Appunti di Geometria Affine e (non) Proiettiva

Osea

2023 - 2024 Secondo Semestre

Testo di riferimento: E. Sernesi, Geometria 1

Indice

1 Spazi Affini

1.1 Definizioni

Definizione 1.1: Spazio Affine 1

Sia $\mathbb{K}$ un campo (genericamente $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) e sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto A munito di un'operazione $\Phi : V \times A \to A$ (che denoteremo come $\Phi(v, P) := P + v$) tale che valgano le seguenti proprietà:

1) $\forall P \in A, \forall v, w \in V \quad (P + v) + w = P + (v + w)$
Equivalentemente $\Phi(w, \Phi(v, P)) = \Phi(v + w, P)$
(Buon comportamento della somma)

2) $\forall P \in A$ la funzione $\Phi(\cdot, P) := P + \cdot$ è biettiva e similmente
$\forall v \in V$ la funzione $\Phi(v, \cdot) := \cdot + v$ è biettiva

Definizione 1.2

La **dimensione** di A spazio affine su V spazio vettoriale è definita $\dim A =$

$\dim V$

Osservazione. Se A è uno spazio vettoriale su V spazio vettoriale allora: $\forall P \in A, P + O_V = P$ dove O_V è il vettore nullo di V.

Dimostrazione. $P+O_V = P+(O_V+O_V) = (P+O_V)+O_V$. Dato per la definizione $\Phi(O_V, \cdot)$ è biunivoca, quindi $P = P + O_V$ □

Osservazione. Se $P + v = Q$ allora $Q + (-v) = P$

Dimostrazione. $Q + (-v) = (P + v) + (-v) = P + (v + (-v)) = P + O_V = P$ □

Questa tuttavia non è l'unica definizione di spazio affine. Infatti per quanto detto prima scelti due punti sul piano so che c'è un unico vettore la cui traslazione manda un punto nell'altro. Una maniera equivalente è quella di vedere lo spazio affine come insieme su cui è definita una differenza il cui codominio è uno spazio vettoriale. Formalmente:

Definizione 1.3: Spazio Affine 2

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto A munito di un'operazione di "differenza" $\Psi : A \times A \to V$, che indicheremo con: $\Psi(P, Q) =: Q - P =: \overline{PQ}$ con le seguenti proprietà:

1) $\forall P, Q, R \in A, \overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$

2) $\forall P \in A$ fissato, l'applicazione $\Psi(P, \cdot)$ è biettiva.

Nota. Le due definizioni di spazio affine che abbiamo dato sono equivalenti, data $\Phi : V \times A \to A$ che verifica gli assiomi della prima definizione definiamo $\Psi : A \times A \to V$ come $\Psi(P, Q) = v$ dove v è l'unico vettore di V tale che $\Phi(v, P) = Q$, che esiste unico per la bigettività di $\Phi(\cdot, P)$.

Viceversa data l'operazione di differenza Ψ che verifica gli assiomi della seconda definizione definiamo $\Phi : V \times A -> A$ come $\Phi(v, P) = Q$ dove Q è l'unico punto di A tale che $\Psi(P, Q) = v$, che esiste unico per la bigettività di $\Psi(P, \cdot)$.

Definendo in questo modo otteniamo $Q = \Phi(v, P) = P + v \iff v = \Psi(P, Q) = Q - P$

Dimostrazione. Le proprietà delle definizioni sono rispettate in entrambi i casi: □

Osservazione. $\forall P \in A$ si ha che $P - P = \overline{PP} = O_V$

Osservazione. $\forall P, Q, \quad Q - P = \overline{PQ} = -\overline{QP} = -(P - Q)$

Dimostrazione. Usando la Nota □

Osservazione. Dati $P_1, P_2, \ldots, P_n$ punti di A si ha che $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n} + \overline{P_nP_1} = O_V$

Dimostrazione. Usando la proprietà nella definizione fino a ottenere $\overline{P_1P_1}$, poi l'osservazione. □

Esempio 1.1. $\mathbb{E}^n$ è uno spazio affine su T^n traslazioni di $\mathbb{E}^n$

Esempio 1.2. Ogni spazio vettoriale V è uno spazio affine su sé stesso. Posto $A = V$ definisco $\Phi : V \times V \to V$ come $\Phi(v, w) = v + w$ o equivalentemente $\Psi(v, w) = w - v$. Vediamo che V è uno spazio affine associato a V. Le proprietà sono facilmente verificate.

Viceversa dato A spazio affine su V, fissando un punto O in A che chiameremo **origine** ottengo una corrispondenza biunivoca $\Psi_0 : A \to V$ definita come $\Psi_0(P) = \Psi(O, P) = \overline{OP}$. **Questa corrispondenza Φ_0 preserva le operazioni che rendono A e V spazi affini** sullo spazio vettoriale V.

Quindi informalmente possiamo "vedere" uno spazio affine come uno spazio vettoriale senza un'origine fissata.

1.2 Sottospazi Affini

Definizione 1.4: Sottospazio Affine 1

Dato uno spazio affine (A, V, Φ), un **sottospazio affine** di A è il dato

$$(B, W, \Phi_B)$$

dove

1) $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V
2) $\varnothing \neq B \subseteq A$
3) $\Phi(W \times B) \subseteq B$ e la restrizione Φ_B di Φ a $W \times B$ rende B uno spazio affine sullo spazio vettoriale W

Lo spazio vettoriale W si dice **giacitura** del sottospazio affine B

Esempio 1.3. Fissato un punto P in $\mathbb{E}^2$, prendo come W il sottospazio di T dato dalle trasformazioni che hanno una stessa direzione fissata (essenzialmente una retta) è un sottospazio affine

Esempio 1.4. Prese due rette parallele in $\mathbb{E}^2$ è un sottoinsieme ma **non** un sottospazio affine (manca la suriettività scelto un punto fissato).

Definizione 1.5

Sia (A, V) uno spazio affine. Possiamo specificare un sottospazio affine specificando un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ e preso un punto $P \in A$, definendo il sottospazio affine di A passante per P con giacitura W

$$P + W := \{P + w : w \in W\}$$

$P + W$ è un sottospazio affine su W . 1) Chiaramente $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale

2) Chiaramente $\varnothing \neq \{P\} \subseteq P + W \subseteq A$.

3) Sia $Q \in P + W$, quindi $Q = P + w$ per qualche $w \in W$. Sia ora $w_1 \in W$. $Q + w_1 = (P + w) + w_1 = P + (w + w_1) \in P + W$.

   Infine fissiamo un punto $Q \in P + W$ e dobbiamo dimostrare che $w_1 \mapsto Q + w_1$ con $w_1 \in W$ è una bigezione: è suriettiva perché preso un qualsiasi punto $P' \in$

$P+W, P' = P+w_2$, $w_2 \in W$. Cerco un vettore w_1 tale che $Q+w_1 = P = w_2$, ma $Q = P+w$ quindi $P+w_2 = P+w+w_1$ quindi basta prendere $w_1 = w_2 - w$. Per l'iniettività supponiamo $w_1, w_2 \in W$ tali che $Q + w_1 = Q + w_2$ ma allora per l'iniettività della funzione sullo spazio originario $w_1 = w_2$.

□

Tutti i sottospazi affini della forma $P + W$. Se (A, V) spazio affine, (B, W) sottospazio affine e $P \in B$

- $\supseteq$ $P + Q \subseteq B$ ovvio perché B è sottospazio
- $\subseteq$ Sia $Q \in B$, allora $\overline{PQ} \in W$, quindi $Q = P+\overline{PQ} = P+(Q-P) \implies Q \in P+W$

□

Sia ora (A, V) uno spazio affine e (B, W) un sottospazio, $v \in V$. Consideriamo l'insieme $B + v = \{P + v : P \in B\}$

Proposizione 1.6. *Per ogni sottospazio B, W e per ogni $v \in V$, $B + v$ è un sottospazio affine*

Dimostrazione. $B = P + W$ con $P \in B$. Allora $B + v = \{Q + v : Q \in B\} = \{P + w + v : w \in W\} = \{P + v : v \in W\} = P + W$ perché anche $w + v \in W$ □

Osservazione. 1) $B = B + v \iff v \in W$

2) Se B' è sottospazio associato a W allora $\exists v \in V$ tale che $B' = B + v$
Sia $P \in B, Q \in B', v = Q-P = \overline{PQ}$ allora $B+v = (P+v)+W = Q+W = B'$

Proposizione 1.7. *Due sottospazi B e B' con la stessa giacitura coincidono se e solo se hanno intersezione non vuota.*

Dimostrazione. $B = B' \iff B \cap B' \neq \varnothing$

- $\implies$ Ovvio
- $\impliedby$ Sia $P \in B \cap B'$. Allora $P + W = B$ perché $P \in B$ e W è la giacitura di B ma anche $P + W = B'$ perché $P \in B'$ e W è la giacitura di B'

□

Proposizione 1.8. *Fissato $(B, W) \subseteq (A, V)$ sottospazio, i sottospazi di (A, V) con giacitura W sono in corrispondenza biunivoca con lo spazio vettoriale V/W*

Se (A, V) è uno spazio affine di dimensione $\dim A = \dim V = n$ allora si dicono:

- **Punti**: sottospazi affini di dimensione 0
- **Rette**: sottospazi affini di dimensione 1
- **Piani**: sottospazi affini di dimensione 2
- **Iperpiani**: sottospazi affini di dimensione n-1

Definizione 1.9: Coordinate Affini

Sia A uno spazio affine su V tale che $\dim A = \dim V = n < +\infty$. Dati un punto $O \in A$ (origine) e una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio vettoriale V

definiamo le **coordinate affini**.

$$X_{O,\mathcal{B}} : A \to \mathbb{K}^n \quad Q \mapsto (x_1(Q), \dots, x_n(Q)) \in \mathbb{K}^n \iff Q = O + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

In sostanza le coordinate affini $X_{O,\mathcal{B}}(Q)$ sono le coordinate del vettore $Q - O \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Questo "marchingegno" ci consente di definire insiemi di punti indipendenti.

Definizione 1.10

Sia (A, V) uno spazio affine. Dati $k+1$ punti in A, $(P_0, \dots, P_{k+1})$ questi si dicono indipendenti se i k vettori $v_i = \overline{P_0 P_i}$ sono linearmente indipendenti.

Se $\dim A = n$ allora dati $n+1$ punti indipendenti otteniamo un sistema di coordinate affini prendendo uno dei punti come origine e i vettori delle differenze tra gli altri e l'origine come base. Ovviamente il punto origine avrà coordinate tutti zeri, e gli altri punti scelti per costruzione della base sono con coordinate come quelle della base canonica. Tuttavia per poter decidere così arbitrariamente è necessario che:

Osservazione. L'essere indipendenti non dipende dall'ordine.

Dimostrazione. Se tengo fermo l'origine e scambio gli altri vettori la nuova lista di vettori è ancora linearmente indipendente, essendo una permutazione della vecchia.

Supponiamo di scegliere una nuova lista da $(P_0, \dots, P_n)$, quindi origine P_0 e base $v_i = P_i - P_0$ a $(P_n, P_0, \dots, P_{n-1})$ a questo punto prendendo P_n come origine e gli altri in ordine ottengo i vettori $w_i = P_{i-1} - P_n$. A questo punto:

$$\begin{aligned} w_1 &= P_0 - P_n = -(P_n - P_0) = -v_n \\ w_i &= P_{i-1} - P_n = P_{i-1} - (P_0 + v_n) = v_{i-1} - v_n \qquad \forall i \in \{2, \dots, n\} \end{aligned}$$

La matrice che rappresenta l'operatore lineare $v_i \mapsto w_i$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_i\}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Che ha determinante diverso da 0 ed è quindi invertibile □

Definizione 1.11: Prodotto di spazi affini

Dati due spazi affini (A, V, Φ) e (A', V', Φ'), dove V e V' sono spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Definiamo il prodotto dei due spazi affini

$$(A \times A', V \times V', \Phi \times \Phi')$$

Dove

$$(\Phi \times \Phi') : (V \times V') \times (A \times A') \to A \times A'$$
$$((v, v'), (P, P')) \mapsto (\Phi(v, P), \Phi(v', P')) = (P + v, P' + v')$$

Il prodotto è uno spazio affine. Chiaramente $A \times A'$ è non vuoto in quanto prodotto di insiemi non vuoti. Procediamo verificando le proprietà dell'operazione $\Phi \times \Phi'$

1) $\forall (P,P') \in (A \times A'),\ \forall (v,v'),(w,w') \in (V \times V'),\ \ ((P,P')+(v,v'))+(w,w') = (P+v,P'+v')+(w,w') = (P+v+w,P'+v'+w') = (P,P')+(v+w,v'+w') = (P,P') + ((v,v')+(w,w'))$

2) Fissato $(P,P') \in (A \times A')$, l'operazione $(v,v') \mapsto (P+v,P'+v')$ è biettiva, perché sia $v \mapsto P+v$ che $v' \mapsto P'+v'$ sono biettive.

   Similmente fissato $(v,v') \in (V \times V')$, l'operazione $(P,P') \mapsto (P+v,P'+v')$ è biettiva, perché sia $P \mapsto P+v$ che $P' \mapsto P'+v'$ sono biettive.

□

Esempio 1.5. $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^m = \mathbb{E}^{n+m}$

1.3 Intersezione

Supponiamo di avere uno spazio (A,V) affine e due sottospazi affini di A: (B,W) e (B',W'). L'intersezione di B e B' è un sottospazio affine di A (se è non vuota) con giacitura $W \cap W'$.

Dimostrazione. Supponiamo $P \in B \cap B'$. Ci basta dimostrare che vale la seguente:

$$B \cap B' = P + (W \cap W')$$

Dove $W \cap W'$ è ovviamente un sottospazio vettoriale di V

- $\subseteq$ Sia $Q \in B \cap B'$ allora $Q - P \in W \cap W'$ perché appartiene sia alla giacitura di B che alla giacitura di B', quindi $Q = P + (Q-P) \in P = (W \cap W')$
- $\supseteq$ Sia $v \in W \cap W'$. Ovviamente $P+v \in B$ perché $P \in B, v \in W$ ma anche $P + v \in B'$ perché $P \in B', v \in W'$ quindi $P + v \in B \cap B'$

□

Osservazione. Quanto visto precedentemente per intersezione di due sottoinsiemi vale anche per intersezione arbitraria (anche infinita).

In altre parole data una famiglia $\{B_i\}_{i \in I}$ di sottospazi di A spazio affine, $\bigcap_{i \in I} B_i$ è un sottospazio affine la cui giacitura è data dall'intersezione delle giaciture dei sottospazi.

Definizione 1.12: Spazio generato

Sia (A,V) uno spazio affine. Sia $S \subseteq A$ un sottoinsieme. Definiamo lo **spazio affine generato** da S, indicato con $< S >$, il più piccolo sottospazio affine contenente S, ossia l'intersezione di tutti i sottospazi affini di A contenenti S:

$$< S > = \bigcap \{C \subseteq A \text{ sottospazio affine } : S \subseteq C\}$$

Esempio 1.6. $S = \{P_0, \ldots, P_n\}$. è un insieme costituito da $n+1$ punti di A.

Poniamo $v_i = P_i - P_0 = \overline{P_0 P_i}$, $i = 1 \ldots n$. Poniamo $W = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora $< S > = P_0 + W$

- $\subseteq$ Contiene certamente S, perché contiene ovviamente P_0, e ogni punto $P_i = P_0 + v_i$, quindi $< S > \subseteq P_0 + W$
- $\supseteq$ $< S > \ni P_0$. Inoltre la giacitura di $< S >$ contiene W, perché $< S >$ contiene tutti i punti di S, quindi $< S > \supseteq P_0 + W$

Quindi scritto in altro modo

$$< S >= \{P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{P_0 p_i} : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Esempio 1.7. Se (B, W) e (B', W') sono sottospazi affini di (A, V) allora scelto un qualsiasi punto $P \in B \cup B'$ si ha che

$$P + (W + W') \subseteq < B \cup B' >$$

Inoltre se $P \in B \cap B'$, allora

$$< B \cup B' >= P + (W + W')$$

Dimostrazione. Sia $C \subseteq A$ un sottospazio affine di A tale che $C \supseteq B \cup B'$. Allora $P \in C$, inoltre la giacitura di C contiene $W + W' \implies P + (W + W') \subseteq C$, quindi $P + (W + W') \subseteq < B \cup B' >$.

Sia ora $P \in B \cap B'$. Allora $B = P + W \subseteq P + (W + W')$. Similmente $B' = P + W' \subseteq P + (W + W')$ di conseguenza $B \cup B' \subseteq P + (W + W')$ da cui segue (perché il RHS è uno sottospazio affine) che $< B \cup B' > \subseteq P + (W + W')$ $\square$

Proposizione 1.13. *Sia (A, V) uno spazio affine. Siano (B, W) e (B', W') sottospazi affini tali che $B \cap B' = \varnothing$. Sia $P \in B$ e $Q \in B'$. Allora $\overline{PP'} \notin W + W'$ (Pensare a rette sghembe come esempio)*

Dimostrazione. Poniamo $v = \overline{PP'} \in V$ e supponiamo per assurdo che $v = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W$. Adesso consideriamo $R = P + w \in B$. Ma anche $R = P + w = P + (v - w') = (P + v) - w' = P' - w' \in B'$ che è assurdo perché $B \cap B' = \varnothing$ $\square$

Teorema 1.14: Grassman per spazi affini

Sia (A, V) uno spazio affine. Siano (B, W) e (B', W') sottospazi affini.

1) Se $B \cap B' \neq \varnothing$ allora

$$\dim(< B \cup B' >) = \dim(B) + \dim(B') - \dim(B \cap B')$$

2) (Grassman Sghembo) se $B \cap B' = \varnothing$

$$\dim(\langle B \cup B' \rangle) = \dim(B) + \dim(B') - \dim(W \cap W') + 1$$

Dimostrazione.

1) Sia $P \in B \cap B'$, $B = P + W$, $B' = P + W'$ Allora $B \cap B' = P + (W \cap W')$ e per la proposizione 1.13 $< B \cup B' > +P + (W + W')$. Infine

$$\begin{aligned} \dim(< B \cup B' >) &= \dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') \\ &= \dim(B) + \dim(B') - \dim(B \cap B') \end{aligned}$$

2) Fisso $P \in B$, $P' \in B'$ e $C =< B \cup \{P'\} >$. Posto $v = \overline{PP'}$ e la giacitura di C è $W \oplus < v >$. Quindi $\dim C = \dim W + 1$.

   A questo punto la giacitura di $C \cap B'$ è $W \oplus < v > \cap W' = Z$. Sia $z \in Z$, allora $z = w + \lambda v = w'$, dove $w \in W, w' \in W', \lambda \in R$. Quindi $\lambda v = w' - w \in W + W'$. Ma poiché, per la proposizione 1.13 $v \notin W + W'$, allora $\lambda = 0$. Ma allora $z \in W \cap W'$. Poiché ovviamente $W \cap W' \in Z \implies Z = W \cap W'$.

   Infine:

$$\dim(< B \cap B' >) = \dim(C \cup B') = \dim B + 1 + \dim(B') - \dim(W \cap W')$$

□

Definizione 1.15: Combinazione convessa

Sia (A, V) uno spazio affine e $P_1, \dots, P_n$ punti di A. Allora prendiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tali che $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, e fissiamo $O \in A$.

Allora la combinazione convessa di $P_1, \dots, P_n$ a coefficienti λ_i, per $i \in \{1, \dots, n\}$ è il punto

$$Q(P_i, \lambda_i) = O + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{OP_i} \in A$$

Osservazione. $Q(P, \lambda_i)$ non dipende dalla scelta di $O \in A$.

Infatti se $O' \in A$ e $Q'(P_i, \lambda_i) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{O'P_i}$, sapendo che $\overline{OP_i} = \overline{OO'} + \overline{O'P_i}$ otteniamo:

$$Q'(P, \lambda_i) = O + \overline{OO'} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overline{O'O} + \overline{OP_i})$$

spezzando la sommatoria e raccogliendo i λ_i

$$Q'(P_i, \lambda_i) = O + \overline{OO'} + \overline{O'O} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{OP_i} = Q(P_i, \lambda_i)$$

La conseguenza è che posso scrivere senza ambiguità

$$Q = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Osservazione.

$$< P_1, \dots, P_n >= P_1 + \sum_{i=2}^{n} \overline{\lambda_i P_1 P_n}$$

Adesso introduco il coefficiente $\lambda_1 = 1 - \sum_{i=2}^n \lambda_i$.

$$\text{Sia } Q = P_1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \overline{P_1 P_i}$$

Che è una combinazione convessa, quindi

$$< P_1, \dots, P_n >= \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

Definizione 1.16

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $P_1, \dots, P_n \in A$ definiamo l'inviluppo convesso di $P_1, \dots, P_n$ come

$$C(P_1, \dots, P_n) = \{Q \in A : Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \ \forall i \in 1 \dots n\}$$

2 Funzioni Affini

Definizione 2.1: Funzione Affine

Siano (A, V) e (A', V') spazi affini sullo stesso campo. Una funzione $F : A \to A'$ si dice **affine** se esiste un'applicazione lineare $f : V \to V'$ tale che

$$\forall P \in A,\ \forall v \in V,\ F(P + v) = F(P) + f(v)$$

Ossia la somma di A viene mandata nella somma di A'. L'applicazione f è detta associata a F.

Equivalentemente un'applicazione $F : A \to A'$ è affine se esiste una $f : V \to V'$ tale che

$$\forall P, Q \in A,\ F(Q) = F(P) + f(\overline{PQ})$$

Osservazione. La seconda definizione vale per ogni coppia di punti $P, Q \in A$ se e solo se vale per ogni punto fissato $O \in A$ e ogni altro punto $P \in A$.

Infatti se vale la seconda (l'altra implicazione è ovvia) allora $F(Q) = F(O) + f(\overline{OQ}) = F(0) + f(\overline{OP} + \overline{PQ}) = F(O) + f(\overline{OP}) + f(\overline{PQ}) = F(P) + f(\overline{PQ})$

Esempio 2.1 ($A = V, A' = V'$ **).** Prendo $O_V \in A$ il vettore nullo di A e ponendo $F(O_V) = a' \in V'$ allora $F(v) = F(O_V) = f(v) = a' + f(v)$, con $v \in V$. Questo ci dice che nel caso particolare dello spazio affine che è uno spazio vettoriale, una funzione affine è una composizione della funzione lineare $f : V \to V'$ con la traslazione $v \mapsto v + a'$.

Se abbiamo invece spazi affini di dimensione finita fissiamo due sistemi di coordinate su A e A', ossia $O, v_1, \ldots, v_n$ di A e $O', v'_1, \ldots v'_m$ di A'. Il tali coordinate F è rappresentata da una coppia (M, y_0), dove M è una matrice $m \times n$ (la matrice associata alla funzione lineare f rispetto alle base $\{v_i\}_{i \in \{1 \ldots n\}}$ e $\{v'_i\}_{i \in \{1 \ldots m\}}$) e $y_0 \in \mathbb{K}^m$ è il vettore delle coordinate di $F(O)$. Quindi se $\mathbf{x}_P \in \mathbb{K}^n$ è il vettore delle coordinate di $P \in A$, le coordinate di $F(P) \in A'$ saranno $M\mathbf{x}_P + y_0$

Proposizione 2.2. *Siano (A, V) e (A', V') spazi affini con $\dim A = n \in \mathbb{N}$. Siano $P_0, \ldots, P_n$ punti linearmente indipendenti e fissiamo $Q_0, \ldots, Q_n$ di A'. Allora esiste un'unica applicazione affine $F : A \to A'$ tale che $F(P_i) = Q_i\ \forall i \in \{0 \ldots n\}$*

Dimostrazione. Poniamo $v_i = \overline{P_0P_i} \in V\ \forall i \in \{1 \ldots n\}$. Allora $\mathcal{B} = \{v_i\}$ è una base di V. Similmente poniamo $w_i = \overline{Q_0Q_i} \in V'$. Ora sappiamo che esiste unica un'applicazione $f : V \to V'$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni i. Poniamo ora per ogni $P \in A$ $F(P) = F(P_0) + f(\overline{P_0P}) = Q_0 + f(\overline{P_0P})$, dove $\overline{P_0P} \in V$ □

Proposizione 2.3. *Siano $(A, V), (A', V'), (A'', V'')$ spazi affini e siano $F : A \to A'$ e $G : A' \to A''$ mappe affini associate rispettivamente a $f : V \to V'$ e $g : V' \to V''$. Allora:*

1. *$G \circ F : A \to A''$ è mappa affine associata a $g \circ f : V \to V''$*
2. *L'identità $\mathrm{id} : A \to A$ è una mappa affine associata a $\mathrm{id} : V \to V$ l'identità.*
3. *Le mappe costanti $C_a : A \to A'; P \mapsto a$ sono mappe affini associate alla mappa nulla $0 : V \to V'; v \mapsto O_{V'}$*
4. *F è bigettiva $\iff$ $f : V \to V'$ è bigettiva. In tal caso l'inversa di $F, F^{-1} : A' \to A$ è affine associata a $f^{-1} : V' \to V$*
5. *Sia $F : A \to A$ affine. Allora l'insieme dei punti fissi di F, se non vuoto, è un sottospazio affine di A*

6. *Fissato un punto $P \in A$ e un punto $P' \in A'$ allora la funzione $f \mapsto F$ dove $F(x) = P' + f(\overline{PX})$ definisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle applicazioni lineari da V a V' e le applicazioni affini da A ad A' tali che $F(P) = P'$*

Dimostrazione. Molte sono ovvie, cominciamo a dimostrare la 5, le altre sono lasciate per esercizio.

5. Sia $P \in A$ tale che $F(P) = P$. Allora $\text{Fix}(F) = P + V_1$, dove $V_1 = \{v \in V : f(v) = v\}$

$\square$

Proposizione 2.4. *Supponiamo che $\mathbb{K}$ abbia caratteristica diversa da 2. Siano A, A' spazi affini. Una funzione $F : A \to A'$ è affine se e solo se per ogni collezione di k punti di A $\{P_1, \dots, P_k\}$ e per ogni combinazione convessa $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ si ha che $F(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F(P_i)$.*

Proposizione 2.5. *Sia $F : A \to A'$ affine con applicazione lineare associata $f : V \to V'$ e siano $(B, W) \subseteq (A, V)$ e $(B', W') \subseteq (A', V')$ sottospazi affini. Allora*

1. *$F(B)$ è sottospazio affine di A' con giacitura $f(W) \subseteq V'$*
2. *Se $F^{-1}(B')$ è non vuota, con $B' \subseteq A'$ un sottospazio, allora $F^{-1}(B')$ è un sottospazio affine di A con giacitura $f^{-1}(W')$*
3. *Se $P \in A$ e $Q = F(P)$ allora $F^{-1}(Q)$ è uno spazio affine con giacitura* $\ker f$
4. *Se* $\dim A < +\infty$ *allora* $\dim A = \dim F(A) + \dim \ker f$

Dimostrazione.

1. Sia $P \in B$, $B = P + W$, allora $F(B) = F(P) + f(W)$
2. Essendo la controimmagine non vuota, sia $P \in A$ tale che $F(P) \in B'$. A questo punto $B' = F(P) + W'$. A questo punto $F^{-1}(B') = P + f^{-1}(W')$
3. Caso particolare del punto 2.

$\square$

Osservazione (Caso part. 3). Sia $f : V \to V'$ lineare e $v' \in V'$. Se non vuoto, l'insieme S delle soluzioni del problema lineare $S = f^{-1}(v')$ è un sottospazio affine di V con giacitura data da $\ker f$.

2.1 Equazioni

Sia (A, V) uno spazio affine, dove V è $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Indichiamo con E l'insieme delle applicazioni affini $\lambda : A \to \mathbb{K}$. Allora E è uno spazio vettoriale, con le operazioni

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 \ ; \ (\lambda_1 + lkj_2)(P) = \lambda_1(P) + \lambda_2(P)$$
$$\alpha \in \mathbb{K}, \ (\alpha, \lambda) \mapsto \alpha \cdot \lambda \ ; \ (\alpha\lambda)(P) = \alpha \cdot \lambda(P)$$

inoltre $\dim E = n + 1$

Dato $B \subseteq A$ sottospazio, un'equazione affine per B è un'applicazione affine $\lambda : A \to \mathbb{K}$ tale che $\lambda(B) = \{0\}$

$$E(B) = \{(\lambda : A \to \mathbb{K}) : \lambda(P) = 0 \ \forall P \in B\} \subseteq E$$

Che è un sottospazio vettoriale di E, detto spazio delle equazioni per B

Viceversa, se io considero $E' \subseteq E$ un sottospazio, poniamo

$$Z(E') = \{P \in A : \lambda(P) = 0 \ \forall \lambda \in E'\}$$

è un sottospazio affine di A, perché intersezione di sottospazi affini di A, uno per ogni funzione di E'.

Proposizione 2.6. *Supponiamo che* $\dim A = n < +\infty$. *Allora per ogni sottospazio* $B \subseteq A$ *si ha che*

$$Z(E(B)) = B$$

ovvero le equazioni di B determinano B

Dimostrazione.

- $\supseteq$ Ovvio per costruzione.
- $\subseteq$ Supponiamo che $A \ni Q \notin B$, costruiamo $\lambda : A \to \mathbb{K}$ tale che $\lambda(P) = 0 \ \forall P \in B$ e tale che $\lambda(Q) \neq 0$. Supponiamo che $\dim(B) = k$ e prendiamo $k+1$ punti indipendenti in B, $P_0, \dots, P_k$. Poiché $Q \notin B$, $P_0, \dots, P_k, Q$ sono $k+2$ punti linearmente indipendenti. Poi prendo una lista $P_0, \dots, P_k, Q, S_1, \dots, S_{s-k-1}$. Definisco quindi $\lambda : A \to \mathbb{K}$ in modo che $\lambda(Q) = 0 \ \forall i = 0, \dots, k$, $\lambda(Q) = 1$ e per il resto non è importante ma diciamo $\lambda(S_j) = 0 \ \forall j = 1, \dots, n-k-1$. Ma allora $\lambda(P) = 0 \ \forall P \in B$ ma $\lambda(Q) = 1 \neq 0$

□

Sia A uno spazio affine di dimensione 2 su $\mathbb{K}$ di almeno tre elementi (es. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Ricordiamo che le rette sono sottospazi affini di A di dimensione 1. Due rette $\ell, \ell' \subseteq A$ si dicono **parallele** se hanno la stessa giacitura ($\ell // \ell'$). Dati $P, Q \in A$ con $P \neq Q$ indichiamo con $\overline{PQ}$ l'unica retta passante per P e Q

Teorema 2.7: Teorema di Talete

Siano H, H', H'' tre rette parallele distinte in A, siano ℓ_1 e ℓ_2 due rette non parallele alle precedenti. Posti $P_i = H \cap \ell_i$, $P_i' = H' \cap \ell_i$, $P_i'' = H'' \cap \ell_i$, con $i = 1, 2$. Siano $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ t.c. $\overline{P_1P_1'} = k_1\overline{P_1P_1''}$ e $\overline{P_2P_2'} = k_2\overline{P_2P_2''}$.
Allora $k_1 = k_2$

Dimostrazione. Ci vogliamo ricondurre al caso in cui $P_1 = P_2 = P$. Se $P_1' = P_2'$ oppure $P_1'' = P_2''$ posso "Scambiare" H, H', H'' e ci riconduciamo al caso $P_1 = P_2$. Altrimenti se $P_1 \neq P_2$ considero $\ell_3 = \overline{P_1P_2}$. Se Talete vale per ℓ_1, ℓ_3 e vale per ℓ_2, ℓ_3 allora vale per ℓ_1, ℓ_3. Inoltre per ℓ_1, ℓ_3 e ℓ_2, ℓ_3 verificano l'ipotesi $P_1 = P_2$

Ora procediamo con la dimostrazione. Per ipotesi $\overline{PP_1''} = k_1\overline{PP_1'}$ e $\overline{PP_2''} = k_2\overline{PP_2'}$. Inoltre $\overline{P_1'P_2'} = \overline{PP_2'} - \overline{PP_1'}$ e $\overline{P_1''P_2''} = \overline{PP_2''} - \overline{PP_1''} = k_2\overline{PP_2'} - k_1\overline{PP_1'}$. Poiché $H'' // H'$ segue che $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\overline{P_1''P_2''} = \alpha\overline{P_1'P_2'}$. Quindi $k\overline{PP_2'} - k_1\overline{PP_1'} = \alpha(\overline{PP_2'} - \overline{PP_1'})$, da cui

$$(k_2 - \alpha)\overline{PP_2'} + (\alpha - k_1)\overline{PP_1'} = \mathbf{0}$$

Ma ora poiché ℓ_1 e ℓ_2 non sono parallele, segue che PP_2' e PP_1' sono indipendenti, per cui $k_1 = \alpha$ e $k_2 = \alpha$ □

Teorema 2.8: Teorema di Pappo

Siano H e H' due rette distinte nel piano affine A. Siano $P, Q, R \in H$ e $P', Q', R' \in H'$ punti distinti non in comune tra H e H'. Se $\overline{PQ'} \| \overline{P'Q}$ e

$\overline{QR'} \| \overline{Q'R}$ allora $\overline{PR'} \| \overline{P'R}$

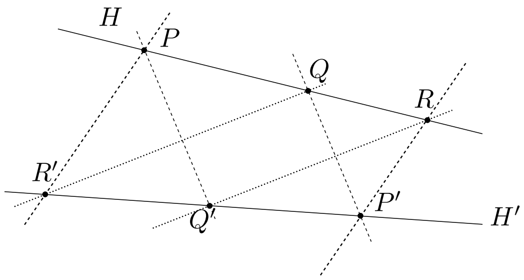

Figura 1: Pappo

Dimostrazione.

- Se $H \parallel H'$ allora $Q'R' = \alpha QR$ e $Q'R = \beta QR'$ per qualche $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Otteniamo

  $$RR = \mathbf{0} = RQ + QR' + R'Q' + Q'R = (\alpha + 1)RQ + (\beta + 1)QR'$$

  Che essendo indipendenti (per ipotesi H e H' sono distinte) otteniamo $Q'R' = -QR$ e $Q'R = -QR'$. Similmente si ottiene anche $PQ = -P'Q'$. Infine $RP' = \cancel{RQ + QP} + PR' + \cancel{R'Q' + Q'P'} = PR'$

- Se invece $O \in H \cap H'$ allora per talete

  $$\begin{aligned} OP &= kOQ & \qquad OQ &= \lambda OR \\ OQ' &= kOP' & \qquad OR' &= \lambda OQ' \end{aligned}$$

  Ora $PR' = PO + OR' = kQO + \lambda OQ' = k\lambda RO + \lambda kOP' = k\lambda RP'$

$\square$

Teorema 2.9: Teorema di Desargues affine

Siano A, B, C e A', B', C' due terne di punti non allineati del piano affine tali che $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$.

Allora le tre rette $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ sono parallele oppure hanno un punto in comune.

Dimostrazione. Supponiamo che le rette non siano parallele. A meno di rinominare le rette possiamo supporre che $\overline{AA'} \cap \overline{BB'} = \{O\}$. Mostriamo che $O \in \overline{CC'}$. Applicando Talete a $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ otteniamo $OA' = kOA$ e $OB' = kOB$. Ora poniamo $C'' = \overline{OC} \cap \overline{A'C'}$ e applichiamo talete a $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$, ottenendo $OC'' = kOC$. Ripetiamo il procedimento con $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ottenendo $OC''' = kOC$, dove $C''' = \overline{OC} \cap \overline{B'C'}$. Ma allora $C'' = C''' \in \overline{B'C'} \cap \overline{A'C'} = \{C'\}$ quindi $C' = C'' = C'''$, la retta $\overline{OC}$ passa per C' e i punti O, C, C' sono allineati. $\square$

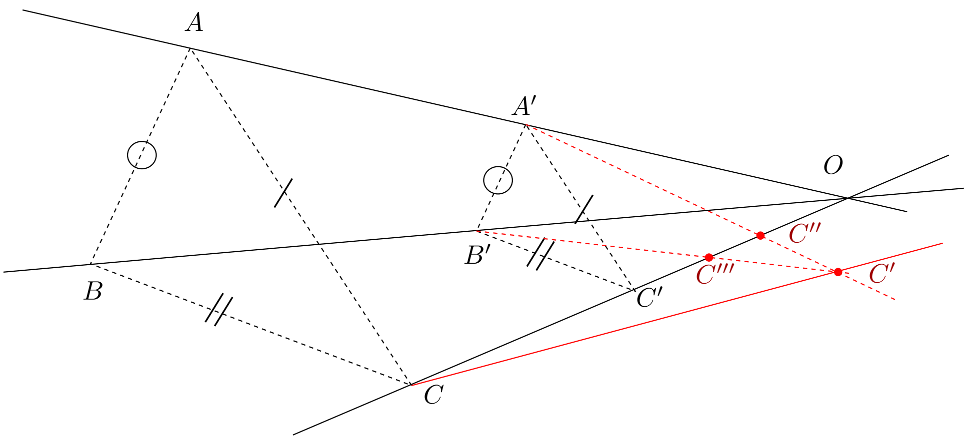

Figura 2: Teorema di Désargues, in rosso le costruzioni della dimostrazione

3 Assiomatizzazione del concetto di piano

Definiamo il piano grafico Π come un insieme i cui elementi sono detti **punti**, con dei sottoinsiemi non vuoti detti rette in modo che valgano i seguenti assiomi:

1. Π contiene almeno 4 punti a 3 a 3 non allineati.
2. $\forall P, Q \in \Pi,\ P \neq Q,\ \ \exists!$ retta $\overline{PQ} \ni P, Q$
3. Date due rette distinte ℓ, ℓ', o $\ell \cap \ell' = \varnothing$ (parallele), oppure $\ell \cap \ell' = \{P\}$ (incidenti)
4. Data una retta r e un punto $P \notin r$, $\exists!\ r' \parallel r$ tale che $P \in r'$

Supponiamo ora che Π verifichi i precedenti assiomi. La domanda è se esista un campo $\mathbb{K}$ tale che Π è *isomorfo* a $\mathbb{K}^2$ (ossia esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano Π e di $\mathbb{K}^2$ che preserva rette e allineamenti). La risposta è **no**. Esistono infatti dei piani grafici dove non valgono Pappo e Desargues, ma se noi imponiamo come assiomi

5. Vale il teorema di Pappo
6. Vale il teorema di Desargues

Allora ogni piano grafico Π è isomorfo a un piano affine $\mathbb{K}^2$ su un qualche campo $\mathbb{K}$

4 Spazi Euclidei

Definizione 4.1

Fissiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Uno **spazio euclideo** è il dato $E = (A, V, (\cdot,\cdot))$ dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A è uno spazio affine su V e $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare (bilineare, simmetrica e definita positiva)

Supponiamo che il nostro spazio abbia dimensione finita, quindi $\dim V = n$. Fissiamo un riferimento, ossia un punto $O \in A$ e $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormale per V rispetto al prodotto scalare. Le coordinate $\phi_{O,\mathcal{B}} : A \to \mathbb{R}^n$ identificato $(\cdot,\cdot)$ al prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.

Denotiamo con $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$.

Osservazione. Poiché la restrizione di un prodotto scalare a un sottospazio è ancora un

prodotto scalare, i sottospazi affini di uno spazio euclideo E sono in modo naturale spazi euclidei.

Definizione 4.2

Dati due punti $P, Q \in E$ spazio euclideo $E = (A, V, (\cdot,\cdot))$ definiamo la **distanza** tra P e Q come $d(P,Q) := \|\overline{PQ}\| := \sqrt{(\overline{PQ}, \overline{PQ})} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Con questa distanza E diventa uno **spazio metrico**

Definizione 4.3: Angoli

Dati $O, P, Q \in E$ spazio euclideo, $P \neq O \neq Q$. Poniamo $\theta = \widehat{POQ}$ l'angolo tra i vettori $v = \overline{OP}$ e $w = \overline{OQ}$. Definiamo

$$\cos\theta = \frac{(v,w)}{\|v\|, \|w\|}$$

Definizione 4.4: Orientazione

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, con $\dim V = n < +\infty$. Due basi orientate $\{v_i\}$ e $\{w_i\}$ con $i = 1 \dots n$ si dicono **equivalenti per orientazione** se la matrice di cambiamento di base da $\{v_i\}$ a $\{w_i\}$ ha determinante positivo.

Osservazione. Semplice notare che essere equivalenti per orientazione è una relazione di equivalenza infatti

- $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ perché la matrice di cambio base è l'identità
- Se $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ allora $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$ perché il determinante della matrice inversa è l'inverso moltiplicativo, quindi ha lo stesso segno.
- se $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$ allora $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$ perché il determinante del prodotto di matrici è il prodotto dei determinanti

Inoltre Ci sono solo due classi di equivalenza rappresentate, presa una base a caso da $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{-v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Infine un'orientazione per V è la scelta di una classe di equivalenza e un'orientazione per (A, v) è la scelta di un'orientazione per V.

Proposizione 4.5. *Sia (E,V) uno spazio euclideo di $\dim V = 2$. Fissiamo $\{u, w\}$ un'orientazione per V. Pongo $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ e $w_1 = \frac{w}{\|w\|}$. Notiamo che esiste un'unica vettore $u_1 \in V$ t.c.*

- $\|u_1\| = 1$

– $(u_1, v_1) = 0$

– $\{v_1, u_1\}$ *sia equivalente per orientazione a* $\{u, w\}$

Fissiamo il riferimento $O, \{v_1, u_1\}$. A questo punto le coordinate di O sono $(0,0)$, $\phi(O+v_1) = (1,0)$, $\phi(O+u_1) = (0,1)$ e $\phi(O+w_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Definiamo $\widehat{POQ} := \theta$

Osservazione. Se cambio orientazione, l'angolo cambia segno

Proposizione 4.6. *Fissata un'orientazione su* E *spazio euclideo con* $\dim E = 2$, *posso misurare gli angoli*

Definizione 4.7: Isometria

Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'isometria di X è una bigezione $F : X \to X$ che preserva le distanze, ossia

$$\forall P, Q, \in X,\ d(P,Q) = d(F(P), F(Q))$$

Esempio 4.1. Supponiamo di avere uno spazio euclideo E. Le traslazioni sono isometrie, le rotazioni attorno a un punto fissato sono isometrie, le riflessioni rispetto a una retta sono isometrie

Proposizione 4.8. *Sia* E *uno spazio euclideo di* $\dim E = n < +\infty$, *allora*

1. *Le isometrie di* E *sono affinità di* E *(se* $F : E \to E$*) è un'isometria allora* $F \in \mathit{Aff}(E)$

2. $F \in \mathit{Aff}(E)$ *è un'isometria di* $E \iff$ *l'applicazione lineare associata* $f : V \to V$ *preserva il prodotto scalare, ossia* $\forall v \in V\ (f(v), f(v)) = (v, v)$ *(notare che basta verificare che preservi la norma).*

3. *Se* $A = \mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$, $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ *è un'isometria* $\iff F(x) = Mx + y$, *con* M *matrice ortogonale*

Definizione 4.9

Il gruppo delle isometrie di E spazio euclideo è denotato $G(E) < \mathrm{Aff}(E)$

Definizione 4.10

Se E è uno spazio euclideo e $S, S' \subseteq E$ sono sottoinsiemi **equivalenti in senso euclideo** se esiste un'isometria $F \in G(E)$ tale che $F(S) = S'$

4.1 Proiezioni e riflessioni

Proposizione 4.11. *Sia* (E, V) *uno spazio euclideo,* $B \subseteq E$ *un sottospazio con giacitura* $W \subseteq V$. *Allora* $\forall P \in E\, \exists! P_B \in B$ *tale che* $\overline{P_B P} = P - P_B \in W^\perp$. *Inoltre* $P = P_B \iff P \in B$

Dimostrazione. $V = W \otimes W^\perp$, dove $W^\perp = \{v \in V : (v, w) = 0 \forall v \in W\}$. Sia $B_P^\perp = P + W^\perp = \{Q \in E : Q = P + w, w \in W^\perp\}$. Poiché $B_P^\top$ ha giacitura $W^\perp$, B ha giacitura W segue che $B \cap B_P^\perp \neq \varnothing$. Ora per Grassman affine segue che $\dim(B \cap B_P^\perp) = 0$ quindi $B \cap B_P^\perp = \{B_P\}$. Notiamo che $P_B \in B$ e $\overline{P_B P} \in W^\perp$ $\square$

Definizione 4.12

Definiamo la proiezione su B come la mappa affine $F : E \to B$ tale che $F(P) = P_B$ per ogni $P \in E$

Ora vogliamo definire la riflessione che intuitivamente manda ogni punto al punto equidistante dal sottospazio e sulla stessa retta che contiene P e P_B, ma “dall’altro lato” del sottospazio

Definizione 4.13

Dato E spazio euclideo e $B \subseteq E$ un sottospazio, definiamo la riflessione rispetto a B come $r_B : E \to E$ nel modo seguente: poniamo $v = \overline{P_B P} = P - P_B$, $P = P_B + v$ e quindi $r_B(P) = P_B - v = P - 2v$

Osservazione. La riflessione rispetto a B verifica le seguenti:

1. $r_B^2 = \mathrm{Id}$
2. $r_B(P) = P \iff P \in B$ ossia i punti fissi di r_B sono esattamente i punti del sottospazio B

Dimostrazione. Sia V lo spazio vettoriale associato a E. Abbiamo il prodotto scalare $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ e sia $W \subseteq V$ la gicitura di B. $V = W \otimes W^\perp$. Allora, posta $f : V \to V$ l’applicazione lineare associata a r_B, $f(w) = w$, $\forall w \in W$ e $f(w') = -w'$, $\forall w' \in W^\perp$. A questo punto

$$(f(v), f(v)) = (f(w+w'), f(w+w')) = (w-w', w-w') = (w,w) + (w',w') = (v,v)$$

□

Proposizione 4.14. *La riflessione $r_B : E \to E$ è l’unica isometria che verifica le precedenti proprietà, ossia tale che $r_B^2 = Id$ e $Fix(r_B) = B$*

Proposizione 4.15. *Se $f : E \to E$, con $\dim E = n < +\infty$ è tale che $f^2 = Id$ allora f ha necessariamente almeno un punto fisso, quindi è una riflessione rispetto al sottospazio $B = Fix(f)$*

Dimostrazione. Fisssiamo un riferimento dato da $O \in E$ e una base $\mathcal{B}$ di V. Identifichiamo E con $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, (\cdot,\cdot))$ e $F(x) = Ax + b$. Quindi $\mathrm{Id} = F^2 = (A,b) \cdot (A,b) = (A^2, Ab+b) = (I, 0)$. Da $A^2 = \mathrm{Id}$ otteniamo che $\mathbb{R}^n = E(A,1) \otimes E(A,-1)$. Da $Ab = -b$ otteniamo $Ax_0 - x_0 = -b$, con $x_0 = \frac{b}{2}$, ma dunque $Ax_0 + b = x_0$, ma quindi x_0 è un punto fisso. Poiché F è l’identità su $E(A,1)$ e $-I$ su $E(A,-1)$, quindi $\mathrm{Fix}(F) =: B = x_0 + E(A,1)$ □

Definizione 4.16

Sia E uno spazio euclideo su V, con $\dim E = n < +\infty$. Un **iperpiano** è un sottospazio $H \subseteq E$ con $\dim H = n - 1$.

Sia W la gicitura di H iperpiano, $W \subseteq V$ è sottospazio e $\dim W = n-1$. Sia $W^\perp = \mathrm{span}\{u\}$. $W = \{x \in V : (x,u) = 0\}$. Fissiamo $P_0 \in H$, allora $H = P_0 + W$.

Fissiamo un sistema di riferimento, in modo come prima di identificare E a $\mathbb{E}^n$, quindi $X(P_0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$, allora

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (u, x) = (u, v_0)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (u, x - v_0) = 0\}$$

Infatti $x - v_0 = \lambda u + w$, con $w \in W$ e noto che $x - (v_0 + w) = \lambda u \in W^\perp$. Inoltre $v_0 + w \in H$ perché $v_0 \in H, w \in W$. Segue che $y = v_0 + w$ è la proiezione id x su H.

Ora $x \in H \iff x = P_H(x) \iff \lambda = 0$, in tal caso $x = v_0 + w$ e $(u, x) = (u, v_0) + (u, w) = (u, v_0)$

Concludiamo che l'equazione di H ha la forma $(u, x) = \sum_{i=1}^n u_i x_i = c = (u, v_0)$

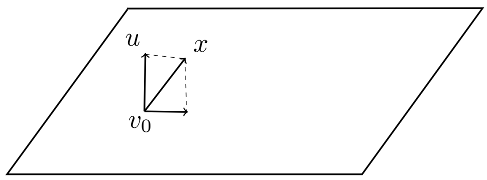

Figura 3: disegno

Inoltre ora $r_H(x) = x - 2(x - y) = x - 2\lambda u$. $(u, x - v_0) = (u, \lambda u + w) = \lambda(u, u) + (u, w)$ da cui ottengo che

$$\lambda = \frac{(u, x - v_0)}{(u, u)} \implies r_H(x) = x - 2\frac{(u, x - v_0)}{(u, u)} u$$

Teorema 4.17: Cartan-Dieudonné

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ tale che $\dim V = n$. Sia $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare. Sia $f : V \to V$ ortogonale (quindi isometria) Sia $d = \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_V))$ sia $k = n - d$.

Allora f si scrive come composizione di k riflessioni rispetto a iperpiani di V.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su k.

- Per $k = 0$ $f = \mathrm{Id}_V$ poiché $d = n$, quindi f è composizione di 0 riflessioni
- Supponiamo che $k > 0$, quindi $d < n$, ossia $\exists v \in V : f(v) = v' \neq v$. Poniamo $H = (v - f(v))^\perp$, quindi $\dim H = n - 1$ ($H < V$ è iperpiano). Sia r_H la riflessione rispetto ad H. Sia ora $f' = r_H \circ f$. Notiamo che $f'(v) = v$. Infatti $f(v) = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(f(v) - v)$ dove $f(v) - v \in H^\perp$ e $v + f(v) \in H$, perché $(v + f(v), v - f(v)) = (v, v) - (f(v), f(v)) = 0$. Quindi $r_H(f(v)) = \frac{1}{2}(v + f(v) + v - f(v)) = v$

Con questo abbiamo mostrato che $\exists v \in V : v \in \text{Fix}(f'), v \notin \text{Fix}(f)$

Ora dobbiamo mostrare che $\text{Ker}(F - \text{Id}_V) = \text{Fix}(f) \subseteq H$. Se w è t.c. $f(w) = w$, abbiamo che $(w, v - f(v)) = (w, v) - (w, f(v)) = (w, v) - (w, v) = 0$ quindi $w \in H$.

Otteniamo quindi che $\text{Ker}(f - \text{Id}_V) < Ker(f - \text{Id}_V) + < v >< \text{Ker}(f' - \text{Id}_V)$. Inoltre se prendo $\text{Ker}(f' - \text{Id}_V) \cap H \subseteq \text{Ker}(f - \text{Id}_V)$

Infine $\dim(H + \text{Ker}(f' - \text{Id}_V)) - \dim H + \dim(\ker(f' - \text{Id}_V)) - \dim(H \cap \ker(f' - \text{Id}_V))$ da cui $n = n - 1 + \dim(\ker(f' - \text{Id}_V)) - d$ da cui $\dim \text{Fix}(f') = d + 1$. Per ipotesi induttiva f' si scrive come composizione di $k - 1$ riflessioni in iperpiani, e poiché $f = r_H \circ f'$, f si scrive come composizione di k riflessioni in iperpiani.

□

Teorema 4.18

Sia E uno spazio euclideo di dimensione n finito e sia $F : E \to E$ un'isometria. Allora F si scrive come composizione di al più $n+1$ riflessioni in iperpiani.

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

1. F ha punti fissi. Sia allora $P \in E$ t.c. $F(P) = P$ quindi $F(Q) = F(P) + f(PQ) = P + f(PQ)$. Per C.D. f si scrive come composizione di al più n composizioni in iperpiani. Segue che F si scrive come composizione di al più n riflessioni in iperpiani passanti per il punto P

2. Se F non ha punti fissi, sia allora $P \in E, Q := F(P) \neq P$. Allora chiamo M il punto medio tra P e Q, ossia $M := \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$. Successivamente preso $H = M + (PQ)^{\perp}$, $F' = r_H \circ F$ ha un punto fisso P, poiché $F'(P) = r_H(F(P)) = r_H(Q) = P$ per cui si può applicare il primo caso, in tutto ottenendo al più $n + 1$ riflessioni in iperpiani.

□

5 Coniche

Consideriamo un polinomio di grado 2 nelle variabili x_1, x_2. Allora ad esempio

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c$$

Gli associo ora due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^3(\mathbb{K}) \; ; \; B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^2(\mathbb{K})$$

E supponiamo di avere sempre $B \neq \mathbf{0}$ Abbiamo ora quindi la **parte quadratica** $q(\mathbf{x}) = q(x_1, x_2) = {}^{\text{t}}\mathbf{x}B\mathbf{x}$ e **parte lineare** $L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2) = 2b_1x_1 + 2b_2x_2$. A questo punto quindi otteniamo

$$Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2) = q(\mathbf{x}) + L(\mathbf{x}) = {}^{\text{t}}\mathbf{x}B\mathbf{x} + L(\mathbf{x}) + c = {}^{\text{t}}vAv$$

dove $v = (x_1, x_2, 1)$. E posto $w = (x_1, x_2, z)$ possiamo considerare la forma quadratica in 3 variabili

$$\widetilde{Q}(w) = {}^{\text{t}}wAw = a_{11}x^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1z + 2b_2x_2z + cz^2$$

Ora quindi abbiamo che $Q(x_1, x_2) = \widetilde{Q}(x_1, x_2, 1)$

Definizione 5.1

Vogliamo studiare il luogo degli zeri $\{Q(\mathbf{x}) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^2$. Tale luogo viene chiamato **conica**

Osservazione. Se $\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $Q' = \lambda Q$ allora Q e Q' hanno lo stesso luogo di zeri e definiscono la stessa conica. In particolare Q e $-Q$ definiscono la stessa conica.

Definizione 5.2

Q è una conica degenere se $\det A = 0$.

Cerchiamo di iniziare la caratterizzazione delle conice degeneri. Supponiamo quindi Q con $\det A = 0$. Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Poiché $B \neq 0$ allora $1 \leq \mathrm{rk}A \leq 2$.

Per Sylvester $\exists M \in GL_3(\mathbb{K})$ tale che ${}^{\mathrm{t}}MAM = D$ diagonale. D ha almeno un autovalore nullo e almeno un autovalore non nullo, poiché Q e $-Q$ definiscono la stessa conica possiamo assumere che abbia un autovalore positivo.

Possiamo scrivere $\widetilde{Q} = aL_1(x_1, x_2, z)^2 + bL_2(x_1, x_2, z)^2$, dove L_1 e L_2 sono lineari e $a > 0$. Ora studiamo il luogo degli zeri di $\widetilde{Q}$.

- Supponiamo $a > 0, b > 0$. Allora $\widetilde{Q}(x_1, x_2, z) = 0)$ se e solo se entrambe le equazioni sono 0, ossia
$$L_1(x_1, x_2, z) = 0$$
$$L_2(x_1, x_2, z) = 0$$
Quindi Q è intersezione di tre piani affini (anche $z = 1$), quindi abbiamo le seguenti possibilità (notare che gli autospazi relativi ad a e b devono essere linarmente indipendenti)
  - $Q = \varnothing$ se $L_1(x_1, x_2, z)$ o $L_2(x_1, x_2, z)$ è dellta forma $\lambda z = 0$, ad esempio $x^2 + 1 = 0$; oppure se $L_1 = 0$ e $L_2 = 0$ definiscono due rette parallele in $\mathbb{K}^2$ quando intersecate con $z = 1$.
  - $Q = \{P\}$ se l'intersezione tra $L_1 = 0, L_2 = 0, z = 1$ è un punto. Ad esempio $x^2 + y^2 = 0$.
- $a > 0, b = 0$. Allora $Q = \{L_1(x_1, x_2, 1) = 0\}$ per cui
  - $Q = \varnothing$ se $L_1 = \lambda z$ oppure
  - $Q =$ retta altrimenti
- $a > 0, b < 0$ allora
$$0 = aL_1^2 + bL_2^2 = \left(\sqrt{a}L_1 + \sqrt{-b}L_2\right)\left(\sqrt{a}L_1 - \sqrt{-b}L_2\right) = M_1M_2$$
Che però è il prodotto di due espressioni lineari M_1 e M_2 di x_1, x_2, z. Quindi poiché il luogo degli zeri è in questo caso l'unione dei luoghi degli zeri di M_1 e M_2 risultano due possibilità:
  - Q è una retta se M_1 o M_2 sono della forma $\lambda z = 0$.
  - Q è unione di due rette altrimenti. Ad esempio $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0 \iff x = y \vee x = -y$ quindi è le due diagonali.

Concludiamo che in ogni caso le coniche degeneri sono contenute nell'unione di due rette.

5.1 Caratterizzazione affine coniche non degeneri

Procediamo ora studiando le coniche non degeneri, qui differenziamo tra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Iniziamo con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e ovviamente supponiamo $\det A \neq 0$

Lemma 5.3. *Sia $\mathcal{Q} = \{(x_1, x_2) : Q(x_1, x_2) = 0\}$ una conica non degenere ($\det A \neq 0$). Se la matrice A è definita positiva o negativa allora $Q = \varnothing$*

Dimostrazione. $Q(x_1, x_2) = \widetilde{Q}(x_1, x_2, 1)$ ma poiché $\widetilde{Q}$ è definita, si annulla solo nell'origine, per cui $\widetilde{Q}(x_1, x_2, 1)$ è sempre diverso da 0 $\square$

Viene comunque chiamata *non degenere senza punti reali* poiché in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è una "normale" conica non degenere.

Ora supponiamo (a meno di moltiplicare per -1) che A abbia segnatura (2, 1). Sia ora $s = (p, q)$ la segnatura di B.

1. Se $s = (2, 0)$, quindi $\det B > 0$, allora $\mathcal{Q}$ è equivalente in senso affine a $x^2 + y^2 - 1 = 0$, ossia è un ellisse.
2. Se $s = (1, 1)$, quindi $\det B < 0$, allora $\mathcal{Q}$ è equivalente in senso affine a $x^2 - y^2 - 1 = 0$, ossia è un'iperbole.
3. Se $s = (1, 0)$, quindi $\det B = 0$, allora $\mathcal{Q}$ è equivalente in senso affine a $x^2 + 2y = 0$, ossia è una parabola

Dimostrazione. Supponiamo di essere nel caso 1., quindi $s = (2, 0)$. Per il teorema di Sylvester $\exists M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale che ${}^{t}MBM = I$. Allora pongo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (e $z = z'$). Quindi $Q(x, y) = {}^{t}\mathbf{x}B\mathbf{x} + L(\mathbf{x}) + c = {}^{t}\mathbf{x}' \, {}^{t}MBM\mathbf{x}' + L(M\mathbf{x}') + c = x'^2 + y'^2 + b_1 x' + b_2 y' + c$. Quindi tramite un cambiamento di coordinate affini abbiamo mostrato che ogni conica del tipo $s = (2, 0)$ è affinemente equivalente a $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c$. Adesso pongo $x' = x_1 + b_1$ e $y' = x_2 + b_2$ compiendo una trasformazione affine (traslazione). Quindi ottengo che $Q(x, y) = x_1^2 - \cancel{2b_1x_1} + b_1^2 + x_2^2 - \cancel{2b_2x_2} + b_2^2 + \cancel{2b_1x_1} + \cancel{2b_2x_2} + c = x_1^2 + x_2^2 - r^2$, dove r^2 è la costante risultante (e assumo $r = \sqrt{r^2} > 0$). Inoltre so che $r^2 > 0$ perché il polinomio ottenuto $Q(x_1, x_2)$ deve avere matrice A con segnatura $(2, 1)$ e sappiamo che la segnatura di B è (2, 0). Infine pongo $x_1 = rx_1'$ e $x_2 = rx_2'$ trovando quindi che il luogo degli zeri è definito da $\mathcal{Q} = \{(x_1', x_2') : \cancel{r^2}(x_1'^2 + x_2'^2 - 1) = 0\}$

In modo simile si procede nel caso $s = (1, 1)$ con la sola eccezione di trovare un segno meno, e alla fine ottenere quindi che la conica è affinemente equivalente a $\mathcal{Q} = \{(x, y) : x^2 - y^2 - 1 = 0\}$ $\square$