $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ perché le trasformazioni ortogonali preservano la norma dei vettori.

9 Compattezza

Definizione 9.1: Ricoprimento, Sottoricoprimento

Sia X uno spazio topologico. Una famiglia di sottoinsiemi $\{S_i\}_{i\in I}$, $S_i \subseteq X$ tali che $\bigcup_{i\in I} S_i = X$ viene detto **ricoprimento** di X.

Se esiste un $J \subseteq I$ tale che $\bigcup_{j\in J} S_j = X$ allora la famiglia $\{S_j\}_{j\in J}$ viene detto **sottoricoprimento**.

Un ricoprimento è aperto (chiuso) se ogni S_i è aperto (chiuso).

Un ricoprimento è finito se I è finito.

Esempio 9.1. Considerato $X = [0,1]$, $\{[0, 0.5], [0.5, 1]\}$ è un ricoprimento finito chiuso; $\{[0, 0.5), (0.3, 7), (0.5, 1]\}$ è un ricoprimento finito aperto; un ricoprimento non finito di X è $\{(0.9, 1]\} \cup \{[0, b)\}_{b\in[0,1]}$ (che è un ricoprimento aperto)

Definizione 9.2: Compattezza (per ricoprimenti)

X, τ è **compatto** per ricoprimenti se *per ogni ricoprimento aperto di X esiste un sottoricoprimento finito.* In altre parole

$$\forall \{S_i\}_{i\in I} \subseteq \tau : \bigcup_{i\in I} S_i = X,\ \exists J \subseteq I, \#J \in \mathbb{N} : \bigcup_{j\in J} S_j = X$$

Esempio 9.2 (Spazi compatti)**.**

- Se X è finito, la topologia è finita, quindi ogni ricoprimento è finito, quindi X è compatto.
- Similmente se τ è finito X è compatto
- X con la cofinita. Se $X = \bigcup_{iinI} A_i$ con A_i aperti, allora $X \setminus A_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ perché è un chiuso. Ma poiché $\{A_i\}$ è un ricoprimento, per ogni x_j esiste un A_{i_j} che lo contiene. Quindi $X = A_1 \cup \bigcup_{j\in 1\ldots k} A_{i_j}$, per cui X è compatto.

Esempio 9.3 (Spazi non compatti)**.**

- $\mathbb{R}$. Sia $A_i = (i-1, i+1), i \in \mathbb{Z}$. Chiaramente $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} A_i = \mathbb{R}$ ma rimuovendo ogni particolare aperto $(i-1, i+1)$ il punto i non è più nell'unione, per cui non esiste nessun sottoricoprimento di $\{A_i\}$.
- $\mathbb{R}^n$. Si considerino i dischi centrati in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Chiaramente $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^+} D(\mathbf{x}, r) = \mathbb{R}^n$ ma se $F \subseteq \mathbb{R}^+$ è finito allora $\bigcup_{r\in F} D(\mathbf{x}, r) = D(\mathbf{x}, \max F) \neq \mathbb{R}^n$
- $[0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}[0, 1-\frac{1}{n})$ ma di nuovo se $F \subseteq \mathbb{Z}^+$ è finito allora $\bigcup_{n\in F}[0, 1-\frac{1}{n}) = [0, 1-\frac{1}{\max F}) \neq [0,1)$

Esempio 9.4. $[0,1]$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$, con A_i aperti in $[0,1]$ e $\bigcup_{i\in I} A_i = [0,1]$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$. Sia

$$C = \{x \in [0,1] : \exists i_1, \ldots, i_k \in I, \bigcup_{j\in 1\ldots k} A_{i_j} \supseteq [0,x]\}$$

Procediamo col dimostrare $1 \in C$.

a. C è non vuoto.

Deve esistere un $A_{i_0} \ni 0$, per cui $\exists\varepsilon : [0,\varepsilon) \subseteq A_{i_0}$. Ora per ogni $\varepsilon' < \varepsilon, \varepsilon' \in C$ poiché $[0,\varepsilon'] \subseteq [0,\varepsilon)$. In particolare $\exists 0 < \varepsilon' \in C$

b. $(0,1] \ni c := \sup C \in C$.

$\exists A_{i_c} \ni c \implies \exists\varepsilon : (c-\varepsilon, c] \subseteq A_{i_c}$. Sia ora $\gamma \in (c-\varepsilon, \varepsilon)$. Poiché $\gamma < c$, esiste un sottoricoprimento finito di $[0,\gamma]$. Aggiungendo A_{i_c} a tale sottoricoprimento, otteniamo un sottoricoprimento finito di $[0,c]$, per cui $c \in C$.

c. c = 1.

Se $c < 1$ allora $\exists\varepsilon > 0 : [c, c+\varepsilon) \subseteq A_{i_c}$. Ma allora se $\sigma \in (0,\varepsilon)$ troviamo che esiste un sottoricoprimento finito di $[0,\sigma]$ (lo stesso di $[0,c]$ costruito nel passo precedente), quindi $\sigma \in C$ ma $\sigma > c$ che è assurdo.

□

Osservazione. Si può anche ragionare sui chiusi. Se esiste un sottoricoprimento finito con unione X allora, ragionando ai complementari, esiste un insieme finito di chiusi con intersezione vuota. Infatti se $\{A_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di X compatto significa che esiste un sottoricoprimento finito. Esiste quindi $F \subseteq I$ finito tale che $\bigcup_{i\in F} A_i = X$. Ma allora:

$$\varnothing = X \setminus \left(\bigcup_{i\in F} A_i\right) = \bigcap_{i\in F} (X \setminus A_i)$$

Ossia esiste un numero finito di chiusi $C_i := X \setminus A_i$ con intersezione vuota. Notare che vale anche il viceversa.

Proposizione 9.3. *Sia X compatto, $f : X \twoheadrightarrow Y$ continua e suriettiva. Allora Y è compatto. In altre parole* ***l'immagine continua di compatti è compatta***

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di Y. Allora $f^{-1}(A_i) =: B_i$ aperti di X e $\bigcup_{i\in I} B_i = f^{-1}(Y) = X$. Ma allora per compattezza di X esiste un sottoricoprimento di $\{B_i\}$, indicizzato da $F \subseteq I$ finito. Poiché $f(B_i) = A_i$ per suriettività,

$$\bigcup_{i\in F} A_i = \bigcup_{i\in F} f(B_i) = f\left(\bigcup_{i\in F} B_i\right) = f(X) = Y$$

Per cui Y è compatto □

Proposizione 9.4. *X compatto, $S \subseteq X$ chiuso, allora S è compatto (con la topologia indotta).*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di S. Ogni A_i è quindi $A_i = A'_i \cap S$, con $A'_i \subseteq X$ un aperto di X. Ora considerato l'aperto $A' := X \smallsetminus S$ abbiamo che $A' \cup \bigcup_{i\in I} A'_i = X$, per cui per compattezza esiste un sottoricoprimento finito, quindi $\exists F \subseteq I$ finito tale che $A' \cup \bigcup_{i\in F} A'_i = X$. Ma allora $\bigcup_{i\in F} A'_i \supseteq S \implies \bigcup_{i\in F} A_i = S$ □

Osservazione. Il viceversa generalmente non vale, infatti i punti sono sempre compatti ma alcuni spazi non sono T_1. Un altro esempio è $\mathbb{N}$ con la cofinita, dove $\{2, 4, \dots\}$ è compatto (perché la topologia indotta è la cofinita) ma non chiuso, perché non è finito.

Teorema 9.5

Se X è T_2 e $K \subseteq X$ è compatto, allora K è chiuso.

Dimostrazione. Mostreremo che se $X \ni x \notin K$, allora esiste un aperto di X contenente x e disgiunto da K, ossia

$$\forall X \ni x \notin K \; \exists \text{ aperto } A_x \ni x, A_x \cap K = \varnothing \tag{1}$$

L'idea è che se questa osservazione è corretta allora possiamo prendere l'unione di tutti gli aperti trovati da ogni punto di $X \smallsetminus K$ e quindi avere che

$$\bigcup_{x\in X\smallsetminus K} A_x = X \smallsetminus K \text{ aperto} \implies K \text{ chiuso}$$

Per dimostrare (1), sia quindi $x \notin K, y \in K$, ovviamente quindi $x \neq y$. Poiché X è T_2, $\exists A_{x,y} \ni x, B_y \ni y, A_{x,y} \cap B_y = \varnothing$. Ora $\bigcup_{y\in K} B_y \supseteq K$, quindi se $B'_y := B_y \cap K$, $\bigcup_{y\in K} B'_y = K$ e ogni B'_y è un aperto di K. Abbiamo quindi che $\{B'_y\}$ è un ricoprimento aperto di K, per compattezza quindi esiste un sottoricoprimento finito, sia quindi $F \subseteq K$ finito tale che $\bigcup_{y\in F} B'_y = K$, ma quindi

$$\bigcup_{y\in F} B_y \supseteq K \implies \bigcap_{y\in F} A_{x,y} \cap K = \varnothing$$

Ma poiché F è finito, $A_x := \bigcap_{y\in F} A_{x,y}$ è un aperto di X, per cui verifica la tesi (1). □

Corollario 9.5.1. *Se X è T_2 e compatto, allora i sottoinsiemi compatti di X sono esattamente i chiusi.*

Dimostrazione. Segue direttamente da 9.5 e 9.4 □

La stessa dimostrazione di 9.5 mostra però anche un'altra cosa, infatti se X è compatto e T_2 siamo nell'ipotesi del corollario, quindi notiamo che scelto un chiuso K e un punto $x \notin K$, si possono separare con aperti, poiché K è compatto, in altre parole T_2 + compatto = T_3. Ma il divertimento non finisce qui, infatti

Proposizione 9.6. *Se X è uno spazio T_2 e compatto, allora X è T_4*

Dimostrazione. Per quanto visto prima, X è T_3, userò questa ipotesi più forte nella dimostrazione. Presi due chiusi disgiunti C_1 e C_2, sono compatti per il corollario 9.5.1. Prendiamo ora un punto $x \in C_1$. Poiché X è T_3 esistono due aperti $A_{1,x}$ e

$A_{2,x}$ tali che $A_{1,x} \ni x, A_{2,x} \supseteq C_2$ e $A_{1,x} \cap A_{2,x} = \varnothing$. Procedendo in maniera simile alla dimostrazione di 9.5, ponendo $A'_{1,x} = A_{1,x} \cap C_1$ otteniamo che $\{A'_{1,x}\}_{x \in C_1}$ è un ricoprimento aperto di C_1, che essendo compatto ammette quindi un sottoricoprimento finito. Sia quindi $F \subseteq C_1$ finito tale che $\bigcup_{x \in F} A'_{1,x} = C_1$ e quindi $A_1 := \bigcup_{x \in F} A_{1,x} \supseteq C_1$. Consideriamo adesso $A_2 := \bigcap_{x \in F} A_{2,x}$. Chiaramente $A_2 \supseteq C_2$ poiché ogni sua componente lo contiene. Inoltre A_2 è aperto in quanto intersezione finita di aperti. Infine

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{x \in F} A_{1,x} \right) \cap A_2 = \bigcup_{x \in F} (A_{1,x} \cap A_2) \subseteq \bigcup_{x \in F} (A_{1,x} \cap A_{2,x}) = \varnothing$$

Quindi A_1 e A_2 sono aperti che separano C_1 e C_2 e verificano la condizione di normalità (T_4). □

Proposizione 9.7 (Heine-Borel debole)**.** *I compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i chiusi limitati. Ossia C chiuso e $C \subseteq [a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia $C \subseteq [a, b]$ chiuso, allora C è compatto (chiuso in un compatto)

$\Longleftarrow$ Sia C un compatto, è un chiuso per 9.5. Consideriamo il ricoprimento aperto $(-a, a) \cap C_{a \in \mathbb{R}^+}$. Essendo C compatto, esiste un $F \subseteq \mathbb{R}^+$ finito tale che $\{(-a, a)\}_{a \in F}$ sia un sottoricoprimento finito. Ma quindi se $M := \max F$ abbiamo che $(-M, M) \supseteq C$, e quindi $[-M - 1, M + 1] \supseteq C$

□

Proposizione 9.8. *Sia X compatto, $f : X \to \mathbb{R}$ continua, allora f ha un minimo e un massimo.*

Dimostrazione. $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ è un compatto di $\mathbb{R}$ perché immagine continua di compatto. Ma allora per Heine-Borel debole, $f(X) \subseteq [a, b]$ ed è chiuso, quindi $\sup f(X) \in f(X) \implies \exists x \in X : f(x) = \sup f(X) = \max f(X)$

Similmente si dimostra l'esistenza del minimo. □

Proposizione 9.9. *Sia X compatto, $f : X \to Y$ continua e suriettiva, Y è T_2, allora f è **chiusa***

Dimostrazione. Sia $C \subseteq X$ un chiuso, quindi è compatto perché chiuso di un compatto. $f(C) \subseteq Y$ è quindi un compatto, ma poiché Y è di Haussdorf $f(C)$ è anche un chiuso. □

Lemma 9.10

Supponiamo di avere X_τ e $\mathcal{B} \subseteq \tau$ una base della topologia. Allora X è compatto se e solo se per ogni ricoprimento $\bigcup_{\ell \in L} B_\ell = X$, con $B_i \in \mathcal{B}$ ne possiamo estrarre un sottoricoprimento finito.

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Ovvio, se X è compatto posso estrarre un sottoricoprimento finito da qualsiasi ricoprimento, incluso se costituiti da aperti di una base.

$\Longleftarrow$ Supponiamo di poter estrarre sottoricoprimenti finiti da ricoprimenti aperti con elementi in $\mathcal{B}$. Sia $X = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i} B_{i,j}\right)$, dove l'ultimo è un ricoprimento con elementi di $\mathcal{B}$. Ma quindi esiste un insieme finito F di coppie (i,j) tali che $\bigcup_{(i,j)\in F} B_{i,j} = X$. A questo punto per ogni elemento $B_{i,j}$ prendiamo $A_i \supseteq B_{i,j}$ e ne otteniamo dunque comunque un numero finito.

$\square$

Teorema 9.11: Teorema debole di Tichonov

Siano X e Y spazi compatti, allora $X \times Y$ è compatto. In altre parole **il prodotto di due compatti è compatto**.

Dimostrazione. Per il Lemma 9.10 è sufficiente considerare dei ricoprimenti $X\times Y = \bigcup_{i\in I} A_i \times B_i$ dove A_i sono aperti di X e B_i sono aperti di Y, perché questa è una base della topologia su $X \times Y$.

Chiamiamo $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ le proiezioni a X e Y.

Ora fissiamo $\overline{x} \in X$ un punto e consideriamo $\overline{x} \times Y = \pi_X^{-1}(\overline{x})$ che è compatto perché è omeomorfo a Y. Consideriamo $\bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i \cap (\overline{x} \times Y)) = \overline{x} \times Y$ perché abbiamo intersecato il ricoprimento di $X \times Y$ con un suo sottospazio. Inoltre è un ricoprimento aperto perché è composto da aperti di $\overline{x} \times Y$. Per compattezza quindi esiste un sottoricoprimento finito, indicizzato da $F_{\overline{x}} \subseteq I$ finito tale che $\bigcup_{i\in F_{\overline{x}}}(A_i \times B_i \cap (\overline{x} \times Y)) = \overline{x} \times Y$, il che significa che $\bigcup_{i\in F_{\overline{x}}} A_i \times B_i \supseteq \overline{x} \times Y$.

Considero ora $A_{\overline{x}} = \bigcap_{i\in F_{\overline{x}}} A_i$ che è un aperto non vuoto poiché ovviamente $\overline{x} \in A_{\overline{x}}$. Dico ora che $A_{\overline{x}} \times Y \subseteq \bigcup_{i\in F_{\overline{x}}}(A_i \times B_i)$. Ma poiché $\{B_i\}_{i\in F_{\overline{x}}}$ ricopre Y,

$$A_{\overline{x}} \times Y \subseteq A_{\overline{x}} \times \bigcup_{i\in F_{\overline{x}}} B_i = \bigcup_{i\in F_{\overline{x}}} A_{\overline{x}} \times B_i$$

Ma ogni $A_{\overline{x}} \times B_i \subseteq A_i \times B_i$, da cui l'inclusione richiesta.

Adesso ovviamente $\bigcup_{x\in X} A_x = X$ è un ricoprimento aperto di X, quindi essendo X compatto esiste un $F \subseteq X$ finito tale che $\bigcup_{x\in F} A_x = X$. Quindi $\bigcup_{x\in F} A_x \times Y = X \times Y$. Infine, poiché ogni $A_x \times Y$ si può ricoprire con finiti aperti indicizzati da $F_x \subseteq I$,

$$X \times Y = \bigcup_{x\in F} \bigcup_{i\in F_x} A_i \times B_i$$

$\square$

Corollario 9.11.1. *Il prodotto di finiti compatti è compatto*

Dimostrazione. Per induzione sul numero di compatti, il passo base è il teorema 9.11. $\square$

Teorema 9.12: Teorema di Heine-Borel

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora C è compatto se e solo se è chiuso e limitato, ossia $\exists \rho > 0 : C \subseteq D(0,\rho)$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia C compatto, quindi è chiuso perché $\mathbb{R}^n$ è T_2. Quindi Consideriamo $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^+} D(0,r) \cap C = C$ è un ricoprimento aperto di C, quindi esiste un sottoricoprimento indicizzato da $F \subseteq \mathbb{R}^+$ finito. Poniamo $\rho := \max F$ e otteniamo che $D(0,\rho) \cap C = C$ da cui $D(0,\rho) \supseteq C$

$\Longleftarrow$ C è chiuso e limitato, quindi è contenuto in un "disco" $D_n = [-N, N]^n \supseteq C$ per un qualche $N \in \mathbb{R}^+$, ma poiché $D_n \overset{\text{omeo}}{\approx} [0,1]^n$ che è compatto, allora C è un chiuso in un compatto, per cui è compatto.

$\square$

Esempio 9.5. Dire quando $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - ny^2 = 1\}$.

C_n è sempre chiuso perché è controimmagine di 1 che è chiuso rispetto a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto x^2 - ny^2$ che è continua.

Esempio 9.6. Sia $C_n = \{(x,y) : nx^2 + (n+2)y^2 = n+1\}$, con $n \in \mathbb{Z}$ Per quali valori di n,

1. $C_n \cup C_{-n}$ è chiuso

   Sempre, l'unione di finiti chiusi è chiusa, ogni C_n è chiuso perché controimmagine continua di chiuso $n+1$

2. C_n è compatto

   Poiché siamo in $\mathbb{R}^2$, i compatti sono i chiusi limitati, essendo C_n chiuso, dobbiamo solo controllare quando è limitato. Se $n \geq 1$ oppure $n \leq -3$, C_n è un ellisse ed è quindi limitato. Se $n = 0$ si ottengono due rette, se $n = -1$ si ottiene $x^2 = y^2$ che è le due rette bisettrici del piano. Se $n = -2$ abbiamo due rette parallele.

3. $\bigcup_{n \geq 1} C_n =: K$ è compatto

   Consideriamo la successione di punti che è contenuta all'interno di K data da tutti i punti con $y = 0$ tali punti soddisfano $nx^2 = n+1$ quindi consideriamo la successione $x_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$. Per ogni $n \geq 1, (x_n, 0) \in K$ ma $(1,0) \notin K$ infatti significherebbe che $n = n+1$ che è assurdo. Non essendo chiuso non è quindi compatto.

4. $\mathbb{R}^2 - K$ è denso?

Esempio 9.7. Sia $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2nx + 2(n+1)y = 3n\}$. Sia $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Sia $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ e $D^+ = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Per quali valori di n:

1. $C_n \cup C_{n+1}$ è chiuso?

   Sempre ovvio

2. $C_n \cap D^+$ è compatto?

   Bisogna solo controllare se è limitato, essendo chiuso in quanto intersezione di due chiusi. Poiché per $n \neq 0, y = 0$ otteniamo $x = \frac{3}{2}$ significa che tutte le rette passano per il punto $(\frac{3}{2}, 0)$. Quindi per vedere se l'insieme è limitato basta controllare se, quando $x = 0$, $y > 0$. Otteniamo quindi $y = \frac{3n}{2(n+1)}$ oppure $n = -1$. La seconda tuttavia comporta $x = \frac{3}{2}$ che è non limitato. Risolvendo quindi $\frac{3n}{2(n+1)} > 0$ otteniamo $n > 0 \vee n < -1$ da cui $n \geq 1 \vee n \leq -2$

3. $K \cap S^1$ è compatto?

   Vogliamo risolvere il sistema, quindi consideriamo $x = \frac{3}{2} - \frac{n+1}{n} y$, e la circonferenza, quindi $\left(\frac{3}{2} - \frac{n+1}{n} y\right)^2 + y^2 = 1$. Da cui $y^2 \left(1 + \frac{n+1}{n}^2\right) - 3\frac{n+1}{n} y + \frac{5}{4}$. Da cui il discriminante $\Delta = 9\frac{n+1}{n}^2 - 5\left(1 + \frac{n+1}{n}^2\right) = 4\frac{n+1}{n}^2 - 5 \geq 0$ da cui l'ultima diseguaglianza perché vogliamo controllare se il numero di punti è finito. Troviamo $\frac{n+1}{n} \geq \sqrt{\frac{5}{4}}$ che effettivamente ha un numero finito di soluzioni. Quindi $K \cap S^1$ è compatto.

Esempio 9.8. Sia $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1)(x^n + y^n - 1) = 0\}$

Per quali valori di n, C_n è compatto? Chiaramente C_n è chiuso, ma in particolare è l'unione delle controimmagini di 0 delle funzioni $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ e $g : (x, y) \mapsto x^n + y^n - 1$ Chiamando $S^1 = f^{-1}(0)$ e $D_n = g^{-1}(0)$ abbiamo $C_n = S^1 \cup D_n$. S^1 è sempre compatto, mentre D_n è compatto se n è pari. Da questo troviamo che n deve essere pari.

Sia ora $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Non è compatto perché non è chiuso. Infatti il punto $(1, 1) \notin K$ ma se $x = y$ si ottiene $2x^{2k} = 1$ che tende a $x = 1$

Esempio 9.9. Sia $M_n(\mathbb{R}) \overset{\text{omeo}}{\approx} \mathbb{R}^{n^2}$ lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$. Si considerino $GL(n)$ il gruppo lineare, $SL(n)$ il gruppo speciale, $O(n)$ le matrici ortogonali.

$GL(n)$ è un aperto, perché è controimmagine di $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ che è aperto di $\mathbb{R}$ rispetto al determinante che è continuo. $SL(n)$ è la controimmagine di 1 rispetto al determinante, quindi è chiuso. Infine $O(n) = (A \mapsto^t AA)^{-1}(I)$ quindi è chiuso. Ma inoltre dato che una matrice ortogonale ha colonne composte da vettori di norma unitaria, $d(A, \mathbf{0}) = \sqrt{n}$ da cui $O(n)$ è chiuso e limitato, quindi compatto.

Definizione 9.13: Gruppo topologico

Un gruppo topologico G è un gruppo G con topologia τ tale che l'operazione di gruppo $G \times G \to G$ è continua e l'operazione di inversa $G \to G$ è continua.

9.1 Compattezza in Spazi Metrici

Definizione 9.14: Compattezza per successioni

Uno spazio topologico (X, τ) è **compatto per successioni** se da ogni successione ne possiamo estrarre una sottosuccessione convergente

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \exists C \subseteq \mathbb{N} : \{x_n\}_{n\in C} \text{ converge}$$

Lemma 9.15: Numero di Lebesgue

Supponiamo di avere un ricoprimento aperto di X $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i\in I}$. Supponiamo che X sia compatto per successioni. Allora esiste un $\sigma_{\mathcal{U}}$ tale che $\forall x \in X$ $\exists i \in I : D(x, \sigma_{\mathcal{U}}) \subseteq A_i$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, allora negando la tesi otteniamo che esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i\in I}$

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^+ \ \exists x_\sigma \in X : D(x_\sigma, \sigma) \text{ non è contenuto in nessun } A_i$$

E ancora "$D(x_\sigma, \sigma)$ non è contenuto in nessun A_i" quindi

$$\forall i \in I : x_\sigma \in A_i \implies \exists y_{i,\sigma} \notin A_i : d(x_\sigma, y_{i,\sigma}) < \sigma$$

Ora consideriamo la successione x_n degli x_σ tali che $\sigma = \frac{1}{n}$. Poiché X è compatto per successioni esiste una sottosuccessione convergente a z. Allora $\exists i \in I : z \in A_i$ e da un certo punto in poi della sottosuccessione tutti i valori x_{n_k}, per $k > \overline{k}$ sono contenuti in A_i. Ma per ogni n_k, abbiamo che $y_{i,n_k} \notin A_i$ e $d(x_{n_k}, y_{i,n_k}) < \frac{1}{n_k}$.

Osservazione. Abbiamo $\{x_n\} \to z$ e $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Allora $y_n \to z$

Dimostrazione. $0 \leq d(y_n, z) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, z)$ Per il squeeze theorem anche $d(y_n, z) \to 0$ □

Per l'osservazione allora $y_{n_k} \to z$ che è assurdo perché di sicuro esiste un r tale che $D(z, r) \subseteq A_i$ e $y_{n_k} \notin A_i$, quindi di sicuro $d(y_{n_k}, z) \geq r$. □

Definizione 9.16

Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dice **totalmente limitato** se $\forall \mathbb{R} \ni \sigma > 0$ allora $\exists F \subseteq X$ finito tale che $\bigcup_{x \in F} D(x, \sigma) = X$ ossia è possibile ricoprirlo con un numero finito di dischi di un raggio fissato.

Notare che la totale limitatezza non implica la compattezza (ad esempio $[0, 1)$). È più evidente però che se X è compatto allora è totalmente limitato. Basta infatti prendere come ricoprimento tutti i dischi di raggio ε e poi per la compattezza sceglierne un sottoricoprimento finito. Ma questo risultato (e sarà più ovvio il perché in seguito al teorema enunciato tra poco) è valido anche in caso di compattezza per successioni

Lemma 9.17

Sia (X, d) compatto per successioni, allora è totalmente limitato

Dimostrazione. Supponiamo che X sia non totalmente limitato, ossia $\exists \sigma > 0$ tale che X non possa essere ricoperto da un numero finito di dischi di raggio σ. In particolare scelto un $x_1 \in X$ tale che $D(x_1, \sigma) \neq X$, scegliamo allora $x_2 \in X \setminus D(x, \sigma)$ e di nuovo l'unione dei due dischi centrati in x_1 e x_2 non può essere X, procediamo così costruendo. Inoltre abbiamo che $d(x_i, x_j) > \sigma$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ poiché ogni punto successivo è fuori da ogni altro disco. Tuttavia se la distanza non è mai minore di σ non può esistere una sottosuccessione convergente. Leggendo l'implicazione al contrario otteniamo che se X è compatto per successioni allora X è totalmente limitato. □

Teorema 9.18

Se (X, d) è uno spazio metrico, e consideriamo τ_d la topologia data dalla distanza, allora X è compatto per ricoprimenti se e solo se è compatto per successioni.

Dimostrazione. compatto $\iff$ compatto per successioni

$\Longrightarrow$ Supponiamo X compatto. Prendiamo una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e sia $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$. Supponiamo non esista una sottosuccessione convergente, allora non esistono punti di accumulazione, quindi per ogni $x \in X$ esiste un aperto $A_x \ni x$ tale che $\{n : x_n \in A_x\}$ è finito. Ma allora $\mathcal{U} = \{A_x : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X e per la compattezza esiste un sottoricoprimento finito, indicizzato da $F \subseteq X$ finito. Ma questo significa che $\bigcup_{x \in F} \{n : x_n \in A_x\} = \mathbb{N}$ è finito, che è assurdo.

$\Longleftarrow$ Sia X compatto per successioni e sia $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Sia σ il numero di Lebesgue per il ricoprimento $\mathcal{U}$, che esiste per il Lemma 9.15. Ora per il Lemma 9.17 sappiamo che X è totalmente limitato, quindi esiste un ricoprimento finito composto da dischi di raggio σ, di cui ognuno è contenuto in un aperto del ricoprimento $\mathcal{U}$, formando un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$.

$\square$

Definizione 9.19

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ si dice di Cauchy se

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists\overline{n}(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon\forall n, m > \overline{n}$$

Proposizione 9.20. *Se $x_n \to x$ allora x_n è di Cauchy.*

Dimostrazione. Scelto $\frac{\varepsilon}{2}$, esiste $\overline{n}$ tale che $\forall n > \overline{n}$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora per la diseguaglianza triangolare $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$ se $n, m \geq \overline{n}$ $\square$

Notare che generalmente il viceversa non è detto. Ad esempio in $(0, 1)$ la successione $\frac{1}{n}$ non è convergente (convergerebbe a $0 \notin X$) ma è di Cauchy

Definizione 9.21

Uno spazio metrico (X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Proposizione 9.22. *Sia X, d uno spazio metrico. X compatto, allora X è completo*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Essendo X compatto ammette una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \to x$. Vogliamo mostrare che $x_n \to x$. $\exists\overline{k} : \forall k > \overline{k}$, $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre possiamo anche trovare un $\overline{n}$ tale che $\forall n, m > \overline{n}$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Supponiamo che $n_k = m$ per qualche k, ma allora $d(x_m, x) \leq d(x_m, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x) < \varepsilon$ $\square$

Proposizione 9.23. *Se in (X, d) i chiusi limitati sono compatti, allora (X, d) è completo. In particolare $\mathbb{R}^n, d$ è completo.*

Dimostrazione. Prendiamo un punto $z \in X$ e x_n una successione di Cauchy. Allora scelto ε esiste un $\overline{n}$ tale che $n, m > \overline{n} \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Allora $d(x, x_n) \leq d(x, x_{\overline{n}}) + d(x_n, x_m) < \rho$ fissato. Allora aggiungendo i primi finiti termini minori di $\overline{n}$ otteniamo che $\{x_n\}$ è limitata. $\square$

Proposizione 9.24. *Totalmente Limitato + Completo $\iff$ Compatto*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia X completo e totalmente limitato. Sia $\{x_n\}$ una successione. Vogliamo mostrare che esiste x_{n_k} di Cauchy, quindi convergente per completezza, in modo da garantire la compattezza per successioni e di conseguenza la compattezza.

Siano D_n i centri dei ricoprimenti composti da dischi di raggio $\frac{1}{n}$, di cui conosciamo l'esistenza per la totale limitatezza. D_1 è finito, quindi esiste un $y_1 \in D_1$ tale che $A_1 := \{n : x_n \in D(y_0, 1)\}$ è infinito. Adesso sul sottospazio

$D(y_0, 1)$ esiste un $y_2 \in D_2 : A_2 := \{n : x_n \in D(y_1, 1) \cap D(y_2, \frac{1}{2})\}$ è infinito. Continuando in questo modo,

$$\exists y_k \in D_k : A_k := \{n : x_n \in \bigcap_{m \in 1 \dots k} D\left(y_m, \frac{1}{m}\right)\}$$

Ora per l'assioma della scelta estraiamo una successione di n_k tale che ogni $n_k \in A_k$. Infine, per ogni $\varepsilon > 0$, scelti $\mathbb{N} \ni k_1, k_2 > \frac{2}{\varepsilon}$, allora se $N = \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil$, quindi $\varepsilon \geq \frac{2}{N}$.
Per definizione di A_k e poiché $k_1, k_2 \geq N$, $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}} \in D\left(y_{n_N}, \frac{1}{N}\right)$. Infine

$$d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) \leq d(x_{n_{k_1}}, y_{n_N}) + d(y_{n_N}, x_{n_{k_2}}) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} \leq \varepsilon$$

Per cui x_{n_k} è di Cauchy.

$\Longleftarrow$ Compatto $\Longrightarrow$ compatto per successioni $\Longrightarrow$ totalmente limitato, per teorema e lemma enunciati dimostrati in precedenza. Inoltre essendo compatto è completo.

□

Proposizione 9.25. *Sia* (X, d) *completo, e sia* $Y \subseteq X$ *allora* Y *è completo* $\iff$ Y *è chiuso*

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Sia Y completo. Allora se $y_n \in Y$ è una successione convergente a $z \in X$. Ma allora y_n è di Cauchy e per la completezza di Y $y_n \to \overline{z} \in Y$. Per l'unicità del limite $z = \overline{z}$ Y è chiuso.

$\Longleftarrow$ Sia Y chiuso.

□

Definizione 9.26

Un insieme non vuoto $A \subseteq X$ è detto **magro** se $X \setminus A$ è denso in X. In altre parole A è **magro** se non ha parte interna.

Teorema 9.27: Baire

Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Supponiamo di avere una famiglia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di aperti densi in X. Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ è denso}$$

Similmente se $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{X \setminus A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di chiusi magri, allora

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \text{ è magro}$$

Notare l'importanza dell'ipotesi di completezza: ad esempio se $X = \mathbb{Q}$ allora ogni insieme del tipo $\mathbb{Q} \setminus \{q_n\} = A_n$ è denso in $\mathbb{Q}$ ma l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$.

Dimostrazione.

Lemma 9.28 ("Palla mobile")**.** *Sia (X, d) uno spazio completo. Siano $D(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ e $D^C(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$. Allora ogni D è aperto perché controimmagine di aperto e ogni D^C è chiuso perché controimmagine di chiuso. Inoltre chiaramente $D^C(x, \frac{r}{2}) \subseteq D(x, r) \subseteq D^C(x, r)$. Supponiamo quindi di avere una successione di $x_i \in X$, $r_i \in \mathbb{R}_{>0}$, con $r_i < r_{i-1}$ e $r_i \to 0$. Inoltre supponiamo che $D^C(x_n, r_n) \subseteq D(x_{n-1}, r_{n-1})$ e denotiamo $D_n := D(x_n, r_n)$ e $D_n^C := D^C(x_n, r_n)$.*

$$\implies \bigcap D_i = \{y\}, \text{ con } x_i \to y \in X$$

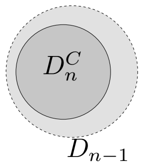

Figura 4: palla mobile

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che x_n è di Cauchy. Infatti poiché $r_n \to 0$ per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ esiste un $\overline{n}$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora $0 < r_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Ma allora presi $n, m > \overline{n}$ abbiamo che $x_n, x_m \in D_{\overline{n}}$ ma allora $d(x_n, x_m) < d(x_n, x_{\overline{n}}) + d(x_m, x_{\overline{n}}) < \varepsilon$. Quindi x_n è di Cauchy e per la completezza dello spazio X è convergente.

Allora $x_n \to y$. Inoltre $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n^C$, poiché ogni D^C è completo e da un punto in poi ogni termine di x_n è contenuto in ogni D_n^C. Però per definizione dei D e D^C e della successione abbiamo che $D_n \subseteq D_n^C \subseteq D_{n-1}$ da cui $\bigcap D_n = \bigcap D_n^C$ □

Supponiamo di avere A_1 e A_2 densi aperti in X. Allora $A_1 \cap A_2$ è aperto denso. Infatti se U è aperto in X allora $A_1 \cap U \neq \varnothing$ è aperto allora $A_2 \cap (A_1 \cap U) \neq \varnothing$ da cui la tesi per associatività dell'intersezione (notare che non abbiamo usato che A_2 è aperto, quindi tecnicamente basterebbe che A_2 sia solo denso). Per induzione otteniamo che anche $B_n = A_1 \cap \dots A_n$ è denso aperto se ogni A_i è aperto denso. Infatti se sappiamo che B_{n-1} è denso aperto allora $B_n = B_{n-1} \cap A_n$ che quindi è denso aperto.

Sia ora una successione di aperti densi $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e siano $B_i = \bigcap_{i=1\dots n} A_n$. Quindi abbbiamo che $B_i \supseteq B_{i+1}$ per ogni naturale i. Allora

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Poiché ogni B_i è intersezione di A_i. Ora vogliamo mostrare che D è denso.

A questo scopo sia $x_1 \in B_1 \cap U \neq \varnothing$ che esiste per la densità di B_1. Sia ora $D_1^C = D^C(x_1, r_1) \subseteq B_1 \cap U$ che si può fare perché $B_1 \cap U$ è aperto; e inoltre sia $0 < r_1 < 1$ Sia ora $\varnothing \neq D_1 \cap B_2$ che è aperto di X. Quindi ora sia $D_2^C = D^C(x_2, r_2) \subseteq D_1 \cap B_2 \subseteq D_1 \cap B_1 \subseteq U$ e sia $r_2 < \frac{1}{2}$. Continuando in questo modo fino a x_n in modo che ogni $r_{i+1} < r_i < \frac{1}{i}$ e $D_i^C = D^C(x_i, r_i) \subseteq D_{i-1} \cap B_i$. Per procedere sia l'aperto $D_n \cap B_{n+1} \neq \varnothing$, quindi sia $x_{n+1} \in D_n \cap B_{n+1}$ e poiché è aperto allora esiste un $r_{n+1} < r_n$ e $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ tale che $D_{n+1}^C = D^C(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq D_n \cap B_{n+1}$. A questo punto abbiamo una famiglia di dischi D_n che soddisfa le ipotesi del lemma della palla mobile, quindi esiste un $y \in \bigcap D_n \subseteq U$ ma anche $y \in \bigcap D_n \subseteq \bigcap B_n$ da cui $y \in U \cap \bigcap B_n$ □

Esempio 9.10. Sia K un compatto e (X, d) uno spazio metrico. Sia $\mathcal{C}(K, X) = \{f : K \to X \text{ continue }\}$.

Date $f, g \in \mathcal{C}(K, X)$ sia $\delta(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) = \max_{x \in K} d(f(x), g(x))$. Mostriamo che $(\mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathcal{X}), \delta)$ è uno spazio metrico.

$$K \stackrel{F=(f,g)}{\longrightarrow} X \times X \stackrel{d}{\to} \mathbb{R}$$

$$x \stackrel{F}{\mapsto} (f(x), g(x)) \stackrel{d}{\mapsto} d(f(x), g(x))$$

Ha un massimo perché è immagine continua del compatto K. Mostriamo che è una metrica:

- $\delta(f, g) \geq 0$ vero perché sup di distanze
- $\delta(f, g) = 0 \iff f(x) = g(x) \forall x \in K$
- $\delta(f, g) = \delta(g, f)$ è un estremo superiore sullo stesso insieme di valori reali perché ogni elemento del sup ha la proprietà simmetrica
- Disuguaglianza triangolare. Siano $f, g, h : K \to X$ continue. Allora $\delta(f, g) = d(f(\overline{x}), g(\overline{x})) \leq d(f\overline{x}, h\overline{x}) + d(h\overline{x}, g\overline{x}) \leq \delta(f, h) + \delta(h, g)$ perché ovviamente preso un qualsiasi $x \in K$, $d(fx, hx) \leq \sup_{x \in K} d(fx, hx) = \delta(f, h)$